Tw (może, bez dow.) (ew. na ost. ćwiczeniach)

Ist. fla $x^y = z$ o której PA dowodzi wszystkich podstawowych własności wykładniczej fcji, tj.

$\forall x \; x^0 = 1$

$\forall xyz \left(x^y = z \Rightarrow x^{y+1} = x \cdot z \right)$

$\forall \ldots \left(x^{y_1} = z_1 \wedge x^{y_2} = z_2 \Rightarrow x^{y_1 + y_2} = z_1 \cdot z_2 \right)$

⋮

$\forall xy \, \exists z \left(x^y = z \right)$

Obserwacja: Możemy więc zdef. w PA relację „x-ty bit w zapisie binarnym liczby y to 1"

Prz. $\exists z_1 z_2 \left[z_2 \leq 2^x - 1 \wedge y = z_1 \cdot 2^{x+1} + 2^x + z_2 \right]$

Stw. Za pomocą pow. relacji PA interpretuje ZFC \ {aksjom. nieskończ.} (∪ {¬ aksj. nieskończ.})

Dow. $x \in y \longmapsto$ „x-ty bit y jest 1"

Przykł. aksj.

- zb. pusty: $\exists x \forall y \, \neg y \in x$ spełn., bo mamy 0
- wyróżnianie: $\exists w \forall z \left(z \in w \Leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z) \right)$

Najpierw sprawdzamy, że $x \in y \Rightarrow x \leq y$

Przez ind. po $u \leq x$ dowodzimy $\psi(u)$:

$\exists w \forall z \leq u \left(z \in w \Leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z) \right)$

$\psi(0)$ ok

$\psi(u) \Rightarrow \psi(u+1)$? Mamy w_u

1° $u+1 \in x \wedge \varphi(u+1)$ wtw $w_{u+1} := w_u + 2^{u+1}$

2° nie 1° wtw $w_{u+1} := w_u$