# 1 Całkowanie numeryczne

Kwadratura jest rzędu $r$ jeśli jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnie $r-1$ oraz istnieje wielomian stopnia r dla której nie jest dokładna

### 1.1 Trapezy $\xi \in (a,b)$ $\quad E(f) = I(f) - S(f)$

$$E(f) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{H^3 f''(\xi_k)}{12} = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi)$$

### 1.2 Prostokąty $\xi \in (a,b)$ $\quad E(f) = I(f) - S(f)$

$$E(f) = \frac{(b-a)^3}{24N^2} f''(\xi) = \frac{H^2}{24}(b-a) f''(\xi)$$

### 1.3 Simpson $\xi \in (a,b)$ $\quad E(f) = I(f) - S(f)$

$$E(f) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{H^5 f^{(4)}(\xi_k)}{90 \cdot 2^5} = -\frac{(b-a)^5}{2880N^4} f^{(4)}(\xi)$$

### 1.4 Złożona $S_1$ na $[a,b]$ $S_2$ na $[c,d]$

$$\max_{y \in [c,d]} \left| S_1(f)(y) - \int_a^b f(x,y)dx \right| \leq e_1$$

$$\max_{x \in [a,b]} \left| S_2(f)(x) - \int_c^d f(x,y)du \right| \leq e_2$$

$$\left| S(f) - \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy \right| \leq (d-c)e_1 + (b-a)e_2$$

### 1.5 TODO jeszcze inne jakieś tam gaussy.

Rząd aproksymacji równy jest ilości parametrów które ustalamy (dla gaussa przy liczeniu od 0 mamy $2n+2$)

# 2 Aproksymacja

Konstruujemy macierz $G = \left[\langle g_i, g_j \rangle\right]_{i,k=0}^{n}$ (w wierszu nie zmienia się to co na pierwsze w iloczynie) wektor $d = [\langle g_i, f_i \rangle]_{i=0}^{n}$ i szukamy rozwiązania $Ax = d$
Dla dyskretnej można $M = \left[f_j(x_i)\right]_{i,k=0}^{n}$ (w wierszu te same $x_i$) $G = M^T M \qquad d = M^T F$ gdzie F to wektor dany z wartościami przybliżanej funkcji

# 3 Splajny

Naturalna funkcja sklejana to jest że na krańcach przedziału $f''(a) = f''(b) = 0$
Funkcja sklejana n-tego stopnia to jest, że jest klasy $C^{n-1}$

# 4 Metoda iteracji prostej

Tw. $D$ zbiór domknięty w $\mathbb{R}$ oraz niech $g : D \to D$ i jest odwzorowaniem zwężającym wtedy metoda iteracji prostej $g$ jest zbieżna na $D$ do dokładnie jednego rozwiązania.
Jeśli g jest ciągła i $D$ jest domknięty to mamy $g(x_1) - g(x_0) = g'(\xi)(x_1 - x_0)$
$g'$ to macierz Jakobiego
ponadto:
$||g(x_1) - g(x_0)|| = ||g'(\xi)(x_1 - x_0)|| \leq ||g'(\xi)||(x_1 - x_0)||$
jeśli $||g'(\xi)|| < 1$ to mamy odwzorowanie zwężające.
Ograniczając z góry każdy wyraz z macierzy $g'$ otrzymamy macierz $A$ i zachodzi $||g'(\xi)|| < ||A||$ (jeśli ograniczaliśmy $\leq$ analogicznie)