Inne spojrzenie. Permutacje, kombinacje, wariacje

Inne spojrzenie. Permutacje, kombinacje, wariacje

Źródło: Alex Chambers, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Początków kombinatoryki można doszukać się już za czasów starożytnych, bowiem sam Arystoteles zajmował się problemem ustawień liter alfabetu. Jednak uzyskanie wzorów, którymi się dziś posługujemy zajęło kilkanaście wieków! Wzory na liczbę permutacji i wariacji podano w XIII wieku, a na liczbę kombinacji dopiero w XVI wieku. Termin *kombinatoryka* po raz pierwszy został użyty w 1666 roku w pracy wielkiego filozofa i naukowca Leibniza pt. *„Rozprawa o sztuce kombinacji”*.

W tym materiale powtórzymy i utrwalimy wiadomości dotyczące schematów kombinatorycznych takich jak permutacja, kombinacja, wariacja bez powtórzeń i z powtórzeniami. Będziemy rozwiązywać ćwiczenia interaktywne, bazując na części teoretycznej materiału i podanych przykładach.

Twoje cele

- Zastosujesz silnię do obliczenia liczby permutacji podanego zbioru.
- Obliczysz liczbę wariacji bez powtórzeń w sytuacjach problemowych.
- Wykorzystasz definicję symbolu Newtona do znalezienia liczby kombinacji w zadanym zbiorze.
- Nauczysz się rozróżniać sytuacje problemowe i korzysta z odpowiednich schematów: permutacji, kombinacji lub wariacji.

Przeczytaj

Permutacje

Permutacją zbioru skończonego nazywamy każde ustawienie wszystkich jego elementów w pewnej kolejności.

Dwie permutacje uważamy za różne, gdy przynajmniej dwa elementy występują w nich na różnych miejscach. Wszystkich permutacji zbioru n-elementowego jest $P_n = n!$,

gdzie

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$

Ponadto przyjmuje się, że

$0! = 1.$

Przykład 1

Wypisz wszystkie permutacje zbioru $\{A, B, C\}$.

W tym przypadku ważna jest kolejność. Postępując zgodnie ze schematem zaprezentowanym na powyższym rysunku, na pierwszym miejscu stawiamy A, B lub C. Jeśli na pierwszym miejscu jest A, to na dalszych mogą być B, C lub C, B. Analogicznie jest w przypadkach, gdy na pierwszym miejscu jest B oraz C.

W ten sposób łatwo obliczyć, że permutacji zbioru trójelementowego jest $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$.

Analogicznie wyprowadza się wzór ogólny.

Przykład 2

Na ile sposobów można ustawić w kolejce trójkę dziewcząt i dwójkę chłopców? A co w sytuacji, gdy dziewczęta mają stać przed chłopcami?

W pierwszej sytuacji nie jest istotna płeć. Mamy $3 + 2 = 5$ elementów ustawić w kolejce.

Tak więc $(3 + 2)! = 5! = 120$, bo te ustawienia to po prostu permutacje.

Źródło: dostępny w internecie: Obraz aykapog z Pixabay.

W drugiej sytuacji dziewczęta muszą stać przed chłopcami. Popatrzmy więc na ten przykład jak na dwie kolejki – kolejkę dziewcząt i kolejkę chłopców.

Najpierw zastanówmy się, na ile sposobów możemy ustawić kolejkę dziewcząt?

Na $3! = 6$ sposobów, bo są 3 dziewczynki.

Podobnie chłopców można ustawić na $2! = 2$ sposoby.

Zatem na podstawie reguły mnożenia dostajemy: $3! \cdot 2! = 6 \cdot 2 = 12$ ustawień.

Można je łatwo wypisać, oznaczmy dziewczynki literami: A, B i C, a chłopców F i G, wówczas:

$ABC - FG$, $ABC - GF$,
$ACB - FG$, $ACB - GF$
$BAC - FG$,, $BAC - GF$
$BCA - FG$, $BCA - GF$,
$CAB - FG$,$CAB - GF$,
$CBA - FG$, $CBA - GF$.

Mamy więc 12 ustawień, gdy dziewczynki stoją przed chłopcami.

Kombinacje

k-elementową **kombinacją** zbioru n-elementowego nazywamy dowolny k-elementowy podzbiór tego zbioru. Kolejność występowania (wypisywania) elementów nie jest istotna.

Liczba kombinacji k-elementowych zbioru n-elementowego jest oznaczana symbolem C_n^k i wynosi $\binom{n}{k}$.

Symbol $\binom{n}{k}$ nazywamy **symbolem Newtona** lub **współczynnikiem dwumianowym**.

Dla ustalonego n oraz $k \leq n$ mamy:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

kombinacji k-elementowych zbioru n elementowego.

Przykład 3

Policz $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{5}{4}$, $\binom{5}{5}$.

$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!\cdot 5!} = 1$

$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!\cdot 4!} = \frac{4!\cdot 5}{1!\cdot 4!} = 5$

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{2!\cdot 3!} = 10$

$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!\cdot 0!} = 1$

$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} = \frac{4!\cdot 5}{4!\cdot 1!} = 5$

$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2!} = 10$

Ciekawostka

Łatwo zauważyć, że istnieje pewna symetria: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, oraz że wartości skrajne zawsze są równe: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. Wzory te wynikają bezpośrednio z definicji współczynników newtonowskich.

Przykład 4

Wypisz wszystkie kombinacje dwuelementowe zbioru $\{A, B, C, D\}$.

Jest sześć takich kombinacji:

$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}$.

Przykład 5

Na ile sposobów z grupy pięciu dziewcząt i pięciu chłopców można wybrać delegację złożoną z

a. trzech dziewcząt i dwóch chłopców,
b. trzech dziewcząt lub dwóch chłopców?

Rozwiązanie

a. W pierwszym przypadku: trójkę dziewcząt spośród 5 można wybrać na $\binom{5}{3}$ sposobów, a dwójkę chłopców spośród pięciu na $\binom{5}{2}$ sposobów, więc na mocy reguły mnożenia otrzymujemy:
$\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{2} = 10 \cdot 10 = 100$ możliwości.
b. W drugim przypadku mamy wybrać delegację złożoną albo z trójki dziewcząt (można wybrać ją na $\binom{5}{3}$ sposobów), albo z dwójki chłopców (tu mamy $\binom{5}{2}$ możliwości), więc na mocy reguły dodawania otrzymujemy:
$\binom{5}{3} + \binom{5}{2} = 10 + 10 = 20$ możliwości.

Przykład 6

Na ile sposobów można z talii 52 kart
wyciągnąć 13 tak, aby były wśród nich:

a. dokładnie 4 asy,
b. dokładnie 2 asy,
c. dokładnie 2 asy i dokładnie 2 króle?

Rozwiązanie

Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com.

a. W przypadku pierwszym mamy mieć wśród 13 kart wszystkie 4 asy, a brakujące 9 kart może być dowolnymi kartami spośród $52-4=48$ kart, które pozostały po wybraniu asów. Tak więc mamy $\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{9}$ możliwości.

b. W drugim przypadku wiemy, że 2 karty wybieramy spośród 4 asów, 11 brakujących kart zaś z pozostałych 48, zatem mamy: $\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{11}$ możliwości.

c. W trzecim przypadku mamy: 2 karty z 4 asów, 2 karty z 4 króli, pozostałe 9 kart z $52-8=44$ kart, co daje nam: $\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{44}{9}$ możliwości.

Ciekawostka

Na ile sposobów można rozdać 52 karty pomiędzy 4 graczy tak, by każdy otrzymał po 13 kart?

Pierwszy gracz może otrzymać dowolne 13 kart z 52, czyli $\binom{52}{13}$.
Drugi może otrzymać dowolne 13 kart z pozostałych $52-13=39$ kart, czyli $\binom{39}{13}$.
Trzeci może otrzymać dowolne 13 kart z pozostałych 26 kart, czyli $\binom{26}{13}$.
Czwartemu pozostanie ostatnie 13 kart. Znając karty trzech pierwszych graczy, wiemy, jakie karty trafią do ostatniego. Jednak możemy zapisać to jako $\binom{13}{13}$.
Na mocy reguły mnożenia mamy zatem:
$\binom{52}{13}\cdot\binom{39}{13}\cdot\binom{26}{13}\cdot\binom{13}{13}=\frac{52!}{13\cdot!39!}\cdot\frac{39!}{13!\cdot26!}\cdot\frac{26!}{13!\cdot13!}\cdot\frac{13!}{13!\cdot0!}=\frac{52!}{13!\cdot13!\cdot13!\cdot13!}$.

W zadaniach tego typu ograniczamy się na ogół do podania takiej odpowiedzi, bez prowadzenia dalszych rachunków. Jednak dla osób ciekawych podajemy do wiadomości, że stanowi to $53\ 644\ 737\ 765\ 488\ 792\ 839\ 237\ 440\ 000$ możliwości.

Wariacje

k-wyrazową **wariacją bez powtórzeń** n-elementowego nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów tego zbioru, gdzie $1\le k\le n$.

Liczba wszystkich k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego jest równa

$V_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$.

Ciekawostka

Jeżeli rozważamy n-wyrazową wariację bez powtórzeń zbioru n-elementowego (czyli dotychczasowe $k = n$), to mamy do czynienia z permutacją.

Przykład 7

W pewnej klasie liczącej 24 uczniów postanowiono wybrać samorząd składający się z przewodniczącego, sekretarza i skarbnika. Na ile sposobów można to zrobić?

Każda możliwość składu samorządu to ciąg trzech osób (pierwsza – przewodniczący, druga – sekretarz, trzecia – skarbnik), więc jest to wariacja 3-elementowa ze zbioru 24-elementowego. Liczba wszystkich możliwości jest zatem równa $V_{24}^{3} = \frac{24!}{(24-3)!} = \frac{24!}{21!} = 22 \cdot 23 \cdot 24 = 12144$.

Przykład 8

Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Na ile sposobów można posadzić 2 osoby na dwóch spośród czterech krzeseł? A gdy krzeseł mamy n?

Każda możliwość usadzenia osób to ciąg dwuwyrazowy, o wyrazach niepowtarzających się ze zbioru, odpowiednio, 4 lub n-elementowego.

Liczba wszystkich możliwości usadzeń wynosi

$V_{4}^{2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 3 \cdot 24 = 12$, gdy do wyboru są 4 krzesła i
$V_{n}^{2} = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n}{(n-2)!} = \left(n - 1\right) \cdot n$, gdy do wyboru jest n krzeseł.

k-wyrazową **wariacją z powtórzeniami** zbioru n-elementowego nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg elementów tego zbioru (dowolny element może wystąpić wielokrotnie w ciągu).

Liczba wszystkich k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego jest równa $W_{n}^{k} = n^{k}$.

Przykład 9

Ile można zapisać liczb dwucyfrowych (niekoniecznie różnocyfrowych!), mając do dyspozycji cyfry $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$?

Każda możliwość zapisania liczby dwucyfrowej o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, dopuszczając możliwość powtarzania się cyfr, jest dwuwyrazowym ciągiem ze zbioru 5-elementowego. Zatem liczba możliwości uzyskania liczb dwucyfrowych jest równa $W_5^2 = 5^2 = 25$.

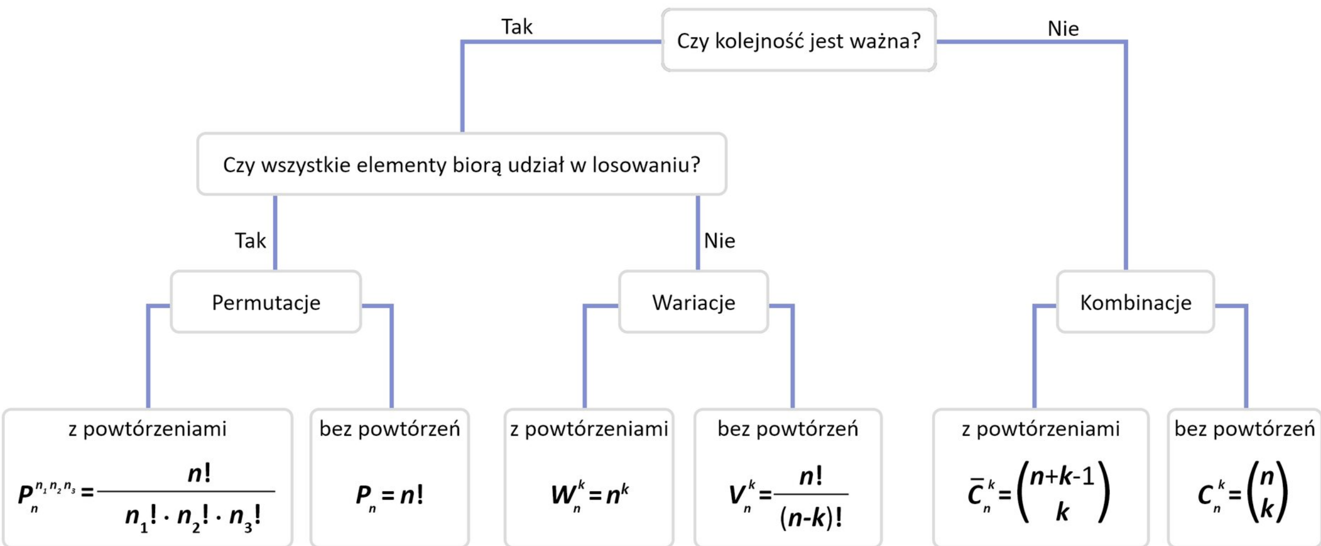
Przykład 10

Przyjmijmy, że numer na tablicach rejestracyjnych samochodu może składać się z dwóch dowolnych liter alfabetu łacińskiego, po których następuje pięć dowolnych cyfr.
Ile jest takich numerów, przyjmując, że alfabet łaciński składa się z 26 liter?

$W_{26}^2 \cdot W_{10}^5 = 26^2 \cdot 10^5 = 67600000$ możliwości.

Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Pomocnym w zrozumieniu różnic między permutacją, wariacją a kombinacją może być poniższy schemat.



Uwaga!

Kombinacje z powtórzeniami i permutacje z powtórzeniami wykraczają poza prezentowaną teorię w lekcji.

Słownik

permutacja

zbioru skończonego to każde ustawienie wszystkich jego elementów w pewnej kolejności

kombinacja

k-elementowa zbioru n- elementowego to każdy k-elementowy podzbiór tego zbioru. Kolejność występowania (wypisywania) elementów nie jest istotna

wariacja z powtórzeniami

k-wyrazowa, zbioru n-elementowego to każdy k-wyrazowy ciąg elementów tego zbioru (dowolny element może wystąpić wielokrotnie w ciągu)

wariacja bez powtórzeń

k-wyrazowa, zbioru n-elementowego to każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów tego zbioru, gdzie $1 \leq k \leq n$

reguła mnożenia

liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia, polegającego na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n– tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n$

reguła dodawania

jeżeli zbiory skończone $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ są parami rozłączne, to liczba elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ jest równa sumie liczb elementów każdego ze zbiorów $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n:\ |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj przykłady w animacji i rozwiąż zadania.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1HYJiP82

Film nawiązujący do treści materiału dotyczący zagadnień z zakresu kombinatoryki.

Polecenie 2

a. Na ile sposobów można ustawić w pary taneczne grupę pięciu dziewcząt i pięciu chłopców?

b. Na ile sposobów można ustawić w kolejce trójkę dziewcząt i trójkę chłopców tak, aby dziewczęta i chłopcy stali na przemian?

Polecenie 3

Na ile sposobów można wypełnić test złożony z k pytań, jeżeli na każde pytanie trzeba udzielić odpowiedzi TAK lub NIE?

Polecenie 4

Na ile sposobów można wybrać trzyosobową komisję z grupy 5 osób?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Liczba permutacji zbioru n-elementowego jest dziesięć razy większa od liczby permutacji zbioru k-elementowego. Wyznacz n i k.

n =

k =

9 8 5 10 7 6

Ćwiczenie 2

Ile różnych liczb można otrzymać przestawiając cyfry liczby 1223334444?

Odpowiedź:

Ćwiczenie 3

Janek obliczył, że aby zwiedzić zaplanowane miasta, można wybrać jedną z 720 różnych kolejności zwiedzania. Ile miast zaplanował zwiedzić Janek?

Odpowiedź:

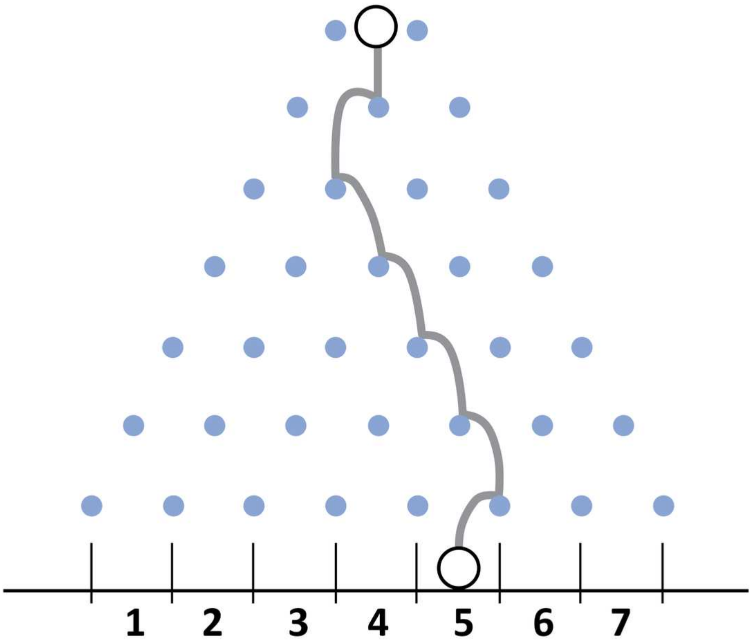
Ćwiczenie 4

Danych jest sześć punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Ile różnych wielokątów wypukłych o wierzchołkach w tych punktach można utworzyć? Dla ułatwienia możesz skorzystać ze szkicownika. Odpowiedź wpisz w polu poniżej szkicownika.

Różnych wielokątów wypukłych o wierzchołkach w tych punktach można utworzyć ______.

Ćwiczenie 5

Rysunek pokazuje jedną z dróg kulki do przegródki numer 5 pomiędzy rzędami kołeczków. Kulka każdorazowo po odbiciu od kołeczka spada z jego prawej lub lewej strony wprost na kołeczek o jeden rząd niżej.



Ile jest różnych dróg do przegródki numer 5?

- ◯ 16
- ◯ 15
- ◯ 14

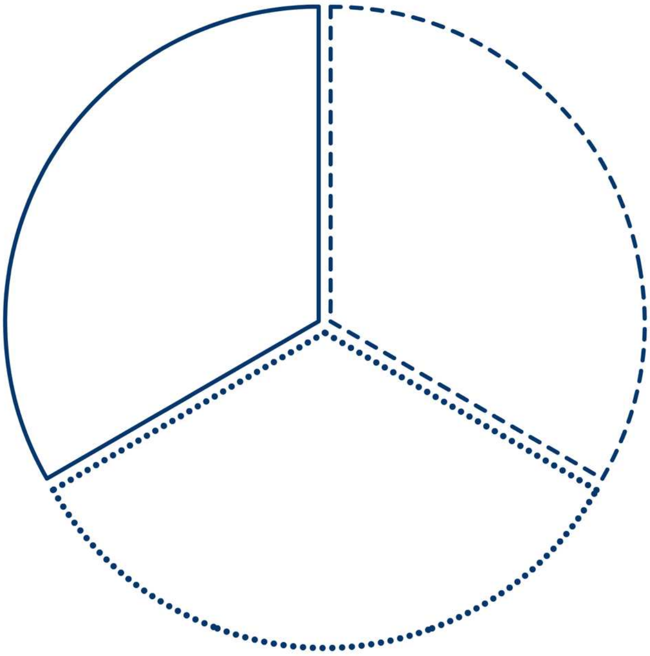
Ćwiczenie 6

Liczba sposobów, na jakie można wybrać pięć elementów spośród n elementów, jest równa liczbie sposobów, na jakie można wybrać trzy elementy spośród n elementów. Oblicz n.

$n =$ ______

Ćwiczenie 7

Każdą część figury przedstawionej na rysunku chcemy pomalować na jeden z k kolorów. Na ile sposobów można to zrobić?



Zaznacz prawidłową odpowiedź.

- k
- k^3
- 3^k

Ćwiczenie 8

Test składa się z ośmiu zadań i w każdym zadaniu są do wyboru cztery odpowiedzi A, B, C, D. Ile jest wszystkich możliwości rozwiązania testu?

Odpowiedź:

Dla nauczyciela

Autor: Marzena Kwaśniewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Inne spojrzenie. Permutacje, kombinacje, wariacje

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka.

Zakres rozszerzony

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje silnię do obliczenia liczby permutacji podanego zbioru,
- oblicza liczbę wariacji bez powtórzeń w sytuacjach problemowych,
- wykorzystuje definicję symbolu Newtona o znalezienia liczby kombinacji w zadanym zbiorze,
- analizuje sytuacje problemowe i korzysta z odpowiednich schematów: permutacji, kombinacji lub wariacji.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;

- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Inne spojrzenie. Permutacje, kombinacje, wariacje” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Animacja”. Uczniowie zapoznają się z materiałem i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują jego treść wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły.

Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.

3. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują kolejne ćwiczenia nr 6 i 7 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Inne spojrzenie. Permutacje, kombinacje, wariacje” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

Kombinatoryka

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Inne spojrzenie. Permutacje, kombinacje, wariacje”.