

## 1 Uwarunkowanie

$$\delta + 1 = \frac{1}{1-\delta} \quad \delta^2 \approx 0$$

Błąd względny wyniku:

$$\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| |\delta|$$
$$\text{cond}(x) = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| \sum_{k=1}^n \left| \frac{x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_k)}{f(x_1, \dots, x_k)} \right| \quad (f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R})$$

Uwarunkowanie zadania numerycznego:

$$\frac{\|f(\tilde{d}) - f(d)\|}{\|f(d)\|} \leq \text{cond}(d) \frac{\|d - \tilde{d}\|}{\|d\|}$$

## 2 Normy

### 2.1 Wektorowe

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$
$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| \quad \|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

### 2.2 Macierzowe

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$
$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} \quad A^* = \bar{A}^T$$
$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

zgodność norm jeśli:  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$   
dla normy Frobeniusa:  $\|Ax\|_F \leq \|A\|_F \|x\|_2$   
dla dowolnej zachodzi:  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

## 3 Arytmetyka zmiennie przecinkowa (fl)

Zbiór  $M(2, t, k)$  nie jest zamknięty ze względu na działania arytmetyczne.  $fl(x \diamond y) = rd(x \diamond y)$  zatem błąd arytmetyki jest taki sam jak błąd arytmetyki reprezentacji wyniku.  
Zatem  $fl(x \diamond y) = (x \diamond y)(1 + \delta)$   
jeżeli  $x = m_1 \cdot 2^{c_1}$   $y = m_2 \cdot 2^{c_2}$  oraz  $c_1 - c_2 > t$  to  $fl(x + y) = x$

## 4 Numeryczna poprawność

Def. Algorytm A dla zadania  $\varphi$  nazywamy numerycznie poprawnym jeśli istnieje stała  $k$  niezależna od wskaźnika uwarunkowania i niezależna od arytmetyki tż dla dowolnej danej  $d \in D$  istnieje dana  $\tilde{d}$  tż  $\|d - \tilde{d}\| \leq K \cdot 2^{-t} \|d\|$  oraz  $fl(A(d)) = \varphi(\tilde{d})$   
Czyli, wynik algorytmu A dla danej d (dokładniej) w arytmetyce fl jest dokładnym wynikiem zadania  $\varphi$  dla nieco zaburzonej danej.  
Oszacowanie błędu alg. num. poprawnego:

$$\|fl(A(d)) - \varphi(d)\| \leq \text{cond}(d) \frac{K \cdot 2^{-t} \|d\|}{\|d\|} \|\varphi(d)\|$$

## 5 Interpolacja

### 5.1 Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x)$$

gdzie:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

### 5.2 Newton

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

gdzie:

$$c_k = f_{0,1,2,\dots,k}$$

oraz

$$f_{i,i+1,\dots,k+i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{i+1,\dots,k} + f_{i,\dots,(i+k-1)}}{x_{i+k} - x_i}$$

Hermite identycznie tylko że w tabeli węzły się powtarzają i w miejscu różnic dzielonych których nie można otrzymać wpisujemy  $\frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$  a w wielomianie interpolacyjnym składniki postaci  $(x - x_i)$  będą posiadały odpowiednią potęgę

## 6 Całkowanie numeryczne

Kwadratura jest rzędu  $r$  jeśli jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia  $r - 1$  oraz istnieje wielomian stopnia  $r$  dla której nie jest dokładna

### 6.1 Trapezy

$$S(f) = \sum_{k=1}^N \frac{x_k - x_{k-1}}{2} (f(x_k) + f(x_{k-1})) =$$
$$= \frac{H}{2} \left( f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(a + kH) \right)$$
$$|E(f)| = \left| \sum_{k=1}^N \frac{H^3 f''(\xi_k)}{12} \right| \leq \frac{H^2(b-a)}{12} \sup_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$$

### 6.2 Prostokąty

$$S(f) = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) = H \sum_{k=0}^n f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)$$
$$|E(f)| \leq \frac{NH^3}{24} \sup_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)| = \frac{H^2}{24} (b-a) \sup_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$$

### 6.3 Simpson

$$S(f) = \sum_{k=1}^N \frac{H}{6} \left( f(x_{k-1}) + 4f\left(x_{k-1} + \frac{H}{2}\right) + f(x_k) \right)$$
$$|E(f)| = \left| \sum_{k=1}^N \frac{H^5 f^{(4)}(\xi_k)}{90 \cdot 2^5} \right| \leq \frac{H^4(b-a)}{180 \cdot 2^4} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)|$$

## 7 Rozwiązywanie układów r. liniowych $\det A \neq 0$

### 7.1 Metoda Eliminacji Gaussa GE

Tw.1 Jeśli  $A$  jest macierzą dodatnio określoną, to metoda GE zastosowana do  $Ax = b$  jest wykonalna  
Tw.2 Jeśli  $A$  jest silnie diagonalnie dominująca, to metoda GE zastosowana do układu  $Ax = b$  jest wykonalna

### 7.2 GEPP

W  $k$ -tym kroku wybieramy wierszowo (analog. kolumnowo)  $\max_{i \in \{k, \dots, n\}} |a_{ik}|$  i zamieniamy  $k$ -ty wiersz z wierszem z maksymalnym el. w macierzy  $[A^{(k-1)}]b^{(k-1)}$

### 7.3 GECP

w  $k$ -tym kroku znajdujemy  $p, q$  tż.  $|a_{pq}| = \max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} |a_{ij}|$  i zamieniamy  $p$  wiersz z  $k$  oraz  $q$  kolumnę z  $k$  przy zamianie kolumn następuje zamiana zmiennych w  $x$

### 7.4 Rozkład LU

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow Ly = b \wedge Ux = y \quad (\text{wyznaczamy } y \text{ potem } x)$$

### 7.5 Rozkład PA=LU

$$Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb \quad (\text{i dalej tak samo jak w LU})$$

### 7.6 Banachiewicz-Cholesky

Jeśli  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$  jest symetryczna i dodatnio określona, to istnieje dokładnie jedna macierz  $L$  (dolnotrójkątna) z dodatnimi elementami na głównej przekątnej tż  $A = LL^T$  Fakt:  $\sqrt{\omega_1} = l_{11} \dots \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_{k-1}}} = l_{kk}$   
 $\omega$  wyznaczniki wiodących minorów głównych  
Tw. Sylwestera dla każdego  $i \in [k]$   $\omega_i > 0 \Leftrightarrow A$  jest dodatnio określona

## 8 Iteracyjne metody rozwiązywania u.r.l.

Tw. Metoda iteracyjna  $x^{(k+1)} = Bx^k + c$  jest zbieżna globalnie  $\Leftrightarrow \rho(B) < 1$   
im  $\rho(B)$  mniejsze tym szybciej  
Tw. Jeśli  $\|B\| < 1$  gdzie  $\|\cdot\|$  jest normą zgodną z pewną normą wektorową to metoda  $x^{(k+1)} = Bx^k + c$  jest zbieżna globalnie  
Tw. Greszgorin niech  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Dla każdej wartości własnej  $\lambda \in \sigma(A)$  istnieje  $i \in \{1, \dots, n\}$  taki, że

$$\lambda \in K_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|\}$$

gdzie  $K_i$  to  $i$ -te koło Greszgorina. Ponadto  $\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^n K_i = G(A)$  gdzie  $G(A)$  nazywany jest zbiorem Greszgorina. ( $A = A^T \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ )

Warunki stopu:

- 1)  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq d$  błąd bezwzględny
- 2)  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq d\|x^{(k)}\|$  błąd względny
- 3)  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq d_1\|x^{(k)}\| + d_2$  warunek Gilla
- 4)  $\|Ax^{(k)} - b\| \leq d$  błąd residualny.

### 8.1 Metoda Jacobiego

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$B = -D^{-1}(L + U)$$

W metodzie Jacobiego warunek dostateczny zbieżności  $\|B\|_\infty < 1$  jest spełniony np. wtedy, gdy macierz  $A$  jest silnie diagonalnie dominująca

$$\left( \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \leq |a_{ii}| \right)$$

for  $p = 1, \dots, n$  do

$$x_p^{(k+1)} = \left( b_p - \sum_{j=1}^{p-1} a_{pj}x_j^{(k)} - \sum_{j=p+1}^n a_{pj}x_j^{(k)} \right) / a_{pp}$$

end for

### 8.2 Gauss-Seidel

$$x^{(k+1)} = -(L + D)^{-1}Ux^{(k)} + (L + D)^{-1}b$$

Jeśli  $A = A^T$  oraz  $A$  jest dodatnio określona, to metoda

Gaussa-Seidla jest zbieżna.

Jeśli  $A$  jest silnie diagonalnie dominująca to metoda Gaussa-Seidela jest zbieżna.

### 8.3 Metoda SOR

$$B_{SOR} = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D - \omega U)$$

$$c_{SOR} = \omega(D + \omega L)^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = B_{SOR}x^{(k)} + c_{SOR}$$

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j < i} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j > i} a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

Tw. Kahana: Dla metody SOR  $\rho(B_{SOR}) \geq |\omega - 1|$

Tw. Jeśli  $A$  jest symetryczna i dodatnio określona, to metoda SOR jest zbieżna dla każdego  $\omega \in (0, 2)$

### 8.4 Warunek zbieżności

$$x = Bx + c$$

$$x - x^{(k+1)} = Bx + c - x^{(k+1)} = Bx + c - Bx^{(k)} - c$$

$$x - x^{(k+1)} = B(x - x^{(k)}) = \dots = B^{k+1}(x - x^{(0)})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} B^{k+1} = 0$$

## 9 Wyznaczanie m. zerowych funkcji 1 zmiennej

### 9.1 Metoda Newtona

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Jeżeli **1)**  $f$  jest klasy  $C^2([a, b])$  **2)**  $f(a)f(b) < 0$  **3)**  $f'$  i  $f''$  nie zmieniają znaku na  $[a, b]$  **4)**  $x_0$  jest takie, że  $f(x_0)f'' > 0$  to metoda newtona jest zbieżna

Błąd k-tego przybliżenia można oszacować poprzez nierówności ( $x^*$  to dokładna wartość pierwiastka):

$$|x^* - x_k| \leq \frac{f(x_k)}{m}$$

lub

$$|x^* - x_k| \leq \frac{M}{2m}(x^* - x_{k-1})^2$$

gdzie

$$m = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

Metoda Newtona jest metodą o zbieżności kwadratowej (rzęd zbieżności wynosi 2). Wyjątkiem są zera wielokrotne, dla których zbieżność jest liniowa i wynosi 1. Jej współczynnik zbieżności to  $\frac{M}{2m}$ . Oznacza to, iż przy spełnionych założeniach błąd maleje kwadratowo wraz z ilością iteracji.

### 9.2 Metoda siecznych

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Warunki zb. te same tylko oba  $x_0$  i  $x_1$  muszą spełniać **4)**

### 9.3 Metoda Halley'a

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(k_k)}{f'(k_k) - \frac{f(x_k)}{2f'(k_k)}f''(k_k)}$$

### 9.4 Metoda Parabol

$$p_k = x_{k+1} - x_k \text{ rozwiązujemy } f(x_k) + f'(x_k)p_k + \frac{1}{2}f''(x_k)p_k^2 = 0$$

(delta) jako  $p_k = \min\{|p_k^{(1)}|, |p_k^{(2)}|\}$  obliczamy  $x_{k+1} = p_k + x_k$

### 9.5 Metoda Bisekcji

$f$  ciągła  $[a, b]$  tż  $f(a)f(b) < 0$

for  $p = 1, \dots$ , do

$$t_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

if  $f(a_k)f(t_k) < 0$  then

$$a_{k+1} = a_k \quad b_{k+1} = t_k$$

else if  $f(a_k)f(t_k) > 0$  then

$$a_{k+1} = t_k \quad b_{k+1} = b_k$$

else

wynik  $t_k$

end if

end for

### 9.6 Zbieżność

Przyjmijmy, że  $e_k = x_k - \alpha$  jest błędem w  $k$ -tym kroku Jeśli istnieją

liczby  $p$  i  $c$  tż  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c$  to  $p$  nazywamy wykładnikiem

zbieżności metody iteracyjnej

$|e_{k+1}| \leq c|e_k|^p$  im  $p$  większe tym metoda szybsza

Newtona  $p = 2$ , Stycznych  $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , Halleg'a  $p = 3$ , Parabol  $p = 3$ ,

Bisekcji  $p = 1$

Dla Newtona (dd z Taylora w ot.  $x_0$ ) dla miejsc pojedynczych

$$|e_{k+1}| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} \right| |e_k|^2$$

## 10 Rozwiązanie układów równań nieliniowych

### TO DO:

#### 10.1 Metoda Richardsona

#### 10.2 Metoda Parabol

#### 10.3 Metoda iteracji prostej

### 11 Uwarunkowanie zadania roz. u.r.1

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$$

Jeśli  $A = A^T$ , to

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{(\rho(A))^2} = \rho(A)$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \left| \frac{1}{\lambda_{\min}(A)} \right|$$