# 1 Całkowanie numeryczne

Kwadratura jest rzędu $r$ jeśli jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnie $r-1$ oraz istnieje wielomian stopnia r dla której nie jest dokładna

### 1.1 Trapezy $\xi \in (a,b)$ $\quad E(f) = I(f) - S(f)$

$$E(f) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{H^3 f''(\xi_k)}{12} = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi)$$

### 1.2 Prostokąty $\xi \in (a,b)$ $\quad E(f) = I(f) - S(f)$

$$E(f) = \frac{(b-a)^3}{24N^2} f''(\xi) = \frac{H^2}{24}(b-a)f''(\xi)$$

### 1.3 Simpson $\xi \in (a,b)$ $\quad E(f) = I(f) - S(f)$

$$E(f) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{H^5 f^{(4)}(\xi_k)}{90 \cdot 2^5} = -\frac{(b-a)^5}{2880N^4} f^{(4)}(\xi)$$

### 1.4 Złożona $S_1$ na $[a,b]$ $S_2$ na $[c,d]$

$$\max_{y\in[c,d]} \left| S_1(f)(y) - \int_a^b f(x,y)dx \right| \le e_1$$

$$\max_{x\in[a,b]} \left| S_2(f)(x) - \int_c^d f(x,y)du \right| \le e_2$$

$$\left| S(f) - \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy \right| \le (d-c)e_1 + (b-a)e_2$$

### 1.5 TODO jeszcze inne jakieś tam gaussy.

Rząd aproksymacji równy jest ilości parametrów które ustalamy (dla gaussa przy liczeniu od 0 mamy $2n+2$)

# 2 Aproksymacja

Konstruujemy macierz $G = \left[\langle g_i, g_j \rangle\right]_{i,k=0}^{n}$ (w wierszu nie zmienia się to co na pierwsze w iloczynie) wektor $d = [\langle g_i, f_i \rangle]_{i=0}^{n}$ i szukamy rozwiązania $Ax = d$
Dla dyskretnej można $M = \left[f_j(x_i)\right]_{i,k=0}^{n}$ (w wierszu te same $x_i$) $G = M^T M \qquad d = M^T F$ gdzie F to wektor dany z wartościami przybliżanej funkcji

# 3 Splajny

$S'(a) = f'(a)$, $S'(b) = f'(b)$ - warunki Hermite'a
$S'(a) = S'(b)$, $S''(a) = S'(b)$ - warunki cykliczne
$S''(a) = S''(b) = 0$ naturalna funkcja sklejana
nota-knot: $\begin{cases} S(\frac{x_0+x_1}{2}) = \frac{f(x_0)+f(x_2)}{2}, \\ S(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}) = \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}, \end{cases}$
Funkcja sklejana n-tego stopnia to jest, że jest klasy $C^{n-1}$

# 4 Metoda iteracji prostej

Tw. $D$ zbiór domknięty w $\mathbb{R}$ oraz niech $g : D \to D$ i jest odwzorowaniem zwężającym wtedy metoda iteracji prostej $g$ jest zbieżna na $D$ do dokładnie jednego rozwiązania.
Jeśli g jest ciągła i $D$ jest domknięty to mamy
$g(x_1) - g(x_0) = g'(\xi)(x_1 - x_0)$
$g'$ to macierz Jakobiego
ponadto:
$||g(x_1) - g(x_0)|| = ||g'(\xi)(x_1 - x_0)|| \le ||g'(\xi)||(x_1 - x_0)||$
jeśli $||g'(\xi)|| < 1$ to mamy odwzorowanie zwężające.
Ograniczając z góry każdy wyraz z macierzy $g'$ otrzymamy macierz $A$ i zachodzi $||g'(\xi)|| < ||A||$ (jeśli ograniczaliśmy $\le$ analogicznie)