Laboratorium komputerowe z przedmiotu "Metody Obliczeniowe", prowadzący: dr hab. inż. L.Bieniasz

Ćwiczenie 11-2	**Krawczyk Bartosz**

Zagadnienie z warunkiem początkowym i brzegowym obejmuje:

równanie różniczkowe cząstkowe $\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$, określone dla współrzędnej przestrzennej $x \in (-\infty, +\infty)$ oraz czasu $t \in [0, t_{max}]$,

warunek początkowy $U(x,0) = \begin{cases} 0 \; dla \; x < 0 \\ \exp(-x/b) \; dla \; x \geq 0 \end{cases}$, gdzie $b > 0$, oraz

warunki brzegowe $U(-\infty, t) = 0$, $U(+\infty, t) = 0$.

Zagadnienie to może opisywać transport ciepła, w ośrodku nieskończonym o współczynniku transportu ciepła D, po raptownym zetknięciu dwóch połówek ośrodka o różnych rozkładach temperatur, w chwili $t = 0$.

Rozwiązanie analityczne tego zagadnienia ma postać: $U(x,t) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{Dt}{b^2} - \frac{x}{b}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{2Dt/b - x}{2\sqrt{Dt}}\right)$, gdzie

erfc(z) = 1 – erf(z), a erf(z) jest tzw. funkcją błędu: $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-w^2)\,dw$.

Do obliczeń numerycznych przedział nieskończony x należy zastąpić przedziałem skończonym $[-a, a]$, gdzie $a \geq 6\sqrt{Dt_{max}}$. Do obliczenia funkcji erfc(z) z dokładnością bliską dokładności maszynowej dla zmiennych typu **double** należy zastosować pakiet CALERF udostępniony przez prowadzącego zajęcia.

Należy rozwiązać to zagadnienie stosując zaznaczoną niżej kombinację algorytmów numerycznych oraz podane wartości parametrów. Należy przyjąć ustaloną wartość $\lambda = D\,\delta t/h^2$, możliwie najbliższą $\lambda = 0.4$ dla metody bezpośredniej lub $\lambda = 1$ dla metod pośrednich (uwaga na ograniczenia stabilności numerycznej!). Rozwiązania numeryczne należy porównać z analitycznymi i wyznaczyć błędy bezwzględne rozwiązań numerycznych. Jeżeli poniżej zaznaczono dwa alternatywne algorytmy, to wówczas w programie należy zrealizować oba, a uzyskane wyniki porównać.

Do zaliczenia projektu należy wykonać:

(1) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu obserwowanej dla t_{max}, w funkcji kroku przestrzennego h (najlepiej w skali logarytmicznej, o ile to możliwe). Należy sprawdzić, czy zależność jest zgodna z teoretycznym rzędem dokładności i wyjaśnić ewentualne niezgodności. Do dalszych wykresów należy dobrać krok czasowy (i przestrzenny) tak, aby uzyskać możliwie jak najlepszą dokładność rozwiązania w czasie obliczeń nie przekraczającym około jednej minuty, dla najszybszego z rozważanych wariantów obliczeń. Wyniki numeryczne oraz rozwiązania analityczne i błędy odpowiadające tej sytuacji należy zapisać w zbiorze, w postaci sformatowanej umożliwiającej przeglądanie wyników.

(2) Wykresy rozwiązań numerycznych i analitycznych dla kilku wybranych wartości czasu t z całego przedziału t (rozwiązania numeryczne punktami, rozwiązania analityczne linią ciągłą).

(3) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu w funkcji czasu t. **Należy wyjaśnić ewentualnie obserwowane zmiany błędu w czasie.**

Algorytmy:

Dyskretyzacja:

- ■ Klasyczna metoda bezpośrednia
- ☐ Metoda pośrednia Laasonen
- ■ Metoda pośrednia Cranka-Nicolson

Rozwiązanie algebraicznych układów równań liniowych:

- ☐ Dekompozycja LU macierzy pełnej
- ■ Algorytm Thomasa
- ■ Metoda iteracyjna Jacobiego
- ☐ Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela
- ☐ Metoda iteracyjna SOR (należy dobrać ω)

Parametry:

$t_{max} = 1$, $b = 0.1$, $D = 1$.