TEORIA WSPÓŁBIEŻNOŚCI
LABORATORIUM 7

Algorytm współbieżnej eliminacji Gaussa-Jordana

Bartosz Konieczny

Wydział Informatyki
Grupa 5
Wtorek 8:00

data oddania:
15.12.2025

Spis treści

Ćwiczenie

W części teoretycznej proszę:
1. zlokalizować niepodzielne czynności wykonywane przez algorytm, nazwać je oraz zbudować alfabet w sensie teorii śladów,
2. skonstruować relację zależności dla alfabetu, opisującego algorytm eliminacji Gaussa-Jordana,
3. przedstawić algorytm eliminacji Gaussa-Jordana w postaci ciągu symboli alfabetu,
4. wygenerować graf zależności Dekerta,
5. przekształcić ciąg symboli opisujący algorytm do postaci normalnej Foaty.

Proszę zaprojektować i zaimplementować współbieżny algorytm eliminacji Gaussa-Jordana. W szczególności proszę zwrócić uwagę na implementację jak najlepiej odwzorowującą graf zależności lub postać normalną Foaty.

Przedstawienie problemu

2.1 Opis algorytmu

Celem algorytmu Gaussa jest doprowadzenie macierzy wejściowej (M) do postaci macierzy trójkątnej, dzięki czemu łatwo obliczyć rozwiązanie układu równań. Algorytm Gaussa-Jordana ma za zadanie doprowadzić macierz M do postaci macierzy jednostkowej.

2.2 Operacje potrzebne do realizacji algorytmu

Do realizacji algorytmu musimy wykorzystać następujące niepodzielne zadania obliczeniowe:

- A_i - znalezienie mnożnika dla elementu $M_{i,i}$, do normalizacji wiersza i
  $m_i = \frac{1}{M_{i,i}}$
- $B_{i,j}$ - pomnożenie j-tego elementu wiersza i przez mnożnik do normalizacji tego wiersza
  $M_{i,j} = M_{i,j} \cdot m_i$
- $C_{i,k}$ - znalezienie mnożnika dla wiersza i, do odejmowania go od wiersza k
  $n_{i,k} = \frac{M_{k,i}}{M_{i,i}}$
- $D_{i,j,k}$ - pomnożenie j-tego elementu wiersza i przez mnożnik dla wiersza k
  $v_{i,j,k} = M_{i,j} \cdot n_{i,k}$
- $E_{i,j,k}$ - odjęcie j-tego elementu wiersza k od wiersza i
  $M_{i,j} = M_{i,j} - v_{k,j,i}$.

2.3 Przykład

Aby lepiej zobrazować zasadę działania algorytmu rozpatrzmy przykład.

Dany jest układ równań (1)

$$\begin{cases} 2x_0 + 1x_1 + 3x_2 = 6 \\ 4x_0 + 3x_1 + 8x_2 = 15 \\ 6x_0 + 5x_1 + 16x_2 = 27 \end{cases} \tag{1}$$

Możemy zapisać go w postaci macierzowej (2)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 5 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 27 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Dla uproszczenia jako (3)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 8 & 15 \\ 6 & 5 & 16 & 27 \end{array}\right] \tag{3}$$

Normalizujemy zerowy wiersz, tak by jego zerowy element był równy 1. Dzieląc zerowy wiersz przez $M_{0,0} = 2$ otrzymujemy (4)

Operacje: $A_0, B_{0,0}, B_{0,1}, B_{0,2}, B_{0,3}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 4 & 3 & 8 & 15 \\ 6 & 5 & 16 & 27 \end{array}\right] \tag{4}$$

Następnie z wiersza 1 i 2 musimy wyeliminować elementy z zerowej kolumny. W tym celu odejmiemy od nich wiersz zerowy pomnożony odpowiednio przez 4 i 6 otrzymując (5)

Operacje: $C_{0,1}, D_{0,0,1}, D_{0,1,1}, D_{0,2,1}, D_{0,3,1}, E_{1,0,0}, E_{1,1,0}, E_{1,2,0}, E_{1,3,0},$
$C_{0,2}, D_{0,0,2}, D_{0,1,2}, D_{0,2,2}, D_{0,3,2}, E_{2,0,0}, E_{2,1,0}, E_{2,2,0}, E_{2,3,0}.$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \end{array}\right] \tag{5}$$

Kolejny krok będzie identyczny jak pierwszy krok, jednak tym razem dla wiersza pierwszego. W związku z tym wykonujemy normalizację tego wiersza - dzielenie przez $M_{1,1} = 1$, w związku z tym nie będę prezentował tego kroku. Dalej eliminujemy $M_{2,1}$ - poprzez odjęcie podwojonego wiersza pierwszego oraz $M_{0,1}$ - poprzez odjęcie wiersza pierwszego pomnożonego razy $\frac{1}{2}$, jest to eliminacja pierwszej kolumny (6)

Operacje: $A_1, B_{1,1}, B_{1,2}, B_{1,3},$
$C_{1,0}, D_{1,1,0}, D_{1,2,0}, D_{1,3,0}, E_{0,1,1}, E_{0,2,1}, E_{0,3,1},$
$C_{1,2}, D_{1,1,2}, D_{1,2,2}, D_{1,3,2}, E_{2,1,1}, E_{2,2,1}, E_{2,3,1}.$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \tag{6}$$

Następnie normalizujemy wiersz 2 - element $M_{2,2}$ musi być równy 1, więc dzielimy ten wiersz przez 3 otrzymując (7)

Operacje: $A_2, B_{2,2}, B_{2,3}.$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{7}$$

Ostatnim już etapem będzie eliminacja drugiej kolumny - zerujemy elementy $M_{1,2}$ oraz $M_{0,2}$ poprzez odjęcie odpowiednio podwojonego wiersza 2 oraz wiersza 2 pomnożonego przez $\frac{1}{2}$.

Operacje: $C_{2,0}, D_{2,2,0}, D_{2,3,0}, E_{0,2,2}, E_{0,3,2},$
$C_{2,1}, D_{2,2,1}, D_{2,3,1}, E_{1,2,2}, E_{1,3,2}.$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{8}$$

W związku z tym możemy wyznaczyć nasze rozwiązania układu równań (9)

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \tag{9}$$

W związku z tym nasz alfabet Σ to

$$\Sigma = \{ A_0, B_{0,0}, B_{0,1}, B_{0,2}, B_{0,3}, C_{0,1}, D_{0,0,1}, D_{0,1,1}, D_{0,2,1}, D_{0,3,1}, E_{1,0,0}, E_{1,1,0}, E_{1,2,0}, E_{1,3,0}, C_{0,2}, D_{0,0,2}, D_{0,1,2}, D_{0,2,2}, D_{0,3,2}, E_{2,0,0}, E_{2,1,0}, E_{2,2,0}, E_{2,3,0}, A_1, B_{1,1}, B_{1,2}, B_{1,3}, C_{1,0}, D_{1,1,0}, D_{1,2,0}, D_{1,3,0}, E_{0,1,1}, E_{0,2,1}, E_{0,3,1}, C_{1,2}, D_{1,1,2}, D_{1,2,2}, D_{1,3,2}, E_{2,1,1}, E_{2,2,1}, E_{2,3,1}, A_2, B_{2,2}, B_{2,3}, C_{2,0}, D_{2,2,0}, D_{2,3,0}, E_{0,3,2}, E_{0,2,2}, C_{2,1}, D_{2,2,1}, D_{2,3,1}, E_{1,3,2}, E_{1,2,2} \}$$

Relacja zależności w tym przypadku zaprezentowana jest poniżej

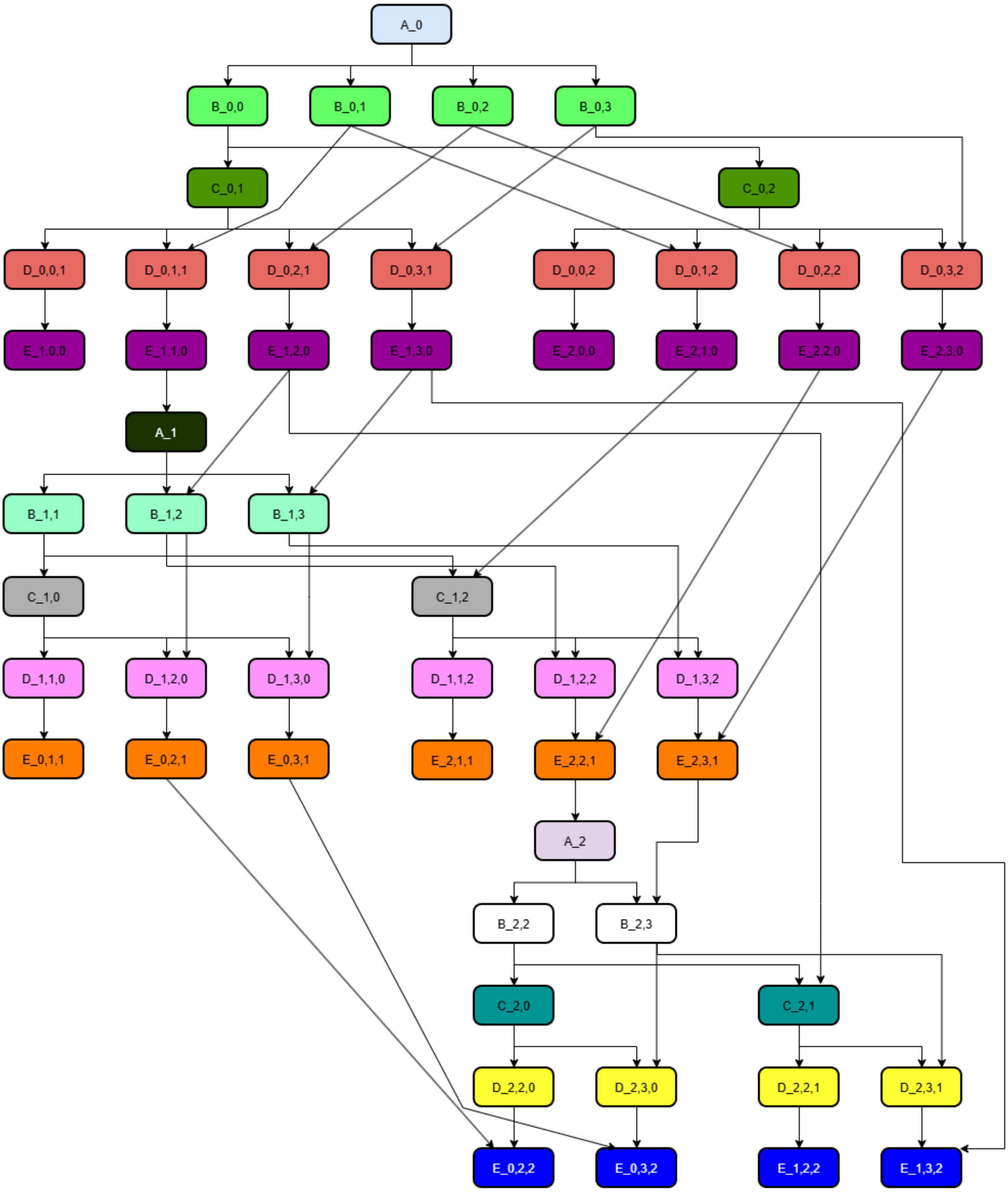
$$\begin{aligned} D = \mathrm{sym}\{\{ & (A_0, B_{0,0}), (A_0, B_{0,1}), (A_0, B_{0,2}), (A_0, B_{0,3}), \\ & (B_{0,0}, C_{0,1}), (B_{0,0}, C_{0,2}), \\ & (B_{0,1}, D_{0,1,1}), (B_{0,1}, D_{0,1,2}), (B_{0,2}, D_{0,2,1}), (B_{0,2}, D_{0,2,2}), (B_{0,3}, D_{0,3,1}), (B_{0,3}, D_{0,3,2}), \\ & (C_{0,1}, D_{0,0,1}), (C_{0,1}, D_{0,1,1}), (C_{0,1}, D_{0,2,1}), (C_{0,1}, D_{0,3,1}), \\ & (D_{0,0,1}, E_{1,0,0}), (D_{0,1,1}, E_{1,1,0}), (D_{0,2,1}, E_{1,2,0}), (D_{0,3,1}, E_{1,3,0}), \\ & (C_{0,2}, D_{0,0,2}), (C_{0,2}, D_{0,1,2}), (C_{0,2}, D_{0,2,2}), (C_{0,2}, D_{0,3,2}), \\ & (D_{0,0,2}, E_{2,0,0}), (D_{0,1,2}, E_{2,1,0}), (D_{0,2,2}, E_{2,2,0}), (D_{0,3,2}, E_{2,3,0}), \\ & (A_1, B_{1,1}), (A_1, B_{1,2}), (A_1, B_{1,3}), \\ & (E_{1,2,0}, B_{1,2}), (E_{1,3,0}, B_{1,3}), \\ & (B_{1,1}, C_{1,0}), (B_{1,1}, C_{1,2}), \\ & (E_{2,1,0}, C_{1,2}), (E_{2,2,0}, E_{2,2,1}), (E_{2,3,0}, E_{2,3,1}), \\ & (C_{1,0}, D_{1,1,0}), (C_{1,0}, D_{1,2,0}), (C_{1,0}, D_{1,3,0}), \\ & (B_{1,2}, D_{1,2,0}), (B_{1,3}, D_{1,3,0}) \\ & (D_{1,1,0}, E_{0,1,1}), (D_{1,2,0}, E_{0,2,1}), (D_{1,3,0}, E_{0,3,1}), \\ & (C_{1,2}, D_{1,1,2}), (C_{1,2}, D_{1,2,2}), (C_{1,2}, D_{1,3,2}), \\ & (B_{1,2}, D_{1,2,2}), (B_{1,3}, D_{1,3,2}) \\ & (D_{1,1,2}, E_{2,1,1}), (D_{1,2,2}, E_{2,2,1}), (D_{1,3,2}, E_{2,3,1}), \\ & (A_2, B_{2,2}), (A_2, B_{2,3}), \\ & (E_{2,3,1}, B_{2,3}), \\ & (B_{2,2}, C_{2,0}), (B_{2,2}, C_{2,1}), \\ & (B_{2,3}, D_{2,3,0}), (B_{2,3}, D_{2,3,1}), \\ & (E_{0,2,1}, E_{0,2,2}), (E_{0,3,1}, E_{0,3,2}), \\ & (C_{2,0}, D_{2,2,0}), (D_{2,2,0}, E_{0,2,2}), (C_{2,0}, D_{2,3,0}), (D_{2,3,0}, E_{0,3,2}), \\ & (C_{2,1}, D_{2,2,1}), (D_{2,2,1}, E_{1,2,2}), (C_{2,1}, D_{2,3,1}), (D_{2,3,1}, E_{1,3,2}) \\ \}^+\} & \cup I_\Sigma \end{aligned}$$

$$t = [w]_{\equiv_I^+} = [\langle A_0, B_{0,0}, B_{0,1}, B_{0,2}, B_{0,3}, C_{0,1}, D_{0,0,1}, D_{0,1,1}, D_{0,2,1}, D_{0,3,1}, E_{1,0,0}, E_{1,1,0}, E_{1,2,0}, E_{1,3,0}, C_{0,2}, D_{0,0,2}, D_{0,1,2}, D_{0,2,2}, D_{0,3,2}, E_{2,0,0}, E_{2,1,0}, E_{2,2,0}, E_{2,3,0}, A_1, B_{1,1}, B_{1,2}, B_{1,3}, C_{1,0}, D_{1,1,0}, D_{1,2,0}, D_{1,3,0}, E_{0,1,1}, E_{0,2,1}, E_{0,3,1}, C_{1,2}, D_{1,1,2}, D_{1,2,2}, D_{1,3,2}, E_{2,1,1}, E_{2,2,1}, E_{2,3,1}, A_2, B_{2,2}, B_{2,3}, C_{2,0}, D_{2,2,0}, D_{2,3,0}, E_{0,3,2}, E_{0,2,2}, C_{2,1}, D_{2,2,1}, D_{2,3,1}, E_{1,3,2}, E_{1,2,2}\rangle]_{\equiv_I^+}$$

Postać Normalna Foaty

$$\begin{aligned} t = [\langle A \rangle]]_{\equiv_I^+} &= [\{A_0\}]_{\equiv_I^+} \\ &\frown [\{B_{0,0}, B_{0,1}, B_{0,2}, B_{0,3}\}]_{\equiv_I^+} \\ &\frown [\{C_{0,1}, C_{0,2}\}]_{\equiv_I^+} \\ &\frown [\{D_{0,0,1}, D_{0,1,1}, D_{0,2,1}, D_{0,3,1}, D_{0,0,2}, D_{0,1,2}, D_{0,2,2}, D_{0,3,2}\}]_{\equiv_I^+} \\ &\frown [\{E_{1,0,0}, E_{1,1,0}, E_{1,2,0}, E_{1,3,0}, E_{2,0,0}, E_{2,1,0}, E_{2,2,0}, E_{2,3,0}\}]_{\equiv_I^+} \\ &\frown [\{A_1\}]_{\equiv_I^+} \\ &\frown [\{B_{1,1}, B_{1,2}, B_{1,3}\}]_{\equiv_I^+} \\ &\frown [\{C_{1,0}, C_{1,2}\}]_{\equiv_I^+} \\ &\frown [\{D_{1,1,0}, D_{1,2,0}, D_{1,3,0}, D_{1,1,2}, D_{1,2,2}, D_{1,3,2}\}]_{\equiv_I^+} \\ &\frown [\{E_{0,1,1}, E_{0,2,1}, E_{0,3,1}, E_{2,1,1}, E_{2,2,1}, E_{2,3,1}\}]_{\equiv_I^+} \\ &\frown [\{A_2\}]_{\equiv_I^+} \\ &\frown [\{B_{2,2}, B_{2,3}\}]_{\equiv_I^+} \\ &\frown [\{C_{2,0}, C_{2,1}\}]_{\equiv_I^+} \\ &\frown [\{D_{2,2,0}, D_{2,3,0}, D_{2,2,1}, D_{2,3,1}\}]_{\equiv_I^+} \\ &\frown [\{E_{0,2,2}, E_{0,3,2}, E_{1,2,2}, E_{1,3,2}\}]_{\equiv_I^+} = \\ &[F_1]_{\equiv_I^+} \frown [F_2]_{\equiv_I^+} \frown [F_3]_{\equiv_I^+} \frown [F_4]_{\equiv_I^+} \frown [F_5]_{\equiv_I^+} \frown [F_6]_{\equiv_I^+} \frown [F_7]_{\equiv_I^+} \frown [F_8]_{\equiv_I^+} \frown [F_9]_{\equiv_I^+} \frown [F_{10}]_{\equiv_I^+} \\ &\frown [F_{11}]_{\equiv_I^+} \frown [F_{12}]_{\equiv_I^+} \frown [F_{13}]_{\equiv_I^+} \frown [F_{14}]_{\equiv_I^+} \frown [F_{15}]_{\equiv_I^+} \end{aligned}$$

Na podstawie powyższych wyprowadzeń można narysować i pokolorować graf Diekerta zaprezentowany na rysunku poniżej (Rys. 1).



Rys. 1: Graf Diekerta wraz z kolorowaniem klas foaty dla przykładu macierzy 3×3.

Algorytm Gaussa-Jordana

Dane wejściowe w postaci kwadratowej macierzy M o wymiarach $n \times n$ oraz wektora wynikowego y poniżej (10)

$$\begin{bmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} & \cdots & M_{0,n-1} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,n-1} \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n-1,1} & M_{n-1,2} & M_{n-1,3} & \cdots & M_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Możemy przedstawić w postaci (11)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} & \cdots & M_{0,n-1} & y_0 \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,n-1} & y_1 \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,n-1} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{n-1,1} & M_{n-1,2} & M_{n-1,3} & \cdots & M_{n-1,n-1} & y_{n-1} \end{array}\right] \tag{11}$$

Normalizujemy wiersz 0 wykonując operacje:

- znalezieni mnożnika - A_0
- pomnożenie elementów wiersza - $B_{0,0}, B_{0,1}, B_{0,2}, ..., B_{0,n}$

I otrzymujemy (12)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & M_{(0,1)_0} & M_{(0,2)_0} & \cdots & M_{(0,n-1)_0} & y_{0_0} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,n-1} & y_1 \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,n-1} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{n-1,1} & M_{n-1,2} & M_{n-1,3} & \cdots & M_{n-1,n-1} & y_{n-1} \end{array}\right] \tag{12}$$

Przystępujemy do wyzerowania kolumny 0. Wykonując operacje dla wiersza 1:

- znalezienie mnożnika dla wiersza 0 w przypadku wiersza 1 - $C_{0,1}$
- pomnożenie elementów wiersza 0 w przypadku wiersza 1 - $D_{0,0,1}, D_{0,1,1}, ..., D_{0,n,1}$
- odjęcie elementów wiersza 0 od wiersza 1 - $E_{1,0,0}, E_{1,1,0}, ..., E_{1,n,0}$

Podobne operacje w przypadku wiersza 2:

- znalezienie mnożnika dla wiersza 0 w przypadku wiersza 2 - $C_{0,2}$
- pomnożenie elementów wiersza 0 w przypadku wiersza 2 - $D_{0,0,2}, D_{0,1,2}, ..., D_{0,n,2}$
- odjęcie elementów wiersza 0 od wiersza 2 - $E_{2,0,0}, E_{2,1,0}, ..., E_{2,n,0}$

Oraz dla pozostałych wierszy, więc w tym kroku wykonamy operacje:

- $\forall_{i\in\{1,2,...,n-1\}} C_{0,i}$
- $\forall_{i\in\{0,1,...,n\}} \forall_{j\in\{1,2,...,n-1\}} D_{0,i,j}$
- $\forall_{i\in\{0,1,...,n\}} \forall_{j\in\{1,2,...,n-1\}} E_{j,i,0}$

W ten sposób otrzymamy (13)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & M_{(0,1)_0} & M_{(0,2)_0} & \cdots & M_{(0,n-1)_0} & y_{0_0} \\ 0 & M_{(1,1)_0} & M_{(1,2)_0} & \cdots & M_{(1,n-1)_0} & y_{1_0} \\ 0 & M_{(2,1)_0} & M_{(2,2)_0} & \cdots & M_{(2,n-1)_0} & y_{2_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & M_{(n-1,2)_0} & M_{(n-1,3)_0} & \cdots & M_{(n-1,n-1)_0} & y_{(n-1)_0} \end{array}\right] \tag{13}$$

Normalizujemy wiersz 1 wykonując operacje:

- znalezieni mnożnika - A_1
- pomnożenie elementów wiersza - $B_{1,1}, B_{1,2}, ..., B_{1,n}$

I otrzymujemy (14)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & M_{(0,1)_0} & M_{(0,2)_0} & \cdots & M_{(0,n-1)_0} & y_{0_0} \\ 0 & 1 & M_{(1,2)_1} & \cdots & M_{(1,n-1)_1} & y_{1_1} \\ 0 & M_{(2,1)_0} & M_{(2,2)_0} & \cdots & M_{(2,n-1)_0} & y_{2_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & M_{(n-1,2)_0} & M_{(n-1,3)_0} & \cdots & M_{(n-1,n-1)_0} & y_{(n-1)_0} \end{array}\right] \tag{14}$$

Przystępujemy do wyzerowania kolumny 1, więc w tym kroku wykonamy operacje:

- $\forall_{i\in\{0\}\cup\{2,...,n-1\}} C_{1,i}$
- $\forall_{i\in\{1,...,n\}} \forall_{j\in\{0\}\cup\{2,...,n-1\}} D_{1,i,j}$
- $\forall_{i\in\{1,...,n\}} \forall_{j\in\{0\}\cup\{2,...,n-1\}} E_{j,i,1}$

W wyniku operacji otrzymamy (15)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & M_{(0,2)_1} & \cdots & M_{(0,n-1)_1} & y_{0_1} \\ 0 & 1 & M_{(1,2)_1} & \cdots & M_{(1,n-1)_1} & y_{1_1} \\ 0 & 0 & M_{(2,2)_1} & \cdots & M_{(2,n-1)_1} & y_{2_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & M_{(n-1,3)_1} & \cdots & M_{(n-1,n-1)_1} & y_{(n-1)_1} \end{array}\right] \tag{15}$$

W ten sam sposób postępujemy dla kolejnych wierszy (od 2 do $n-1$). Wykonamy operacje:

- $\forall_{k\in\{2,...,n-1\}} A_k$
- $\forall_{k\in\{2,...,n-1\}} \forall_{i\in\{k,...,n\}} B_{k,i}$
- $\forall_{k\in\{2,...,n-1\}} \forall_{i\in\{0,...,k-1\}\cup\{k+1,...,n-1\}} C_{k,i}$
- $\forall_{k\in\{2,...,n-1\}} \forall_{i\in\{k,...,n\}} \forall_{j\in\{0,...,k-1\}\cup\{k+1,...,n-1\}} D_{k,i,j}$
- $\forall_{k\in\{2,...,n-1\}} \forall_{i\in\{k,...,n\}} \forall_{j\in\{0,...,k-1\}\cup\{k+1,...,n-1\}} E_{j,i,k}$

Ostatecznie otrzymamy macierz jednostkową i wektor będący wynikiem działań naszego algorytmu (16)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y_{0_{n-1}} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_{1_{n-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & y_{2_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & y_{(n-1)_{n-1}} \end{array}\right] \tag{16}$$

Alfabet

Dla uproszczenia zapisu skorzystam z następujących zbiorów:

- $A' = \{A_k : k \in \{0, ..., n-1\}\}$,
- $B' = \{B_{k,i} : k \in \{0, ..., n-1\} \wedge i \in \{k, ..., n\}\}$,
- $C' = \{C_{k,i} : k \in \{0, ..., n-1\} \wedge i \in \{0, ..., k-1\} \cup \{k+1, ..., n-1\}\}$,
- $D' = \{D_{k,i,j} : k \in \{0, ..., n-1\} \wedge i \in \{k, ..., n\} \wedge j \in \{0, ..., k-1\} \cup \{k+1, ..., n-1\}\}$,
- $E' = \{E_{j,i,k} : k \in \{0, ..., n-1\} \wedge i \in \{k, ..., n\} \wedge j \in \{0, ..., k-1\} \cup \{k+1, ..., n-1\}\}$.

Alfabet będzie miał postać (17)

$$\Sigma = A' \cup B' \cup C' \cup D' \cup E' \tag{17}$$

Do wyznaczania relacji zależności D wykorzystam zbiory:

- $A'' = \{(A_k, B_{k,i}) : k \in \{0, ..., n-1\} \wedge i \in \{0, ..., n\} \wedge k \leq i\}$
- $B'' = \{(B_{k,k}, C_{k,i}) : k, i \in \{0, ..., n-1\} \wedge k \neq i\}$
- $B''' = \{(B_{k,i}, D_{k,i,j}) : k, j \in \{0, ..., n-1\} \wedge i \in \{0, ..., n\} \wedge k < i \wedge k \neq j\}$
- $C'' = \{(C_{k,i}, D_{k,j,i}) : k, i \in \{0, ..., n-1\} \wedge j \in \{0, ..., n\} \wedge k \neq i \wedge k \leq j\}$
- $D'' = \{(D_{k,j,i}, E_{i,j,k}) : k, j \in \{0, ..., n-1\} \wedge j \in \{0, ..., n\} \wedge k \neq i \wedge k \leq j\}$
- $E'' = \{(E_{k,i,k-1}, B_{k,i}) : k \in \{1, ..., n-1\} \wedge i \in \{0, ..., n\} \wedge k < i\}$
- $E''' = \{(E_{k,i,j}, C_{i,k}) : k, i, j \in \{0, ..., n-1\} \wedge k \neq i \wedge k > j \wedge i > j\}$
- $E^{(4)} = \{(E_{k,i,j-1}, E_{k,i,j}) : k \in \{0, ..., n-1\} \wedge i \in \{0, ..., n\} \wedge j \in \{1, ..., n-1\} \wedge i \geq k \wedge k \neq j-1 \wedge k \neq j\}$

Relacja zależności będzie miała postać (18)

$$D = \mathrm{sym}\{\{A'' \cup B'' \cup B''' \cup C'' \cup D'' \cup E'' \cup E''' \cup E^{(4)}\}^+\} \cup I_\Sigma \tag{18}$$

$$\begin{aligned} t = [w]_{\equiv_I^+} = [\langle \\ & A_0, B_{0,0}, ..., B_{0,n}, C_{0,1}, ..., C_{0,n-1}, D_{0,0,1}, ..., D_{0,n,1}, D_{0,0,2}, ...D_{0,n,2}, ..., D_{0,0,n-1}, ..., D_{0,n,n-1}, \\ & E_{1,0,0}, ..., E_{1,n,0}, E_{2,0,0}, ...E_{2,n,0}, ..., E_{n-1,0,0}, ..., E_{n-1,n,0}, \\ & \vdots, \\ & A_{n-1}, B_{n-1,n-1}, B_{n-1,n}, C_{n-1,0}, ..., C_{n-1,n-2}, D_{n-1,n-1,0}, D_{n-1,n,0}, ..., D_{n-1,n-1,n-2}, D_{n-1,n,n-2}, \\ & E_{0,n-1,n-1}, E_{0,n,n-1}, ..., E_{n-2,n-1,n-1}, E_{n-2,n,n-1} \\ & \rangle]_{\equiv_I^+} \end{aligned}$$

Postać Normalna Foaty

$$
\begin{aligned}
t = [\langle A\rangle]_{\equiv_I^+} = [\{A_0\}]_{\equiv_I^+}\\
&\frown\left[\left\{B_{0,0}, \dots, B_{0,n}\right\}\right]_{\equiv_I^+}\\
&\frown\left[\left\{C_{0,1}, \dots, C_{0,n-1}\right\}\right]_{\equiv_I^+}\\
&\frown\left[\left\{D_{0,0,1}, \dots, D_{0,n,1}, D_{0,0,2}, \dots D_{0,n,2}, \dots, D_{0,0,n-1}, \dots, D_{0,n,n-1}\right\}\right]_{\equiv_I^+}\\
&\frown\left[\left\{E_{1,0,0}, \dots, E_{1,n,0}, E_{2,0,0}, \dots E_{2,n,0}, \dots, E_{n-1,0,0}, \dots, E_{n-1,n,0}\right\}\right]_{\equiv_I^+}\\
&\vdots\\
&\frown[\{A_k\}]_{\equiv_I^+}\\
&\frown\left[\left\{B_{k,k}, \dots, B_{k,n}\right\}\right]_{\equiv_I^+}\\
&\frown\left[\left\{C_{k,0}, \dots, C_{k,k-1}, C_{k,k+1}, \dots, C_{k,n-1}\right\}\right]_{\equiv_I^+}\\
&\frown\left[\left\{D_{k,k,0}, \dots, D_{k,n,0}, \dots, D_{k,k,k-1}, \dots D_{k,n,k-1}, D_{k,k,k+1}, \dots D_{k,n,k+1}, \dots, D_{k,k,n-1}, \dots, D_{k,n,n-1}\right\}\right]_{\equiv_I^+}\\
&\frown\left[\left\{E_{0,k,k}, \dots, E_{0,n,k}, \dots, E_{k-1,k,k}, \dots E_{k-1,n,k}, E_{k+1,k,k}, \dots E_{k+1,n,k}, \dots, E_{n-1,k,k}, \dots, E_{n-1,n,k}\right\}\right]_{\equiv_I^+}\\
&\vdots\\
&\frown[\{A_{n-1}\}]_{\equiv_I^+}\\
&\frown\left[\left\{B_{n-1,n-1}, B_{n-1,n}\right\}\right]_{\equiv_I^+}\\
&\frown\left[\left\{C_{n-1,0}, \dots, C_{n-1,n-2}\right\}\right]_{\equiv_I^+}\\
&\frown\left[\left\{D_{n-1,n-1,0}, D_{n-1,n,0}, \dots, D_{n-1,n-1,n-2}, D_{n-1,n,n-2}\right\}\right]_{\equiv_I^+}\\
&\frown\left[\left\{E_{0,n-1,n-1}, E_{0,n,n-1}, \dots, E_{n-2,n-1,n-1}, E_{n-2,n,n-1}\right\}\right]_{\equiv_I^+} =\\
&[F_1]_{\equiv_I^+}\frown[F_2]_{\equiv_I^+}\frown[F_3]_{\equiv_I^+} \quad \dots \quad \frown[F_{5\cdot n-1}]_{\equiv_I^+}\frown[F_{5\cdot n}]_{\equiv_I^+}
\end{aligned}
$$

Na podstawie powyższych obliczeń prowadzących do wyznaczenia FNF można zaimplementować algorytm realizujący równolegle metodę Gaussa-Jordana.

Instrukcja uruchomienia

Projekt został zaimplementowany w języku Java 25 i korzysta z systemu budowania Gradle. Do uruchomienia aplikacji wymagane jest środowisko JDK 25.

Aplikacja przyjmuje opcjonalny argument w postaci ścieżki do pliku wejściowego. Jeżeli argument nie zostanie podany, program domyślnie użyje pliku `input_example1.txt` z katalogu `src/main/resources/`, gdzie znajdują się również inne przykładowe pliki o różnych rozmiarach macierzy.

Format pliku wejściowego

Program przyjmuje macierz kwadratową M o rozmiarze $n \times n$ oraz wektor wynikowy y. Do aplikacji należy przekazywać pliki w formacie:

```
n
M_0,0 M_0,1 M_0,2 ... M_0,(n-1)
...
M_(n-1),0 M_(n-1),1 M_(n-1),2 ... M_(n-1),(n-1)
y_0 y_1 y_2 ... y_(n-1)
```

Plik wynikowy będzie znajdował się w tym samym katalogu, co plik wejściowy, a jego nazwa to `filename_out`, gdzie `filename` to nazwa pliku wejściowego.

Przykład poprawnego pliku wejściowego:

```
3
2.0 1.0 3.0
4.0 3.0 8.0
6.0 5.0 16.0
6.0 15.0 27.0
```

Program odczyta ten plik jako

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 5 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Opis programu

Program został napisany w języku Java. Oraz został przetestowany przy pomocy sprawdzarki dostarczonej przez prowadzącego.

Program składa się z 4 głównych klas:
- `Main` - główna część programu odpowiedzialna za uruchomienie algorytmu dla zadanej macierzy,
- `FileManager` - część odpowiedzialna za parsowanie pliku wejściowego i utworzenie macierzy oraz zapisanie pliku wynikowego,
- `Matrix` - klasa reprezentująca macierz jako listę jednowymiarową dla szybszego działania,
- `GaussianElimination` - klasa implementująca algorytm Gaussa - Jordana.

Wynik działania dla przykładowych danych

7.1 example1

Dla danego pliku `input_example1.txt`:

```
3
2.0 1.0 3.0
4.0 3.0 8.0
6.0 5.0 16.0
6.0 15.0 27.0
```

Otrzymamy plik `input_example1_out.txt`:

```
3
1.0 0.0 0.0
0.0 1.0 0.0
0.0 0.0 1.0
1.0 1.0 1.0
```

7.2 example2

Dla danego pliku `input_example2.txt` (plik dostępny w katalogu `resources`) zawierającego macierz o rozmiarze 15×15.

Otrzymamy plik `input_example2_out.txt` zawierający macierz jednostkową oraz wektor:

```
-0.5535598625142928 -0.05067651114069216 -0.3473165237239927 -1.6542570703056634
1.2551143962442728 -0.38145155231444716 -0.9539278207715004 -0.3477037633561322
-0.14874588242950004 0.6463610027084892 1.147144755703042 -0.06697242621465893
0.6037270621243773 0.8729251917017968 0.6301394487164557
```