Pokażemy więc, że $T \vdash \neg\gamma \Rightarrow \neg Con_T$

Z jednej strony $T \vdash \neg\gamma \Rightarrow Pr_T(\ulcorner\gamma\urcorner)$

(od tej pory pomijamy $\ulcorner\ \urcorner$)

Więc $T \vdash \neg\gamma \Rightarrow Pr_T(Pr_T(\gamma))$ (z (D2)) (*)

Z drugiej strony $T \vdash \gamma \Rightarrow \neg Pr(\gamma)$

więc (z (D1)) $T \vdash Pr(\gamma \Rightarrow \neg Pr(\gamma))$

A więc $T \vdash Pr(\gamma) \Rightarrow Pr(\neg Pr(\gamma))$ (D3)

Ale $T \vdash \neg\gamma \Leftrightarrow Pr_T(\gamma)$

więc $T \vdash \neg\gamma \Rightarrow Pr_T(\neg Pr_T(\gamma))$ (**)

Zatem z (*, **)

$$T \vdash \neg\gamma \Rightarrow \underbrace{\left(Pr_T(\underbrace{Pr_T(\gamma)}_{\neg\gamma}) \wedge Pr_T(\underbrace{\neg Pr_T(\gamma)}_{\gamma})\right)}_{\text{sprz. (D3)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\neg Con_T \qquad \square$$

Uwagi świetlopoglądowe:

(nawet bez Powerset)

ZFC dowodzi istnienia liczb naturalnych, i tym samym nieprzeciwności PA

dowód nieprz. $\rightarrow$ PA $\rightarrow$ $I\Delta_0 + exp$ $\rightarrow$ $I\Delta_0$ $\rightarrow$ PA⁻

- ZFC \ {Powerset} $\approx Z_2$

dowody nieprz.

- ZFC \ {Zastępowanie} $\equiv$ ZC $\approx$ arytmetyka skończonych ciągów

dowód nieprz. ZFC $\approx$ ZFC + GCH

ZFC + {∃ liczba nieosiągalna}

⋮

ZFC + {nieprzeliczalnie wiele liczby kardynalne}

⋮