Sprawozdanie 1

Bartosz Michalak

2 kwietnia 2025

1 Zadanie 1

1.1 Model

Niech n będzie liczbą naturną taką a A macierzą Hilberta.

1.1.1 Zmienne decyzyjne

Naszą zmienną decyzyjną jest wector X mający n różnych pól przyjmujących wartości rzeczywiste.

1.1.2 Ograniczenia

- **Równość:** Macierz hilberta przemnożona przez X musi być równa wektorowi prawych stron b:

$$(\forall i \in 1..n) \sum_{j \in 1..n} A[i,j] \cdot X[j] = b[i] \tag{1}$$

1.1.3 Funkcja celu

Mimimalizujemy iloczyn skalarny c i X:

$$\min \sum_{i \in 1..n} c[i] \cdot X[i] \tag{2}$$

1.2 Wyniki

Model przestaje zwracać dokładne wyniki już dla $n = 8$. Rozwiązanie (wektor X) przyjmuje wtedy postać:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$x[i]$	1.000063	0.996503	1.046620	0.743590	1.699301	0.000000	1.717949	0.795918

Błąd względny wynosi 0.514059.

Dla $n = 7$ model generuje dokładne rozwiązanie:

i	1	2	3	4	5	6	7
$x[i]$	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

Błąd względny oczywiście wynosi 0. To zachowanie wynika wprost ze złego uwarunkowania macierzy Hilberta.

2 Zadanie 2

2.1 Model

Niech L oznacza zbiór lokalizacji (miast) zdefiniowanych w problemie, $dist[s,t]$ oznacza odległośc między miastami s i t, $demand_I[l]$ i $demand_{II}[l]$ zapotrzebowanie na dźwigi odpowiednio typu I i typu II w mieście l i analogicznie niech $supply_I[l]$ i $supply_{II}[l]$ oznacza liczbę posiadanych dźwigów odpowiednio typu I i typu II w mieście l.

2.1.1 Zmienne decyzyjne

Mamy 2 zmienne decyzyjne:

- $X_I[m, n]$ – ilość dźwigów typu I przetransportowanych z miasta m do miasta n. Określamy dla wszystkich par (lokacja, lokacja), jednostką są liczby naturalne.
- $X_{II}[m, n]$ – ilość dźwigów typu II przetransportowanych z miasta m do miasta n. Określamy te zmienne dla wszystkich par (lokacja, lokacja), jednostką są liczby naturalne.

2.1.2 Ograniczenia

- **Nie możemy wysłać więcej dźwigów niż posiadamy:** Każda miejscowość, która posiada dźwigi danego typu, może wysłać conajwyżej tyle dźwigów ile posiada:

$$(\forall s \in L) \sum_{t \in L} X_I[s, t] \leq supply_I[s] \tag{3}$$

$$(\forall s \in L) \sum_{t \in L} X_{II}[s, t] \leq supply_{II}[s] \tag{4}$$

- **Zapotrzebowanie musi zostać zaspokojone:** Każda miejscowość, która potrzebuje dźwigi danego typu, powinna je dostać lub dostać dźwigi lepszego typu:

$$(\forall s \in L) \sum_{t \in L} X_I[s, t] + \sum_{t \in L} x_{II}[s, t] - demand_{II}[s] \geq demand_I[s] \tag{5}$$

$$(\forall s \in L) \sum_{t \in L} X_{II}[s, t] + \sum_{t \in L} x_I[s, t] - demand_I[s] \geq demand_{II}[s] \tag{6}$$

2.1.3 Funkcja celu

Minimalizacja całkowitych kosztów transportu dźwigów:

$$\min \sum_{\substack{s \in L \\ t \in L}} 10 \cdot dist[s, t] \cdot X_I[s, t] + 12 \cdot dist[s, t] \cdot X_{II}[s, t] \tag{7}$$

Funkcja celu wyraża całkowity koszt przetransportowania dźwigów typu I i dźwigów typu II do i z odpowiednich im miast.

2.2 Wyniki

Rozwiązaniem optymalnym jest:

- Wysłanie 4 dźwigów typu I z Opola do Brzegu.
- Wysłanie 3 dźwigów typu I z Opola do Koźle.
- Wysłanie 5 dźwigów typu I z Nysy do Brzegu.
- Wysłanie 1 dźwigu typu I z Nysy do Prudnika.
- Wysłanie 5 dźwigów typu I ze Strzelec Opolskich do Koźle.
- Zostawnienie 1 dźwigu typu II w Brzegu (zaspokaja zapotrzebowanie na dźwig typu I).
- Wysłanie 2 dźwigów typu II z Nysy do Opola.
- Zostawnienie 3 dźwigów typu II w Prudniku (zaspokaja zapotrzebowanie na dźwig typu I).
- Wysłanie 4 dźwigów typu II z Prudnika do Strzelec Opolskich.
- Wysłanie 2 dźwigów typu II z Prudnika do Koźle.

- Wysłanie 1 dźwigu typu II z Prudnika do Raciborza.

Koszt takiego rozesłania dźwigów to 14172.

Można zauważyć, że to rozwiązanie preferuje nie wysyłanie dźwigów do innych miast, jeżeli mogą zaspokoić lokalne zapotrzebowanie oraz, że jeśli to możliwe to staramy się zaspokajać zapotrzebowanie na dźwigi danego typu tym samym typem. Pokrywa się to zarówno z funkcją celu jak i intuicją (nie transportuj jeśli nie musisz, a jeśli musisz to transportuj to co można najtaniej przetransportować).

Pondto założenie, że zmienne muszą być całkowitoliczbowe jest zbędne. Model zwraca poprawne rozwiąznie nawet w przypadku kiedy nie określimy typu zmiennych na całkowitoliczbowy.

3 Zadanie 3

3.1 Model

3.1.1 Zmienne decyzyjne

- $B1$ – ilość ropy B1 poddanej destylacji [t]
- $B2$ – ilość ropy B2 poddanej destylacji [t]
- $B1\_Destilate$ – ilość destylatu pochodzącego z ropy B1 przekazanego do krakowania [t]
- $B2\_Destilate$ – ilość destylatu pochodzącego z ropy B2 przekazanego do krakowania [t]
- $B1\_Used\_For\_Home\_Oil$ – ilość oleju pochodzącego z ropy B1 przekazanego do produkcji domowego paliwa olejowego [t]
- $B1\_Used\_For\_Home\_Oil$ – ilość oleju pochodzącego z ropy B2 przekazanego do produkcji domowego paliwa olejowego [t]

3.1.2 Ograniczenia

- **Ilość dostępnego destylatu:** 15% ropy B1 i 20% ropy B2 zamieniane jest na odpowiednie destylaty. Ilość destylatów jaką przeznaczamy do krakowania musi być mniejsza lub równa całkowitej ilości wyprodykowanych destylatów:

$$B1 \cdot 0.15 \geq B1\_Destilate \quad \text{(produkcja destylatu ropy B1)} \tag{8}$$
$$B2 \cdot 0.20 \geq B2\_Destilate \quad \text{(produkcja destylatu ropy B2)} \tag{9}$$

- **Ilość dostępnego oleju:** 40% ropy B1 i 35% ropy B2 zamieniane jest na olej. Ilość oleju jaką przeznaczamy na domwe paliwa olejowe musi być mniejsza lub równa całkowitej ilości wyprodykowanych olejów:

$$B1 \cdot 0.40 \geq B1\_Used\_For\_Home\_Oil \quad \text{(produkcja oleju z ropy B1)} \tag{10}$$
$$B2 \cdot 0.35 \geq B2\_Used\_For\_Home\_Oil \quad \text{(produkcja oleju z ropy B2)} \tag{11}$$

- **Produkcja paliw silnikowych:** Całkowita produkcja paliw silnikowych musi wynosić conajmniej 200000 ton:

$$B1 \cdot 0.15 + B2 \cdot 0.1 + (B1\_Destilate + B2\_Destilate) \cdot 0.5 >= 200000 \tag{12}$$

- **Produkcja domowych paliw olejowych:** Całkowita produkcja domowych paliw olejowych musi wynosić conajmniej 400000 ton:

$$B1\_Used\_For\_Home\_Oil + B2\_Used\_For\_Home\_Oil \tag{13}$$
$$+ (B1\_Destilate + B2\_Destilate) \cdot 0.2 >= 400000 \tag{14}$$

- **Produkcja ciężkich paliw olejowych:** Całkowita produkcja ciężkich paliw olejowych musi wynosić conajmniej 250000 ton:

$$B1 \cdot 0.15 + B2 \cdot 0.25 \tag{15}$$
$$+ (B1\_Destilate + B2\_Destilate) \cdot 0.06 \tag{16}$$
$$+ (B1 \cdot 0.15 - B1\_Destilate) \tag{17}$$
$$+ (B2 \cdot 0.2 - B2\_Destilate) \tag{18}$$
$$+ B1 \cdot 0.4 - B1\_Used\_For\_Home\_Oil \tag{19}$$
$$+ B2 \cdot 0.35 - B2\_Used\_For\_Home\_Oil >= 250000 \tag{20}$$

- **Zawartość siarki w paliwach silnikowych:** Całkowita zawartość siarki w paliwach silnikowych nie może przekraczać 5%:

$$B1\_Destilate \cdot 0.03 + B2\_Destilate \cdot 0.25 \tag{21}$$
$$+ B1\_Used\_For\_Home\_Oil \cdot 0.02 \tag{22}$$
$$+ B2\_Used\_For\_Home\_Oil \cdot 0.12 \tag{23}$$
$$\leq 0.05 \cdot (B1\_Used\_For\_Home\_Oil + B2\_Used\_For\_Home\_Oil \tag{24}$$
$$+ B1\_Destilate + B2\_Destilate) \tag{25}$$

3.1.3 Funkcja celu

Minimalizacja całkowitych kosztów produkcji:

$$\min \quad B1 \cdot (1300 + 10) + B2 \cdot (1500 + 10) \tag{26}$$
$$+ B1\_Destilate \cdot 20 \tag{27}$$
$$+ B2\_Destilate \cdot 20 \tag{28}$$

Funkcja celu wyraża całkowity koszt zakupu surowców (ropy B1 i B2) oraz kosztów związanych z procesami destylacji i krakowania katalitycznego. Celem jest znalezienie optymalnej ilości przetwarzanej ropy i destylatów przy jednoczesnym spełnieniu ograniczeń dotyczących produkcji i jakości produktów końcowych.

3.2 Wyniki

Optymalnie rozwiązanie zakłada zakupienie 1026030.37 ton ropy B1 i wysłanie 92190.89 ton destylatu ropy B1 do krakowania. Uzyskujemy wtedy zakladane ilości produktów, tj. produkujemy dokładnie:

- 200000 ton paliw silnikiowych,
- 400000 ton domowych paliw olejowych,
- 250000 ton ciezkich paliw olejowych.

Całkowity koszt zakupu i przetworzenia ropy wynosi 1345943600.87$.

Fakt iż nie wykorzystujemy ropy B2, najprawdopodobniej jest spowodowany wysoką ceną zakupy i/lub gorszymi parametrami np. wyższą zawartością siarki od ropy B1.

4 Zadanie 4

4.1 Model

4.1.1 Zmienna decyzyjna

Mamy jedną zmienna decyzyjną: „Chosen_Courses”, która jest określona dla każdej pary: grupa, kurs; i przyjmuje wartości binarne (ze zbioru {0,1}). W przypadku gdy jest ona równa jednej dla danej pary to oznacza to, że wybieramy tę grupę danego kursu (dodajemy do planu).

4.1.2 Ograniczenia

Gwarancję tego, że **z każdego kursu wybierzemy dokładnie jedną grupę** gwarantuje nam następujące ograniczenie: Dla każdego przedmiotu „s" suma, po grupach „g", zmiennych decyzyjnych dla par (s,g) jest równa 1.

Grupy nie mogą się pokrywać (student nie może mieć dwóch, lub więcej, różnych zajęć w tym samym czasie). Aby to zagwarantować musimy: Dla każdych przedmiotów „s1,s2" i grup „g1,g2" jeżeli zajęcia (czyli para (przedmiot, grupa)) pierwsze (s1,g1) i drugie (s2,g2) odbywają się w ten sam dzień i zachodzi chociaż jedno z poniższych

1. Zajęcia pierwsze rozpoczynają się przed drugimi i kończą po nich.
2. Zajęcia drugie rozpoczynają się przed pierwszymi i kończą po nich.
3. Zajęcia pierwsze rozpoczynają się przed końcem drugich i zajęcia drugie zaczynają się przed pierwszymi.
4. Zajęcia drugie rozpoczynają się przed końcem pierwszych i zajęcia pierwsze zaczynają się przed drugimi.

to możemy wybrać albo zajęcia pierwsze albo zajęcia drugie, ale nie oba (możemy też nie wybrać żadnego z nich).

Student nie może uczęszczać na więcej niż cztery godziny zajęć obowiązkowych danego dnia. Jest to spełnione jeśli: Dla każdego dnia suma, po wybranych zajęciach, które się odbywają tego dnia, różnic między godziną rozpoczęcia i zakończenia danego zajęcia jest mniejsza lub równa cztery godziny.

Aby **zagwarantować godzinną przerwę między dwunastą a czternastą** musimy sprawdzić czy: Dla każdego dnia, suma po wszystkich wybranych przedmiotach, które odbywają się tego dnia i spełniają conajmniej jedno z poniższych

1. Rozpoczęły się przed dwunastą i zakończyły po trzynastej.
2. Rozpoczeły się przed trzynastą i zakończyly po czternastej.
3. Rzopoczeły się po dwunastej, skończyły przed czternastą i trwały ponad godzinę

musi być równa zero.

Jeżeli zajęcia zaczynają się przed 15 i kończą po 13 w środę lub poniedziałek, lub zaczynają się przed 13 i kończą po 11 w środę to nie możemy ich wziąć (dodać do planu), **jeżeli chcemy zagwarantować studentowi czas na trenowanie**.

4.1.3 Dodatkowe Ograniczenia

Jeżeli chcemy **ograniczyć dni, w które student odbywa zajęcia do poniedziałku, wtorku i czwartku**, wystarczy nie brać pod uwagę zajęć odbywających się w środę i piątek.

Ponadto jeżeli chcemy, aby każde wybrane zjęcia miały **preferencję conjamniej równą pięć**, to dla każdej mniejszej wartości ustawiamy „Chosen_Courses" na zero.

4.1.4 Funkcja celu

Będziemy maksymalizowali sumę preferencji poprzez wybieranie tych zajęć, które mają możliwie jak największą preferencję. Mówiąc precyzyjniej, maksymalizujemy następujące wyrażenie:

$$\max \sum_{g \in G, s \in S} Preferencje[g,s] \cdot Chosen\_Courses[g,s] \tag{29}$$

4.2 Wyniki

Udało się dobrać poniższy plan zajęć. Student może codziennie zjeść obiad na stołówce i chodzić na 2 treningi w tygodniu. Grupą z najniższą preferencją jest grupa „Analiza II”, gdzie preferencja wynosi 4. Całkowita suma preferencji wybranych przedmiotów wynosi 37.

Godzina	**Poniedziałek**	**Wtorek**	**Środa**	**Czwartek**	**Piątek**
8:00 - 8:30	Chemia min. I				
8:30 - 9:00	Chemia min. I				
9:00 - 9:30	Chemia min. I				
9:30 - 10:00	Chemia min. I				
10:00 - 10:30		Analiza II	Algebra III		
10:30 - 11:00	Chemia org. II	Analiza II	Algebra III		
11:00 - 11:30	Chemia org. II	Analiza II	Algebra III		
11:30 - 12:00	Chemia org. II	Analiza II	Algebra III		
12:00 - 12:30					
12:30 - 13:00					
13:00 - 13:30	*Trening I*		*Trening II*		
13:30 - 14:00	*Trening I*		*Trening II*		
14:00 - 14:30	*Trening I*		*Trening II*		
14:30 - 15:00	*Trening I*		*Trening II*		
15:00 - 15:30					
15:30 - 16:00					
16:00 - 16:30					
16:30 - 17:00					
17:00 - 17:30				Fizyka IV	
17:30 - 18:00				Fizyka IV	
18:00 - 18:30				Fizyka IV	
18:30 - 19:00				Fizyka IV	
19:00 - 19:30				Fizyka IV	
19:30 - 20:00				Fizyka IV	

Tabela 1: Plan zajęć

4.2.1 Rozkład z dodatkowymi ograniczeniami

Poniższy plan zajęć ogranicza zajęcia obowiązkowe tylko do poniedziałku, wtorku i czwartku. Ponadto obecnie najniższa preferencja wynosi 5 i jest to preferencja grup: „Fizyka II”, „Chemia org. II” i „Algebra I”. Student może codziennie zjeść obiad na stołówce i chodzić na jeden z dwóch treningów środowych. Całkowita suma preferencji wybranych przedmiotów wynosi 28.

Godzina	**Poniedziałek**	**Wtorek**	**Środa**	**Czwartek**	**Piątek**
8:00 - 8:30				Analiza IV	
8:30 - 9:00				Analiza IV	
9:00 - 9:30				Analiza IV	
9:30 - 10:00				Analiza IV	
10:00 - 10:30		Fizyka II			
10:30 - 11:00	Chemia org. II	Fizyka II			
11:00 - 11:30	Chemia org. II	Fizyka II	*Trening I*		
11:30 - 12:00	Chemia org. II	Fizyka II	*Trening I*		
12:00 - 12:30		Fizyka II	*Trening I*		
12:30 - 13:00		Fizyka II	*Trening I*		
13:00 - 13:30	Algebra I		*Trening II*	Chemia min. III	
13:30 - 14:00	Algebra I		*Trening II*	Chemia min. III	
14:00 - 14:30	Algebra I		*Trening II*	Chemia min. III	
14:30 - 15:00	Algebra I		*Trening II*	Chemia min. III	
15:00 - 15:30					
15:30 - 16:00					
16:00 - 16:30					
16:30 - 17:00					
17:00 - 17:30					
17:30 - 18:00					
18:00 - 18:30					
18:30 - 19:00					
19:00 - 19:30					
19:30 - 20:00					

Tabela 2: Plan zajęć z ograniczeniem