

# ALGORYTMY GRAFOWE

## Opis algorytmu Bellmana-Forda (wersja kontrolująca długości ścieżek)

Najkrótsze ścieżki z ustalonego wierzchołka  $s$  do wszystkich pozostałych wierzchołków (dowolne wagi krawędzi).

Ogólna zasada działania:

W  $k$ -tej iteracji ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) rozpatrujemy zbiór wierzchołków, do których **aktualne** najkrótsze ścieżki z  $s$  mają  $k$  krawędzi (łuków) ( $S$  – zbiór tych wierzchołków). Patrzymy na sąsiadów  $S$  (następniki wierzchołków z  $S - \Gamma(S)$ ). Zmieniamy im cechy ( $l$  i  $p$ ), jeśli znaleźliśmy krótszą ścieżkę. Nowy zbiór  $S$  – zbiór tych wierzchołków, które zmieniły cechę w  $k$ -tej iteracji.

Oznaczenia stosowane w algorytmie:

$l^k(v)$  – długość aktualnej najkrótszej ścieżki do  $v$

$p^k(v)$  – poprzednik na aktualnej najkrótszej ścieżce do  $v$

$\Gamma(v)$  – zbiór następników wierzchołka  $v$

1.  $l^1(s) \leftarrow 0$ ,  $p^1(s) \leftarrow \text{None}$  oraz  $l^1(v) \leftarrow w(s, v)$ ,  $p^1(v) \leftarrow s$  dla każdego  $v \in \Gamma(s)$  ;  
dla pozostałych wierzchołków  $u$  :

$$l(u) \leftarrow \infty, \quad p(u) \leftarrow \infty;$$

$$k \leftarrow 1, \quad S \leftarrow \Gamma(s).$$

2. Dla każdego wierzchołka  $u$  z  $\Gamma(S)$ :

Jeśli

$$l^k(u) > \min\{l^k(v) + w(v, u), v \in S\},$$

(uwaga: tu możemy zignorować pary  $vu$ , dla których nie ma krawędzi)

nadajemy nowe cechy tymczasowe, biorąc  $v$ , dla którego jest osiągnięte minimum

$$l^{k+1}(u) \leftarrow l^k(v) + w(v, u);$$

$$p^{k+1}(u) \leftarrow v;$$

Dla  $u \notin \Gamma(S)$ :  $l^{k+1}(u) \leftarrow l^k(u)$ ,  $p^{k+1}(u) \leftarrow p^k(u)$ .

(Zbiór  $S$  zawiera wszystkie wierzchołki, do których aktualnie najkrótsze ścieżki z  $s$  składają się z  $k$  krawędzi (łuków);

3. (a) Jeżeli  $k \leq n-1$  oraz  $l^{k+1}(v) = l^k(v)$  dla każdego  $v$ , to STOP;  
(b) Jeżeli  $k < n-1$  oraz  $l^{k+1}(v) \neq l^k(v)$  dla pewnego wierzchołka  $v$ , to krok 4;  
(c) Jeżeli  $k = n-1$  oraz  $l^{k+1}(v) \neq l^k(v)$  dla pewnego wierzchołka  $v$ , to STOP - graf ma cykl o ujemnej sumie wag.
4.  $S$  – zbiór wierzchołków, których cecha się zmieniła w  $k$ -tej iteracji;  $k \leftarrow k+1$  i krok 2 ( $S$  zawiera wierzchołki, do których najkrótsze ścieżki z  $s$  mają  $k+1$  krawędzi(łuków)).

## Opis algorytmu Bellmana-Forda - wersja uproszczona

1.  $l(s) \leftarrow 0$ ,  $p(s) \leftarrow \text{None}$ ,  $l(v) \leftarrow \infty$ ,  $p(v) \leftarrow \text{None}$ , dla  $v \in V \setminus \{s\}$

2. Powtarzaj  $|V| - 1$  razy:

Dla każdego wierzchołka  $v$  i każdego  $u \in \Gamma(v)$

jeśli

$$l(u) > l(v) + w(v, u),$$

to

$$l(u) \leftarrow l(v) + w(v, u) \quad \text{oraz} \quad p(u) \leftarrow v.$$

3. Jeśli istnieją  $v$  i  $u \in \Gamma(v)$  takie, że:

$$l(u) > l(v) + w(v, u),$$

to graf ma cykl o ujemnej wadze.

UWAGA: Można zakończyć wcześniej, w przypadku, gdy nastąpi iteracja bez zmian cech wierzchołków.