Obliczenia naukowe - lista trzecia

Bartosz Rajczyk

24 listopada 2019

1 Zadania 1., 2. i 3.

1.1 Opis problemu

Pierwsze trzy zadania polegały na zaimplementowaniu algorytmów przybliżających miejsca zerowe funkcji. Tymi algorytmami są:

- metoda bisekcji
- metoda Newtona (stycznych)
- metoda siecznych

1.1.1 Metoda bisekcji

Metoda bisekcji, zwana także metodą równego podziału czy połowienia, opiera się na twierdzeniu Bolzana-Cauchy'ego o następującej treści:

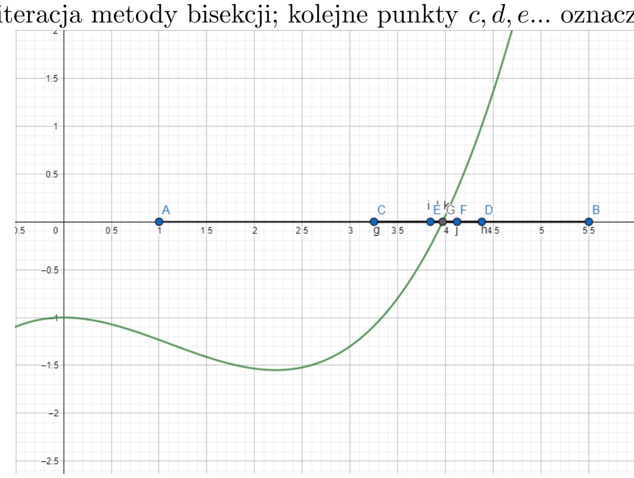
Jeżeli funkcja ciągła $f(x)$ ma na końcach przedziału domkniętego wartości różnych znaków, to wewnątrz tego przedziału, istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$

Funkcja wtedy musi spełniać:

1. ciągła w przedziale $[a, b]$
2. $f(a) * f(b) < 0$

Metoda bisekcji polega na wybieraniu środka przedziału $[a, b]$ (zwanego dalej c), a następnie sprawdzeniu, jaki $f(c)$ ma znak - wtedy zależnie od niego zastępuję się a lub b przy pomocy c w ten sposób, aby $f(a) * f(b) < 0$. Kończymy, kiedy $|f(c)| < \epsilon$ lub $|b - a| < \delta$, gdzie δ i ϵ to wybrane przez nas stałe decydujące o dokładności wyniku. Wybieranymi punktami początkowymi a, b są najczęściej dwa punkty znajdujące się mniej więcej tak samo daleko (tylko w przeciwnych kierunkach) od miejsca zerowego.

Rysunek 1: przykładowa iteracja metody bisekcji; kolejne punkty $c, d, e...$ oznaczają kolejno obierane środki



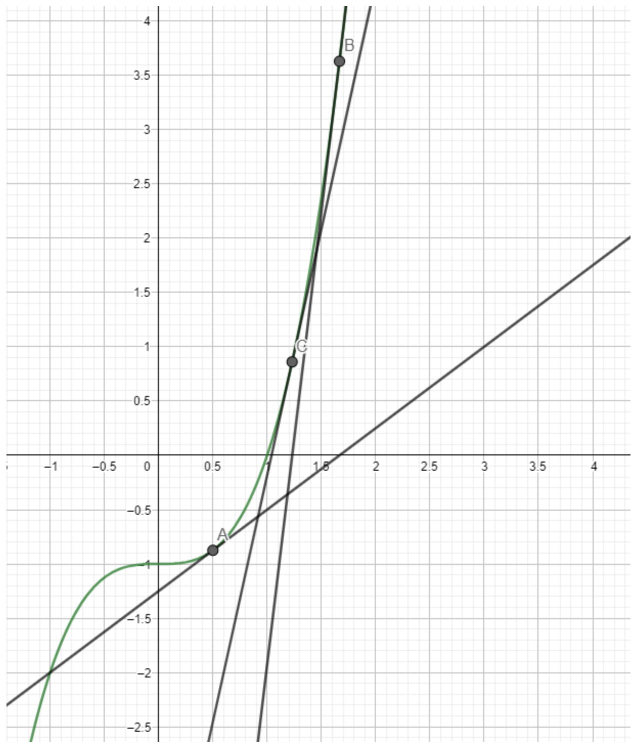
1.1.2 Metoda Newtona

Metoda Newtona, zwana także metodą stycznych, opiera się na liczeniu punktów przecięcia stycznych do funkcji f z osią OX, a następnie prowadzeniu kolejnych stycznych do funkcji w tych x. Aby metoda ta zadziałała, funkcja musi spełniać:

1. w przedziale musi znajdywać się dokładnie jeden pierwiastek
2. funkcja musi mieć różne znaki na jego końcach
3. pierwsza i druga pochodna funkcji muszą mieć stały znak w przedziale

Wybieranym punktem początkowym (x_0 dla którego liczymy pierwszą styczną) jest najczęściej początek lub koniec przedziału obranego do szukania miejsca zerowego. Wadą tej metody jest potrzeba znajomości pochodnej funkcji w celu wyznaczenia stycznej.

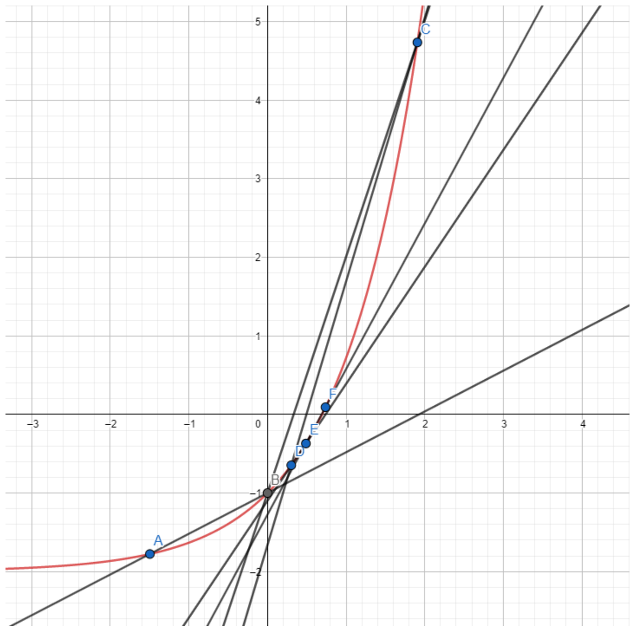
Rysunek 2: przykładowa iteracja metody Newtona; kolejne punkty $a, b, c...$ są punktami wybieranymi do poprowadzenia stycznej



1.1.3 Metoda siecznych

Metoda siecznych, zwana także metodą Eulera lub cięciw, opiera się na wyznaczaniu miejsc przecięcia siecznych wykresu funkcji z osią OX, a następnie wykorzystywanie odciętej tych punktów do wyznaczania kolejnych siecznych. Pierwsza sieczna zaczyna się w punkcie $(x_0, f(x_0))$ i kończy w punkcie $(x_1, f(x_1))$ przecinając punkt x_2 na osi OX - kolejna sieczna w iteracji rozpoczyna się w $(x_1, f(x_1))$ i końcu w $(x_2, f(x_2))$. Metoda ta umożliwia "przybliżenie" wykresu funkcji za pomocą kolejnych prostych, a przez to trafienie w końcu na punkt odpowiednio bliski szukanemu zeru.

Rysunek 3: przykładowa iteracja metody siecznych; kolejne punkty $a, b, c...$ oznaczają końce kolejnych siecznych



1.2 Rozwiązanie

Rozwiązanie zaprezentowane w pliku `module.jl` jest wzorowane na implementacjach zaprezentowanych na prezentacji z wykładu. Wszystkie funkcje zostały umieszczone w module `Solvers`, żeby można było je zaimportować do kolejnych zadań używając `include("./module.jl")` oraz `using .Solvers`. Każda funkcja została przetestowana testami jednostkowymi pod kątem zwracanych wyników lub błędów w pliku `test.jl`.

1.3 Wyniki i interpretacja

Same implementacje funkcji nie zwracają wyników.

1.4 Wnioski

Można zauważyć, że język Julia posiada prosty i wygodny w obsłudze system modułów.

2 Zadanie 4.

2.1 Opis problemu

Zadanie polegało na znalezieniu zera funkcji

$$f(x) = sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2$$

WolframAlpha podpowiada, że poza trywialnym $x = 0$ funkcja ta posiada drugie miejsce zerowe dla $x \approx 1.93375$.

2.2 Rozwiązanie

Rozwiązanie zaprezentowane w pliku `4.jl` polega na uruchomieniu funkcji `bisect`, `newton` oraz `secant` z zadanymi w treści zadania parametrami.

2.3 Wyniki i interpretacja

Poniższa tabela przedstawia wyniki uzyskane przy pomocy trzech metod dla zadanych parametrów; x dla którego $f(x)$ było równe 0 z zadaną dokładnością, $f(x)$ oraz liczbę iteracji metody.

algorytm	**x**	**f(x)**	**iteracje**
bisect	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16
newton	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4
secant	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4

Tabela 1: miejsca zerowe zadanej funkcji

Jak widać, każdy algorytm otrzymał poprawny wynik, lecz metoda Newtona i siecznych zrobiły to w zdecydowanie mniejszej liczbie iteracji, tj. w tym przypadku były szybciej zbieżne.

2.4 Wnioski

Dla poprawnie dobranych parametrów każda z metod zwraca poprawny wynik z zadaną dokładnością, różnią się za to liczbą iteracji potrzebnych do osiągnięcia go.

3 Zadanie 5.

3.1 Opis problemu

Zadanie polegało na znalezieniu punktów przecięcia funkcji

$$y = 3x$$

$$y = e^x$$

W tym celu możemy zapisać

$$e^x = 3x$$

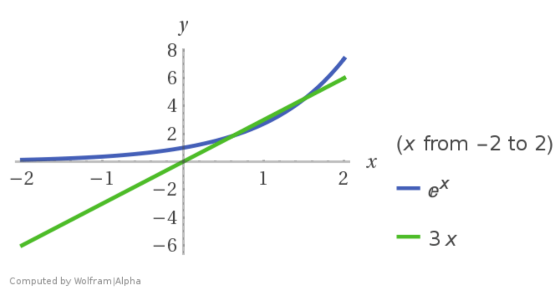
$$e^x - 3x = 0$$

i znaleźć miejsce zerowe uzyskanej funkcji. WolframAlpha podaje te miejsca zerowe jako $x \approx 0.619061$ oraz $x \approx 1.51213$.

3.2 Rozwiązanie

Rozwiązanie zaprezentowane w pliku `5.jl` polega na użyciu metody bisekcji do rozwiązania równania. Do wyboru odpowiednich parametrów startowych posłużyłem się wykresem przedstawiającym obie funkcje:

Rysunek 4: wykresy funkcji e^x i $3x$



Zauważyłem, że istnieją dwa punkty przecięta. Stąd parametry startowe a, b zostały ustalone kolejno na $0.0, 1.0$, aby znajdować się po przeciwległych stronach pierwszego przecięcia oraz $1.0, 2.0$, aby obejmować drugie.

3.3 Wyniki i interpretacja

Otrzymane wyniki prezentują się nastepująco:

x	f(x)	iteracje
0.619140625	-9.066320343276146e-5	9
1.5120849609375	-7.618578602830439e-5	13

Tabela 2: miejsca zerowe zadanej funkcji

3.4 Wnioski

Jak widać, metoda bisekcji pozwala na poprawne obliczenie miejsc zerowych zadanej funkcji przy poprawnie dobranych punktach startowych.

4 Zadanie 6.

4.1 Opis problemu

Zadanie polegało na znalezieniu miejsc zerowych funkcji

$$f_1(x) = e^{1-x} - 1$$

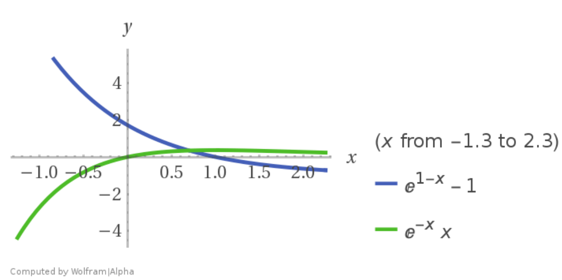
$$f_2(x) = xe^{-x}$$

używając wszystkich dostępnych metod z odpowiednimi parametrami startowymi oraz przetestowaniu zachowania metody Newtona dla konkretnych parametrów startowych. Miejscem zerowym funkcji f_1 jest $x = 1$, a funkcji f_2 $x = 0$.

4.2 Rozwiązanie

Rozwiązanie zaprezentowane w pliku `6.jl` oparte jest na analizie wykresów obu funkcji w celu dobrania odpowiednich parametrów startowych. Wykresy prezentują się następująco:

Rysunek 5: wykresy funkcji $e^{1-x} - 1$ i xe^{-x}



Analizując wykresy postarałem się dobrać odpowiednie parametry startowe dla metod. Dla bisekcji nie było to trudne ze względu na względnie proste wymagania; w tym wypadku starczyło dobrać argumenty, dla których funkcja przybiera przeciwny znak; postaram się wybrać jednak mniej symetryczne przedziały, aby uzyskać wynik za więcej niż jedną iteracją. Dla metody Newtona mogliśmy przyjąć punkty startowe znajdujące się po prostu w okolicach widocznych na szkicach wykresów miejsc zerowych, bo obie pochodne obu funkcji nie zmieniają na badanym przedziale znaku. Dla metody siecznej możemy użyć dwóch pierwszych punktów równym granicom przedziału z metody bisekcji.

metoda	**funkcja**	**parametry**
bisect	f1	$a = 0.5, b = 2.0$
bisect	f2	$a = -1.5, b = 0.5$
newton	f1	$x_0 = 0.0$
newton	f2	$x_0 = -1.0$
secant	f1	$x_0 = 0.5, x_1 = 2.0$
secant	f2	$x_0 = -1.5, x_1 = 0.5$

Tabela 3: wybrane parametry startowe funkcji

4.3 Wyniki i interpretacja

Poniższe tabele przestawiają wyniki kolejno dla funkcji f_1 i funkcji f_2.

algorytm	**x**	**f(x)**	**iteracje**
bisect	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	16
newton	0.9999984358892101	1.5641120130194253e-6	4
secant	1.000000014307199	-1.4307198870078253e-8	6

Tabela 4: miejsca zerowe zadanej funkcji f_1

algorytm	**x**	**f(x)**	**iteracje**
bisect	0	0	2
newton	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5
secant	1.7791419742860986e-8	1.779141942632637e-8	8

Tabela 5: miejsca zerowe zadanej funkcji f_2

Jak widać, przy dobrze dobranych argumentach początkowych, metoda bisekcji znajduje zero od razu, co wynika bezpośrednio ze sposobu jej działania. Metoda siecznych potrzebowała w przeprowadzonych testach kilku iteracji więcej niż metoda Newtona.

Dodatkowo przeprowadzone zostały testy zachowania metody Newtona dla $x_0 > 1$ dla f_1 i f_2 oraz sprawdzenia, czy można wybrać $x_0 = 1$ dla f_2. W pierwszym wypadku wywołanie z $x_0 = 100$ dało błąd dla f_1 oraz zły wynik dla f_2, co jest wynikiem tego, że $\lim_{x\to\infty} f_1' = 0$ oraz $\lim_{x\to\infty} f_2' = 0$, stąd obliczane wartości są zbyt niedokładne do działania algorytmu w naszej artymetyce. W drugim przypadku, $x_0 = 1$ dla f_2 mamy $f_2'(1) = 0$, wobec czego styczna będzie równoległa do osi OX uniemożliwiając wyznaczenie kolejnego punktu przecięcia.

4.4 Wnioski

Metody Newtona i stycznych potrafią dawać wyniki w mniejszej liczbie iteracji, ale należy przy nich zwracać więcej uwagi na warunki początkowe, ponieważ źle dobrane parametry startowe mogą doprowadzić do otrzymania złych wyników lub błędu. Stąd możemy zobaczyć, że każda metoda ma swoje miejsce w liczeniu miejsc zerowych funkcji nieliniowych; możemy np. używać najpierw metody bisekcji dla ograniczenia przedziału do czegoś odpowiednio bliskiego zeru, a nastepnie zmienić metodę obliczeń na Newtona lub styczne, aby w niewielu krokach otrzymać bardzo dokładny wynik.