Rozwiązywanie układu równań liniowych metodą Jacobiego

1. Zastosowanie

Procedura $JacobiInterval$ rozwiązuje układ równań liniowych postaci $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ (1), gdzie $\boldsymbol{A}$ oznacza macierz kwadratową stopnia n, a $x, b \in R^n$, metodą Jacobiego.

2. Opis metody

Macierz $\boldsymbol{A}$ układu (1) jest przekształcana na sumę trzech macierzy, tj.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U},$$

gdzie $\boldsymbol{L}$ oznacza macierz trójkątną dolną, $\boldsymbol{D}$ − macierz diagonalną, a $\boldsymbol{U}$ oznacza macierz trójkątną górną. Uwzględniając rozkład macierzy $\boldsymbol{A}$, układ równań (1) można zapisać w postaci

$$(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

tj.

$$\boldsymbol{Dx} = -(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b},$$

z czego wynika następujący proces iteracyjny:

$$\boldsymbol{Dx}^{\boldsymbol{k+1}} = -(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{b},$$

tj.

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k+1}} = -\boldsymbol{D}^{-\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{D}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{b}. (2)$$

Jeżeli promień spektralny macierzy $-\boldsymbol{D}^{-\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})$ jest mniejszy od 1, to proces iteracyjny (2) jest zbieżny. Z zależności (2) wynika, że $(k + 1)$ przybliżenie $i - tej$ składowej rozwiązania jest określone wzorem

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{k+1}} = \frac{-\sum_{\boldsymbol{j=1},\ \boldsymbol{j \neq i}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{i}}}{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ii}}}, i = 1, 2, \dots, n, (3)$$

przy czym $a_{ii} \neq 0$. Proces iteracyjny kończy się, gdy

$$\frac{\|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k+1}} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\|}{\mathbf{max}(\|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k+1}}\|, \|\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}\|)} \leq \boldsymbol{\varepsilon}, x^{k+1} \neq 0 \ lub \ x^k \neq 0,$$

gdzie

$$\|\boldsymbol{x}\| = \boldsymbol{max}_{\boldsymbol{1 \leq i \leq n}}|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}|,$$

a ε oznacza zadaną dokładność, lub gdy $x^{k+1} = x^k = 0$ lub też, gdy liczba iteracji w procesie (3) jest większa od przyjętej wartości maksymalnej.

3. Wywołanie procedury

$JacobiInterval(n, ai, bi, mit, eps, xi, it, st)$

4. Dane

n – liczba równań (równa liczbie niewiadomych),

ai – tablica zawierająca wartości elementów macierzy $\boldsymbol{A}$ (element $a[i, j]$ powinien zawierać wartość a_{ij}, gdzie $i, j = 1, 2, \dots, n$),

bi – tablica zawierająca wartości składowych wektora $\boldsymbol{b}$ (element $b[i]$ powinien zawierać wartość b_i, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$);

mit – maksymalna liczba iteracji w procesie (3),

eps – względna dokładność rozwiązania,

xi – tablica zawierająca początkowe przybliżenia wartości x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Uwaga:
Po wykonaniu procedury $JacobiInterval$ wartości elementów tablicy xi są zmienione.

5. Wyniki

xi – tablica zawierająca rozwiązanie (element $x[i]$ zawiera wartość $x_i, i = 1, 2, \dots, n$),

it – liczba iteracji wykonanych w procesie (3).

6. Inne parametry

st – zmienna, której w procedurze $JacobiInterval$ przypisuje się jedną z następujących wartości:

- 1, jeżeli $\boldsymbol{n} < 1$,
- 2, gdy macierz $\boldsymbol{A}$ jest osobliwa,
- 3, jeżeli wymagana dokładność rozwiązania nie jest osiągnięta po $\boldsymbol{mit}$ iteracjach,
- 4, jeżeli wystąpiła próba dzielenia przez przedział zawierający zero,
- 0, w przeciwnym wypadku.

Uwaga:
Jeżeli $st = 1\ lub\ 2$, to po wykonaniu procedury $JacobiInterval$ elementy tablicy xi nie są zmienione. Gdy $st = 3$, to xi zawiera ostatnio obliczone przybliżenie rozwiązania.

7. Typy parametrów

$\boldsymbol{Integer}: it, mit, n, st$
$\boldsymbol{Extended}: eps$
$\boldsymbol{intervalMatrix}: ai$
$\boldsymbol{intervalVector}: bi, xi$

8. Identyfikatory nielokalne

$\boldsymbol{interval}$ – nazwa typu rekordowego postaci:

$\boldsymbol{type}\ interval = record$

$\boldsymbol{var}\ a, b : Extended;$

Rekord zawiera przeciążone operatory oraz procedury oraz funkcje dotyczące obliczeń na arytmetyce przedziałowej. Szczegóły implementacji zawarte w pliku $IntervalArithmetic32and64.pas$

$\boldsymbol{intervalVector}$ – nazwa typu tablicowego $[q_i \mathinner{..} q_n]$ o elementach typu $\boldsymbol{interval}$**,** gdzie $q_i \le 1$ oraz $q_n \ge n$,

$\boldsymbol{intervalMatrix}$ – nazwa typu tablicowego $[q_i \mathinner{..} q_n,\ q_i \mathinner{..} q_n]$ o elementach typu $\boldsymbol{interval}$**,** przy czym $q_i \le 1$ i $q_n \ge n$,

9. Przykłady

Przykład I

Dane:

$$
\begin{array}{llll}
ai[1,1].a := 0, & ai[1,1].b := 0, & ai[1,2].a := 0, & ai[1,2].b := 0,\\
ai[1,3].a := 1, & ai[1,3].b := 1, & ai[1,4].a := 2, & ai[1,4].b := 2,\\
ai[2,1].a := 2, & ai[2,1].b := 2, & ai[2,2].a := 1, & ai[2,2].b := 1,\\
ai[2,3].a := 0, & ai[2,3].b := 0, & ai[2,4].a := 2, & ai[2,4].b := 2,\\
ai[3,1].a := 7, & ai[3,1].b := 7, & ai[3,2].a := 3, & ai[3,2].b := 3,\\
ai[3,3].a := 0, & ai[3,3].b := 0, & ai[3,4].a := 1, & ai[3,4].b := 1,\\
ai[4,1].a := 0, & ai[4,1].b := 0, & ai[4,2].a := 5, & ai[4,2].b := 5,\\
ai[4,3].a := 0, & ai[4,3].b := 0, & ai[4,4].a := 0, & ai[4,4].b := 0,\\
bi[1].a := 1, & bi[1].b := 1, & bi[2].b := 1, & bi[2].a := 1,\\
bi[3].a := 1, & bi[3].b := 1, & bi[4].a := 1, & bi[4].b := 1,\\
xi[1].a := 0, & xi[1].b := 0, & xi[2].a := 0, & xi[2].b := 0,\\
xi[3].a := 0, & xi[3].b := 0, & xi[4].a := 0, & xi[4].b := 0,
\end{array}
$$

$$mit := 100, \qquad eps = 1e-14\,,$$

Wyniki:

$$
\begin{array}{ll}
xi[1].a := 0{,}00000000000000E+000, & xi[1].b := 1{,}54886024640786E-020,\\
xi[2].a := 2{,}00000000000000E-001, & xi[2].b := 2{,}00000000000000E-001,\\
xi[3].a := 2{,}00000000000000E-001, & xi[3].b := 2{,}00000000000000E-001,\\
xi[4].a := 4{,}00000000000000E-001, & xi[4].b := 4{,}00000000000000E-001,
\end{array}
$$

$$st = 0, \qquad it = 47$$

Przykład II

Dane:

$$ai[1,1].a := -12.235, \quad ai[1,1].b := -12.235, \quad ai[1,2].a := 1.229,$$
$$ai[1,2].b := 1.229, \quad ai[1,3].a := 0.5597, \quad ai[1,3].b := 0.5597,$$
$$ai[1,4].a := 0, \quad ai[1,4].b := 0, \quad ai[2,1].a := 1.229,$$
$$ai[2,1].b := 1.229, \quad ai[2,2].a := -6.78, \quad ai[2,2].b := -6.78,$$
$$ai[2,3].a := 0.765, \quad ai[2,3].b := 0.765, \quad ai[2,4].a := 0, \quad ai[2,4].b := 0,$$
$$ai[3,1].a := 0.5597, \quad ai[3,1].b := 0.5597, \quad ai[3,2].a := 0.765,$$

$ai[3,2].b := 0.765, \quad ai[3,3].a := 91.0096, \quad ai[3,3].b := 91.0096,$
$ai[3,4].a := 2, \quad ai[3,4].b := 2, \quad ai[4,1].a := 0, \quad ai[4,1].b := 0,$
$ai[4,2].a := 0, \quad ai[4,2].b := 0, \quad ai[4,3].a := -2, \quad ai[4,3].b := -2,$
$ai[4,4].a := 5.5, \quad ai[4,4].b := 5.5, \quad bi[1].a := 0.956, \quad bi[1].b := 0.956,$
$bi[2].b := 51.5603, \quad bi[2].a := 51.5603, \quad bi[3].a := 2, \quad bi[3].b := 2,$
$bi[4].a := 5.8, \quad bi[4].b := 5.8, \quad xi[1].a := 2, \quad xi[1].b := 2,$
$xi[2].a := 0.75, \quad xi[2].b := 0.75, \quad xi[3].a := -1, \quad xi[3].b := -1,$
$xi[4].a := 0.9, \quad xi[4].b := 0.9, \quad mit := 10, \quad eps = 1e-16\,,$

Wyniki:

$xi[1].a := -8{,}53655929630745\mathrm{E}-001, \quad xi[1].b := -8{,}53655929630745\mathrm{E}-001,$
$xi[2].a := -7{,}75175766676499\mathrm{E}+000, \quad xi[2].b := -7{,}75175766676499\mathrm{E}+000,$
$xi[3].a := 6{,}86615394394502\mathrm{E}-002, \quad xi[3].b := 6{,}86615394394502\mathrm{E}-002,$
$xi[4].a := 1{,}07951328547415\mathrm{E}+000, \quad xi[4].b := 1{,}07951328547415\mathrm{E}+000,$
$st = 0, \quad it = 10$

Przykład III

Dane:

$ai[1,1].a := -12.235, \quad ai[1,1].b := -12.235, \quad ai[1,2].a := 1.229,$
$ai[1,2].b := 1.229, \quad ai[1,3].a := 0.5597, \quad ai[1,3].b := 0.5597,$
$ai[1,4].a := 0, \quad ai[1,4].b := 0, \quad ai[2,1].a := 1.229,$
$ai[2,1].b := 1.229, \quad ai[2,2].a := -6.78, \quad ai[2,2].b := -6.78,$
$ai[2,3].a := 0.765, \quad ai[2,3].b := 0.765, \quad ai[2,4].a := 0, \quad ai[2,4].b := 0,$
$ai[3,1].a := 0.5597, \quad ai[3,1].b := 0.5597, \quad ai[3,2].a := 0.765,$
$ai[3,2].b := 0.765, \quad ai[3,3].a := 91.0096, \quad ai[3,3].b := 91.0096,$
$ai[3,4].a := 2, \quad ai[3,4].b := 2, \quad ai[4,1].a := 0, \quad ai[4,1].b := 0,$
$ai[4,2].a := 0, \quad ai[4,2].b := 0, \quad ai[4,3].a := -2, \quad ai[4,3].b := -2,$
$ai[4,4].a := 5.5, \quad ai[4,4].b := 5.5, \quad bi[1].a := 0.956, \quad bi[1].b := 0.956,$
$bi[2].b := 51.5603, \quad bi[2].a := 51.5603, \quad bi[3].a := 2, \quad bi[3].b := 2,$
$bi[4].a := 5.8, \quad bi[4].b := 5.8, \quad xi[1].a := 2, \quad xi[1].b := 2,$
$xi[2].a := 0.75, \quad xi[2].b := 0.75, \quad xi[3].a := -1, \quad xi[3].b := -1,$
$xi[4].a := 0.9, \quad xi[4].b := 0.9, \quad mit := 5, \quad eps = 1e-16\,,$

Wyniki:

$xi[1].a := -8{,}53420603919689\mathrm{E}-001, \quad xi[1].b := -8{,}53420603919689\mathrm{E}-001,$
$xi[2].a := -7{,}75166012792182\mathrm{E}+000, \quad xi[2].b := -7{,}75166012792182\mathrm{E}+000,$
$xi[3].a := 6{,}86429486366545\mathrm{E}-002, \quad xi[3].b := 6{,}86429486366545\mathrm{E}-002,$
$xi[4].a := 1{,}07946188538407\mathrm{E}+000, \quad xi[4].b := 1{,}07946188538407\mathrm{E}+000,$
$st = 3, \quad it = 5$

Przykład IV

Dane:

$ai[1,1].a := -12.235, \quad ai[1,1].b := -12.235, \quad ai[1,2].a := 1.229,$
$ai[1,2].b := 1.229, \quad ai[1,3].a := 0.5597, \quad ai[1,3].b := 0.5597,$
$ai[1,4].a := 0, \quad ai[1,4].b := 0, \quad ai[2,1].a := -5.229,$
$ai[2,1].b := 1.229, \quad ai[2,2].a := -2, \quad ai[2,2].b := 0,$
$ai[2,3].a := 0, \quad ai[2,3].b := 0, \quad ai[2,4].a := 0, \quad ai[2,4].b := 0,$
$ai[3,1].a := 0, \quad ai[3,1].b := 0, \quad ai[3,2].a := 0,$

$$ai[3,2].b := 0, \quad ai[3,3].a := 91.0096, \quad ai[3,3].b := 91.0096,$$
$$ai[3,4].a := 2, \quad ai[3,4].b := 2, \quad ai[4,1].a := 0, \quad ai[4,1].b := 0,$$
$$ai[4,2].a := 0, \quad ai[4,2].b := 0, \quad ai[4,3].a := -2, \quad ai[4,3].b := -2,$$
$$ai[4,4].a := 5.5, \quad ai[4,4].b := 5.5, \quad bi[1].a := 0.956, \quad bi[1].b := 0.956,$$
$$bi[2].b := 51.5603, \quad bi[2].a := 51.5603, \quad bi[3].a := 2, \quad bi[3].b := 2,$$
$$bi[4].a := 5.8, \quad bi[4].b := 5.8, \quad xi[1].a := 2, \quad xi[1].b := 2,$$
$$xi[2].a := 0.75, \quad xi[2].b := 0.75, \quad xi[3].a := -1, \quad xi[3].b := -1,$$
$$xi[4].a := 0.9, \quad xi[4].b := 0.9, \quad mit := 5, \quad eps = 1e-14\,,$$

Wyniki:

$$st = 2$$