Obliczenia naukowe - lista czwarta

Bartosz Rajczyk

7 grudnia 2019

1 Zadanie 1.

1.1 Opis problemu

Zadanie pierwsze polegało na napisaniu funkcji wyliczającej ilorazy różnicowe oparte na podanych węzłach w funkcji nie korzystając z tablicy dwuwymiarowej.

1.2 Rozwiązanie

Ilorazy różnicowe można obliczyć na podstawie następującego wzoru rekurencyjnego:

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

$$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, ..., x_{i+k}] - f[x_i, ..., x_{i+k-1}]}{x_k - x_i}$$

Opierając się na tym wzorze można łatwo utworzyć algorytm korzystający z tablicy dwuwymiarowej, trójkątnej; da się jednak zastosować sztuczkę umożliwiającą przeprowadzenie obliczeń w tablicy jednowymiarowej. Starczy wypełnić ją na początku wartościami węzłów funkcji, a przy kolejnych iteracjach "rzędów" tablicy dwuwymiarowej aktualizować obliczone ilorazy przeliczając je kolejny raz od dołu; w ten sposób uwzględniają one wcześniej wyliczone ilorazy różnicowe, od których są zależne. Pseudokod tego sposobu przedstawia się następująco:

Algorithm 1 quotients

```
function QUOTIENTS(xs, fxs)
    len ← length of fxs
    res ← fxs
    for i ← 1 to len do
        for j ← len to i + 1 do
            res[j] ← (res[j] − res[j − 1])/(xs[j] − xs[j − i])
    return res
```

2 Zadanie 2.

2.1 Opis problemu

Zadanie drugie polegało na napisaniu funkcji wyliczającej wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona w podanym punkcie przy pomocy uogólnionego sposobu Hornerna w czasie liniowym. Wartością takiej funkcji w punkcie x jest

$$N_n(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

gdzie q_i jest ilorazem różnic0wym, a x_j węzłem interpolacji.

2.2 Rozwiązanie

Powyższą zależność można przedstawić używjając ogólnionych wzorów Hornera:

$$w_n(x) = f[x_0, ..., x_n]$$

$$w_k(x) = f[x_0, ..., x_k] + (x - x_k) * w_{k+1}(x), k \in [n - 1, 0]$$

$$N_n(x) = w_0(x)$$

Na tej podstawie możemy zapisać algorytm, którego pseudokod wygląda następująco:

Algorithm 2 newtonaValue

```
function NEWTONAVALUE(xs, qs, t)
    len ← length of xs
    nth ← qs[len]
    for i ← len − 1 to 1 do
        nth ← qs[i] + (t − xs[i]) ∗ nth
    return nth
```

3 Zadanie 3.

3.1 Opis problemu

Zadanie trzecie polegało na napisaniu funkcji obliczającej współczynniki postaci naturalnej wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona. Funkcja otrzymywać miała obliczone współczynniki oraz pozycje węzłów.

3.2 Rozwiązanie

W wielomianie interpolacyjnym dla którego ilorazy różnicowe to $c_0, c_1, ...$ współczynnikiem a_n stojącym przy najwyższej potędze, x^n, jest c_n. Opierając się na tym fakcie możemy wyliczać kolejne współczynniki zaczynając od najwyższych potęg i przy kolejnych przejściach aktualizując współczynniki przy obejmowanych aktualnie potęgach w ten sposób, aby były one na tę chwilę w postaciach naturalnych. Przy kolejnych iteracjach aż do jedynki będziemy wykorzystywali obliczone wcześniej współczynniki "częściowe" postaci naturalnej do zaktualizowania ich o nowe potęgi. Pseudokod tego sposobu prezentuje się następująco:

Algorithm 3 naturalForm

```
function NATURALFORM(xs, fxs)
    len ← length of xs
    nth ← fxs
    for i ← len − 1 to 1 do
        res[i] = fxs[i] − res[i + 1] ∗ xs[i]
        for j ← i + 1 to len − 1 do
            res[j] = res[j] − res[j + 1] ∗ xs[i]
    return res
```

4 Zadanie 4.

4.1 Opis zadania

Zadanie czwarte polegało na zaimplementowaniu funkcji rysującej porównanie interpolacji stopnia maksymalnie n funkcji f w przedziale $[a, b]$ wraz z jej prawdziwym wykresem.

4.2 Rozwiązanie

Rozwiązanie zadania polegało na wyliczeniu n lub $n * gsto$ wartości x pomiędzy a i b, a następnie wyliczenie wartości oryginalnej funkcji dla nich oraz użyciu wcześniej utworzonych funkcji `quotients` oraz `newtonValue` w celu zrobienia tego samego dla wielomianu interpolacyjnego. Uzyskane w ten sposób dane zostały przekazane funkcji `plot` pakietu `MatPlotLib` w celu narysowania i zapisania ich do pliku.

5 Zadanie 5.

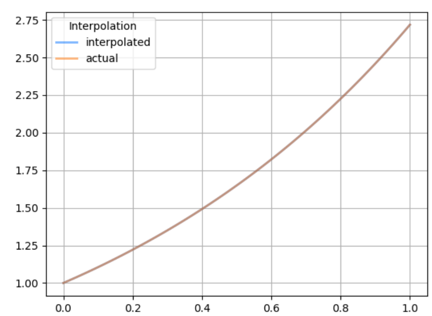
5.1 Opis problemu

Zadanie polegało na przetestowaniu ostatniej utworzonej funkcji dla dwóch przypadków:

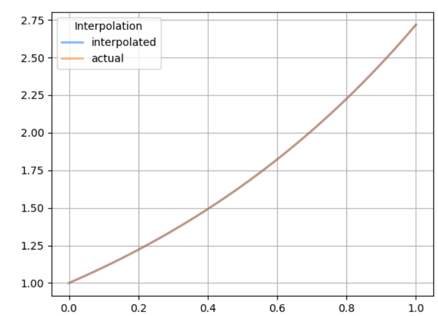
- e^x w przedziale $[0, 1]$ dla $n = 5, 10, 15$
- $x^2 sin(x)$ w przedziale $[-1, 1]$ dla $n = 5, 10, 15$

5.2 Wyniki i interpretacja

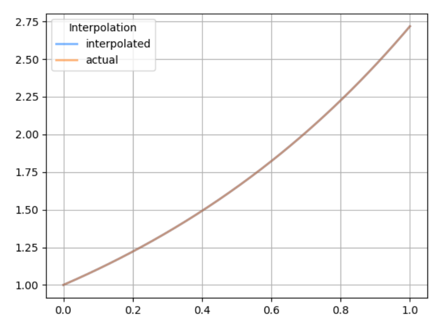
Otrzymane wykresy prezentują się następująco:



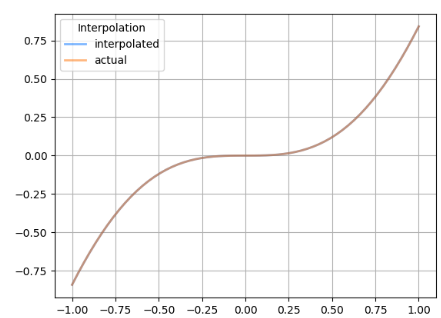
$e^x, n = 5$



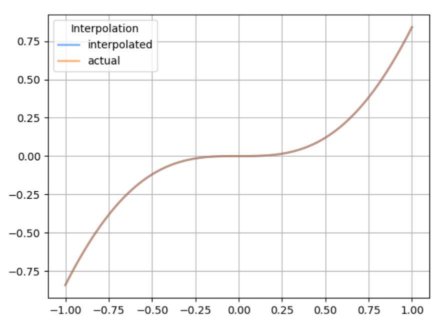
$e^x, n = 10$



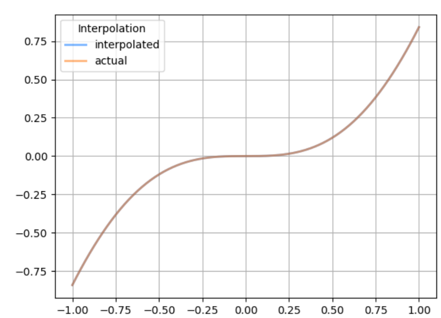
$e^x, n = 15$



$x^2 sin(x), n = 5$



$x^2 sin(x), n = 10$



$x^2 sin(x), n = 15$

Wyraźnie widać, że już dla wielomianu interpolacyjnego o dosyć małym stopniu wykresy pokrywają się bardzo dokładnie.

5.3 Wnioski

Interpolowanie funkcji w zakresach, w których ich wartości zmieniają się niewiele, a ich pochodna nie zmienia znaku, prowadzą do uzyskania bardzo dokładnych wielomianów interpolacyjnych.

6 Zafanie 6.

6.1 Opis problemu

Zadanie polegało na przestestowaniu funkcji z zadania czwartego dla dwóch kolejnych przypadków:

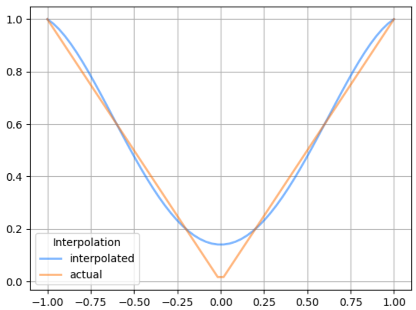
- $|x|$ w przedziale $[-1, 1]$ dla $n = 5, 10, 15$
- $\frac{1}{1+x^2}$ w przedziale $[-5, 5]$ dla $n = 5, 10, 15$

6.2 Wyniki i interpretacja

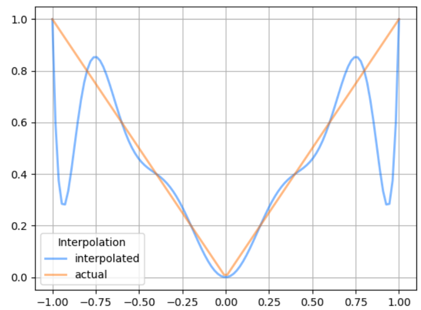
Możemy zauważyć, że funkcje w tym zadaniu znacząco różnią się od funkcji z zadania poprzedniego. Po pierwsze, ich wartości zmieniają się mocniej w przedstawionych przedziałach, a znak pochodnej obu funkcji się w nich zmienia. To prowadzi do powstania widocznego "czubka" w lokalnym supremum/minimum tych funkcji. Możemy zaobserwować, że dokładność interpolacji w centrum przedziału zwiększa się wraz z maksymalnym stopniem wielomianu interpolacyjnego; ma on jednak negatywny wpływ na zachowanie tego wielomianu przy krawędziach przedziału.

6.3 Wnioski

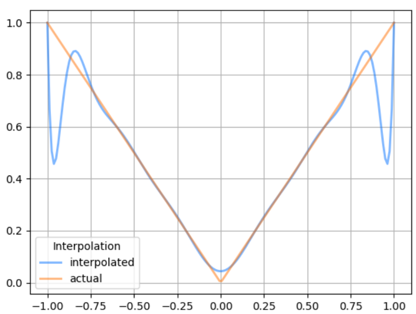
Skuteczność wielomianu interpolacyjnego zależy w dużej mierze od funkcji, którą chcemy przy jego pomocy interpolować. Funkcje z pochodną o zmieniającym się znaku w badanym przedziale są przybliżane gorzej niż te z pochodną o stałym znaku. Jednocześnie musimy pamiętać o tym, że precyzja interpolacji na brzegach przedziału spada wraz ze wzrostem stopnia wielomianu interpolacyjnego. Jest to spowodowane tym, że czynniki z wysokimi potęgami dalej od zera zyskują wartości na tyle duże, że dominują one pozostałe czynniki wielomianu.



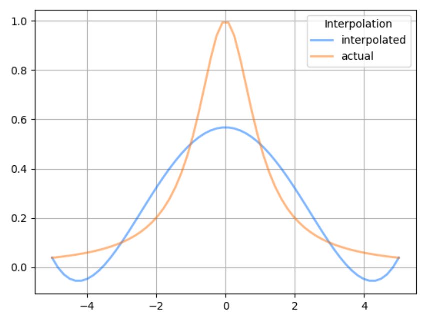
$|x|, n = 5$



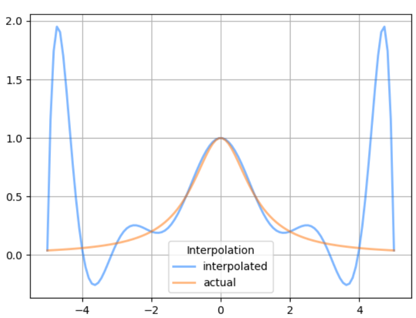
$|x|, n = 10$



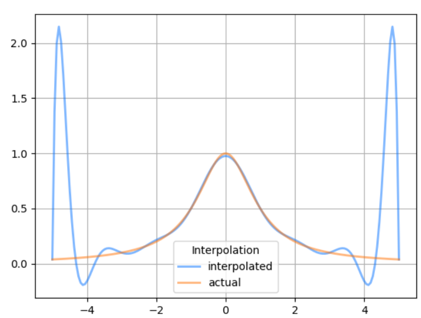
$|x|, n = 15$



$\frac{1}{1+x^2}, n = 5$



$\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+x^2}, n = 10$



$\frac{1}{1+x^2}, n = 15$