Um Estudo Sobre Fractais E Seus Objetivos

Cryslene Coêlho de Oliveira[1], Natália Freitas Araújo[1]

[1]Faculdade de Engenharia de Computação – Universidade Federal do Pará (UFPA)

cryslenecl@gmail.com, taiaraujo20@gmail.com

Resumo. *O presente artigo faz uma abordagem sobre um estudo aprofundado de fractais, seus conceitos e aplicações geométricas presentes na área de computação gráfica, buscando o suporte de referências de alguns autores como Mandelbrot (1975), entre outros, por tratarem conceitos e fundamentos que envolvem toda a história, conceitos e técnicas relacionados à fractais, envolvendo diversas áreas como a geometria, matemática e programação, de forma a interpretar a visualização de fractais em imagens através de exemplos conhecidos.*

Abstract. *The present paper makes an approach on an in-depth study of fractals, its concepts and geometric applications present in the area of computer graphics, seeking the support of references by some authors such as Mandelbrot (1975), among others, for dealing with concepts and fundamentals that involve all the history, concepts and techniques related to the fractals, involving several areas such as geometry, mathematics and programming, in order to interpret the fractals visualization in images through known examples.*

1. Introdução

Pode-se dizer que fractal é uma geometria não-euclidiana, ou seja, é uma geometria baseada em um sistema de axiomas que são conjuntos que podem ser relacionados para derivar teoremas de uma forma lógica[1], além de demonstrar muitos fenômenos da natureza.

Muitos cientistas tiveram a idealização e estudos de fractais em seus trabalhos entre os anos de 1857 e 1913, mas o termo fractal surgiu em 1975 pelo matemático Benoît Mandelbrot, e vem do latim *fractus* que significa quebrado ou fração[2], em 1982 Mandelbrot publicou seu livro "*The fractal geometry of nature*" (A geometria Fractal da Natureza), sendo sua terceira versão mostrando a origem de suas ideias, com imagens mais amplas e abordagens mais completas[3]. Em seu livro, Mandelbrot mostra matematicamente, com definições de dimensões (em fractais, dimensão é o "número

---

[1] Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_n%C3%A3o_euclidiana>. Acesso em 22/06/19.
[2] Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal>. Acesso em 22/06/19.
[3] Disponível em <https://en.wikipedia.org/wiki/The_Fractal_Geometry_of_Nature>. Acesso em 22/06/19.

fracionário ou irracional que caracteriza a geometria de um fractal.”), a ideia de Euclides, matemático e grego que percebeu que as formas da natureza poderiam ser descritas em formas geométricas[4].

Historicamente, a primeira definição mais geométrica de fractais foi com Helge von Koch, em 1904, que não ficou satisfeito com o gráfico da função criado em 1872 por Karl Weierstrass que atualmente é chamado de fractal, onde fez uma função similar e criou o *Koch snowflake* (floco de neve Koch)[1], que será demonstrado no decorrer deste artigo.

2. Desenvolvimento

Através de equações matemáticas pode-se produzir diversos tipos de figuras geométricas chamados de fractais, sendo interpretadas através de linguagens de programação. É possível encontrar fractais em várias formas na natureza, como em árvores, veias do corpo humano, vegetação, montanhas, entre outros[5].

A característica principal de um fractal é a autossimilaridade, sendo está dividida em três tipos[2]:

- Autossimilaridade Exata – Sendo o mais conhecido, são fractais que não diferem as suas formas, ou seja, ele é igual em diferentes pontos.
- Quase- Autossimilaridade – Nesse tipo, os fractais são aproximadamente iguais, mas não exatos.
- Autossimilaridade Estática – Os fractais têm tamanhos estatísticos em diferentes pontos, sendo fractais aleatórios.

Na geometria, os fractais são divididos em três categorias: Sistema de funções Iteradas, Fractais de Fuga do Tempo e Fractais Aleatórios[2]. A seguir será demonstrado exemplos dos tipos de fractais mais conhecidos, como são feitos e como eles se comportam, de acordo com as suas respectivas categorias.

---

[4] Disponível em <http://brunopy.blogspot.com/>. Acesso em 26/06/19.
[5] Disponível em <http://towerupstudios.com/blog/2016/fractais-importancia-na-computacao-e-material-para-estudo/>. Acesso em 26/06/2019.

2.1. Sistema de funções Iteradas

O sistema de funções Iteradas tem como regra específica a substituição geométrica. Como exemplos dessa categoria temos: *Koch Snowflake*, Conjunto de Cantor, Tapete de Sierpinski, Triângulo de Sierpinski, Curva de Peano e a Curva do Dragão de Hater-Heighway[2].

2.1.1. *Koch Snowflake* (Floco de Neve Koch)

O fractal denominado Floco de Neve Koch, foi criado por Helge von Koch, tem introduções de infinitos triângulos aos redores de um triângulo inicial, sendo a medida em que os triângulos vão crescendo o fractal vai tomando a forma de floco de neve, abrangendo bordas com triângulos infinitos[1], como mostra a figura abaixo.

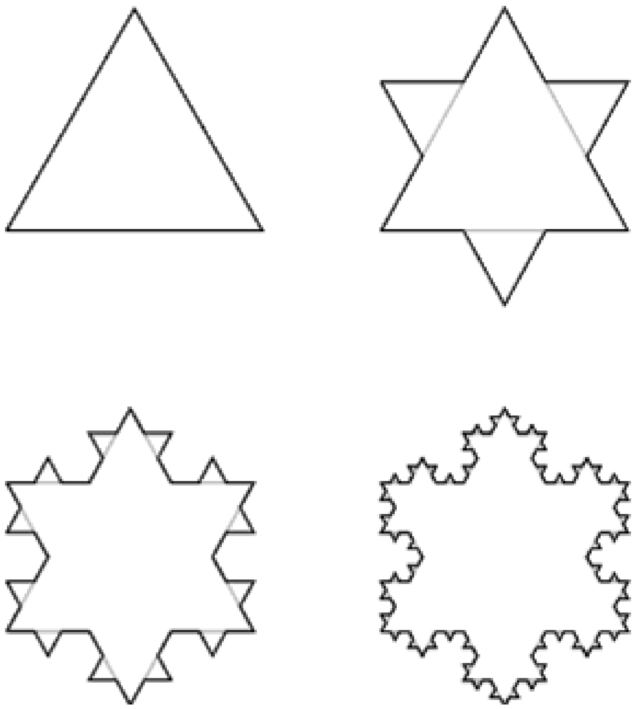

Figura 1. Floco de Neve de Koch

2.1.2. Conjunto de Cantor

O Conjunto de Cantor possui esse nome em homenagem ao matemático que desenvolveu a teoria. George Cantor desenvolveu sua tese de doutorado com a teoria dos números, porém deixou sua marca nas teorias que envolvem conjuntos infinitos.

No ano de 1984 tinha-se uma descrição para o conjunto infinito, expondo a teoria dos conjuntos dos números infinitos de maneira formal, segundo Dedekind, temos: um conjunto S é infinito quando assemelha-se a parte própria dele mesmo. Contudo, Cantor conseguiu perceber que os conjuntos infinitos não são todos iguais, a sua definição formal é dita: "um conjunto K é um conjunto de Cantor se ele é fechado, totalmente disconexo e um subconjunto perfeito de I = [0,1]. Um conjunto é totalmente disconexo se ele não contém nenhum intervalo; um conjunto *é* perfeito se for igual ao seu conjunto derivado"[6]. É possível ter esse resultado de maneira gráfica como mostra a figura 2.

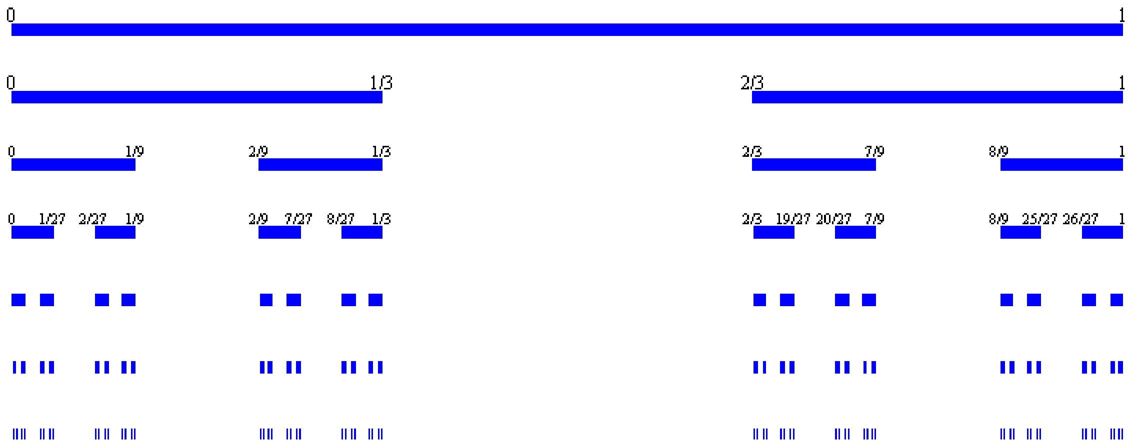

Figura 2. Conjunto de Cantor

2.1.3. Tapete de Sierpinski

O *tapete de Sierpinski* é o conjunto resultante da remoção sucessiva do quadrado do centro, quando se divide um quadrado em nove quadrados iguais. Esse fractal foi desenvolvido pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski e sua progressão pode ser vista na figura 3.

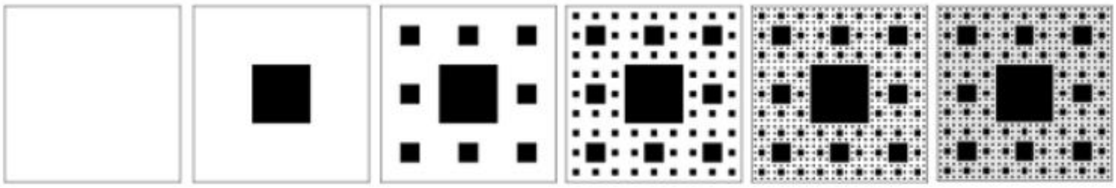

Figura 3. Tapete

---

[6] Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-863X1992000200008>. Acesso em: 20/06/2019.

O cálculo da área vazada do Tapete é o resultado do somatório das áreas dos quadrados para *n* interações obtidas através de uma série geométrica convergente[7].

2.1.4. Triângulo de Sierpinski

O triângulo de Sierpinski em 1915 pelo matemático e autor do tapete de Sierpinski. Obtem-se como limite de um processo recursivo, iniciado pelo partilhamento de um triângulo equilátero. Em seguida unem-se os pontos médios de cada lado do triângulo, formando assim quatro triângulos. A recursão consiste em repetir indefinidamente todo o processo descrito acima[8]. O resultado deste procedimento temos na figura 4.

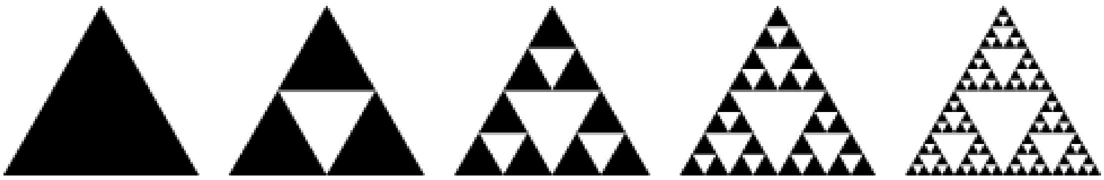

Figura 4. Triângulo de Sierpinski

Seguindo a mesma lógica do algoritmo para o desenvolvimento do triângulo, também temos o tetraedro de Sierpinski. Neste caso, o polígono usado para a recursão é um tetraedro e temos o resultado mostrado na figura 5.

[7] Disponível em: < http://matematicadorenato.blogspot.com/2016/04/fractais-tapete-de-sierpinski.html >. Acesso em: 20/06/2019

[8] Disponível em: < http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm48/sierpinski.htm >. Acesso em: 21/06/2019

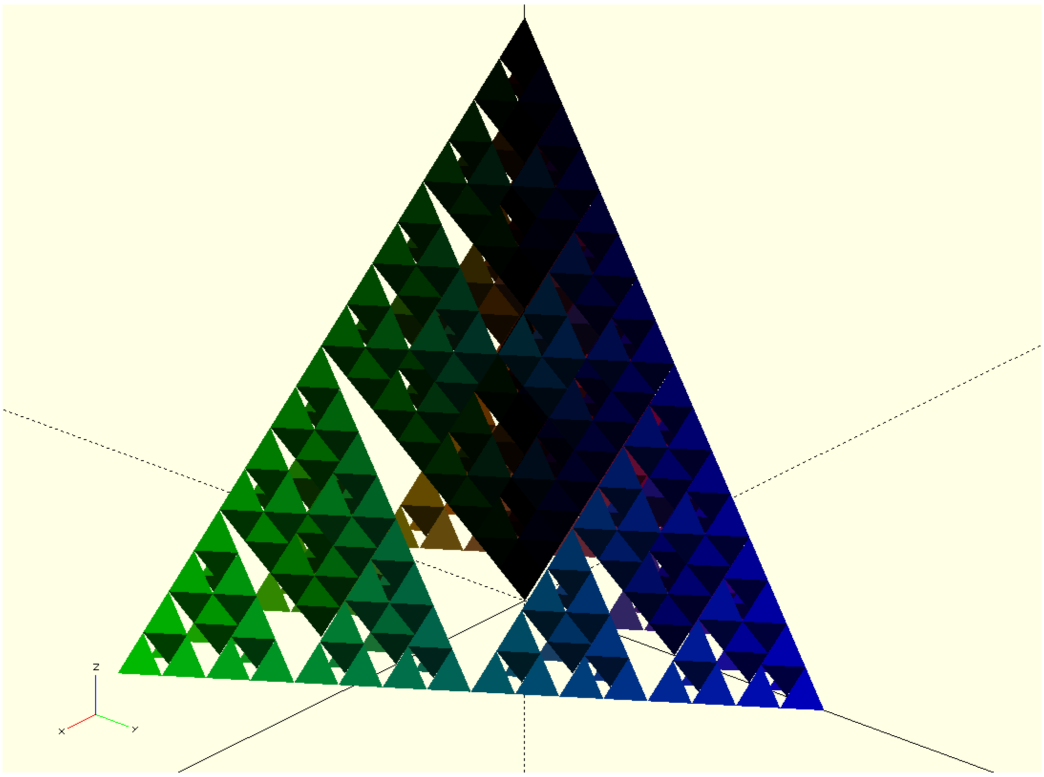

Figura 5. Tetraedro de Sierpinski

2.1.5. Curva de Peano

A curva de Peano surgiu em 1980 e construída por iteração gráfica de maneira análoga a construção para o desenvolvimento da curva de Koch. Trata-se de uma curva que passa pelo menos uma vez por todos os pontos de um quadrado, essa curva também é conhecida pelo nome *plane filling*[9]. A curva de Peano foi descrita pelo matemático italiano Guiseppe Peano e podemos ver os seus modelos em 2D e 3D na figura 6.

---

[9] Disponível em: < http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/peano.htm>. Acesso em: 23/06/2019

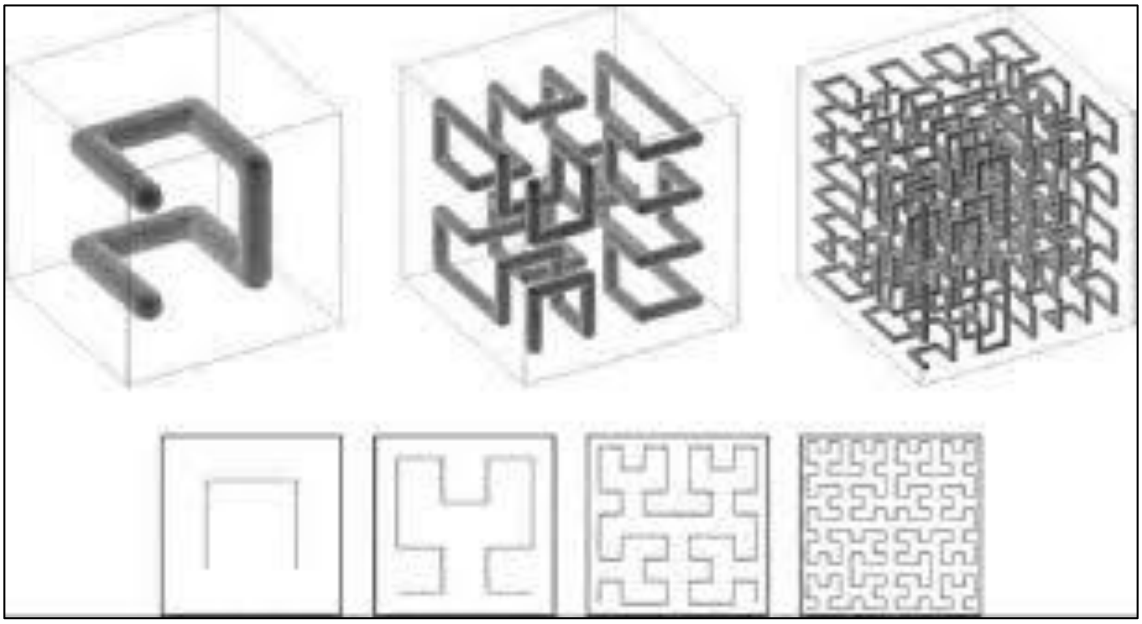

Figura 6. Curva de Peano

2.1.6. Curva do Dragão de Hater-Heighway

A curva do Dragão de Hater-Heighway, também conhecido por curva do Dragão *Jurassic Park* foi trabalhada pelos cientistas da NASA John Heighway, Bruce Banks e William Harter. A sua construção obedece a uma iteração que se duplica a cada nível. A cada iteração a curva se assemelha ao semblante de dragão[10]. Temos a representação da construção de quatro níveis na figura 7, e uma imagem construída até o nível 10 na figura 8.

[10] Disponível em: < https://www.cin.ufpe.br/~if114/Monografias/L-systems/Gramaticas/node17.html >. Acesso em: 23/06/2019

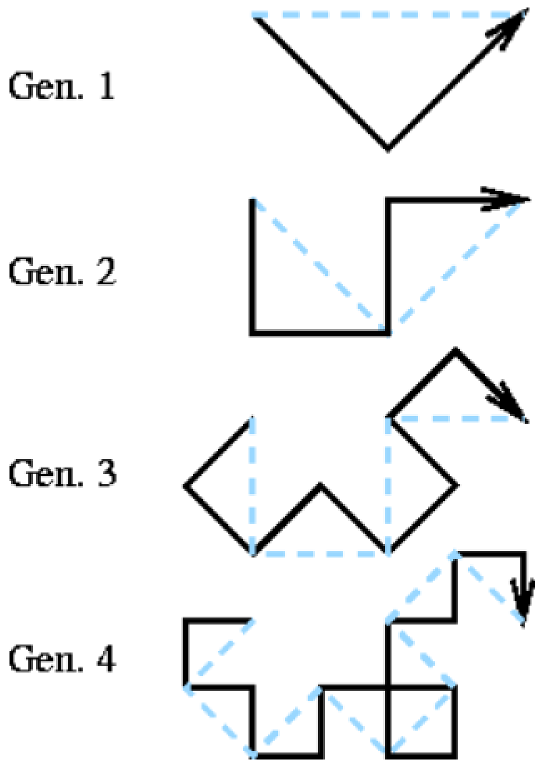

Figura 7. A curva do Dragão descrito até o nível 4

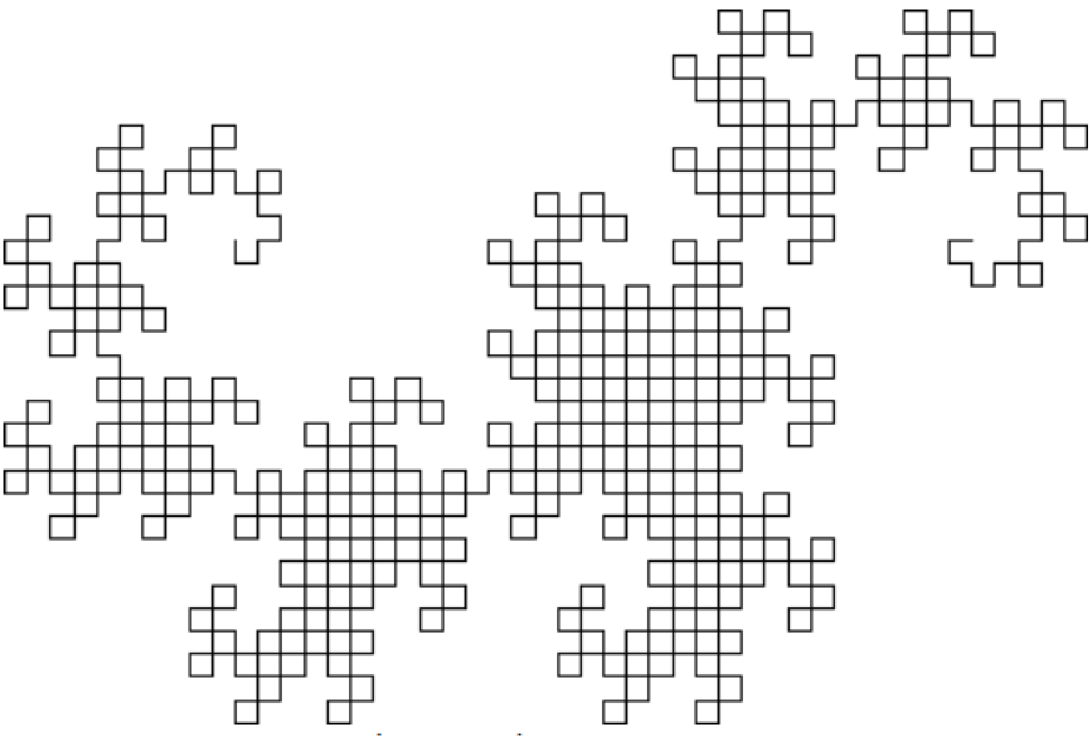

Figura 8. A curva do Dragão no seu nível 10

2.2. Fractais de Fuga do Tempo

Fractais de fuga do tempo são determinados por relações em diversos pontos. Como exemplo dessa categoria temos: Fractal de Lyapunov[2].

2.2.1. Fractal de Lyapunov

O fractal de Lyapunov foi desenvolvido pelo matematico e fisico russo Aleksandr Lyapunov que possui em seu nome uma homenagem ao seu criador. Para construir este fractal é necessário desenvolver uma extensão da função logística dada pela equação 1[11].

$$x_{n+1} = r_n x_n (1 - x_n) \tag{1}$$

Com a iteração na sequência *BBBBBBAAAAAA*, na região de parâmetro de crescimento (A, B) em [3.4, 4.0] x [2.5, 3.4] temos como resultado a figura 9.

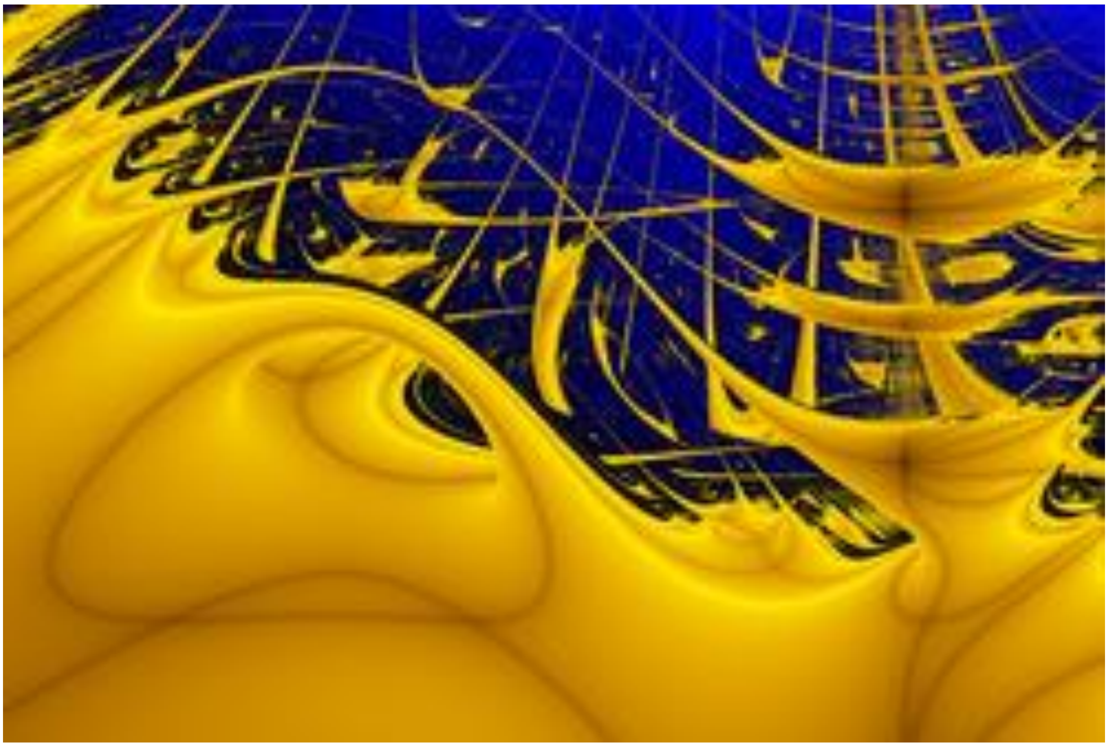

Figura 9. Fractal de Lyapunov

[11] Disponível em: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal_de_Lyapunov#cite_note-1 >. Acesso em: 25/06/2019

2.3. Fractais Aleatórios

Fractais aleatórios é utilizado através de processos estocásticos. Como exemplo dessa categoria temos: Vôo de Lévy[2].

2.3.1. Vôo de Lévy

O Vôo de Lévy foi desenvolvido pelo matemático francês Paul Pierre Lévy e é constituído através de trajetórias longas e curvas traçadas de maneira aleatória, com a predominância de trajetória curvas. Este fractal pode ser definido como um passeio aleatório e se assemelha com a aborda do algoritmo *o passo do bêbado.* O precedimento para a construção do vôo de Lévy conta com cadeias de Markov que são processos matemáticos de probabilidade e estatística, sendo um caso particular de processo estocástico com estado discreto[12]. Na figura 10 temos o exemplo de um pequeno caminho construído por esse fractal e na figura 11 temos um exemplo com a repetição de uma trajetória formando um caminho mais amplo.

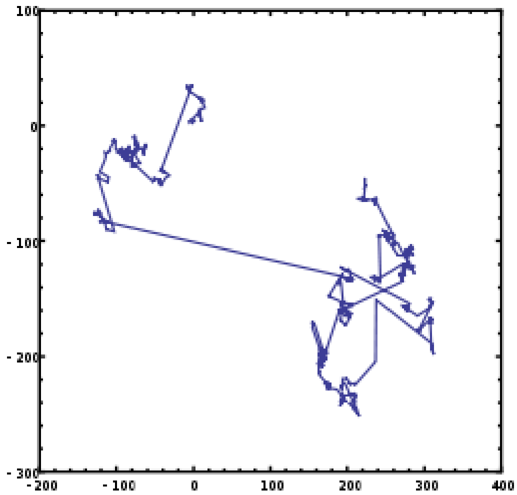

Figura 10. Vôo de Lévy - uma pequena trajetória

[12] Disponível em: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Voos_de_L%C3%A9vy >. Acesso em: 22/06/2019

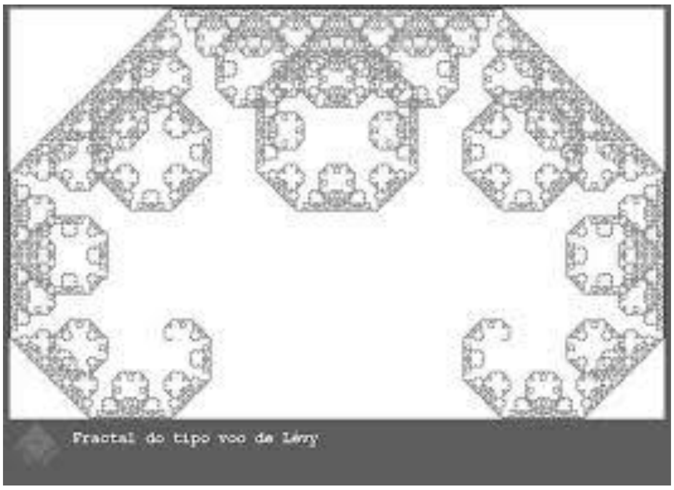

Figura 11. Vôo de Lévy - uma extensa trajetória

3. Conclusão

A beleza de um fractal é única, sendo interessante enfatizar a importância de estudar fractais e entender como através de cálculos pode-se demonstrar eventos do universo, da natureza, como nuvens, folhas de árvores, entre outros, através de linguagens de programação em formas de fractais, observando suas formas complexas que pode sem finitas ou infinitas e não necessariamente precisa ser uma forma exata, já que qualquer evento da natureza pode ser mostrado em forma de fractal a partir de fórmulas matemáticas.

Referências bibliográficas

GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_n%C3%A3o_euclidiana>. Acesso em 22/06/19.

FRACTAL. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal>. Acesso em 22/06/19.

THE FRACTAL GEOMETRY OF NATURE. Disponível em <https://en.wikipedia.org/wiki/The_Fractal_Geometry_of_Nature>. Acesso em 22/06/19.

COMPUTAÇÃO GRÁFICA – FRACTAL. Disponível em <http://brunopy.blogspot.com/>. Acesso em 26/06/19.

FRACTAIS: IMPORTÂNCIA NA COMPUTAÇÃO E MATERIAL PARA ESTUDO. Disponível em <http://towerupstudios.com/blog/2016/fractais-importancia-na-computacao-e-material-para-estudo/>. Acesso em 26/06/2019.

A TEORIA DOS CONJUNTOS DE CANTOR. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-863X1992000200008>. Acesso em: 20/06/2019.

FRACTAIS – TAPETE DE SIERPINSKI. Disponível em: < http://matematicadorenato.blogspot.com/2016/04/fractais-tapete-de-sierpinski.html >. Acesso em: 20/06/2019.

TRIÂNGULO DE SIERPINSKI. Disponível em: < http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm48/sierpinski.htm >. Acesso em: 21/06/2019

CURVA DE PEANO .Disponível em: < http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/peano.htm>. Acesso em: 23/06/2019

A CURVA DO DRAGÃO. Disponível em: < https://www.cin.ufpe.br/~if114/Monografias/L-systems/Gramaticas/node17.html >. Acesso em: 23/06/2019

FRACTAL DE LYAPUNOV. Disponível em: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal_de_Lyapunov#cite_note-1 >. Acesso em: 25/06/2019

VÔO DE LÉVY. Disponível em: <

https://pt.wikipedia.org/wiki/Voos_de_L%C3%A9vy >. Acesso em: 22/06/2019