Zadanie 62 TPI

Bartosz Michalak

6 June 2024

Pokaż, że jeśli istnieje wielomianowy algorytm dający dla danego przykładu problemu komiwojażera cykl kosztujący nie więcej niż dwa koszty cyklu optymalnego, to P = NP. (Wskazówka: wykorzystaj problem cyklu Hamiltona.)

Oznaczenia:
OPT - waga optymalnego rozwiązania problemu komiwojarzera,
w() - funkcja wagowa, zwracająca wagę krawędzi w grafie.

Fakt 1:
W ogólności znalezienie cyklu Hamiltona jest NP-zupełne.
Fakt 2:
W ogólności znalezienie optymalnego rozwiązania problemu komiwojarzera jest NP-trudne.
Fakt 3:
Znalezienie cyklu komiwojarzera jest równoznaczne znalezieniu cyklu hamiltona.

Dostajemy graf $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, gdzie $\mathbf{V}$ - zbiór wierzchołków, $\mathbf{E}$ - zbiór krawędzi.
Chcemy znaleźć cykl Hamiltona. Dodajemy do grafu wierzchołki i krawędzie tak, żeby graf $\mathbf{G}$ stał się grafem pełnym: $\mathbf{G_c} = (\mathbf{V'}, \mathbf{E'})$, gdzie
$\mathbf{V'} = \mathbf{V} \cup \bigcup_{i=1}^{n} v_i$ - nowy zbiór wierzchołków,
$\mathbf{E'} = \mathbf{E} \cup \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}}((\forall v_i, v_j \in \mathbf{V'})\neg(\exists e \in \mathbf{E})$ - nowy zbiór krawędzi.
oraz $(\forall e \in \mathbf{E'}\ \mathbf{E})\mathbf{w}(e) = \infty$.

Teraz uruchamiając algorytm z polecenia dostaniemy cykl komiwojarzera zawierający tylko i wyłącznie wierzchołki z grafu G.
Gdyby otrzymany cykl zawierał wierzchołek spoza G to by to oznaczało, że zawiera krawędź e taką, że w(e) $= \infty > 2 * OPT$,
czyli algorytm nie mógłby zwrócić takiego cyklu. Zatem algorytm ten znalazł cykl Hamiltona w grafie G w czasie wielomianowym, czyli P = NP $\square$