Metody Numeryczne – Zadanie NUM8

Bartosz Bochniak

Wstęp

Polecenie

Zaproponuj wielomian uogólniony w postaci $F(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \varphi_j(x)$, gdzie ilość parametrów $m \geq 3$, a $\phi_j(x)$ są pewnymi funkcjami. Zdefiniuj siatkę punktów x_i oraz (dla pewnego ustalonego zestawu parametrów a_j) wygeneruj dane w postaci $\{(x_i, y_i)\}$, gdzie i = 1,...,n, a $y_i = F(x_i) + \delta y_i$. Zaburzenia δy_i należy losować z rozkładu normalnego z odchyleniem standardowym σ.

(a) Znajdź wartości współczynników a_j, dla których funkcja F(x) najlepiej opisuje zaburzone dane w sensie metody najmniejszych kwadratów. Rezultat przedstaw graficznie dla kilku wyborów wielkości siatki, n, oraz odchylenia standardowego, σ.
(b) Przeanalizuj różnicę pomiędzy wcześniej ustalonymi współczynnikami, a ich wartościami uzyskanymi w procedurze aproksymacji przeprowadzonej dla zaburzonych danych.

UWAGA: Rozwiązując to zadanie nie można korzystać z procedur bibliotecznych służących do aproksymacji. Poza tym, użycie procedur z zakresu algebry liniowej jest dozwolone.

Rozwiązanie

Jednym z założeń do wykonania aproksymacji danej funkcji jest fakt, że „kształt" funkcji jest znany (to, czy funkcja jest kombinacją funkcji znanych, np. trygonometrycznych), jedyne czego brakuje, to wartości parametrów danej funkcji. Dlatego, na potrzeby zadania, zdefiniowana zostaje funkcja $F(x) = \sum_{j=1}^{6} a_j \varphi_j(x)$, gdzie:

$\varphi_1(x) = e^{4x}$	$a_1 = -0.05$
$\varphi_2(x) = \sin(4x^2)$	$a_2 = 1.5$
$\varphi_3(x) = \ln(\lvert ln(\lvert 2x\rvert + 0.01)\rvert + 1)$	$a_3 = 3$
$\varphi_4(x) = \frac{1}{\lvert 8x^3\rvert + 1}$	$a_4 = -2$
$\varphi_5(x) = \arctan(x)$	$a_5 = 1$
$\varphi_6(x) = e^{-\lvert\sin(2x)\rvert - 0.5}$	$a_6 = -5$

Aproksymacja punktowa związana jest z dopasowywaniem funkcji do znanych danych. W tym wypadku, znanymi danymi są punkty $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$, dla x_i będącym elementem zadanej siatki punktów, a y_i wartością funkcji, która jest obarczona pewnym błędem δy_i.

Metoda najmniejszych kwadratów

Dla każdej obliczonej wartości y_i która ma pewien błąd, istnieje teoretyczna wartość y_i', która jest wartością dokładną funkcji F(x) w punkcie x_i. Można ten fakt zapisać, jako:

$$\forall_{i\in\{1,\dots,n\}}\,\exists_{y_i'}: y_i' = a_1\varphi_1(x_i) + \cdots + a_6\varphi_6(x) = \sum_{j=1}^{m=6} a_j\varphi_j(x)$$

Powyższe równanie następnie składane jest w układ równań dla każdego i, co potem można zapisać, jako:

$$\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{Aa}$$

gdzie:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \varphi_3(x_1) & \cdots & \varphi_m(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \varphi_3(x_2) & \cdots & \varphi_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \varphi_3(x_n) & \cdots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

...dla n będącym wielkością siatki/ilością x-ów, a m = 6 – ilość funkcji ϕ.

Rozkład SVD

Dla n różnego od m = 6, układ ten nie ma ścisłego rozwiązania. Na szczęście, można skorzystać z rozkładu SVD dla macierzy prostokątnej **A**, za pomocą której można osiągnąć przybliżone rozwiązanie takiego układu równań, optymalne dla metody najmniejszych kwadratów.

Za pomocą rozkładu SVD możemy obliczyć pseudoodwrotność macierzy **A**.

$$\boldsymbol{A} = U\Sigma V^T \rightarrow \boldsymbol{A}^+ = V\Sigma^+U^T$$

Zatem:

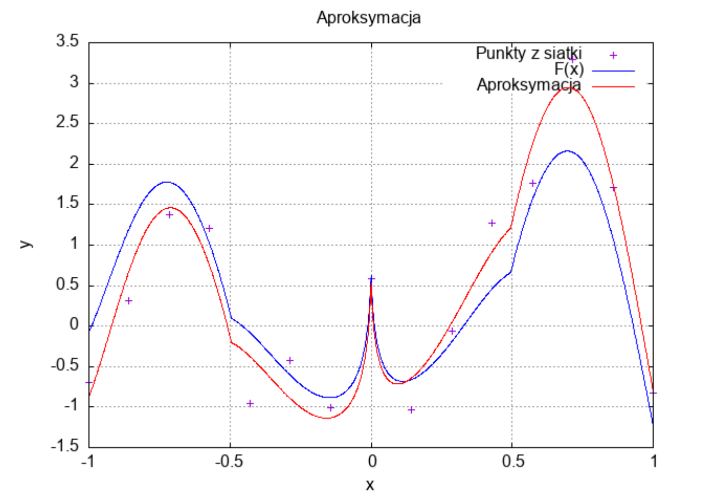
$$\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{Aa} \rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{y'} \rightarrow \boldsymbol{a} = V\Sigma^+U^T\boldsymbol{y'}$$

Wynik

Na poniższych wykresach na niebiesko narysowana jest funkcja F(x), na czerwono narysowana jest aproksymacja otrzymana za pomocą wyliczonych współczynników, natomiast fioletowe punkty to są punkty $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$, gdzie y_i jest obarczone błędem δy_i.

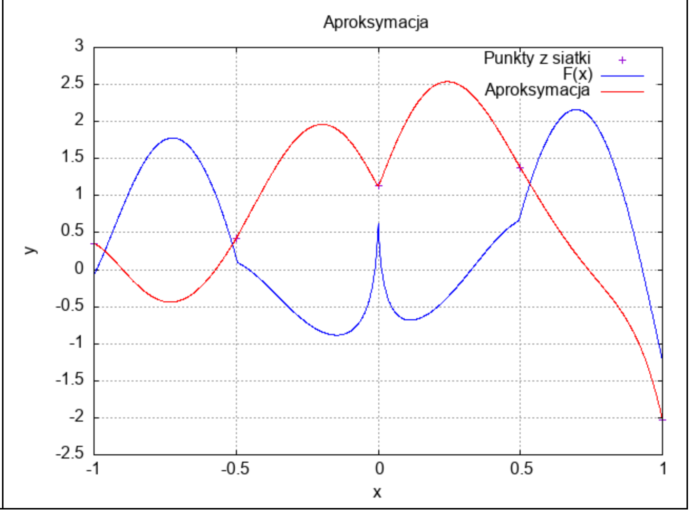
$n = 15 \qquad \sigma = 0.5$

```
Coefficients inserted:
(-0.05, 1.5, 3, -2, 1, -5)

Coefficients reached:
(-0.0551609, 1.73026, 3.1811, -2.15555, 1.96116, -5.46945)
```



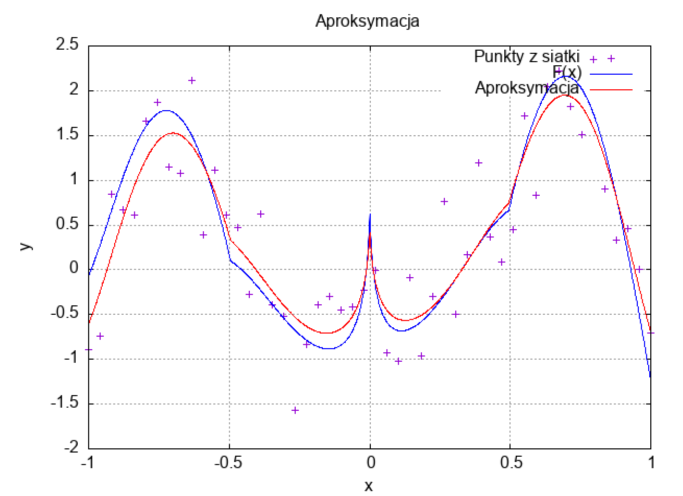
$n = 5 \qquad \sigma = 0.5$

```
Coefficients inserted:
(-0.05, 1.5, 3, -2, 1, -5)

Coefficients reached:
(-0.0943723, -1.04349, 0.118931, 3.55906, 1.76639, -5.08503)
```



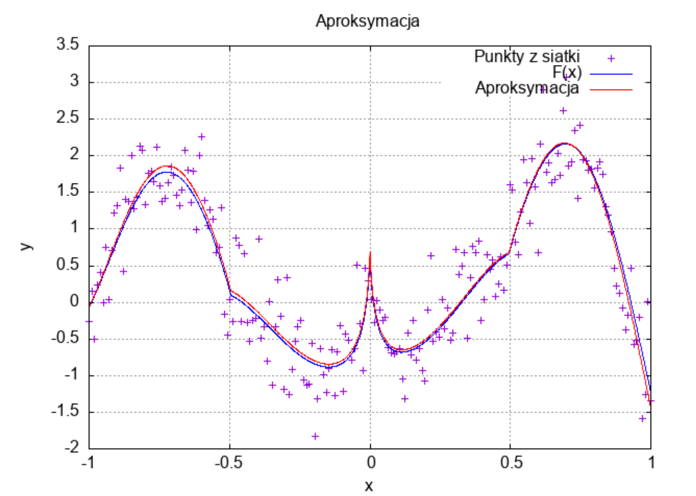
$n = 50 \qquad \sigma = 0.5$

```
Coefficients inserted:
(-0.05, 1.5, 3, -2, 1, -5)

Coefficients reached:
(-0.0190834, 1.59278, 1.95207, -1.72185, 0.601864, -2.41143)
```



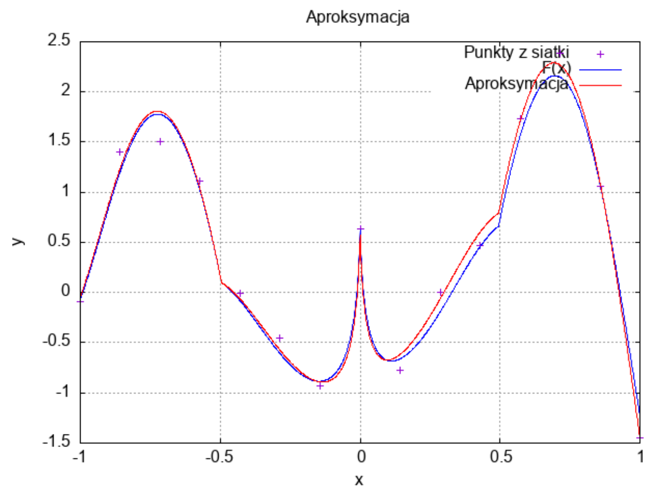
$n = 200 \qquad \sigma = 0.5$

```
Coefficients inserted:
(-0.05, 1.5, 3, -2, 1, -5)

Coefficients reached:
(-0.0536374, 1.55268, 3.05685, -1.98911, 0.98646, -5.07707)
```



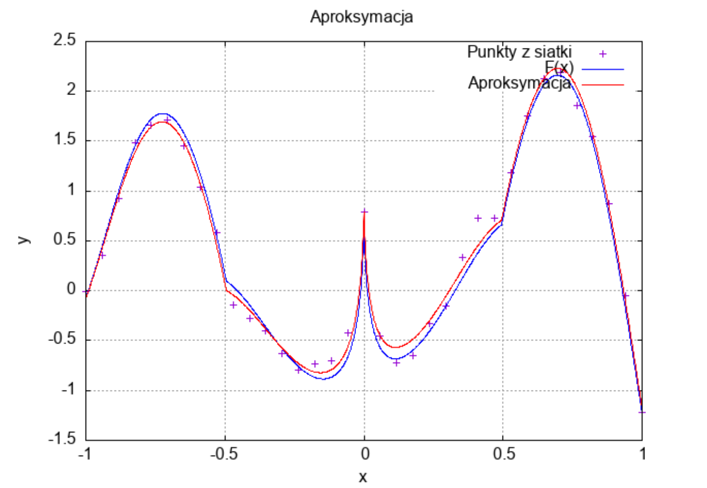
$n = 15 \qquad \sigma = 0.1$

```
Coefficients inserted:
(-0.05, 1.5, 3, -2, 1, -5)

Coefficients reached:
(-0.0609346, 1.47238, 3.15364, -1.86349, 1.22607, -5.87349)
```



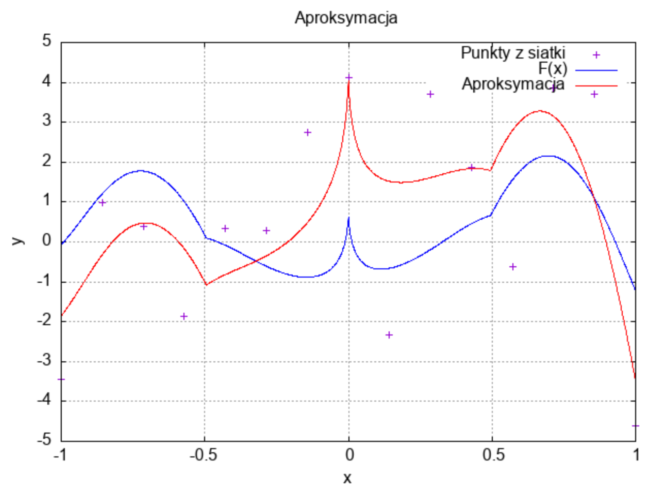
$n = 35 \qquad \sigma = 0.1$

```
Coefficients inserted:
(-0.05, 1.5, 3, -2, 1, -5)

Coefficients reached:
(-0.0543352, 1.44224, 3.1332, -1.95133, 1.18636, -5.21492)
```



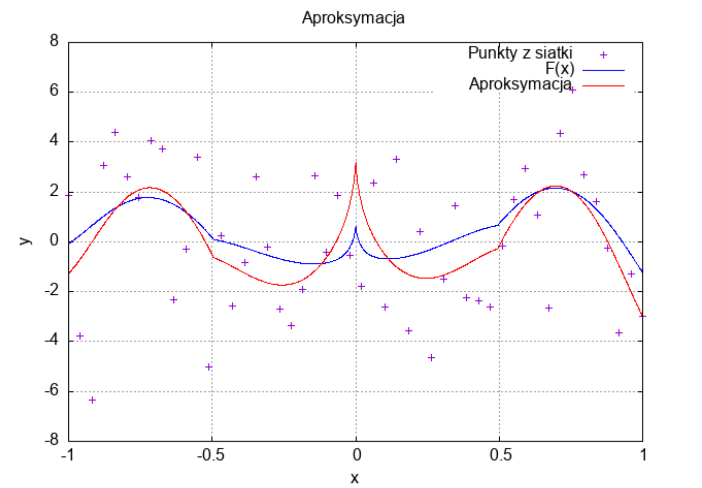
$n = 15 \qquad \sigma = 3.0$

```
Coefficients inserted:
(-0.05, 1.5, 3, -2, 1, -5)

Coefficients reached:
(-0.153698, 1.6518, 4.68872, -1.51068, 4.30355, -4.76767)
```



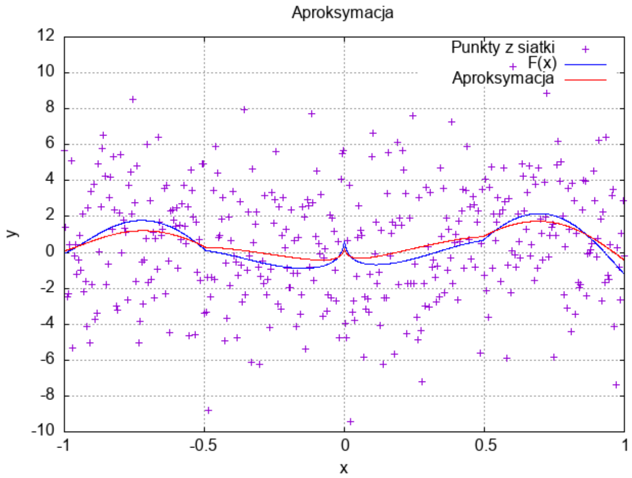
$n = 50 \qquad \sigma = 3.0$

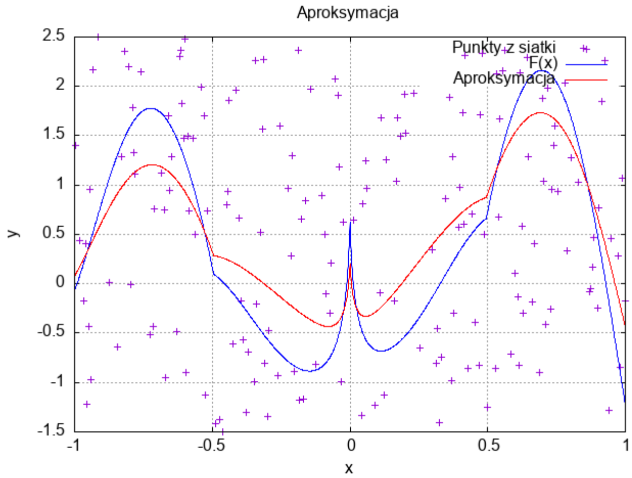
```
Coefficients inserted:
(-0.05, 1.5, 3, -2, 1, -5)

Coefficients reached:
(-0.0551833, 3.12428, 4.66426, -5.43436, 0.8119, 1.24504)
```



$$n = 400 \qquad\qquad \sigma = 3.0$$

```
Coefficients inserted:
(-0.05, 1.5, 3, -2, 1, -5)

Coefficients reached:
(-0.0358107, 0.796886, 1.86363, -0.539744, 0.916036, -4.86505)
```





Wniosek

Dla powyższych danych, można zauważyć niewielką, lecz zmieniającą się na skutek zmiany parametrów n i σ różnicę między aproksymowanymi współczynnikami, a ich prawdziwymi wartościami.

Dla wartości parametru n, czyli gęstości siatki/ilości punktów x_i, dokładność aproksymacji znacznie rosła dla rosnących n-ów.

Natomiast dla parametru odchylenia standardowego generacji zaburzeń σ, dla bardzo małych wartości, oczywistym jest, że szum będzie mały, a więc i aproksymacja będzie dokładna. Jednakże, przy nawet nie dużym zwiększeniu odchylenia standardowego, aproksymacja stawała się bardzo niedokładna, oraz wymagająca wielkiej ilości węzłów aby przywrócić zadowalającą precyzję.

Podsumowując, dokładność zwiększała się dla rosnącego parametru n, oraz malejącego parametru σ, przy czym parametr σ miał o wiele bardziej znaczące skutki na dokładność aproksymacji przy swojej zmianie, niż parametr n.