Metody Numeryczne – Zadanie NUM2

Bartosz Bochniak

Wstęp

Założenia

Mamy podane dwa macierze, oraz wektor.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 5.8267103432 & 1.0419816676 & 0.4517861296 & -0.2246976350 & 0.7150286064 \\ 1.0419816676 & 5.8150823499 & -0.8642832971 & 0.6610711416 & -0.3874139415 \\ 0.4517861296 & -0.8642832971 & 1.5136472691 & -0.8512078774 & 0.6771688230 \\ -0.2246976350 & 0.6610711416 & -0.8512078774 & 5.3014166511 & 0.5228116055 \\ 0.7150286064 & -0.3874139415 & 0.6771688230 & 0.5228116055 & 3.5431433879 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 5.4763986379 & 1.6846933459 & 0.3136661779 & -1.0597154562 & 0.0083249547 \\ 1.6846933459 & 4.6359087874 & -0.6108766748 & 2.1930659258 & 0.9091647433 \\ 0.3136661779 & -0.6108766748 & 1.4591897081 & -1.1804364456 & 0.3985316185 \\ -1.0597154562 & 2.1930659258 & -1.1804364456 & 3.3110327980 & -1.1617171573 \\ 0.0083249547 & 0.9091647433 & 0.3985316185 & -1.1617171573 & 2.1174700695 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} \equiv (-2.8634904630, -4.8216733374, -4.2958468309, -0.0877703331, -2.0223464006)^T$$

Naszym zadaniem jest obliczenie równania $A_i y = b$ dla i = 1, 2. Ponadto, dodatkowo musimy rozważyć rozwiązanie równania $A_i y = b + \Delta b$, gdzie Δb jest losowym wektorem służącym za zaburzenie, który posiada bardzo małą normę euklidesową $\|\Delta b\|_2 \approx 10^{-6}$.

Hipoteza

Macierze A_1 oraz A_2 mają własne współczynniki uwarunkowania, które pozwalają nam postawić sensowną hipotezę o wielkości błędu na jakie nasze macierze są podatne.

Współczynniki uwarunkowania ($cond(A_i) = \|A_i\|_2 * \|A_i^{-1}\|_2$) mówią nam o podatności macierzy na błąd związany z lekkim zaburzeniem. Poniżej są one podane.

$$cond(A_1) = 7; cond(A_2) \approx 1.16 * 10^{11}$$

Z powyższego wynika, że macierz A_2 jest o wiele bardziej podatna na niedokładności związane z zaburzeniem niż macierz A_1.

Rozwiązanie

W programie `Numeryczne2.cpp` napisany jest kod który przeprowadza rozwiązanie równania $A_i y = b$ oraz trzy iteracje $A_i y = b + \Delta b$, gdzie co iteracje generowany jest nowy losowy wektor Δb, jest on normalizowany oraz przemnożony przez 10^{-6}, następnie program pokazuje rozwiązania głównego równania oraz wszystkich trzech iteracji. Poniżej zapisane są przykładowe wyniki z losowych trzech iteracji.

Wynik

Dla $A_i y = b$:

$$x_1 = (0.0255619, -1.35714, -3.94076, -0.488936, 0.100978)^T$$

$$x_2 = (-0.408761, -0.560296, -4.112, -1.52421, -0.775207)^T$$

Z dodanym błędem Δb:

- Pierwsza iteracja dla $\Delta b = (-7.4 * 10^{-7},\ 9.4 * 10^{-8}, -4.5 * 10^{-7}, 4.6 * 10^{-7}, 1.26 * 10^{-7})^T$:

$$x_1' = (0.0255618, -1.35714, -3.94075, -0.488936, 0.100978)^T$$

$$x_2' = (297.061, -546.325, 113.174, 707.538, 599.328)^T$$

- Druga iteracja dla $\Delta b = (-3.42 * 10^{-8}, -2.55 * 10^{-7}, 6.74 * 10^{-7}, 5.499 * 10^{-7}, 4.2 * 10^{-7})^T$

$$x_1'' = (0.0255618, -1.35715, -3.94076, -0.488935, 0.100978)^T$$

$$x_2'' = (3330.5, -6111.7, 1309.2, 7938.1, 6718.8)^T$$

- Trzecia iteracja dla $\Delta b = (-5.78 * 10^{-7}, 6.36 * 10^{-7}, 3.733 * 10^{-7}, 2.4 * 10^{-8}, -3.47 * 10^{-7})^T$

$$x_1''' = (0.0255618, -1.35714, -3.94076, -0.488936, 0.100977)^T$$

$$x_2''' = (-2614.4, 4795.3, -1034.75, -6232.33, -5274.1)^T$$

Wnioski

Po powyższych wynikach możemy zauważyć mikroskopijne zmiany dla x_1, oraz wielkie zmiany dla x_2. Potwierdza to naszą hipotezę o tym, że macierz A_2 jest podatna na zaburzenia związane z jej dużym współczynnikiem uwarunkowania, oraz że macierz A_1, posiadająca mały współczynnik uwarunkowania, doświadcza znikomych niedokładności.