wykład 16 V 2017

Tw (Tennenbaum) PA nie ma niestandardowych modeli obliczalnych

Def $\mathfrak{A} \models PA$, $a \in A$. Mówimy, że a koduje zbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ jeśli $X = \{n \in \mathbb{N} : \mathfrak{A} \models p_n \mid a\}$

→ n-ta liczba pierwsza

Uw Rodzina zbiorów kodowanych w $\mathfrak{A}$ nie zmieniłaby się, gdyby zmienić def. kodowania na np. $X = \{n \in \mathbb{N} : n\text{-ty bit } a \text{ jest } 1\}$

Stw Jeżeli $\varphi(x)$ fla ($\mathfrak{A}$ niest. model PA), to zbiór $\{n \in \mathbb{N} : \mathfrak{A} \models \varphi(n)\}$ jest kodowany w $\mathfrak{A}$.

Dow Przez indukcję po x dowodzimy $\xi(x)$
$\exists w [\forall y \leq x (p_y \mid w \Leftrightarrow \varphi(y)) \wedge \forall y > x \; p_y \nmid w]$

Biorąc niestandardowe b dostajemy a t.że
$\mathfrak{A} \models \forall y \leq b (p_y \mid a \Leftrightarrow \varphi(y))$
W szczególności $\mathfrak{A} \models p_n \mid a \Leftrightarrow \varphi(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ □

Wn Dowolny niestandardowy model ~~PA~~ $\mathfrak{A} \models PA$ koduje
(a) wszystkie rozstrzygalne podzbiory $\mathbb{N}$
(b) pewien nierozstrzygalny

Dow (a) Jeśli $X \subseteq \mathbb{N}$ rozstrz. za pomocą programu P to ist. Σ_1 fla $\varphi_P(x)$ t.że dla dow. $n \in \mathbb{N}$
$n \in X$ wtw $\mathbb{N} \models \varphi_P(n)$ wtw $\mathfrak{A} \models \varphi_P(n)$
Mianowicie $\varphi_P(x)$ mówi:
„ist. najmniejsze obliczenie P na wejściu x i daje ono odp. TAK"