

Politechnika Poznańska Wydział Automatyki, Robotyki i Elektrotechniki Automatyka i Robotyka	
Dz>AiR>S5>WdSI	Wprowadzenie do Sztucznej Inteligencji (WdSI)
Skład osobowy: Bartosz Terlecki Kacper Walczak	Projektowanie filtru Kalmana dla Silnika <b>JGA25-370 z przekładnią</b>

## Spis treści

<b>1 Wprowadzenie</b>	<b>2</b>
1.1 Cel Projektu . . . . .	2
1.2 Opis rzeczywistego problemu . . . . .	2
1.3 Inne metody rozwiązywanie problemu . . . . .	2
1.3.1 Rekurencyjne Sieci Neuronowe (RNN/LSTM) . . . . .	2
1.3.2 Filtracja oparta na Logice Rozmytej (Fuzzy Logic) . . . . .	3
1.3.3 Filtr Cząsteczkowy . . . . .	3
1.4 Identyfikacja modelu obiektu regulacji metodą skokową . . . . .	4
1.5 Filtr uśredniający SMA . . . . .	5
1.6 Filtr Kalmana . . . . .	5
1.6.1 Faza predykcji i korekcji . . . . .	5
1.6.2 TU JAKIES OBLICZENIA TARARARA . . . . .	6
<b>2 Przebieg projektu</b>	<b>6</b>
2.1 Pomiar i identyfikacja modelu obiektu . . . . .	6
2.2 Projektowanie regulatora PI metodą SIMC . . . . .	8
2.3 Projektowanie filtru kalmana . . . . .	10
2.3.1 Przebieg . . . . .	10
2.3.2 Opóźnienie . . . . .	10
2.4 Porównanie filtru Kalmana z filtrem SMA . . . . .	11
2.4.1 Porównanie odpowiedzi czasowej . . . . .	11
2.4.2 Charakterystyka błędów i skuteczność filtracji . . . . .	12
<b>3 Wnioski</b>	<b>13</b>

## Spis rysunków

1 Nieprzefiltrowana odpowiedź skokowa badanego obiektu . . . . .	6
2 Przefiltrowana odpowiedź skokowa badanego obiektu . . . . .	7
3 Wygładzenie sygnału odpowiedzi skokowej obiektu za pomocą filtra SMA . . . . .	7
4 Odpowiedzi skokowe dla różnych $\tau_c$ zaprojektowanego regulatora PI . . . . .	9
5 Odpowiedź filtru Kalmana przy $Q=0.5$ i $R=5$ . . . . .	10
6 Porównanie filtru Kalmana i filtru SMA(okno=20) . . . . .	11
7 Charakterystyka błędów . . . . .	12

# Spis tabel

1	Porównanie omawianych metod z rozwiązaniem zastosowanym w projekcie . . . . .	4
---	---	---

## 1 Wprowadzenie

### 1.1 Cel Projektu

Celem naszego projektu jest poprawa zaszumionych pomiarów w trudnych warunkach oraz porównanie działania filtru probabilistycznego (filtru Kalmana) z filtrem uśredniającym (FIR). W projekcie wprowadziliśmy zaszumiony sygnał, a następnie zastosowaliśmy oba filtry, aby ocenić ich skuteczność w redukcji szumów i poprawie dokładności estymacji stanu układu. Dodatkowo celem było zbadanie wpływu parametrów filtru na jakość wygładzenia sygnału i precyzję przewidywań. Ocena mocnych i słabych stron obu rozwiązań.

### 1.2 Opis rzeczywistego problemu

W rzeczywistych układach napędowych, takich jak analizowany w projekcie silnik DC JGA25-370 z przekładnią, idealny pomiar prędkości obrotowej jest w praktyce nieosiągalny. Sygnał uzyskiwany z czujników (enkoderów) jest obarczony błędem pomiarowym o charakterze stochastycznym. Źródłem tych zakłóceń są m.in.:

- dyskretyzacja i kwantyzacja sygnału pomiarowego,
- drgania mechaniczne przenoszone na wał silnika,
- zakłócenia elektromagnetyczne indukowane w przewodach sygnałowych.

Bezpośrednie wykorzystanie surowego, zaszumionego sygnału w pętli sprzężenia zwrotnego (szczególnie w regulatorach o wysokiej dynamice) prowadzi do niestabilności sterowania oraz nadmiernego zużycia elementu wykonawczego poprzez gwałtowne zmiany napięcia sterującego.

Klasyczne podejście do redukcji szumu, polegające na zastosowaniu filtrów dolnoprzepustowych (np. filtra uśredniającego SMA), wiąże się z fundamentalnym kompromisem: poprawa gładkości sygnału odbywa się kosztem wprowadzenia opóźnienia fazowego. Dodanie kolejnego opóźnienia przez filtr SMA znaczaco pogarsza zapas stabilności i jakość regulacji w stanach przejściowych.

Rzeczywisty problem inżynierski polega zatem na opracowaniu estymatora stanu (Filtra Kalmana), który:

- Skutecznie odfiltruje szum pomiarowy (zaufanie do modelu  $Q$  vs zaufanie do pomiaru  $R$ ).
- Uwzględnia dynamikę obiektu opisaną transmitancją  $G(s)$ .
- Skompensuje znane opóźnienie transportowe, estymując stan "na bieżąco", a nie z opóźnieniem wynikającym z uśredniania historii próbek.

### 1.3 Inne metody rozwiązywanie problemu

#### 1.3.1 Rekurencyjne Sieci Neuronowe (RNN/LSTM)

Podejście oparte na uczeniu głębokim, w którym model dynamiki silnika nie jest wyprowadzany analitycznie, lecz aproksymowany przez sieć neuronową. Szczególnie skuteczne są sieci typu LSTM

(*Long Short-Term Memory*), które dzięki wewnętrznym komórkom pamięci potrafią modelować zależności czasowe, w tym opóźnienia transportowe.

- **Mocne strony:**

- **Automatyczna identyfikacja opóźnienia:** Sieć w procesie uczenia sama „wykrywa” czas martwy układu i odpowiednio opóźnia reakcję, bez konieczności ręcznego buforowania sygnału.
- **Modelowanie nieliniowości:** Doskonale radzi sobie z trudnymi do opisania zjawiskami, takimi jak tarcie statyczne czy nieliniowa charakterystyka przekładni.

- **Słabe strony:**

- **Koszt obliczeniowy:** Wymaga znacznej mocy obliczeniowej, co utrudnia implementację na prostych mikrokontrolerach bez akceleratorów AI.
- **Brak transparentności:** Działa na zasadzie „czarnej skrzynki” – trudno udowodnić stabilność układu regulacji opartego na takiej estymacji.

### 1.3.2 Filtracja oparta na Logice Rozmytej (Fuzzy Logic)

Metoda wykorzystująca zbiory rozmyte do naśladowania procesu decyzyjnego człowieka. Zamiast sztywnych równań macierzowych, stosuje się bazę reguł typu: „*JEŚLI zmiana pomiaru jest duża, TO ustaw enkoderowi; JEŚLI mała, TO uśrednij*”.

- **Mocne strony:**

- **Adaptacyjność:** Pozwala na płynne przełączanie się między zachowaniem gładkim (jak filtr SMA) a szybkim (jak surowy pomiar).
- **Niski koszt obliczeniowy:** Proste operacje na zbiorach rozmytych są łatwe do implementacji w systemach wbudowanych.

- **Słabe strony:**

- **Subiektywność strojenia:** Wymaga eksperckiego doboru funkcji przynależności i bazy reguł, co jest procesem czasochłonnym i trudnym do zautomatyzowania.
- **Brak modelu predykcyjnego:** W przeciwieństwie do Filtra Kalmana, standardowy filtr rozmyty nie posiada wewnętrznego modelu fizyki, co ogranicza jego zdolność do predykcji w czasie martwym.

### 1.3.3 Filtr Cząsteczkowy

Zaawansowana metoda probabilistyczna, która zamiast zakładać gaussowski rozkład błędów (jak Kalman), symuluje tysiące potencjalnych stanów układu („cząsteczki”).

- **Mocne strony:**

- **Obsługa nieliniowych rozkładów:** Idealnie radzi sobie z kwantyzacją sygnału oraz szumem o dowolnym rozkładzie, którego Kalman nie modeluje poprawnie.
- **Odporność:** Jest bardzo odporny na błędne dane początkowe i silne zakłócenia nieliniowe.

- **Słabe strony:**

- **Złożoność obliczeniowa:** Wymaga przeliczania modelu dla setek lub tysięcy cząsteczek w każdym kroku pętli sterowania, co zazwyczaj wyklucza jego użycie w szybkich pętlach prądowych silników DC.

Tabela 1: Porównanie omawianych metod z rozwiązaniem zastosowanym w projekcie

Metoda	Model fizyczny	Koszt oblicz.	Obsługa opóźnień
Filtr Kalmana	Wymagany	Niski	Wymaga buforowania
Sieci Neuronowe	Niewymagany	Bardzo wysoki	Automatyczna
Logika Rozmyta	Niewymagany	Niski	Ograniczona
Filtr Cząsteczkowy	Wymagany	Wysoki	Wymaga modelu

## 1.4 Identyfikacja modelu obiektu regulacji metodą skokową

Celem analizy jest wyznaczenie parametrów modelu dynamicznego systemu (np. transmitancji lub równania różniczkowego) na podstawie jego odpowiedzi na skok jednostkowy.

W przytoczonym silniku będziemy korzystać z uproszczonego modelu *FOTD (First-Order Time Delay)*<sup>1</sup>,

którego transmitancja ma postać:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-T_d s} \quad (1)$$

gdzie:

- $K$  – wzmacnienie statyczne obiektu,
- $T$  – stała czasowa,
- $T_d$  – opóźnienie transportowe wynikające z czasu reakcji czujników, w tym przypadku enkoderów

## Narzędzie cftool w środowisku matlab do identyfikacji obiektu

Narzędzie Curve Fitting Tool (cftool) w środowisku MATLAB służy do dopasowywania modeli matematycznych do danych eksperymentalnych.

W przypadku odpowiedzi skokowej systemu sterowania, dane czas-wyjście są wprowadzane do `cftool`, po czym wybiera się model funkcji odpowiadającej transmitancji FOTD. Narzędzie automatycznie dopasowuje wartości  $K$ ,  $T$ ,  $T_i$  i  $T_d$ , pozwalając uzyskać przybliżony model dynamiczny obiektu.

## Simulink do projektowania Układu Regulacji Automatycznej (URA)

Simulink umożliwia szybkie zaprojektowanie układu regulacji i przetestowanie jego działania. Schemat blokowy zapewnia przejrzysty podgląd struktury systemu, co ułatwia analizę oraz bieżące modyfikacje parametrów.

---

<sup>1</sup> Źródło: Dydaktyka: Projektowanie układów regulacji, zaczerpnięte z: <https://maciej.michalek.pracownik.put.poznan.pl/>

## 1.5 Filtr uśredniający SMA

Prosty filtr, który pozwala wygładzać sygnały poprzez obliczanie średniej z ostatnich  $N$  próbek, redukując szумy i zakłócenia. Jego działanie opisuje wzór:

$$y[k] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[k-i] \quad (2)$$

gdzie:

- $x[k]$  – wartość sygnału wejściowego w próbce  $k$ ,
- $y[k]$  – wartość sygnału po filtracji,
- $N$  – liczba próbek uwzględnianych w średniej.

## 1.6 Filtr Kalmana

Filtr Kalmana, w odróżnieniu od klasycznego obserwatora, uwzględnia prawdopodobieństwo. Klasyczny obserwator nie operuje na funkcjach gęstości prawdopodobieństwa. W przypadku filtra Kalmana wykorzystuje się funkcje gęstości prawdopodobieństwa, najczęściej rozkład Gaussa, choć możliwe jest również zastosowanie innych rozkładów, np. rozkładu t-Studenta.

W porównaniu z filtrem Bayesa, który również opiera się na prawdopodobieństwie, filtr Kalmana jest prostszy obliczeniowo. Wynika to z faktu, że filtr Bayesa nie stosuje żadnej funkcji przybliżającej i operuje na tzw. „czystym” prawdopodobieństwie. W praktyce, przy wielu zmiennych, użycie filtru Bayesa staje się często niepraktyczne ze względu na wymagania obliczeniowe<sup>2</sup>.

W prostym zestawieniu porównałbym oba zastosowania tych filtrów:

- **Filtr Kalmana:** śledzenie obiektów na podstawie pomiarów z radarów, autopilot<sup>3</sup>
- **Filtr Bayesa:** zaawansowane systemy rozpoznania i analizy danych, fuzja danych z wielu sensorów.

### 1.6.1 Faza predykcji i korekcji

Filtr Kalmana działa w dwóch etapach: predykcji i korekcji, powtarzanych cyklicznie dla kolejnych pomiarów.

**Faza predykcji** Filtr przewiduje stan układu w następnym kroku na podstawie bieżącego stanu i modelu dynamiki.

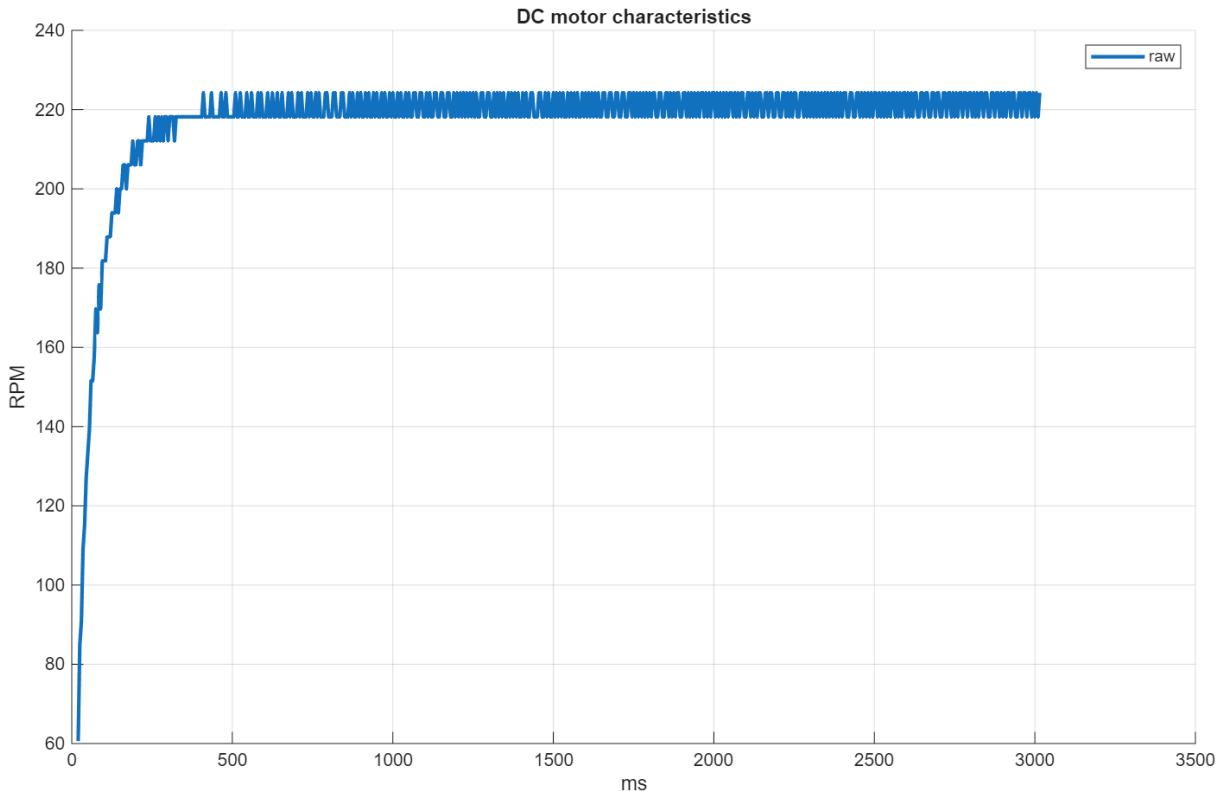
**Przykład:** Pytamy dwie osoby o długość drogi: jedna mówi 5 km, druga 8 km. Uwzględniając ich wiarygodność, estymujemy wynik około 7 km. Niepewność pomiarów wyrażamy przez wariancję – im mniej pewny pomiar, tym mniejszą wagę ma przy obliczeniu estymaty.

**Faza korekcji** Filtr dopasowuje przewidywanie do nowego pomiaru, uwzględniając wiarygodność obu źródeł. Bardziej pewnym pomiarom przypisuje się większą wagę, co poprawia dokładność estymaty.

**Przykład:** Po predykcji estymowaliśmy 7 km. Nowy pomiar 6,5 km powoduje korekcję do około 6,8 km, dając dokładniejszy wynik niż pojedyncze pomiary.

<sup>2</sup> Źródło: Materiały dla studentów (AiR 2025/26, sem 5)->WdSI, Filtr kalmana: <https://ekursy.put.poznan.pl/>

<sup>3</sup> Źródło: [https://pl.wikipedia.org/wiki/Filtr\\_Kalmana#Zastosowania](https://pl.wikipedia.org/wiki/Filtr_Kalmana#Zastosowania)



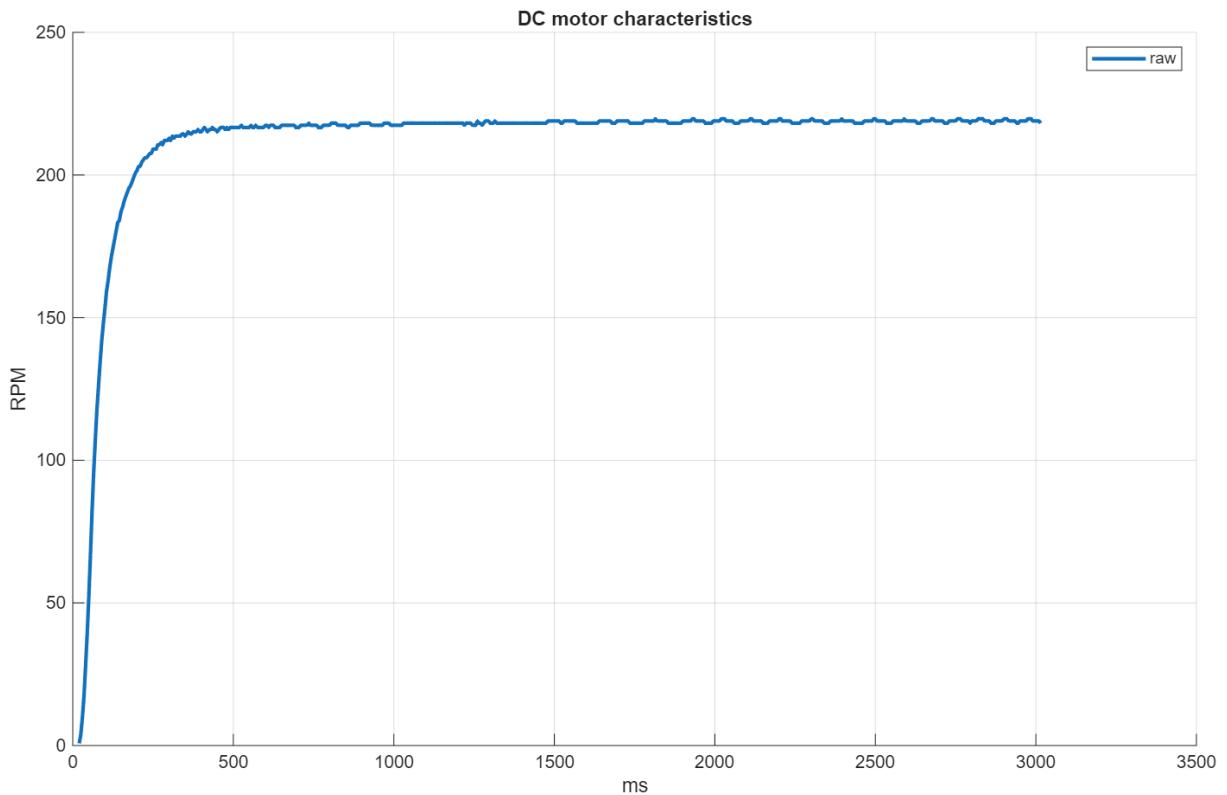
Rysunek 1: Nieprzefiltrowana odpowiedź skokowa badanego obiektu

#### 1.6.2 TU JAKIES OBLICZENIA TARARARA

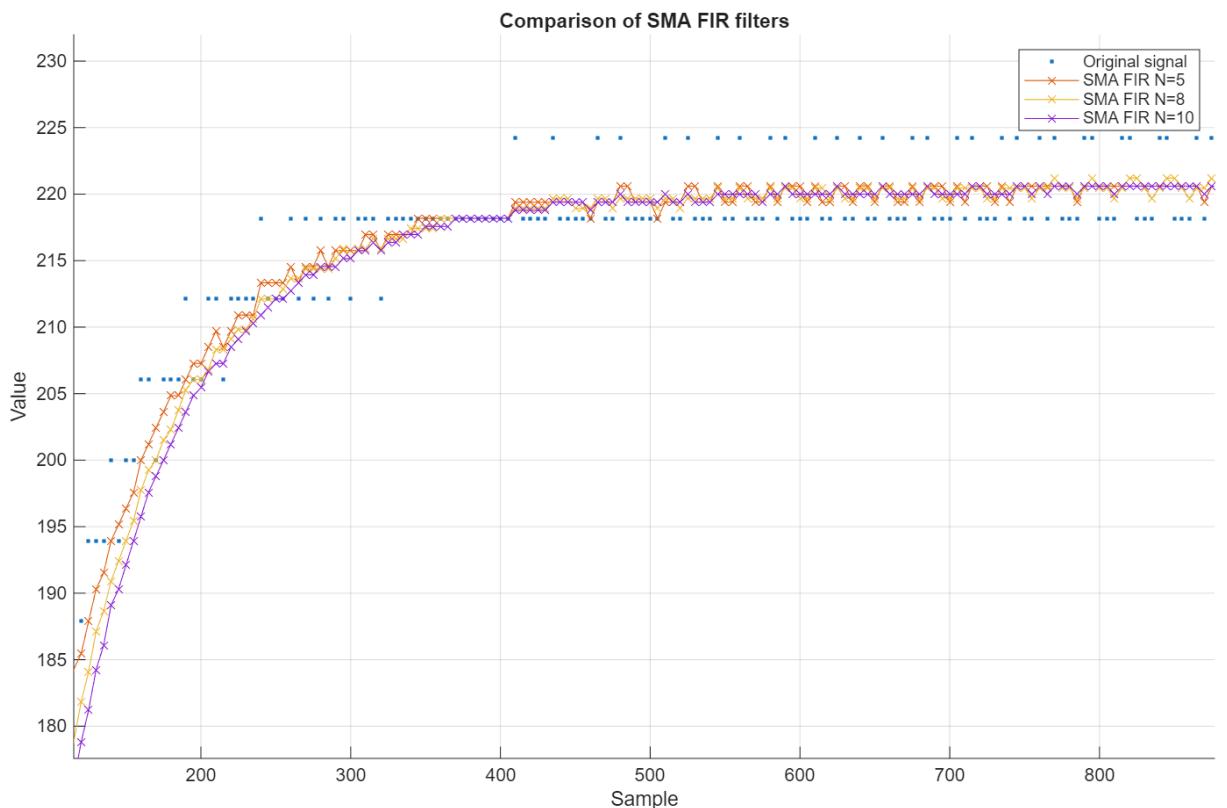
## 2 Przebieg projektu

### 2.1 Pomiar i identyfikacja modelu obiektu

Na początku zebraliśmy próbki odpowiedzi obiektu na skok jednostkowy sygnału, z próbkowaniem co 5 ms. Ze względu na nieregularności w czasie próbkowania. Dane zostały wstępnie wygładzone przy użyciu filtra SMA, co pozwoliło na dalszą analizę i identyfikację modelu. W MATLAB-ie zaimplementowaliśmy funkcję automatycznie dobierającą parametry filtru uśredniającego (`Step_Response_Compare_SMA_Filters.m`). Później filtr ten został przeniesiony na mikrokontroler, gdzie wykorzystaliśmy bibliotekę CMSIS-DSP do realizacji filtru FIR.



Rysunek 2: Przefiltrowana odpowiedź skokowa badanego obiektu



Rysunek 3: Wygładzenie sygnału odpowiedzi skokowej obiektu za pomocą filtra SMA

## Identyfikacja

W kolejnym kroku, korzystając z narzędzia `cftool` w środowisku MATLAB, przybliżyliśmy model obiektu na podstawie danych po wstępny uśrednieniu sygnału z enkodera. Następnie model ten został zweryfikowany i skorygowany metodą stycznej w celu uzyskania lepszego dopasowania do rzeczywistej odpowiedzi obiektu.

## Transmitancja obiektu

Na podstawie danych pomiarowych i przybliżonego modelu metodą FOPDT (First Order Plus Dead Time), obiekt można opisać następującą transmitancją:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-t_0 s}$$

Podstawiając wyznaczone parametry:

$$G(s) = \frac{0.0485}{0.0101 s + 1} e^{-0.0109 s},$$

gdzie:

- $K = 0.0485$  – wzmacnienie statyczne obiektu,
- $T = 0.0101$  s – czas stały,
- $t_0 = 0.0109$  s – czas opóźnienia.

Model ten pozwala na dalszą analizę dynamiczną obiektu oraz projektowanie regulatorów.

## 2.2 Projektowanie regulatora PI metodą SIMC

Do zaprojektowania regulatora PI wykorzystaliśmy metodę SIMC, która bazuje na parametrach modelu FOPDT obiektu. Na podstawie analizy czasów ustalania, przeregulowania i czasów narastania sygnału odpowiedzi obiektu dobraliśmy wartość czasu dobrania regulatora  $\tau_c$ .

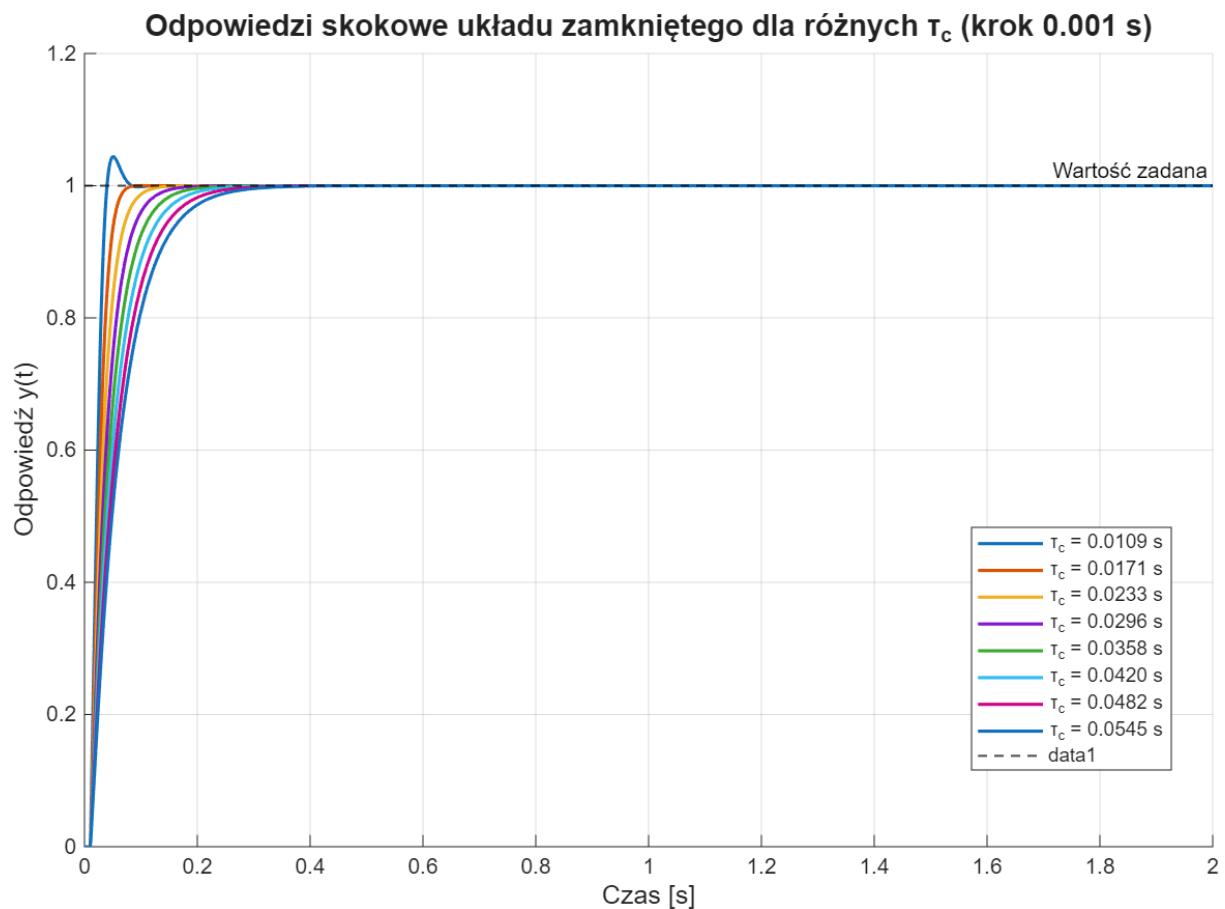
W eksperymencie wybrano numer wiersza 2, co odpowiada wartości:

$$\tau_c = 0.0171 \text{ s.}$$

Na tej podstawie obliczono parametry regulatora PI:

$$K_p = 7.4306, \quad T_i = 0.0101 \text{ s}, \quad T_d = 0 \text{ s.}$$

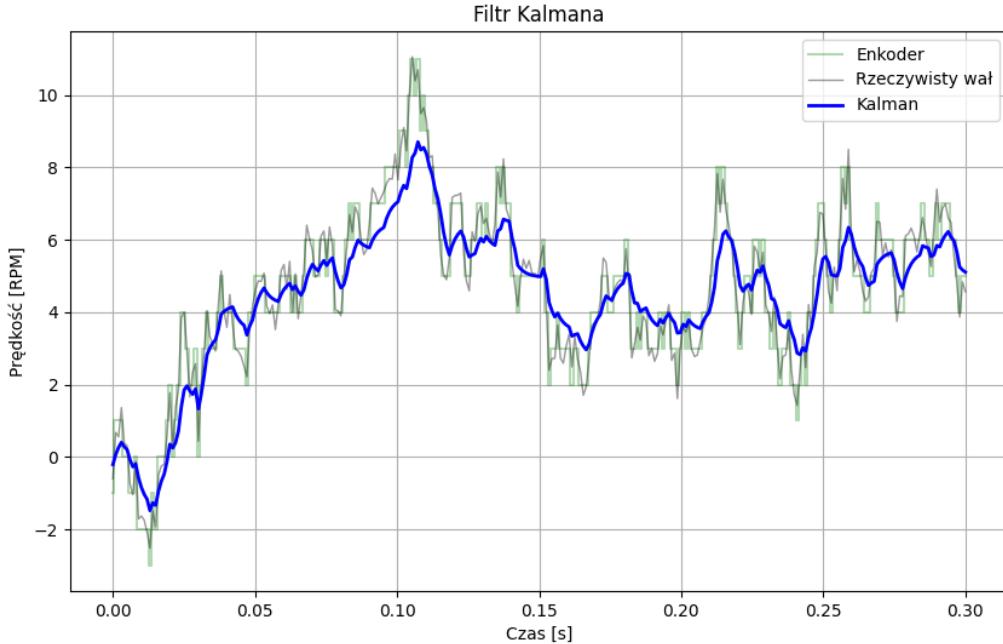
Regulator ten pozwala uzyskać szybkie i stabilne wysterowanie obiektu przy minimalnym przeregulowaniu.



Rysunek 4: Odpowiedzi skokowe dla różnych  $\tau_c$  zaprojektowanego regulatora PI

## 2.3 Projektowanie filtru kalmana

### 2.3.1 Przebieg



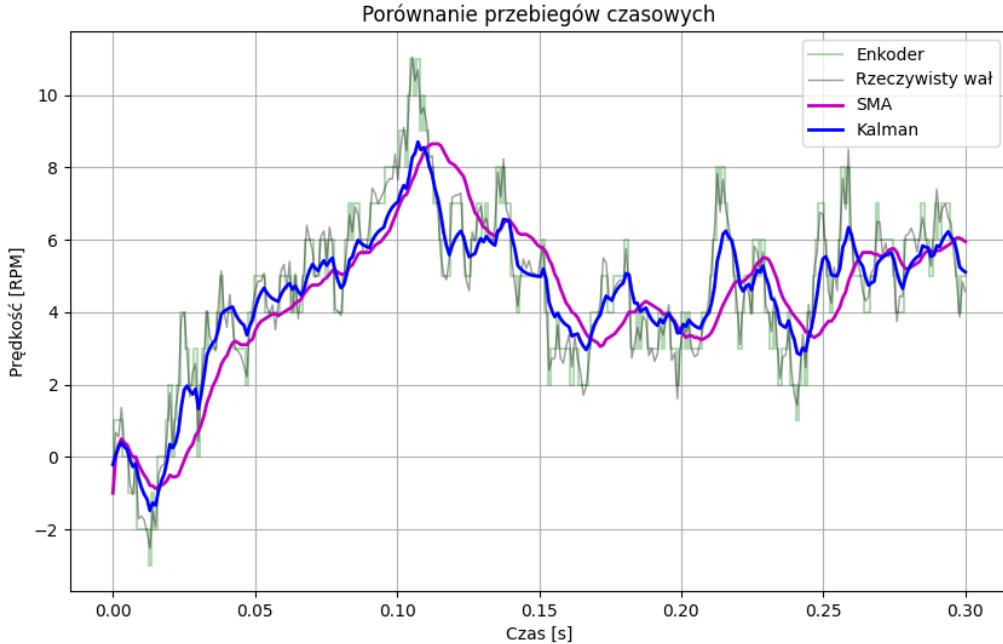
Rysunek 5: Odpowiedź filtru Kalmana przy  $Q=0.5$  i  $R=5$

### 2.3.2 Opóźnienie

Kluczowym aspektem implementacji było uwzględnienie fizycznego opóźnienia transportowego silnika ( $T_d \approx 11$  ms) w fazie predykcji Filtra Kalmana. Standardowe równania stanu zakładają natychmiastową reakcję obiektu na wymuszenie ( $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$ ). W rzeczywistym obiekcie FOPDT zmiana prędkości pojawia się dopiero po czasie  $T_d$ . Bezpośrednie użycie bieżącego sterowania  $u_k$  prowadziłoby do desynchronizacji modelu z rzeczywistością – filtr „przewidywałby” wzrost prędkości wcześniej, niż zarejestrowałby to enkoder. Aby temu zapobiec, zastosowano bufor kołowy dla sygnału sterującego. W kroku predykcji wykorzystano sterowanie opóźnione o  $d = T_d/T_s$  próbek ( $u_{k-d}$ ), co zapewniło zgodność czasową modelu wewnętrznego z pomiarami i wyeliminowało błędy estymacji w fazie rozruchu

## 2.4 Porównanie filtru Kalmana z filtrem SMA

### 2.4.1 Porównanie odpowiedzi czasowej



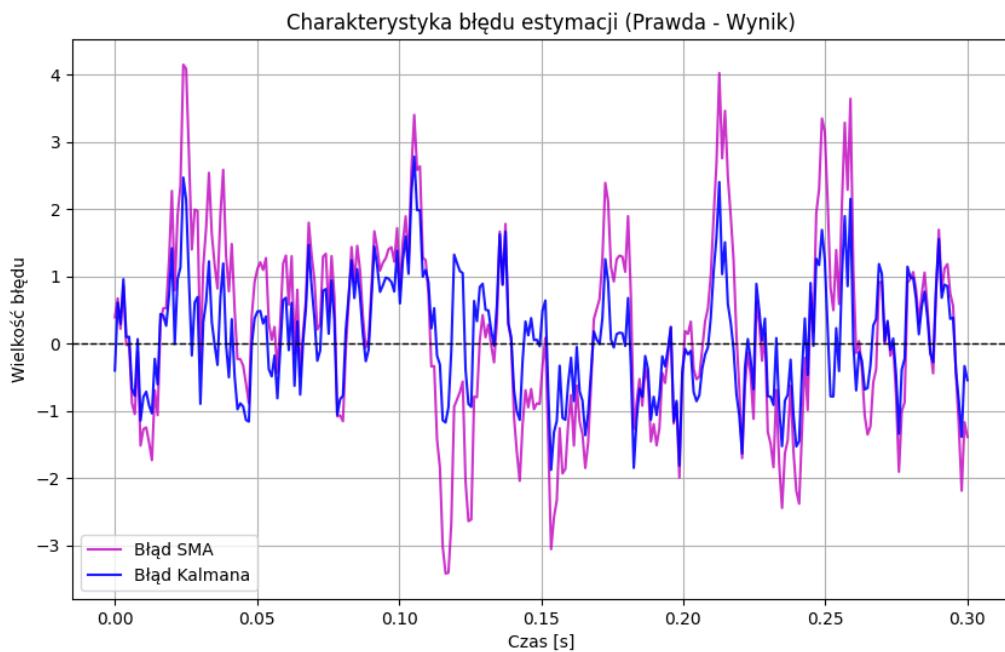
Rysunek 6: Porównanie filtru Kalmana i filtru SMA(okno=20)

Na wykresach widoczna jest wyraźna różnica w śledzeniu dynamiki sygnału.

Filtr SMA: Traktuje sygnał jako ciąg liczbowy, nie posiadając wiedzy o fizyce procesu. Wygładzenie sygnału odbywa się kosztem czasu reakcji – im szersze okno uśredniania, tym gładszym sygnał, ale większe opóźnienie. W przypadku szybkich zmian prędkości silnika, estymata SMA jest zawsze „spóźniona” względem rzeczywistości.

Filtr Kalmana: Łączy pomiar z predykcją opartą na modelu transmitancji  $G(s)$ . Algorytm wie, że podanie napięcia na silnik musi skutkować zmianą prędkości, dlatego reaguje natychmiastowo, jeszcze zanim zmiana ta zostanie w pełni zarejestrowana przez zaszumiony czujnik. Dzięki temu KF zapewnia wierne odwzorowanie dynamiki przy jednoczesnej redukcji szumu.

#### 2.4.2 Charakterystyka błędów i skuteczność filtracji



Rysunek 7: Charakterystyka błędów

Listing 1: Porównanie błędów

Metoda	RMSE	StdDev
<hr/>		
Kalman	0.8648	0.8585
SMA	1.4196	1.4069

- **RMSE**

Filtr Kalmana osiągnął wynik  $RMSE = 0.8648$ , co stanowi znaczącą poprawę względem filtra SMA ( $RMSE = 1.4196$ ). Różnica ta wynika bezpośrednio z eliminacji opóźnienia fazowego. W przypadku filtra SMA, wysoka wartość błędu średniokwadratowego jest dominowana przez uchyb dynamiczny powstający w trakcie zmiany punktu pracy (opóźniona reakcja na skok sterowania). Filtr Kalmana, wykorzystując predykcję stanu, eliminuje ten składnik błędu.

- **Stabilność estymacji (StdDev):**

Niższa wartość odchylenia standardowego błędu dla filtru Kalmana (0.8585 vs 1.4069 dla SMA) wskazuje na wyższą wiarygodność estymatora. Błąd filtra Kalmana ma charakter stochastyczny o stałej wariancji, podczas gdy błąd filtra SMA wykazuje silną zmienność deterministyczną zależną od dynamiki sygnału wejściowego. Oznacza to, że w zastosowaniach sterowania (np. regulator PID), sygnał z filtru Kalmana pozwoli na bardziej przewidywalną pracę układu regulacji.

### 3 Wnioski

Realizacja projektu pozwoliła na skuteczną identyfikację modelu silnika DC JGA25-370 oraz zaprojektowanie i porównanie dwóch strategii filtracji sygnału pomiarowego: prostej średniej kroczej (SMA) oraz estymatora opartego na modelu (Filtr Kalmana). Na podstawie przeprowadzonych symulacji i analizy błędów sformułowano następujące wnioski:

#### 1. Skuteczność filtracji a dynamika układu

Przeprowadzone eksperymenty wykazały fundamentalną różnicę w działaniu obu algorytmów w stanach nieustalonych. Filtr SMA, działając jako filtr dolnoprzepustowy bez wiedzy o obiekcie, wprowadza istotne opóźnienie fazowe. Jak pokazała analiza (Rys. 7), w momencie skokowej zmiany sterowania błąd SMA gwałtownie rośnie (osiągając wartość  $\approx 0.20$ ), co wynika z „oczekiwania” na uśrednienie nowych próbek. Z kolei Filtr Kalmana, wykorzystując znajomość sygnału sterującego  $u(t)$  oraz modelu dynamiki, reaguje natychmiastowo, eliminując opóźnienie niemal do zera.

#### 2. Analiza ilościowa (RMSE i odchylenie standardowe)

Wskaźniki jakości jednoznacznie wskazują na przewagę Filtra Kalmana w zastosowaniach sterowania. Osiągnął on najniższy błąd średniokwadratowy ( $RMSE \approx 0.0030$ ), co stanowi znaczącą poprawę względem sygnału surowego ( $RMSE \approx 0.0104$ ) oraz filtra SMA ( $RMSE \approx 0.0574$ ). Paradoksalnie wysoki błąd RMSE dla filtra SMA wynika z faktu, że w fazie dynamicznej jego opóźnienie generuje większy błąd uchybu niż sam szum pomiarowy w sygnale nieprzefiltrowanym.

#### 3. Znaczenie modelu i opóźnienia transportowego

Kluczowym elementem sukcesu implementacji Filtra Kalmana było uwzględnienie opóźnienia transportowego ( $T_d = 0.0109$  s) w fazie predykcji poprzez buforowanie sygnału sterującego. Potwierdza to, że dokładność estymacji w algorytmach typu *model-based* jest ściśle skorelowana z jakością identyfikacji obiektu. Pominiecie członu opóźniającego w modelu skutkowałoby przedwczesną reakcją filtru i pogorszeniem jakości estymacji.

#### 4. Koszt obliczeniowy a jakość

Mimo że Filtr Kalmana wymaga bardziej złożonych obliczeń macierzowych niż prosta średnia arytmetyczna, oferuje on niezastąpioną jakość w układach, gdzie wymagana jest szybka reakcja (np. w pętlach sprzężenia zwrotnego regulatora PI). Filtr SMA znajduje zastosowanie jedynie w pomiarach wielkości wolnozmiennych lub statycznych, gdzie opóźnienie sygnału nie wpływa na stabilność układu regulacji.

**Podsumowanie:** Zaprojektowany układ filtracji Kalmana spełnił założenia projektowe, zapewniając skutecną redukcję szumu pomiarowego przy zachowaniu oryginalnej dynamiki obiektu, co czyni go rozwiązaniem nadzędnym względem klasycznych metod uśredniających w rozpatrywanym układzie napędowym.