UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ

FACULDADE DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

VICTOR EUSTÁQUIO DE ALMEIDA

Tucuruí – PA

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE TUCURUÍ

FACULDADE DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

COMPREENDENDO A TEORIA DOS FRACTAIS

Dissertação apresentada à faculdade de Engenharia da Computação, na Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção de conceito na Disciplina de Computação Gráfica, ministrada pelo professor Ms. Eng. Marcos Amarís.

Tucuruí – PA

2019

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo principal investigar a teoria dos fractais, e sua aplicabilidade computacional. Demonstrando sua importância e utilidade, através das técnicas e ferramentas abordadas na disciplina Computação Gráfica. Foi utilizada a teoria do matemático francês, *Benoit Mandelbrot*, criador do termo “Fractais” em 1975. Sua teoria defende a autossimilaridade e infinidade escalar, através de processos recorrentes e iterativos. Foram exemplificadas aplicabilidades da teoria no campo matemático e computacional por meio da linguagem de programação Python com a biblioteca “turtle”, além do software de modelagem 2D e 3D, OpenScad.

Palavras-chave: Fractais. Computação Gráfica. Python. Turtle. OpenScad.

SUMMARY

This research has the main objective to investigate the fractal theory, and its computational applicability. Demonstrating its importance and utility, through the techniques and tools addressed in the Computer Graphics discipline. The theory of the French mathematician, Benoit Mandelbrot, creator of the term "Fractais" on 1975. His theory defends autosimilarity and scalar infinity, through recurrent and iterative processes. The applicability of the theory in the mathematical and computational fields was exemplified by the Python programming language with the turtle library and the 2D and 3D modeling software OpenScad.

Keywords: Fractais. CG. Python. Turtle. OpenScad.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - TEORIA DOS FRACTAIS..06

1.1 O que são Fractais..06

1.2 Caracteristicas...06

CAPÍTULO 2 – Fractal de Benoît Mandelbrot...07

CAPÍTULO 3– Geometria Recursiva...............08

3.1 OpenScad..08

3.2 Código-Fonte..10

CAPÍTULO 1 - TEORIA DOS FRACTAIS

A geometria fractal é uma ciência de fundamentos matemáticos que estuda as propriedades e comportamento dos fractais. Ela é capaz de descreve geometrias e fenômenos que não podem ser explicadas facilmente pela geometria clássica. Seus conceitos remontam tentativas de medir o tamanho de objetos para os quais as definições da geometria tradicional euclidiana não obtiveram sucesso ou pouca exatidão.

O termo "Fractal" foi criado em 1975 por Benoît Mandelbrot, matemático francês nascido na Polónia, que descobriu a geometria fractal na década de 70 do século XX, a partir do adjetivo latino fractus, do verbo "frangere", que significa quebrar.

1.1 O que são Fractais

Um fractal é um objeto geométrico que apresentam estruturas de dimensão espacial inteira e também fracionária, com a propriedade de auto-similaridade e recursividade.

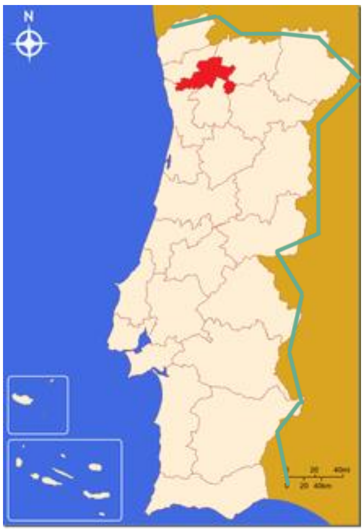
Matematicamente um fractal pode ser representado pela equação iterativa: **$Zn = Zn\text{-}1^2 = C$**, desta forma podemos chegar à conclusão que o resultado da equação é também a entrada da próxima solução. Esse é o principio recursivo lhe é característico, relativizando o entendimento podemos nos amparar na frase dita por Lavoisier - *"Na natureza nada se perde e nada se cria, tudo se transforma"*, com um pequeno adendo; o padrão se conserva e se repete.

1.2 Características

- Repetição dos padrões
- Auto-semelhança
- Extensão infinita dos limites

1.3 Problemática

Benoît Mandelbrot demonstrou através de uma problemática intrigante a utilidade dos fractais. Em seu famoso livro *"A Geometria Fractal da Natureza"*, o cientista e pesquisador da IBM Benoit Mandelbrot conta que uma enciclopédia espanhola informava que a fronteira luso-portuguesa tinha uma extensão diferente daquela mostrada por uma enciclopédia portuguesa. Mandelbrot descobriu a razão dessa discrepância: duas pessoas medindo uma fronteira com escalas diferentes, cada vez menores, poderão obter valores discrepantes em centenas de quilômetros!

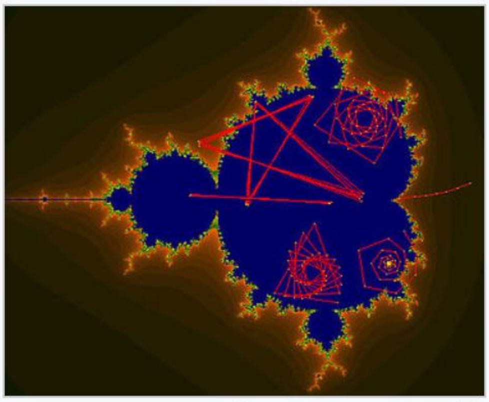


Com a recursividade fractal ele comprovou que quanto menor a escala ou melhor refinado um cálculo através da redundância iterativa, mais próximo da realidade serão os resultados.

CAPÍTULO 2 – Fractal de Benoît Mandelbrot

O fractal definido como o conjunto de pontos c no plano complexo para o qual a sucessão definida recursivamente não tende ao infinito, e para cada ponto c do plano complexo, a sequência se expande como na equação:

$$
\begin{aligned}
&z_0 = 0\\
&z_{n+1} = {z_n}^2 + c\\
&c = x + iy\\
&Z_0 = 0\\
Z_1 &= Z_0^2 + c\\
&= x + iy\\
Z_2 &= Z_1^2 + c\\
&= (x+iy)^2 + x + iy\\
&= x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy\\
&= x^2 - y^2 + x + (2xy + y)i\\
&Z_3 = Z_2^2 + c = \ldots
\end{aligned}
$$



A sequência $z_{n+1} = z_n^2 + c$ para 5 valores diferentes de c, sobreposta ao conjunto de Mandelbrot. Em cada sequência, os pontos z_n (a amarelo) estão ligados aos pontos z_{n-1} e z_{n+1} por uma linha (a vermelha)

Se reescrevermos a sequência em termos das partes real e imaginária (coordenadas x e y do plano complexo), a cada iteração n, substituindo zn pelo ponto xn + yni e c pelo ponto a + bi, temos:

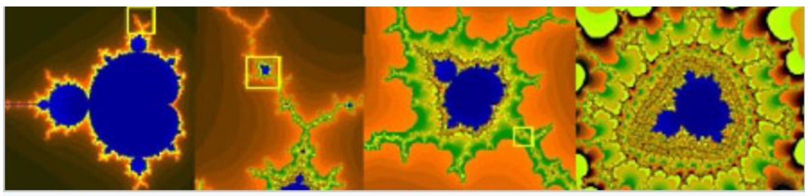
$$x_{n+1} = {x_n}^2 - {y_n}^2 + a$$

e

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + b$$

O conjunto de Mandelbrot, em sua representação gráfica, pode ser dividido em um conjunto infinito de figuras pretas, sendo a maior delas um cardióide localizado ao centro do plano complexo. Existe uma infinidade (contável) de quase-círculos (o maior deles é a única figura que, de fato, é um círculo exato e localiza-se à esquerda do cardióide) que tangenciam o cardióide e variam de tamanho com raio tendendo assintoticamente a zero.

Cada um desses círculos tem seu próprio conjunto infinito (contável) de pequenos círculos cujos raios também tendem assintoticamente a zer
o. Esse processo se repete infinitamente, gerando uma figura fractal que roda em varios graus de rotação anti-horário e a figura se move como na sequência abaixo, dos destaques ampliados:

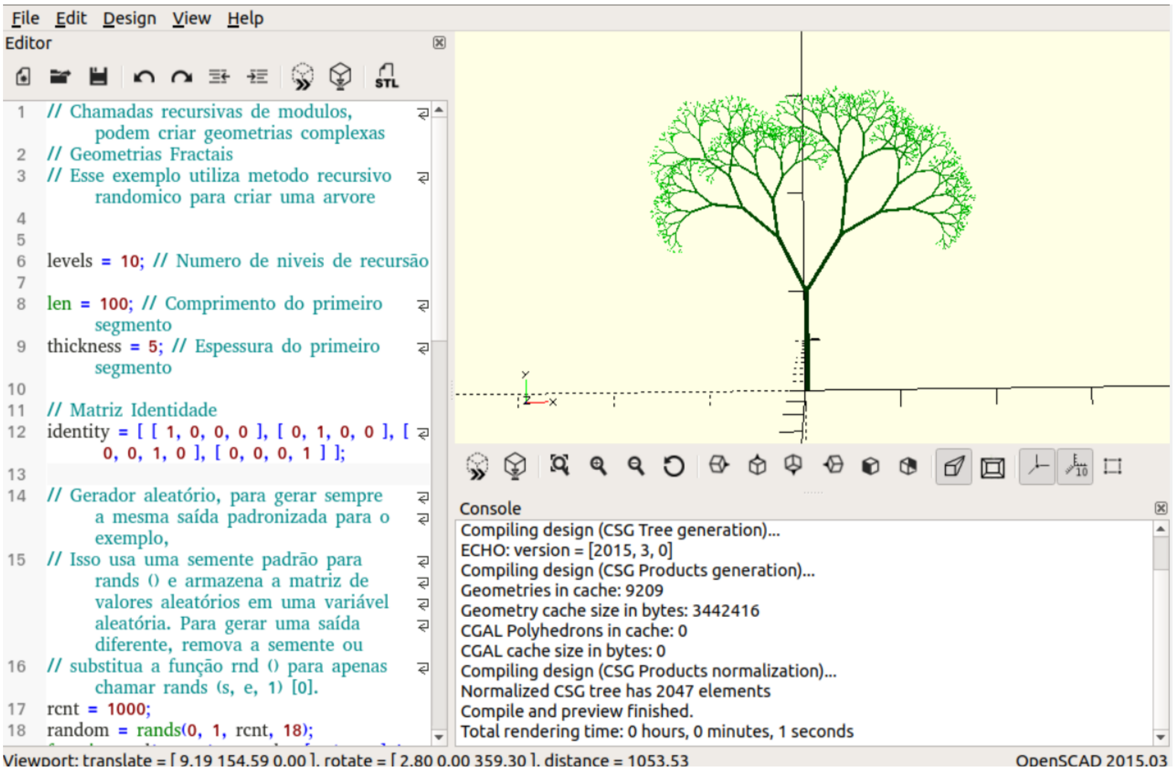


Dentro do conjunto de Mandelbrot há réplicas do conjunto ad infinitum.

CAPÍTULO 3– Geometria Recursiva recursão

3.1 OpenScad

Utilizando o Software OpenScad podemos experimentar a recursividade utilizada para criação de uma geometria fractal 2D em ambiente 3D.



Deixo o código na integra o código fonte na próxima página.

3.2 Código-Fonte

```
// Chamadas recursivas de modulos, podem criar geometrias complexas

// Geometrias Fractais

// Esse exemplo utiliza metodo recursivo randomico para criar uma arvore

levels = 10; // Numero de niveis de recursão

len = 100; // Comprimento do primeiro segmento

thickness = 5; // Espessura do primeiro segmento

// Matriz Identidade

identity = [ [ 1, 0, 0, 0 ], [ 0, 1, 0, 0 ], [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 0, 1 ] ];

// Gerador aleatório, para gerar sempre a mesma saída padronizada para o exemplo,

// Isso usa uma semente padrão para rands () e armazena a matriz de valores aleatórios em uma variável aleatória. Para gerar uma saída diferente, remova a semente ou

// substitua a função rnd () para apenas chamar rands (s, e, 1) [0].

rcnt = 1000;

random = rands(0, 1, rcnt, 18);

function rnd(s, e, r) = random[r % rcnt] * (e - s) + s;

// Gera translação de matriz 4x4

function mt(x, y) = [ [ 1, 0, 0, x ], [ 0, 1, 0, y ], [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 0, 1 ] ];

// Gera rotação em matriz 4x4 no eixo Z

function mr(a) = [ [ cos(a), -sin(a), 0, 0 ], [ sin(a), cos(a), 0, 0 ], [ 0, 0, 1, 0 ], [ 0, 0, 0, 1 ] ];


module tree(length, thickness, count, m = identity, r = 1) {

  color([0, 1 - (0.8 / levels * count), 0])

    multmatrix(m)

      square([thickness, length]);

  if (count > 0) {
```

Saiba mais:

http://natureofcode.com/book/chapter-8-fractals/

https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Mandelbrot