Ćwiczenie

Zad 1

Niech $\varphi \in \Sigma_1$

Udowodnij, że $PA \vdash \varphi \Rightarrow Pr_{PA^-}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ (w PA)

Rozw Strategia: Udowodnijmy Σ_1-zupełność PA^- dla φ i potem zobaczymy, że dowód był w PA.

$\varphi := \exists y\, \delta(y)$ $\delta \in \Delta_0$

Dla uproszczenia wszystkie kwantyfikatory w δ ograniczone przez y.

Zał. że $\delta(m)$.

Zauważmy, że $PA^- \vdash \forall x (x \leq \underline{m} \Rightarrow x = \underline{0} \vee x = \underline{1} \vee \ldots$
$\ldots \vee x = \underline{m})$ (*)

(dla każdego k)

(udowodnimy tego przez indukcję po k)

W związku z tym przekonajmy się, że dla dow. $\tilde{\delta}(x_1, \ldots, x_l)$
podformuły δ i $n_1, \ldots, n_l \leq m$,
jeśli $\tilde{\delta}(n_1, \ldots, n_l)$, to $PA^- \vdash \tilde{\delta}(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_l})$
$PA^- \vdash \neg \tilde{\delta}(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_l})$

$\tilde{\delta}$ atom np $x + y = z$ ok - manipulacje napisem

$\tilde{\delta}(x_1, \ldots, x_l) := \exists z \leq y\, \tilde{\tilde{\delta}}(x_1, \ldots, x_l, z)$

jeśli $\tilde{\delta}(n_1, \ldots, n_l)$ to bierzemy stosowne
$z = p \leq m$ i wiemy, że $PA^- \vdash \tilde{\tilde{\delta}}(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_l}, \underline{p})$

jeśli $\neg \tilde{\delta}(n_1, \ldots, n_l)$ to $PA^- \vdash \neg \tilde{\tilde{\delta}}(\overline{\underline{n}}, \underline{0})$

$\vdots$

$\vdash \neg \tilde{\tilde{\delta}}(\overline{\underline{n}}, \underline{m})$

i odpalamy (*) dla $k = m$.