Wn Relacja R jest rozstrzygalna wtw R jest def. w $\mathbb{N}$ zarówno Σ_1, jak i Π_1 ~~ftb~~

(Mówimy, że ~~R~~ R jest Δ_1)

Dow ($\Rightarrow$) oczywiste

($\Leftarrow$) jeśli R i $\mathbb{N}^k \setminus R$ są rek. przel., to oba są rozstrzygalne $\square$

Stw PA^- jest Σ_1 – zupełna, tzn. jeśli φ Σ_1 – zdanie (– pierwsze defin. wpr.) i $\mathbb{N} \models \varphi$, to $PA^- \vdash \varphi$.

Dw Każdy model PA^-, A, jest postaci

$0^A \; 1^A \; 2^A \; \ldots$ [potem coś jeszcze]

(izo z $\mathbb{N}$)

Jeśli teraz φ postaci $\exists y\, \delta(y)$ gdzie $\delta \in \Delta_0$,

Zał. że $\mathbb{N} \models \exists y\, \delta(y)$, więc ist. m t. że $\mathbb{N} \models \delta(m)$

Ale w takim razie $A \models \delta(m^A)$

Czyli $A \models \varphi$

Z dowolności A, $PA^- \vdash \varphi$ $\square$

Def Niech $\underline{0} := 0$

$\underline{n} := 1 + \ldots + 1$

Term $\underline{n}$ nazywamy liczebnikiem dla n.

Stw Jeśli $R \subseteq \mathbb{N}^k$ jest rozstrzygalna, to R jest reprezentowalna w PA^- w nast. sensie: ist. $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ (np. Σ_1) t. że

jeśli $(n_1, \ldots, n_k) \in R$, to $PA^- \vdash \varphi(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k})$

$(\ldots) \notin R$, to $PA^- \vdash \neg\varphi(\ldots)$

Dow Niech $\exists y\, \psi(\bar{x}, y)$ definiuje R

$\exists z\, \xi(\bar{x}, z)$ def. $\mathbb{N}^k \setminus R$

$\psi, \xi \in \Delta_0$