

1 Uwarunkowanie

$$\delta + 1 = \frac{1}{1-\delta} \quad \delta^2 \approx 0$$

Błąd względny wyniku:

$$\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| |\delta|$$
$$\text{cond}(x) = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| \sum_{k=1}^n \left| \frac{x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_k)}{f(x_1, \dots, x_k)} \right| \quad (f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R})$$

Uwarunkowanie zadania numerycznego:

$$\frac{\|f(\tilde{d}) - f(d)\|}{\|f(d)\|} \leq \text{cond}(d) \frac{\|d - \tilde{d}\|}{\|d\|}$$

2 Normy

2.1 Wektorowe

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

2.2 Macierzowe

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} \quad A^* = \bar{A}^T$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

zgodność norm jeśli: $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

dla normy Frobeniusa: $\|Ax\|_F \leq \|A\|_F \|x\|_2$

dla dowolnej zachodzi: $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

3 Arytmetyka zmiennie przecinkowa (fl)

Zbiór $M(2, t, k)$ nie jest zamknięty ze względu na działania arytmetyczne. $fl(x \diamond y) = rd(x \diamond y)$ zatem błąd arytmetyki jest taki sam jak błąd arytmetyki reprezentacji wyniku. Zatem $fl(x \diamond y) = (x \diamond y)(1 + \delta)$. Jeżeli (t bity mantysy) $x = m_1 \cdot 2^{c_1}$ $y = m_2 \cdot 2^{c_2}$ oraz $c_1 - c_2 > t$ to $fl(x + y) = x$

4 Numeryczna poprawność

Def. Algorytm A dla zadania φ nazywamy numerycznie poprawnym jeśli istnieje stała k niezależna od wskaźnika uwarunkowania i niezależna od arytmetyki tż dla dowolnej danej $d \in D$ istnieje dana \tilde{d} tż $\|d - \tilde{d}\| \leq K \cdot 2^{-t} \|d\|$ oraz $fl(A(d)) = \varphi(\tilde{d})$ Czyli, wynik algorytmu A dla danej d (dokładniej) w arytmetyce fl jest dokładnym wynikiem zadania φ dla nieco zaburzonej danej.

Oszacowanie błędu alg. num. poprawnego:

$$\|fl(A(d)) - \varphi(d)\| \leq \text{cond}(d) \frac{K \cdot 2^{-t} \|d\|}{\|d\|} \|\varphi(d)\|$$

Sama numeryczna poprawność nie gwarantuje dokładności (zależy od cond i K)

5 Interpolacja

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{n+1!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0) \dots (x - x_n)$$

5.1 Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x)$$

gdzie:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

5.2 Newton

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

gdzie:

$$c_k = f_{0,1,2,\dots,k}$$

oraz

$$f_{i,i+1,\dots,k+i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{i+1,\dots,k} - f_{i,\dots,(i+k-1)}}{x_{i+k} - x_i}$$

Hermite identycznie tylko że w tabeli węzył się powtarzają i w miejscu różnic dzielonych których nie można otrzymać wpisujemy $\frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$ a w wielomianie interpolacyjnym składniki postaci $(x - x_i)$ będą posiadały odpowiednią potęgę

6 Całkowanie numeryczne

Kwadratura jest rzędu r jeśli jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnie $r - 1$ oraz istnieje wielomian stopnia r dla której nie jest dokładna

6.1 Trapezy $\xi \in (a, b)$ $E(f) = I(f) - S(f)$

$$S(f) = \sum_{k=1}^N \frac{x_k - x_{k-1}}{2} (f(x_k) + f(x_{k-1})) =$$
$$= \frac{H}{2} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(a + kH) \right)$$

$$E(f) = - \sum_{k=1}^N \frac{H^3 f''(\xi_k)}{12} = - \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi)$$

6.2 Prostokąty $\xi \in (a, b)$ $E(f) = I(f) - S(f)$

$$S(f) = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) = H \sum_{k=0}^n f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)$$

$$E(f) = \frac{(b-a)^3}{24N^2} f''(\xi) = \frac{H^2}{24} (b-a) f''(\xi)$$

6.3 Simpson $\xi \in (a, b)$ $E(f) = I(f) - S(f)$

$$S(f) = \sum_{k=1}^N \frac{H}{6} \left(f(x_{k-1}) + 4f\left(x_{k-1} + \frac{H}{2}\right) + f(x_k) \right)$$

$$E(f) = - \sum_{k=1}^N \frac{H^5 f^{(4)}(\xi_k)}{90 \cdot 2^5} = - \frac{(b-a)^5}{2880N^4} f^{(4)}(\xi)$$

7 Rozwiązanie układów r. liniowych $\det A \neq 0$

7.1 Metoda Eliminacji Gaussa GE

Tw.1 Jeśli A jest macierzą dodatnio określoną, to metoda GE zastosowana do $Ax = b$ jest wykonalna

Tw.2 Jeśli A jest silnie diagonalnie dominująca, to metoda GE zastosowana do układu $Ax = b$ jest wykonalna

7.2 GEPP

O ile $\det A \neq 0$ GEPP jest wykonalna W k -tym kroku wybieramy wierszowo (analog. kolumnowo) $\max_{i \in \{k, \dots, n\}} |a_{ik}|$ i zamieniamy k -ty

wiersz z wierszem z maksymalnym el. w macierzy $[A^{(k-1)} | b^{(k-1)}]$

7.3 GECP

w k -tym kroku znajdujemy p, q tż. $|a_{pq}| = \max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} |a_{ij}|$ i

zamieniamy p wiersz z k oraz q kolumnę z k przy zamianie kolumn następuje zamiana zmiennych w x

7.4 Rozkład LU

Rozkład LU istnieje \Leftrightarrow GE jest wykonalne

$Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow Ly = b \wedge Ux = y$ (wyznaczamy y potem x)

7.5 Rozkład PA=LU

$Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb$ (i dalej tak samo jak w LU)

7.6 Banachiewicz-Cholesky

Jeśli $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ jest symetryczna i dodatnio określona, to istnieje dokładnie jedna macierz L (dolnotrójkątna) z dodatnimi elementami

na głównej przekątnej tż $A = LL^T$ Fakt: $\sqrt{\omega_1} = l_{11} \dots \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_{k-1}}} = l_{kk}$

ω wyznaczniki wiodących minorów głównych

Tw. Sylwestera dla każdego $i \in [k]$ $\omega_i > 0 \Leftrightarrow A$ jest dodatnio określona Jeśli dla macierzy symetrycznej rozkład Ba-Ch nie istnieje to macierz nie jest dodatnio określona.

8 Iteracyjne metody rozwiązywania u.r.l.

Tw. Metoda iteracyjna $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ jest zbieżna globalnie $\Leftrightarrow \rho(B) < 1$
im $\rho(B)$ mniejsze tym szybciej
Tw. Jeśli $\|B\| < 1$ gdzie $\|\cdot\|$ jest normą zgodną z pewną normą wektorową to metoda $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ jest zbieżna globalnie $|\lambda| \leq \|A\|$ dd ze zgodności norm
Tw. Gerszgorina niech $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dla każdej wartości własnej $\lambda \in \sigma(A)$ istnieje $i \in \{1, \dots, n\}$ taki, że

$$\lambda \in K_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|\}$$

gdzie K_i to i -te koło Gerszgorina. Ponadto $\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^n K_i = G(A)$ gdzie $G(A)$ nazywany jest zbiorem Gerszgorina. ($A = A^T \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$)
Tw. Jeśli k kół Gerszgorina tworzy zbiór spójny i rozłączny z pozostałymi kołami to w tym zbiorze znajduje się dokładnie k wartości własnych **Warunki stopu:**
1) $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq d$ błąd bezwzględny
2) $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq d\|x^{(k)}\|$ błąd względny
3) $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq d_1\|x^{(k)}\| + d_2$ warunek Gilla
4) $\|Ax^{(k)} - b\| \leq d$ błąd residualny.

8.1 Metoda Jacobiego

$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$
 $B = -D^{-1}(L + U)$
W metodzie Jacobiego warunek dostateczny zbieżności $\|B\|_\infty < 1$ jest spełniony wtedy, gdy macierz A jest silnie diagonalnie dominująca
 $\left(\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|\right)$
for $p = 1, \dots, n$ **do**
 $x_p^{(k+1)} = \left(b_p - \sum_{j=1}^{p-1} a_{pj}x_j^{(k)} - \sum_{j=p+1}^n a_{pj}x_j^{(k)}\right) / a_{pp}$
end for

8.2 Gauss-Seidel

$x^{(k+1)} = -(L + D)^{-1}Ux^{(k)} + (L + D)^{-1}b$
Jeśli $A = A^T$ oraz A jest dodatnio określona, to metoda Gaussa-Seidla jest zbieżna.
Jeśli A jest silnie diagonalnie dominująca to metoda Gaussa-Seidela jest zbieżna. (na wykładzie te tw. tylko dla Jacobiego)?

8.3 Metoda SOR

$B_{SOR} = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D - \omega U)$
 $c_{SOR} = \omega(D + \omega L)^{-1}b$
 $x^{(k+1)} = B_{SOR}x^{(k)} + c_{SOR}$

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j < i} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j > i} a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

Tw. Kahana: Dla metody SOR $\rho(B_{SOR}) \geq |\omega - 1|$
Tw. Jeśli A jest symetryczna i dodatnio określona, to metoda SOR jest zbieżna dla każdego $\omega \in (0, 2)$

8.4 Warunek zbieżności

$x = Bx + c$
 $x - x^{(k+1)} = Bx + c - x^{(k+1)} = Bx + c - Bx^{(k)} - c$
 $x - x^{(k+1)} = B(x - x^{(k)}) = \dots = B^{k+1}(x - x^{(0)})$
 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} B^{k+1} = 0$

9 Wyznaczanie m. zerowych funkcji 1 zmiennej

Warunki stopu te same oprócz 4) $|f(x_k)| \leq d$ (stosować ostrożnie)

9.1 Metoda Newtona

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
Jeżeli 1) f jest klasy $C^2([a, b])$ 2) $f(a)f(b) < 0$ 3) f' i f'' nie zmieniają znaku na $[a, b]$ 4) x_0 jest takie, że $f(x_0)f''(x_0) > 0$ to metoda Newtona jest zbieżna
Błąd k-tego przybliżenia można oszacować nierówności z podsekcji 9.6
Metoda Newtona jest metodą o zbieżności kwadratowej (rzad zbieżności wynosi 2). Wyjątkiem są zera wielokrotne, dla których zbieżność jest liniowa i wynosi 1.

9.2 Metoda siecznych

$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$
Warunki zb. te same tylko oba x_0 i x_1 muszą spełniać 4)

9.3 Metoda Halley'a

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}f''(x_k)}$$

9.4 Metoda Parabol

$p_k = x_{k+1} - x_k$ rozwiązujemy $f(x_k) + f'(x_k)p_k + \frac{1}{2}f''(x_k)p_k^2 = 0$ (delta) jako $p_k = \min\{|p_k^{(1)}|, |p_k^{(2)}|\}$ obliczamy $x_{k+1} = p_k + x_k$

9.5 Metoda Bisekcji

f ciągła $[a, b]$ tż $f(a)f(b) < 0$
for $p = 1, \dots$ **do**
 $t_k = \frac{a_k + b_k}{2}$
if $f(a_k)f(t_k) < 0$ **then**
 $a_{k+1} = a_k$ $b_{k+1} = t_k$
else if $f(a_k)f(t_k) > 0$ **then**
 $a_{k+1} = t_k$ $b_{k+1} = b_k$
else
wynik t_k
end if
end for

9.6 Zbieżność

Przyjmijmy, że $e_k = x_k - \alpha$ jest błędem w k -tym kroku Jeśli istnieje liczby p i c tż $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c$ to p nazywamy wykładnikiem zbieżności metody iteracyjnej
 $|e_{k+1}| \leq c|e_k|^p$ im p większe tym metoda szybsza
Newtona $p = 2$, Stycznych $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, Halleg'a $p = 3$, Parabol $p = 3$, Bisekcji $p = 1$
Dla Newtona (dd z Taylora w ot. x_0) dla miejsc pojedynczych

$$|e_{k+1}| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} \right| |e_k|^2$$

10 Rozwiązywanie układów równań nieliniowych

(Newton) $x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)})$ gdzie $F'(x)$ to macierz Jacobiego funkcji $F(x)$ powstałej z układu równań.
Oznaczamy $p^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ więc $p^{(k)} = -[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)})$
1) obliczamy $F(x^{(k)})$ i $F'(x^{(k)})$
2) rozwiązujemy u.r.l. $F'(x^{(k)})p^{(k)} = -F(x^{(k)})$
3) Obliczamy $x^{(k+1)} = x^{(k)} + p^{(k)}$

11 Uwarunkowanie zadania roz. u.r.l i algebra

$cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ $cond_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$
Jeśli $A = A^T$, to $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{(\rho(A))^2} = \rho(A)$
 $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda_{min}(A)}$
Jeśli $\lambda \in \delta(A)$ oraz $\det A \neq 0$ to $\frac{1}{\lambda} \in \delta(A^{-1})$
Jeśli $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oraz $A = A^T$ to $\delta(A) \subset \mathbb{R}$
Jeśli $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ oraz $A = A^*$ to $\delta(A) \subset \mathbb{R}$
 $A^* = \overline{A}^T = \overline{A^T}$ sprzężenie hermitowskie macierzy
 $A^*A = AA^* = I_n$ macierz unitarna

12 Węzły Czebyszewa

$T_n = \cos(n \arccos x)$
 $T_{k+1} = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$
Węzły Czebyszewa na dowolnym przedziale $[a, b]$

$$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\left(\frac{2i+1}{2n+2}\right)\pi\right)$$

Tw. Fabera Dla dowolnego ciągu układu węzłów istnieje taka funkcja ciągła, że ciąg wielomianów interpolacyjnych, na tych węzłach, nie jest do niej zbieżna
Tw. Jeśli f jest funkcją ciągłą to istnieje taki ciąg układów węzłów, że zbudowane na nich wielomiany interpolacyjne tworzą ciąg zbieżny do f
Tw. Weierstrassa Jeśli funkcja f jest ciągła to dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje taki wielomian p , że $\max |f(x) - p(x)| \leq \epsilon$