

1. Macierze transformacji (1 pkt)

Według poniższego wzoru wygeneruj wzorce kosinusowe w postaci wektorów i utwórz z nich macierz transformaty – macierz analizy A transformaty DCT-II. Niech

$$w_k(n) = s_k * \cos\left(\frac{\pi * k}{N} * (n+0.5)\right), N=20, k=0...N-1, n=0...N-1, \{s_0 = \sqrt{\frac{1}{N}}\}$$

oznacza k -ty wiersz macierzy analizy A (20x20) będącej bazą pewnej transformaty.

Sprawdź czy wszystkie wektory (wiersze macierzy) są do siebie ortonormalne (czy iloczyn skalarny wszystkich par jest równy zero: suma iloczynów odpowiadających sobie próbek).

Poniżej podano przykład obliczania iloczynu skalarnego różnymi metodami.

```
clear all; close all;
w1 = [ 0 0 1 0 0 0 0 0 ]; % Wektor 1
w2 = [ 0 0 0 0 1 0 0 0 ]; % Wektor 2
w12 = w1 .* w2; % Iloczyn odpowiadających sobie próbek
prod1 = sum(w12) % „0” oznacza że wektory są ortogonalne
prod2 = dot(w1, w2) % w przestrzeni Euklidesowej
prod3 = w1*w2' % bezpośrednie obliczenie (mnożenie wektorowe)
```

2. Transformacja odwrotna – perfekcyjna rekonstrukcja (1+0.5 pkt)

Wygeneruj macierz odwrotną (syntezy) $S=IDCT$ do macierzy DCT z pkt. 1 (transponuj macierz A , czyli zamień wiersze na kolumny), sprawdź czy $SA=I$ (macierz identycznościowa), a następnie mając A i S wykonaj analizę:

$$X = Ax'$$

oraz rekonstrukcję (syntezę):

$$x_s = SX$$

sygnału sygnału losowego (funkcja `randn()`), sprawdź czy transformacja posiada właściwość perfekcyjnej rekonstrukcji, ($x_s == x$?).

Dla dociekliwych (+0.5 pkt): wygeneruj macierz kwadratową A za pomocą funkcji `randn()` dla $N=20$. Sprawdź ortonormalność jej wierszy (czy norma wierszy=1). Wyznacz macierz odwrotną $S=inv(A)$. Sprawdź, czy $AS=I$?, czyli czy sekwencja operacji $y=Ax$, $x_s=Sy$ posiada właściwość perfekcyjnej rekonstrukcji. Dokonaj analizy i syntezy dowolnego sygnału losowego jak powyżej oraz sprawdź czy $x_s == x$?

„Zepsute” DCT: wygeneruj macierz A dla DCT, podstawiając niepoprawne indeksy (wartości) częstotliwości, np. zastąp „ k ” przez „ $k+0.25$ ” (wzór w pkt. 1). Sprawdź ortogonalność tej macierzy, sprawdź wynik analizy oraz perfekcyjną rekonstrukcję na sygnale szumowym i harmonicznym.

3. Analiza częstotliwościowa (3 pkt)

Przyjmij liczbę próbek sygnału $N=100$ i częstotliwość próbkowania $f_s=1000$ Hz. Wygeneruj sygnał x będący sumą trzech sinusoid o częstotliwościach $f_1=50$, $f_2=100$, $f_3=150$ Hz i amplitudach $A_1=50$, $A_2=100$, $A_3=150$ (odpowiednio).

Zbuduj macierze $A=DCT$ i $S=IDCT$ dla $N=100$ (patrz wzór w ćwiczeniu 1). Wyświetl w pętli wartości wszystkich wierszy macierzy A i kolumn macierzy S , tzn. pierwszy wiersz A , poniżej pierwsza kolumna S , drugi wiersz macierzy A i druga kolumna macierzy S , itd. Wyświetlaj oba przebiegi na jednym wykresie, użyj pętli i instrukcji `pause`.

Wykonaj analizę $y=Ax$ i wyświetl wartości `y(1:N)`: porównaj wartości współczynników niezerowych z wartościami amplitud składowych sygnału oraz porównaj numery współczynników niezerowych z wartościami częstotliwości składowych sygnału. Wyskaluj oś poziomą w częstotliwości: zastąp `n=1:N`

przez $f = (0:N-1) * f_s / N / 2$. Czy teraz wynik analizy (pokazywane częstotliwości i amplitudy składowych sygnału) jest poprawny? Sprawdź perfekcyjną rekonstrukcję ($x_r = Sy$, $x_r == x$?).

Zmień częstotliwość $f_2 = 100$ Hz drugiej składowej sygnału na $f_2 = 107$ Hz, wykonaj analizę sygnału sumarycznego ($y = Ax$) i wyświetl wyskalowany w hercach wykres $y(f)$. Składowa o $f_2 = 107$ Hz jest teraz rozmyta, ponieważ jej wzorca nie ma w zestawie funkcji bazowych (w wierszach macierzy A). Sprawdź czy mimo to jest możliwa perfekcyjna rekonstrukcja sygnału ($x_r = Sy$, $x_r == x$?).

Zwiększ wszystkie częstotliwości sygnału o 2.5 Hz (przesunięcie spowodowane przez zastosowanie niepoprawnej częstotliwości w konwerterze sygnału telekomunikacyjnego do pasma podstawowego wokół 0 Hz). Wyświetl wynik analizy. Zwróć uwagę na rozmycie wszystkich składowych.

Dlaczego niektóre współczynniki analizy (y) mają duże wartości? Ponieważ analizowany sygnał dobrze koreluje się (iloczyn skalarny) z niektórymi wierszami macierzy A (wzorcami częstotliwości).

Dlaczego możliwa jest rekonstrukcja sygnału? Ponieważ wiedząc „ile” (y) każdego wzorca częstotliwości jest w sygnale (wzorce znamy), można te wzorce częstotliwości wymnożyć przez „ile” i zsumować przeskalowane sygnały ($x_r = By$), odtwarzając w ten sposób analizowany sygnał (pierwsza próbka sygnału zrekonstruowanego jest sumą pierwszych próbek wszystkich przeskalowanych wzorców, druga ... sumą drugich, itd.; w kolumnach macierzy B mamy wzorce, które są wykorzystywane do rekonstrukcji, y to informacja o „ile”).

4. Sygnały rzeczywiste (opcjonalnie – dla dociekliwych) (+0.25 pkt)

Wczytaj do Matlaba sygnał z pliku `mowa.wav`, lub inny własny plik, wykorzystując funkcję `[x, fs] = audioread('mowa.wav')` i wyświetl go (w osi x numer próbki). Następnie wybierz wzrokowo z tego sygnału $M=10$ różnych fragmentów $x_k = x(n_1:n_2)$ o długości $N=256$ próbek, $k=1,2,3,...M$, oblicz dla nich $y_k = Ax_k$. Następnie wyświetl w pętli dane na podzielonym rysunku: góra – k -ty fragment $x_k(n_1:n_2)$, dół – wynik analizy $y_k(f)$, wyskalowany w hercach. Jako macierz analizy przyjmij DCT z punktu 1.

5. Filtracja dźwięku z DCT/IDCT (+1.25 pkt)

(+1 pkt) Nagraj 3-4 sekundy fragmentu swojej własnej mowy z częstotliwością próbkowania $f_s = 8000$ Hz, czyli jedno zdanie. Narysuj (`plot(x)`) i odsłuchaj sygnał (`soundsc(x, fpr)`). Wykonaj transformację DCT całego sygnału `c=dct(x)` lub jego części `c=dct(x(n1:n2))`. Wyświetl obliczone współczynniki transformaty `stem(c)`. Następnie dokonaj syntezy mowy z: 1) 25% wszystkich współczynników - wybierz pierwsze wartości, np. `y=idct([c(1:8000); zeros(length(c)-8000,1)])`, 2) 75% wszystkich współczynników - wybierz ostatnie wartości. Odsłuchaj wynik przetwarzania.

Przykład 1: wszystkie wartości współczynników mniejsze od 50 możesz wyzerować w ten sposób: `c(c<50)=0`. Przykład 2: możesz wyzerować tylko współczynniki o indeksach od 100 do 200: `c([100:200])=0`.

(+0.25 pkt) Teraz dodaj zakłócenie sinusoidalne o częstotliwości 250 Hz do nagranej mowy:

```
x=x+0.5*sin(2*pi*250/fpr*(0:length(x)-1)')
```

(zwróć uwagę na orientację wektora, poziomy czy pionowy). Narysuj sygnał, odsłuchaj go, wykonaj DCT, zmodyfikuj współczynniki DCT (usuń zakłócenie), wykonaj odwrotne DCT, narysuj sygnał, odsłuchaj wynik przetwarzania.