Zadanie nr 12, Informatyka 2

Aby móc wykonać zadanie jestem zmuszony wyprowadzić wzór na masę z warunku na równowagę sił, gdy kula jest zanurzona do $\frac{1}{2}$ swojej wysokości.

A więc, gdy kula jest zanurzona do połowy swojej wysokości:

$$F_g = F_w$$

$$mg = \rho_{cieczy}\, g\, \frac{2}{3}\pi R^3 \rightarrow m = \rho_{cieczy}\frac{2}{3}\pi R^3$$

W rozważanym środowisku na masę oddziałują dwie siły:

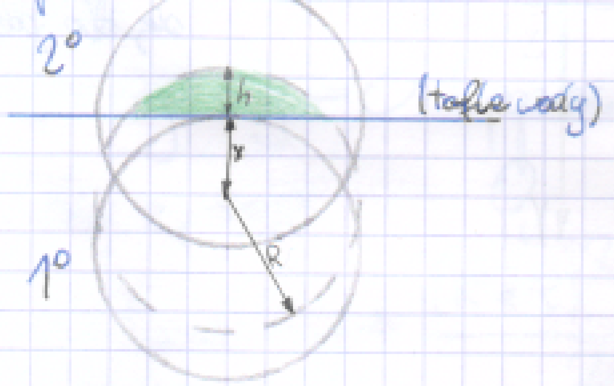
$$F_g = mg = const$$

oraz siła wyporu cieczy (zależna od objętości zanurzonej w cieczy, a więc od położenia)

$F_w = \rho_{cieczy}\cdot g \cdot V_{zan}$, gdzie

$V_{zan} = V_C - V_G$, gdzie

gdzie V_C oznaczyłem całkowitą objętość kuli: $\frac{4}{3}\pi R^3$, a gdzie V_G obszar zaznaczony na zielono na rysunku poniżej:



(to nie jest dokładny rysunek)

W czasie analizowanego ruchu kula porusza się od stanu 1° do stanu 2°. Przez to ~~obszar~~ objętość niezanurzona będzie się wahała od 0 do pełnej objętości.

Dla chwilowej wartości + wartość objętości zielonego wycinka V_G wynosi:

$V_G = \frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$, gdzie za h podstawię $R-x$, gdzie x to odległość środka ciężkości od początku układu współrzędnych. Ostateczny wzór:

$$V_G = \frac{\pi(R-x)^2}{3}(2R+x)$$

Źródło: wikipedia.org/wiki/Spherical_cap

Ostatecznie

$$V_{zan} = \left[\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{\pi(R-x)^2}{3}(2R+x)\right]$$

oraz wzór na F_w:

$$F_w = \rho_{cieczy}\cdot g\left[\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{\pi(R-x)^2}{3}(2R+x)\right]$$

Wyprowadzam wektorowe równanie ruchu:
Na podstawie II zasady dynamiki Newtona:

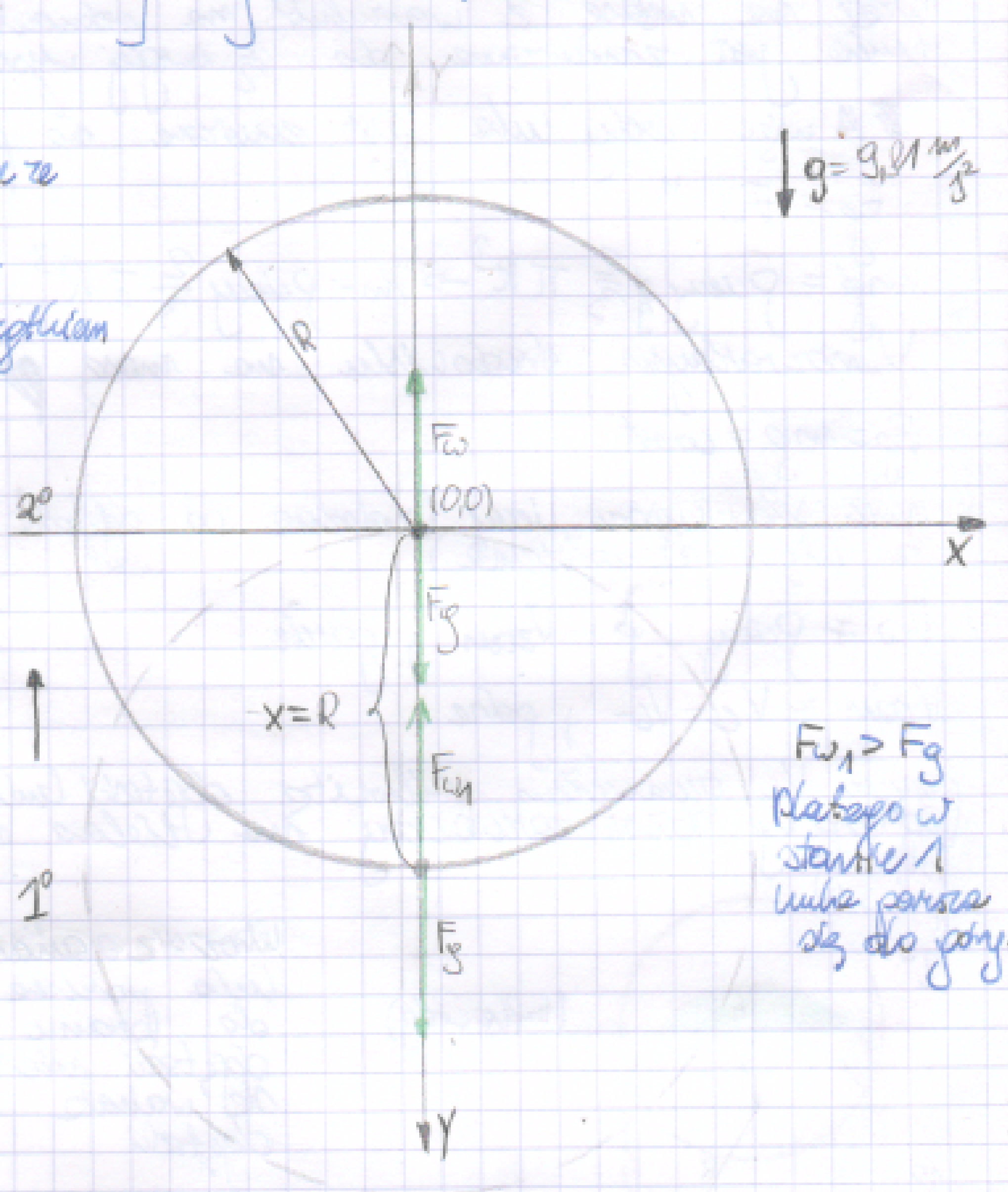
$$ma = -F_w + F_g$$

(znaki się zgadzają ze zwrotami)

Wprowadziłem układ współrzędnych z początkiem w położeniu równowagi.

Siły F_w i F_g zaczepione są w środku ciężkości.

Wzory na nie wyprowadziłem wcześniej:



$g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$

$F_{w1} > F_g$ dlatego w stanie 1 kula porusza się do góry.

Kontynuuję wyprowadzanie wzoru

$$m x'' = -\rho_{cieczy} \cdot g \left[\frac{4\pi R^3}{3} - \frac{\pi (R-x)^2}{3}(2R+x)\right] + mg$$

+ podstawiam za m to, co wyprowadziłem na początku

$$x'' = -\frac{3g}{2\pi R^3}\left[\frac{4\pi R^3}{3} - \frac{\pi(R-x)^2}{3}(2R+x)\right] + g$$

$$x'' = -g + \frac{(R-x)^2(2R+x)\cdot g}{2R^3} \quad \left[\frac{m}{s^2} = \frac{m}{s^2} - \frac{m^2 \cdot m}{m^3}\cdot\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\left[\frac{m}{s^2} = \frac{m}{s^2}\right]$$

Sprawdzam rozwiązanie:

$$\begin{cases} z_1 = x \\ z_2 = x' \end{cases}$$

Równanie przekształcone

$$z_1' = z_2$$

$$z_2' = -g + \frac{(R-z_1)^2(2\cdot R + z_1)\cdot g}{2R^3}$$

Warunki początkowe

$z_1 = R$ (gdyż $x_0 = R$, zgodnie z rysunkiem)

Dla

$z_1 = 0$

$$z_2' = a = -g + \frac{(R-0)^2(2\cdot R+0)\cdot g}{2R^3} = -g + \frac{2R^3\cdot g}{2R^3} =$$

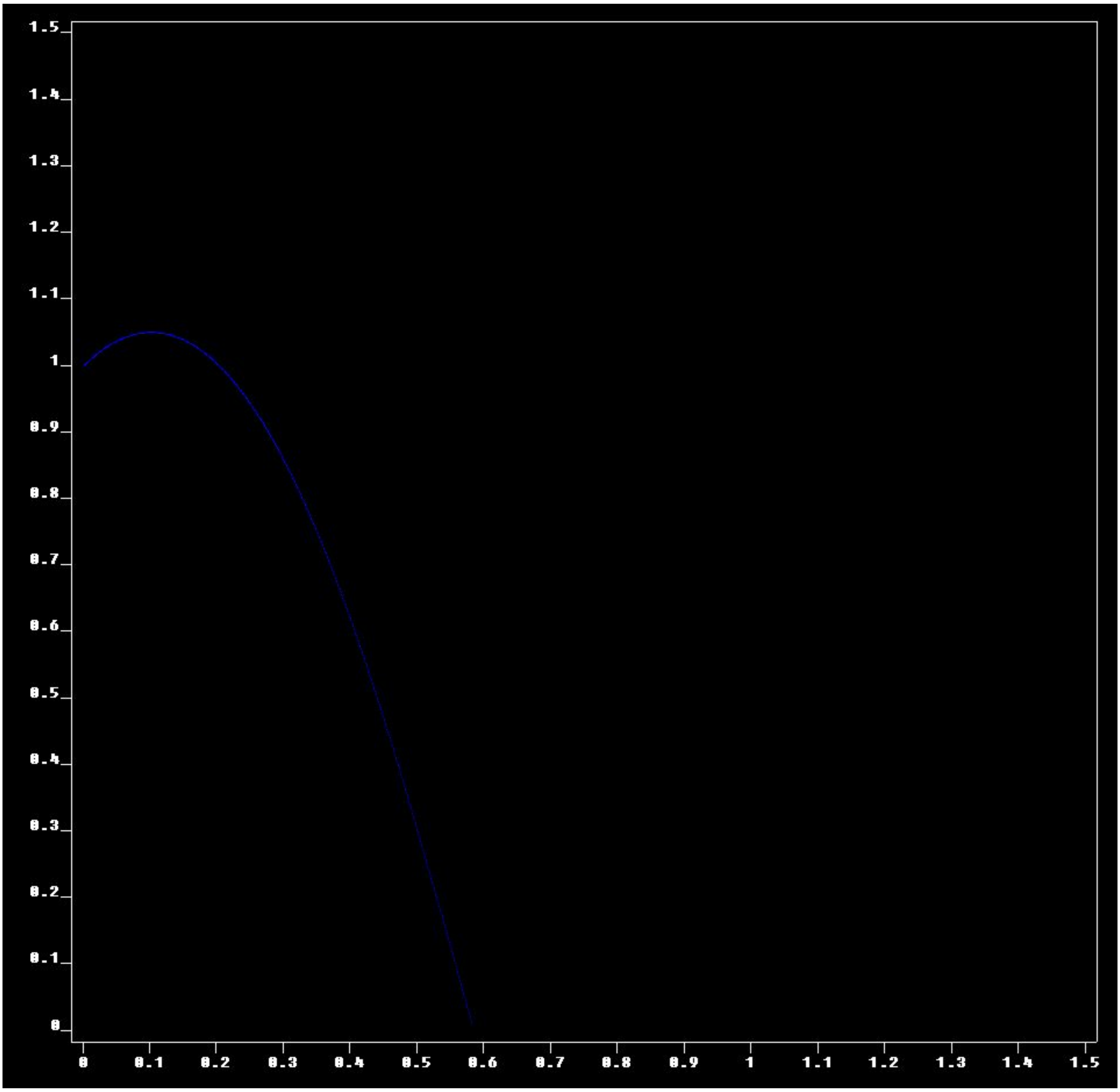
$= -g + g = 0$ (poprawny wynik)

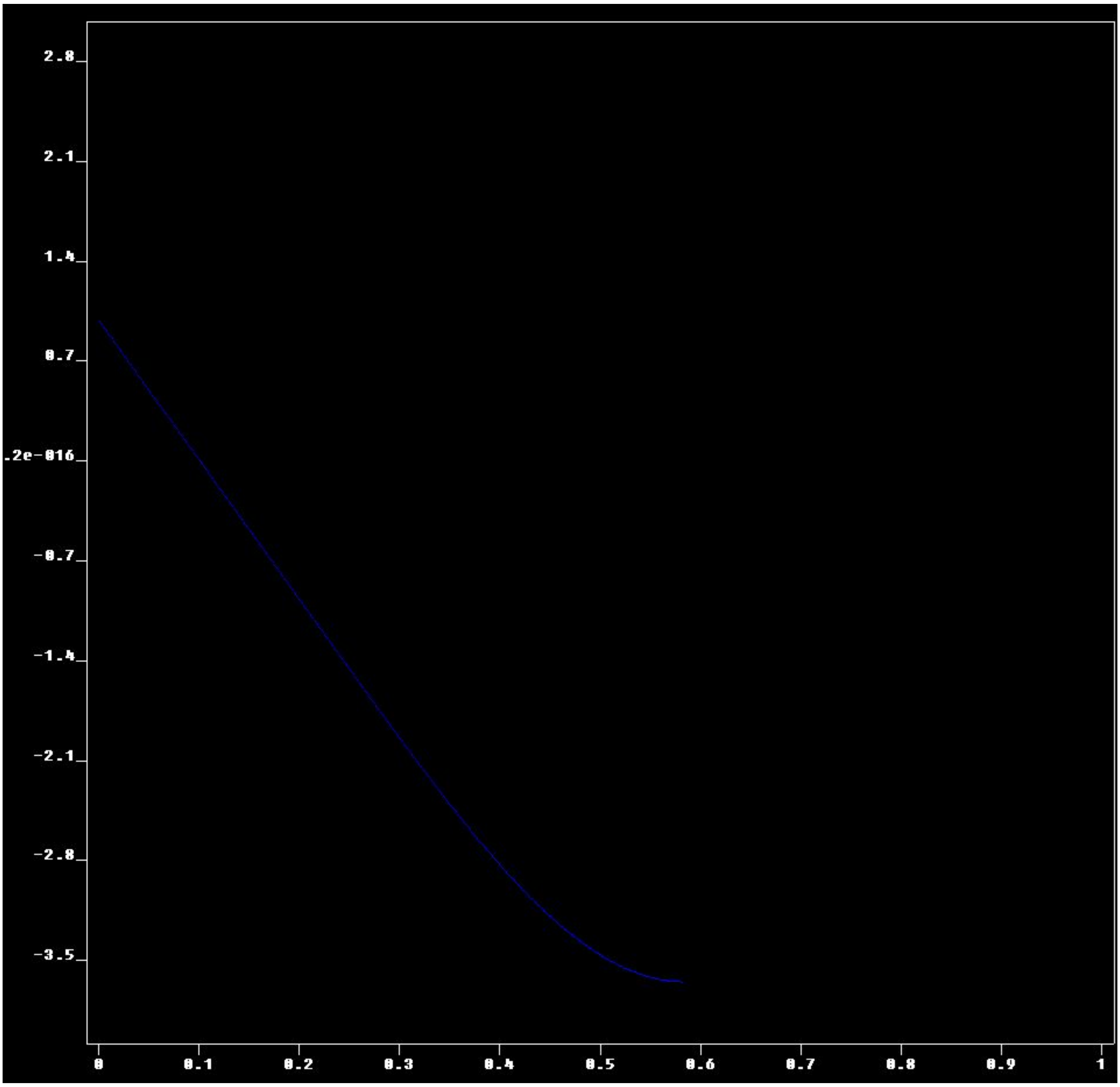
Dla $z_1 = R$

$$z_2' = a = -g + \frac{(\overset{0}{R-R})^2(2R+R)\cdot g}{2R^3} = -g - \cancel{\frac{2\cdot 4R^2\cdot R\cdot g}{2R^3}} =$$

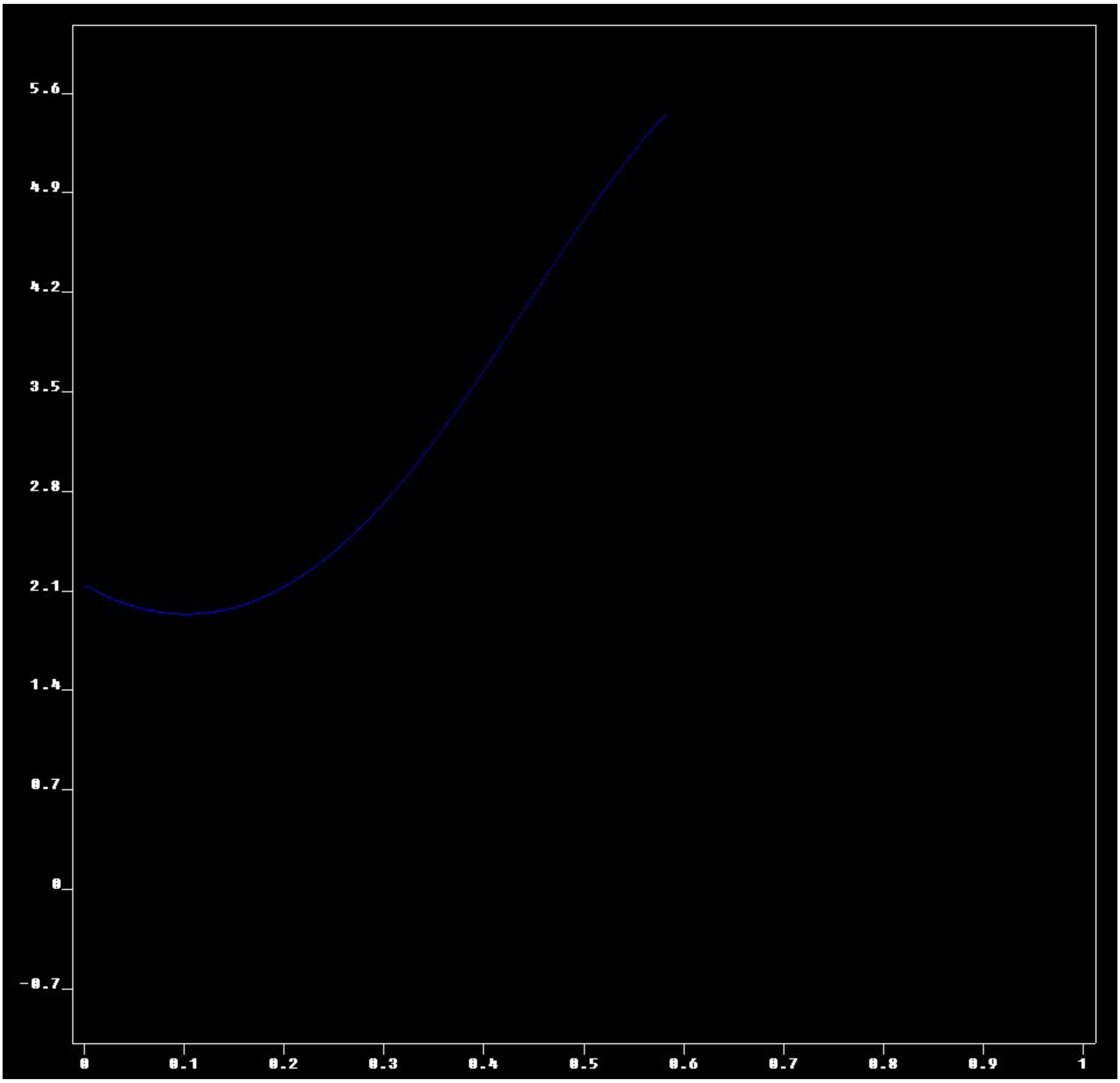
$= -g$ (czyli kula będzie poruszała się w górę, przeciwnie do przyjętej osi)

Zawieram wykresy:
1) położenia
2) prędkości
3) energii *10^-4





2.8
2.1
1.4
0.7
.2e-016
-0.7
-1.4
-2.1
-2.8
-3.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1



Wszystkie wykresy wykonałem dla promienia = 1, położenia początkowego = 1 oraz prędkości początkowej = 1.
Energia na wykresie rośnie, lecz gdy weźmiemy pod uwagę energię cieczy pozostanie ona stała, zgodnie z obowiązującymi regułami.