1 Całkowanie numeryczne

Kwadratura jest rzędu r jeśli jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnie $r-1$ oraz istnieje wielomian stopnia r dla której nie jest dokładna

1.1 Trapezy $\xi \in (a,b) \quad E(f) = I(f) - S(f)$

$$E(f) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{H^3 f''(\xi_k)}{12} = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi)$$

1.2 Prostokąty $\xi \in (a,b) \quad E(f) = I(f) - S(f)$

$$E(f) = \frac{(b-a)^3}{24N^2} f''(\xi) = \frac{H^2}{24}(b-a) f''(\xi)$$

1.3 Simpson $\xi \in (a,b) \quad E(f) = I(f) - S(f)$

$$E(f) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{H^5 f^{(4)}(\xi_k)}{90 \cdot 2^5} = -\frac{(b-a)^5}{2880N^4} f^{(4)}(\xi)$$

1.4 Złożona S_1 na $[a,b]$ S_2 na $[c,d]$

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y) dx\, dy \approx S_2(S_1(f)) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} B_j (\sum_{i=0}^{n} (A_i f(x_i, y_j)))$$

$$\max_{y \in [c,d]} \left| S_1(f)(y) - \int_a^b f(x,y) dx \right| \le e_1$$

$$\max_{x \in [a,b]} \left| S_2(f)(x) - \int_c^d f(x,y) dy \right| \le e_2$$

$$\left| S(f) - \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx\, dy \right| \le (d-c)e_1 + (b-a)e_2$$

1.5 Na trójkącie P pole

formuła rzędu 2:

$$P \cdot f(p_{012}) \text{ gdzie } p_{012} = \tfrac{1}{3}(p_0 + p_1 + p_2)$$

formuła rzędu 3:

$$\tfrac{P}{3} \cdot [f(p_{01}) + f(p_{12}) + f(p_{02})] \text{ gdzie } p_{ij} = \tfrac{1}{2}(p_i + p_j)$$

formuła rzędu 4:

$$\tfrac{P}{60}[27 f(p_{012}) +$$
$$+3(f(p_0) + f(p_1) + f(p_2)) + 8(f(p_{01}) + f(p_{12}) + f(p_{02})$$

$$P = \tfrac{1}{2}|det[1; \overrightarrow{x}; \overrightarrow{y}]| \text{ - pole}$$

Błąd dla powyższych (przypadek) $E \le Ch^p$, gdzie p - rząd kwadratur

1.6 Gaussa-Legendre'a

Rząd kwadratury równy jest ilości parametrów które ustalamy (dla Gaussa przy liczeniu węzłów od 0 mamy $2n+2$)
Wyznaczanie współczynników A_k

$$\int_a^b w(x) l_i(x) dx = A_i, \quad l_i(x) = \prod_{j=0, j\ne i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

albo inaczej po ówczesnym obliczeniu $x_0, \ldots, x_n$:

$$\int_a^b w(x) x^j dx = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^j \quad \text{dla} \quad j = 0, \ldots, n;$$

Błąd kw. złożonej Gaussa-Legendre'a:

$$(b-a)^5 \tfrac{1}{4320 N^4} f^{(4)}(\xi)$$

2 Wielomiany ortogonalne

$$\langle g, h \rangle = \int_a^b w(x) g(x) h(x) dx$$

$$P_k(x) = (\alpha_k x + \beta_k) P_{k-1}(x) + \gamma_k P_{k-2}(x)$$

$$P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = a_0 \ne 0$$

$$\alpha_k = \frac{a_k}{a_{k-1}}, \quad \beta_k = -\frac{\alpha_k \langle x P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{||P_{k-1}||^2}$$

$$\gamma_k = -\frac{\alpha_k ||P_{k-1}||^2}{\alpha_{k-1} ||P_{k-2}||^2}$$

3 Aproksymacja

Tw. Element $f^* \in U$ jest elementem optymalnym dla $f \in V$ $(U \subset V)$ względem przestrzeni $U \iff$ dla dowolnego $g \in U$ $\langle f^* - f, g \rangle = 0$ (a więc $f^* - f$ jest ortogonalny do U)

ciągła $\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x)\, dx$
dyskretna $\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i) g(x_i)$

Konstruujemy macierz $G = [\langle g_i, g_j \rangle]_{i,k=0}^{n}$ (w wierszu nie zmienia się to co na pierwsze w iloczynie) wektor $d = [\langle g_i, f_i \rangle]_{i=0}^{n}$ i szukamy rozwiązania $Ax = d$
Dla dyskretnej można $M = [f_j(x_i)]_{i,k=0}^{n}$ (w wierszu te same x_i) $G = M^T M \qquad d = M^T F$ gdzie F to wektor dany z wartościami przybliżanej funkcji

4 Splajny

$S'(a) = f'(a)$, $S'(b) = f'(b)$ - warunki Hermite'a
$S'(a) = S'(b)$, $S''(a) = S'(b)$ - warunki cykliczne
$S''(a) = S''(b) = 0$ naturalna funkcja sklejana

nota-knot: $\begin{cases} S(\frac{x_0+x_1}{2}) = \frac{f(x_0)+f(x_2)}{2}, \\ S(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}) = \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}, \end{cases}$
Funkcja sklejana n-tego stopnia to jest, że jest klasy C^{n-1}
Δ_n - siatka, podział przedziału[a, b] tż.
$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.
$S_m(\Delta_n, k)$ - przestrzeń funkcji sklejanych, tż.: 1) są klasy $C^k([a, b])$, 2) ich obcięcie do każdego z podprzedziałów $[x_i, x_{i+1}] i = 0, 1, ..., n-1$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m.

4.1 $S_1(\Delta_n, 0)$

$\varphi_0(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - X_0}, x \in [x_0, x_1]$
$\varphi_n(x) = \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, x \in [x_{n-1}, x_n]$
$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$
W pozostałych punktach wszystkie funkcje mają wartość 0.

4.2 $S_3(\Delta_n, 2)$

Węzły równo odległe, $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}, i = 0, ..., n$.

$$\frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 \\ (x_{i+2} - x)^3 \\ 0 \end{cases}$$

Funkcja sklejana: $S(x) = \sum_{k=-1}^{n+1} \alpha_k B_k(x)$,

5 Metoda iteracji prostej

Tw. D zbiór domknięty w $\mathbb{R}$ oraz niech $g : D \to D$ i jest odwzorowaniem zwężającym wtedy metoda iteracji prostej g jest zbieżna na D do dokładnie jednego rozwiązania.
Jeśli g jest ciągła i D jest domknięty to mamy $g(x_1) - g(x_0) = g'(\xi)(x_1 - x_0)$
g' to macierz Jakobiego
ponadto:
$||g(x_1) - g(x_0)|| = ||g'(\xi)(x_1 - x_0)|| \leq ||g'(\xi)||(x_1 - x_0)||$ jeśli $||g'(\xi)|| < 1$ to mamy odwzorowanie zwężające.
Ograniczając z góry każdy wyraz z macierzy g' otrzymamy macierz A i zachodzi $||g'(\xi)|| < ||A||$ (jeśli ograniczaliśmy $\leq$ analogicznie)