(b) Zauważmy, że powiemy dysponujemy ftą $Sat_{\Pi_1}(x)$ definiującą prawdę dla Π_1-zdań, to zbiór $\{\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathbb{N} : \varphi\ \Pi_1\text{-zdanie i } \mathbb{A} \models \varphi\}$ jest kodowany w $\mathbb{A}$.

Gdyby $\Pi_1-Th(\mathbb{A})$ była rozstrzygalna, to podobnie jak w punkc. (a) moglibyśmy napisać Σ_1-ftę $\sigma(x)$ t.że dla dow. Π_1-zd. $\varphi \in \mathbb{N}$
$$\mathbb{A} \models \varphi \text{ wtw } \mathbb{A} \models \sigma(\ulcorner\varphi\urcorner)$$
A jak wiadomo z poprzedniego wykładu to jest niemożliwe (tw. przekątniowe + przeddesdowy)!

<u>Dow</u> (Tw. Tenn.)

Niech $\mathbb{A} = (\mathbb{N}, \oplus, \odot, \leq)$ dowolny model PA.
Pokażemy, że każdy podzbiór kodowany w $\mathbb{A}$ jest rozstrzygalny, a zatem $\mathbb{A}$ musi być standardowy.
Niech $a \in A$ $(=\mathbb{N})$
Niech X kodowany przez a w $\mathbb{A}$.
Wtedy dla dow. $n \in \mathbb{N}$:

$n \in X \rightsquigarrow$ ~~...~~ $\mathbb{A} \models p_n \mid a \rightsquigarrow \mathbb{A} \models \exists b (p_n \cdot b = a)$
$\rightsquigarrow$ ist. $b \in A$ $(=\mathbb{N})$ t.że $\mathbb{A} \models \underbrace{b \oplus \ldots \oplus b}_{p_n \text{ razy}} = a$ (*)

~~Podobnie dla~~

Podobnie:

$n \notin X \rightsquigarrow$ ist. $b \in A$ $(=\mathbb{N})$ oraz $k \in \{1, \ldots, p_n - 1\}$
t.że $\mathbb{A} \models \underbrace{b \oplus \ldots \oplus b}_{p_n} \oplus \underbrace{1 \oplus \ldots \oplus 1}_{k \text{ razy}} = a$ (**)

Na danym wejściu n możemy rozstrzygnąć, czy $n \in X$, po kolei rozpatrując wszystkie $b \in \mathbb{N}$ i $k \in \{1, \ldots, p_n - 1\}$, sprawdzając czy zachodzi (*) czy (**) □