1 Uwarunkowanie

$\delta + 1 = \frac{1}{1-\delta} \qquad \delta^2 \approx 0$
Błąd względny wyniku:

$$\left|\frac{f(\widetilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| |\delta|$$

$$cond(x) = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| \qquad \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_k)}{f(x_1, \ldots, x_k)}\right| \quad (f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R})$$

Uwarunkowanie zadania numerycznego:

$$\frac{||f(\widetilde{d}) - f(d)||}{||f(d)||} \leq cond(d) \frac{||d - \widetilde{d}||}{||d||}$$

2 Normy

2.1 Wektorowe

$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad ||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
$||x||_\infty = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_k| \quad ||x||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

2.2 Macierzowe

$||A||_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad ||A||_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$
$||A||_2 = \sup_{x \neq 0,\ x \in \mathbb{C}^n} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} = \sqrt{\rho\,(A^* A)} \quad A^* = \overline{A}^T$
$||A||_F = \sqrt{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n |a_{ij}|^2}$
zgodność norm jeśli: $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$
dla normy Frobeniusa: $||Ax||_F \leq ||A||_F ||x||_2$
dla dowolnej zachodzi: $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

3 Arytmetyka zmienno przecinkowa (fl)

Zbiór $M(2, t, k)$ nie jest zamknięty ze względu na działania arytmetyczne. $fl(x \diamond y) = rd(x \diamond y)$ zatem błąd arytmetyki jest taki sam jak błąd arytmetyki reprezentacji wyniku.
Zatem $fl(x \diamond y) = (x \diamond y)(1 + \delta)$. Jeżeli ($t$ bity mantysy) $x = m_1 \cdot 2^{c_1}$ $y = m_2 \cdot 2^{c_2}$ oraz $c_1 - c_2 > t$ to $fl(x + y) = x$

4 Numeryczna poprawność

Def. Algorytm A dla zadania φ nazywamy numerycznie poprawnym jeśli istnieje stała k niezależna od wskaźnika uwarunkowania i niezależna od arytmetyki tż dla dowolnej danej $d \in D$ istnieje dana $\widetilde{d}$ tż $||d - \widetilde{d}|| \leq K \cdot 2^{-t} ||d||$ oraz $fl(A(d)) = \varphi(\widetilde{d})$
Czyli, wynik algorytmu A dla danej d (dokładniej) w arytmetyce fl jest dokładnym wynikiem zadania φ dla nieco zaburzonej danej.
Oszacowanie błędu alg. num. poprawnego:
$||fl(A(d)) - \varphi(d)|| \leq cond(d) \frac{K \cdot 2^{-t} ||d||}{||d||} ||\varphi(d)||$
Sama numeryczna poprawność nie gwarantuje dokładności (zależy od cond i K)

5 Interpolacja

$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{n+1!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0) \ldots (x - x_n)$

5.1 Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

gdzie:

$$l_i(x) = \prod_{j=0,\ j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

5.2 Newton

$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})$
gdzie:

$$c_k = f_{0,1,2,\ldots,k}$$

oraz

$$f_{i,i+1,\ldots,k+i} \overset{def}{=} \frac{f_{i+1,\ldots,k} - f_{i,\ldots,(i+k-1)}}{x_{i+k} - x_i}$$

Hermite identycznie tylko że w tabeli węzły się powtarzają i w miejscu różnic dzielonych których nie można otrzymać wpisujemy $\frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$ a w wielomianie interpolacyjnym składniki postaci $(x - x_i)$ będą posiadały odpowiednią potęgę

6 Całkowanie numeryczne

Kwadratura jest rzędu r jeśli jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnie $r - 1$ oraz istnieje wielomian stopnia r dla której nie jest dokładna

6.1 Trapezy $\xi \in (a, b) \quad E(f) = I(f) - S(f)$

$$S(f) = \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_k) + f(x_{k-1})) =$$

$$= \frac{H}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(a + kH)\right)$$

$$E(f) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{H^3 f''(\xi_k)}{12} = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi)$$

6.2 Prostokąty $\xi \in (a, b) \quad E(f) = I(f) - S(f)$

$$S(f) = \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) = H \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)$$

$$E(f) = \frac{(b-a)^3}{24N^2} f''(\xi) = \frac{H^2}{24}(b - a) f''(\xi)$$

6.3 Simpson $\xi \in (a, b) \quad E(f) = I(f) - S(f)$

$$S(f) = \sum_{k=1}^{N} \frac{H}{6}\left(f(x_{k-1}) + 4f\left(x_{k-1} + \frac{H}{2}\right) + f(x_k)\right)$$

$$E(f) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{H^5 f^{(4)}(\xi_k)}{90 \cdot 2^5} = -\frac{(b-a)^5}{2880N^4} f^{(4)}(\xi)$$

7 Rozwiązywanie układów r. liniowych $detA \neq 0$

7.1 Metoda Eliminacji Gaussa GE

Tw.1 Jeśli A jest macierzą dodatnio określoną, to metoda GE zastosowana do $Ax = b$ jest wykonalna
Tw.2 Jeśli A jest silnie diagonalnie dominująca, to metoda GE zastosowana do układu $Ax = b$ jest wykonalna

7.2 GEPP

O ile $detA \neq 0$ GEPP jest wykonalna W k-tym kroku wybieramy wierszowo (analog. kolumnowo) $\max\limits_{i \in \{k,\ldots,n\}} |a_{ik}|$ i zamieniamy k-ty wiersz z wierszem z maksymalnym el. w macierzy $[A^{(k-1)} | b^{(k-1)}]$

7.3 GECP

w k-tym kroku znajdujemy p, q tż. $|a_{pq}| = \max\limits_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} |a_{ij}|$ i zamieniamy p wiersz z k oraz q kolumnę z k przy zamianie kolumn następuje zamiana zmiennych w x

7.4 Rozkład LU

Rozkład LU istnieje $\Leftrightarrow$ GE jest wykonalne
$Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow Ly = b \wedge Ux = y$ (wyznaczamy y potem x)

7.5 Rozkład PA=LU

$Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb$ (i dalej tak samo jak w LU)

7.6 Banachiewicz-Cholesky

Jeśli $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ jest symetryczna i dodatnio określona, to istnieje dokładnie jedna macierz L (dolnotrójkątna) z dodatnimi elementami na głównej przekątnej tż $A = LL^T$ Fakt: $\sqrt{\omega_1} = l_{11} \ldots \sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_{k-1}}} = l_{kk}$
ω wyznaczniki wiodących minorów głównych
Tw. Sylvestera dla każdego $i \in [k]$ $\omega_i > 0 \Leftrightarrow A$ jest dodatnio określona
Jeśli dla macierzy symetrycznej rozkład Ba-Ch nie istnieje to macierz nie jest dodatnio określona.

8 Iteracyjne metody rozwiązywania u.r.l.

Tw. Metoda iteracyjna $x^{(k+1)} = Bx^k + c$ jest zbieżna globalnie $\Leftrightarrow \rho(B) < 1$
im $\rho(B)$ mniejsze tym szybciej
Tw. Jeśli $||B|| < 1$ gdzie $||\cdot||$ jest normą zgodną z pewną normą wektorową to metoda $x^{(k+1)} = Bx^k + c$ jest zbieżna globalnie
$|\lambda| \leq ||A||$ dd ze zgodności norm
Tw. Gerszgorina niech $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dla każdej wartości własnej $\lambda \in \sigma(A)$ istnieje $i \in \{1, \ldots, n\}$ taki, że

$$\lambda \in K_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

gdzie K_i to i-te koło Gerszgorina. Ponadto $\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i = G(A)$ gdzie $G(A)$ nazywany jest zbiorem Gerszgorina. $(A = A^T \rightarrow \lambda \in \mathbb{R})$
Tw. Jeśli k kół Gerszgorina tworzy zbiór spójny i rozłączny z pozostałymi kołami to w ytm zbiorze znajduje się dokładnie k wartości własnych **Warunki stopu:**
1) $||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| \leq d$ błąd bezwzględny
2) $||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| \leq d||x^{(k)||}$ błąd względny
3) $||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| \leq d_1||x^{(k)}|| + d_2$ warunek Gilla
4) $||Ax^{(k)} - b|| \leq d$ błąd residualny.

8.1 Metoda Jacobiego

$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$
$B = -D^{-1}(L+U)$
W metodzie Jacobiego warunek dostateczny zbieżności $||B||_\infty < 1$ jest spełniony wtedy, gdy macierz A jest silnie diagonalnie dominująca $\left(\sum_{j=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|\right)$

for $p = 1, \ldots, n$ **do**
  $x_p^{(k+1)} = \left(b_p - \sum_{j=1}^{p-1} a_{pj}x_j^{(k)} - \sum_{j=p+1}^{n} a_{pj}x_j^{(k)}\right)/a_{pp}$
end for

8.2 Gauss-Seidel

$x^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}Ux^{(k)} + (L+D)^{-1}b$
Jeśli $A = A^T$ oraz A jest dodatnio określona, to metoda Gaussa-Seidla jest zbieżna.
Jeśli A jest silnie diagonalnie dominująca to metoda Gaussa-Seidela jest zbieżna. (na wykładzie te tw. tylko dla Jacobiego)$^?$

8.3 Metoda SOR

$B_{SOR} = (D + \omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega U)$
$c_{SOR} = \omega(D + \omega L)^{-1}b$
$x^{(k+1)} = B_{SOR}x^{(k)} + c_{SOR}$

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

Tw. Kahana: Dla metody SOR $\rho(B_{SOR}) \geq |\omega - 1|$
Tw. Jeśli A jest symetryczna i dodatnio określona, to metoda SOR jest zbieżna dla każdego $\omega \in (0, 2)$ s

8.4 Warunek zbieżności

$x = Bx + c$
$x - x^{(k+1)} = Bx + c - x^{(k+1)} = Bx + c - Bx^{(k)} - c$
$x - x^{(k+1)} = B(x - x^{(k)}) = \ldots = B^{k+1}(x - x^{(0)})$
$\lim_{k\to\inf} e_k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\inf} B^{k+1} = 0$

9 Wyznaczanie m. zerowych funkcji 1 zmiennej

Warunki stopu te same oprócz **4)** $|f(x_k)| \leq d$ (stosować ostrożnie)

9.1 Metoda Newtona

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
Jeżeli **1)** f jest klasy $C^2([a,b])$ **2)** $f(a)f(b) < 0$ **3)** f' i f'' nie zmieniają znaku na $[a,b]$ **4)** x_0 jest takie, że $f(x_0)f''(x_0) > 0$ to metoda newtona jest zbieżna
Błąd k-tego przybliżenia można oszacować nierówności z podsekcji **9.6**
Metoda Newtona jest metodą o zbieżności kwadratowej (rząd zbieżności wynosi 2). Wyjątkiem są zera wielokrotne, dla których zbieżność jest liniowa i wynosi 1.

9.2 Metoda siecznych

$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$
Warunki zb. te same tylko oba x_0 i x_1 muszą spełniać **4)**

9.3 Metoda Halley'a

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(k_k)}{f'(k_k) - \frac{f(x_k)}{2f'(k_k)}f''(k_k)}$$

9.4 Metoda Parabol

$p_k = x_{k+1} - x_k$ rozwiązujemy $f(x_k) + f'(x_k)p_k + \frac{1}{2}f''(x_k)p_k^2 = 0$ (deltą) jako $p_k = min\{|p_k^{(1)}|, |p_k^{(2)}|\}$ obliczamy $x_{k+1} = p_k + x_k$

9.5 Metoda Bisekcji

f ciągła $[a,b]$ tż $f(a)f(b) < 0$
for $p = 1, \ldots,$ **do**
  $t_k = \frac{a_k + b_k}{2}$
  if $f(a_k)f(t_k) < 0$ **then**
    $a_{k+1} = a_k$ $b_{k+1} = t_k$
  else if $f(a_k)f(t_k) > 0$ **then**
    $a_{k+1} = t_k$ $b_{k+1} = b_k$
  else
    wynik t_k
  end if
end for

9.6 Zbieżność

Przyjmijmy, że $e_k = x_k - \alpha$ jest błędem w k-tym kroku Jeśli istnieją liczby p i c tż $\lim_{k\to\inf} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c$ to p nazywamy wykładnikiem zbieżności metody iteracyjnej
$|e_{k+1}| \leq c|e_k|^p$ im p większe tym metoda szybsza
Newtona $p = 2$, Stycznych $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, Halleg'a $p = 3$, Parabol $p = 3$, Bisekcji $p = 1$
Dla Newtona (dd z Taylora w ot. x_0) dla miejsc pojedynczych

$$|e_{k+1}| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(x_k)}\right||e_k|^2$$

10 Rozwiązywanie układów równań nielinowych

(Newton) $x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)})$ gdzie $F'(x)$ to macierz Jacobiego funkcji $F(x)$ powstałej z układu równań.
Oznaczamy $p^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ więc $p^{(k)} = -[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)})$
1) obliczamy $F(x^{(k)})$ i $F'(x^{(k)})$
2) rozwiązujemy u.r.l. $F'(x^{(k)})p^{(k)} = -F(x^{(k)})$
3) Obliczamy $x^{(k+1)} = x^{(k)} + p^{(k)}$

11 Uwarunkowanie zadania roz. u.r.l i algebra

$$cond(A) = ||A||\ ||A^{-1}||$$
$$cond_2(A) = ||A||_2\ ||A^{-1}||_2 = \left|\frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}\right| \text{ dla } A = A^T$$
$$\text{Jeśli } A = A^T\text{, to } ||A||_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{(\rho(A))^2} = \rho(A)$$
$$||A^{-1}||_2 = \left|\frac{1}{\lambda_{min}(A)}\right|$$

Jeśli $\lambda \in \delta(A)$ oraz $detA \neq 0$ to $\frac{1}{\lambda} \in \delta(A^{-1})$
Jeśli $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oraz $A = A^T$ to $\delta(A) \subset \mathbb{R}$
Jeśli $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ oraz $A = A^*$ to $\delta(A) \subset \mathbb{R}$
$A^* = \overline{A}^T = \overline{A^T}$ sprzężenie hermitowskie macierzy
$A^*A = AA^* = I_n$ macierz unitarna

12 Węzły Czebyszewa

$T_n = \cos(n \arccos x)$
$T_{k+1} = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$
Węzły Czebyszewa na dowolnym przedziale $[a,b]$

$$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cos\left(\left(\frac{2i+1}{2n+2}\right)\pi\right)$$

Tw. Fabera Dla dowolnego ciągu układu węzłów istnieje taka funkcja ciągła, że ciąg wielomianów interpolacyjnych, na tych węzłach, nie jest do niej zbieżna
Tw. Jeśli f jest funkcją ciągłą to istnieje taki ciąg układów węzłów, że zbudowane na nich wielomiany interpolacyjne tworzą ciąg zbieżny do f
Tw. Weierstrassa Jeśli funkcja f jest ciągła to dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje taki wielomian p, że $\max|f(x) - p(x)| \leq \epsilon$