챕터6 정리

Ch6: QUINE-McCLUSKEY METHOD

6.0 Quine-McCluskey Method

· Quine-McCluskey Method란?

- Tabulation method for minimization
- Algorithmic and deterministic way to minimize
- Good for programming

→ 체계화된 프로그래밍할 수 있는 알고리즘적인 방법, 또 다른 Simplification 하는 방법

- The procedure consists of two main steps(기본적인 방법):

1. Eliminate as many literals as possible from each term by systematically applying the theorem XY + XY′ = X → The resulting terms are called prime implicants

→ 인접한 항끼리 그루핑을 통해 정리함; Prime Implicant 구하기

2. Use a Prime Implicant chart to select a minimum set of prime implicants.

→ 차트를 통해 최소한의 PI를 찾음

6.1 Determination of Prime Implicants

· Determination of Prime Implicants

- 가장 기본적인 식: XY + X′Y = X

- 변형 식: AB′CD′ + AB′CD = AB′C → X = AB′C, Y = D′

  → 경우에 따라 눈에 쉽게 띄지 않는다. 하지만 이거를 1과 0으로 표현한다면?

  ′이 안 붙은 것을 1, 붙은 것을 0이라고 한다면..

  1010 + 1011 = 101로 표현할 수 있다; 공식을 적용할 수 있는지 확인할 수 있다.

- 위와 같은 다른 예시: A′BC′D + A′BCD′을 확인해보자

  0101 + 0110이기 때문에 결합될 수 없는 형태이다. 이를 활용하는 방식이 Quine-McCluskey 방법이다.

· Quine-McCluskey 방법을 하는 과정

- 예시: 4-Variable Minterm Expansion

  f(a, b, c, d) = ∑m(0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14)일 때, 0과 1로 표현해보면

  이 중에서 1이 0번, 1번, 2번, …씩 나오는 개수대로 그루핑을 함

group 0	0	0000
group 1	1	0001
	2	0010
	8	1000
group 2	5	0101
	6	0110
	9	1001
	10	1010
group 3	7	0111
	14	1110

그룹별로 한 이유? → 1 수가 같은 것들끼리는 결합 가능성이 없음.

	Column I		Column II		Column III	
group 0	0	0000 ✓	0,1	000- ✓	0,1,8,9	-00-
group 1	1	0001 ✓	0,2	00-0 ✓	0,2,8,10	-0-0
	2	0010 ✓	0,8	-000 ✓	~~0,8,1,9~~	~~-00-~~
	8	1000 ✓	1,5	0-01	~~0,8,2,10~~	~~-0-0~~
group 2	5	0101 ✓	1,9	-001 ✓	2,6,10,14	--10
	6	0110 ✓	2,6	0-10 ✓	~~2,10,6,14~~	~~--10~~
	9	1001 ✓	2,10	-010 ✓		
	10	1010 ✓	8,9	100- ✓		
group 3	7	0111 ✓	8,10	10-0 ✓		
	14	1110 ✓	5,7	01-1		
			6,7	011-		
			6,14	-110 ✓		
			10,14	1-10 ✓		

Prime Implicants
← the remaining unticked terms

6/20

Grouping을 한 게 Column 1임, 그 뒤 Column들은 Column 1으로 구성함

어떻게 구성하는가? 인접한 그룹끼리는 결합 가능성이 있다는 점을 이용함

0과 1을 보면 마지막 것, 즉 0001과 0000에서의 마지막 것이 탈락함

→ 0, 1 000-으로 표기함(0과 1이 결합하여 마지막 게 사라졌다는 의미)

그 후 체크 표시는 결합이 되었음을 의미함

그 다음은 그룹 1과 그룹 2를 순차적으로 비교함. 하지만 결합 안되는 것들도 있다

→ 예: 1과 6. 바뀌는 것이 너무 많으므로

눈치 까면 알겠지만 Column 2에서는 하나씩 사라지는 거 같음

그 다음에도 마찬가지로 인접한 그룹끼리는 결합 가능성이 존재함

결합을 따질 때 -의 위치도 확인해야 함(같아야 함) → 결합 과정은 같음

중복되는 것은 삭제해주면 됨

이런 식으로 계속 결합하여 더 이상 결합할 수 없을 때까지 진행함

종료한 후에 결합 안 된 것들이 카르노 맵에서의 Prime Implicant임 → 최대의 그루핑

남은 6개의 표현식으로 해서 끝났다고 생각하면 안됨. 최적의 표현식이 아님

$$f = \underset{(1,5)}{a'c'd} + \underset{(5,7)}{a'bd} + \underset{(6,7)}{a'bc} + \underset{(0,1,8,9)}{b'c'} + \underset{(0,2,8,10)}{b'd'} + \underset{(2,6,10,14)}{cd'}$$

→ The function is equal to the sum of its prime implicants이긴 하나

$$f = a'bd + b'c' + cd'$$

→ Using the consensus theorem to eliminate redundant terms yields

6.2 The Prime Implicant Chart

· EPI를 구해야 한다: 구하는 방법, Prime Implicant Chart

- 차트 표기법: 앞의 식 이어서..

Essential Prime Implicant : ⊗

		0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
(0,1,8,9)	$b'c'$	x	x					x	⊗		
(0,2,8,10)	$b'd'$	x		x				x		x	
(2,6,10,14)	cd'			x		x				x	⊗
(1,5)	$a'c'd$		x		x						
(5,7)	$a'bd$				x		x				
(6,7)	$a'bc$					x	x				

Remaining cover

위에는 minterm으로 표현된 번호들을 적고 오른쪽은 체크가 안된 PI들을 적음

그 후 각 표현이 커버되는 minterm들을 표시함

보면 알겠지만, 유일하게 단 하나만으로 커버가 되는 것들이 존재함 → EPI임(9, 14)

그 다음에 EPI가 표현하는 행과 열을 다 그어버림

		0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
(0,1,8,9)	$b'c'$	x	x					x	x		
(0,2,8,10)	$b'd'$	x		x				x		x	
(2,6,10,14)	cd'			x		x				x	x
(1,5)	$a'c'd$		x		x						
(5,7)	$a'bd$				x		x				
(6,7)	$a'bc$					x	x				

→ 이런 식으로.

그 후에 남는 x들이 존재함 → 그 중에 어떤 것을 써야 커버가 될지를 생각해보면 됨

여기 같은 경우는 (5, 7)을 추가로 더하면 최적의 식이 됨

· Example: Cyclic Prime Implicants (two more X's in every column in chart)

- F = ∑ m (0,1, 2, 5, 6, 7)

- Derivation of prime implicants

0	000	✓	0,1	00-
1	001	✓	0,2	0-0
2	010	✓	1,5	-01
5	101	✓	2,6	-10
6	110	✓	5,7	1-1
7	111	✓	6,7	11-

- The resulting prime implicant chart

				0	1	2	5	6	7
①	→	(0,1)	a'b'	x	x				
		(0,2)	a'c'	x		x			
		(1,5)	b'c		x		x		
②	→	(2,6)	bc'			x		x	
③	→	(5,7)	ac				x		x
		(6,7)	ad					x	x

→ One Solution: F = a'b' + bc' + ac

→ 각 minterm 전부 2개 이상이 존재하는 경우를 말함. EPI가 없는 케이스

- Again starting with the other prime implicant that covers column 0. The resulting table

			0	1	2	5	6	7
P_1	(0,1)	a'b'	x	x				
P_2	(0,2)	a'c'	x		x			
P_3	(1,5)	b'c		x		x		
P_4	(2,6)	bc'			x		x	
P_5	(5,7)	ac				x		x
P_6	(6,7)	ab					x	x

→ 다른 Solution: F = a'c' + b'c + ab

→ 여러 개의 솔루션이 존재한다

6.3 Petrick’s Method

· Petrick’s Method

- 어떤 방법인가?

A technique for determining all minimum SOP solution from a PI chart

→ EPI를 제거하고 남아있는 minterm들을 효과적으로, 체계적으로 처리하기 위한 방법

Before applying Petrick’s Method, all EPIs and the minterms they cover should be removed from the chart

→ 방법 적용 전에, 모든 EPI들이 제거된 상태여야 한다

- Example: 앞의 Cyclic Prime Implicants

			0	1	2	5	6	7
P_1	(0,1)	$a'b'$	x	x				
P_2	(0,2)	$a'c'$	x		x			
P_3	(1,5)	$b'c$		x		x		
P_4	(2,6)	bc'			x		x	
P_5	(5,7)	ac				x		x
P_6	(6,7)	ab					x	x

첫 번째 ab가 결합된 명제를 P_1, … 이라고 하자

명제들이 커버해야 할 것들은 minterm 0, 1, 2, 5, 6, 7임

Minterm 0은 P_1이나 P_2로 커버가 가능함(둘 중 하나: OR). 이런 식으로 전부 다 함

$$P=(P_1+P_2)(P_1+P_3)(P_2+P_4)(P_3+P_5)(P_4+P_6)(P_5+P_6)=1$$

minterm0　　minterm1　　………………………………

→ 각각은 AND로 되어야 함.

- Reduce P to a minimum SOP

First, we multiply out, using (X + Y)(X + Z) = X + YZ and the ordinary Distributive law

→ 기존 분배법칙 활용

예시는 앞에 것 이어서.

$$
\begin{aligned}
P &= (P_1 + P_2P_3)(P_4 + P_2P_6)(P_5 + P_3P_6) \\
&= (P_1P_4 + P_1P_2P_6 + P_2P_3P_4 + P_2P_3P_6)(P_5 + P_3P_6) \\
&= P_1P_4P_5 + P_1P_2P_5P_6 + P_2P_3P_4P_5 + P_2P_3P_5P_6 + P_1P_3P_4P_6 \\
&\quad + P_1P_2P_3P_6 + P_2P_3P_4P_6 + P_2P_3P_6
\end{aligned}
$$

Use X + XY = X to eliminate redundant terms from P

→ 삭제 가능한 것들을 삭제함

$$P = P_1P_4P_5 + P_1P_2P_5P_6 + P_2P_3P_4P_5 + P_1P_3P_4P_6 + P_2P_3P_6$$

- Choose for minimum solution

앞의 예시 이어서

가장 간단한 것은 145 또는 246이 될 것이다

Choose $P_1P_4P_5$ or $P_2P_3P_6$ → F = a'b' + bc' + ac OR F = a'c' + b'c + ab

6.4 Simplification of Incompletely Specified Functions

· Don't Care Condition이 있을 때?

- Example: F(A, B, C, D) = ∑m(2, 3, 7, 9, 11, 13) + ∑d(1, 10, 15)

Don't care terms are treated like required minterms

→ 똑같이 간주하여 테이블을 구성함

1	0001 ✓	(1,3)	00-1 ✓	(1,3,9,11)	-0-1
2	0010 ✓	(1,9)	-001 ✓	(2,3,10,11)	-01-
3	0011 ✓	(2,3)	001- ✓	(3,7,11,15)	--11
9	1001 ✓	(2,10)	-010 ✓	(9,11,13,15)	1--1
10	1010 ✓	(3,7)	0-11 ✓		
7	0111 ✓	(3,11)	-011 ✓		
11	1011 ✓	(9,11)	10-1 ✓		
13	1101 ✓	(9,13)	1-01 ✓		
15	1111 ✓	(10,11)	101- ✓		
		(7,15)	-111 ✓		
		(11,15)	1-11 ✓		
		(13,15)	11-1 ✓		

Don't care columns are omitted when forming the PI chart

→ PI 차트부터 Don't Care의 특성을 고려해야 함

	2	3	7	9	11	13
(1,3,9,11)		x		x	x	
* (2,3,10,11)	x	x			x	
* (3,7,11,15)		x	x		x	
*(9,11,13,15)				x	x	x

→ 위에 m만, d는 하지 않음

→ 2, 7, 13에 EPI 존재함, F = B'C + CD + AD

참고: 늘어놓은 것

$$F = (m_2 + m_3 + m_{10} + m_{11}) + (\cancel{m_3} + m_7 + \cancel{m_{11}} + m_{15}) + (m_9 + \cancel{m_{11}} + m_{13} + \cancel{m_{15}})$$

→ 공통적인 것들 삭제삭제삭제.

$$for \quad ABCD = 0001,\ F = 0; \qquad for\ 1010, F = 1; \qquad for\ 1111,\ F = 1$$

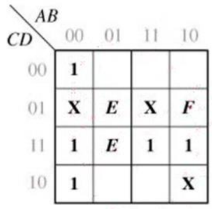
→ 10과 15가 D중에 나타나 있음. 1은 0으로 할당되어 있음을 알 수 있다

6.5 Simplification Using Map-Entered Variables

· Map-Entered Variables Technique

- 무엇인가?

더 적은 개수의 카르노 맵으로 더 많은 개수의 변수들을 처리하는 방법



G

→ $G(A, B, C, D, E, F) = m_0 + m_2 + m_3 + Em_5 + Em_7 + Fm_9 + m_{11} + m_{15}$

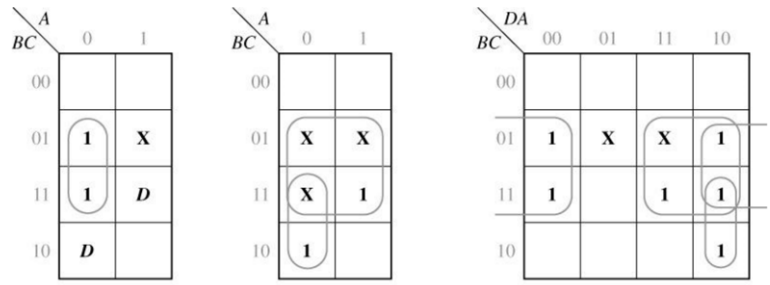
(+ don't care terms)

→ 나중에 설명 예정

- Example: 3-Variable map to simplify the function

F(A, B, C, D) = A'B'C + A'BC + A'BC'D + ABCD + (AB'C) → AB'C: Don't Care

이 식을 3-변수 카르노 맵에 표현한다고 하자



(a) (b) (c)

일단 ABC 기준으로 기입하고, D는 ABC만 봤을 때 들어가는 자리에 D로 기입

→ 가장 단순화된 최소의 표현식을 얻기 위한 방법이다

Find a sum-of-products expression for F of the form: $F = MS_0 + P_1MS_1 + P_2MS_2 + \ldots$

여기서 P_1, P_2, … 은 추가적인 변수를 말함

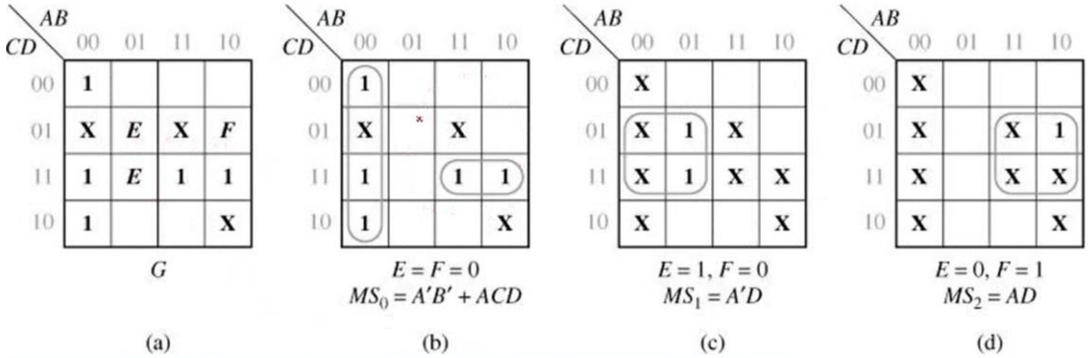
MS_0: P_1, P_2, … 을 다 0으로 놓은 상태에서의 minimum expression임

MS_1: P_1은 1로, 나머지 P_j값은 0으로 놓고 MS_0에서 얻은 minimum expression을 Don't Care로 처리한 상태에서 얻은 최소의 표현식

MS_2: P_2는 1로, 나머지 P_j값은 0으로 놓고 그 전에 얻은 minimum expression을

Don't Care로 처리한 상태에서 얻은 최소의 표현식

- 자 이제 앞의 내용들을 다시 보자



→ $G(A, B, C, D, E, F) = m_0 + m_2 + m_3 + Em_5 + Em_7 + Fm_9 + m_{11} + m_{15}$

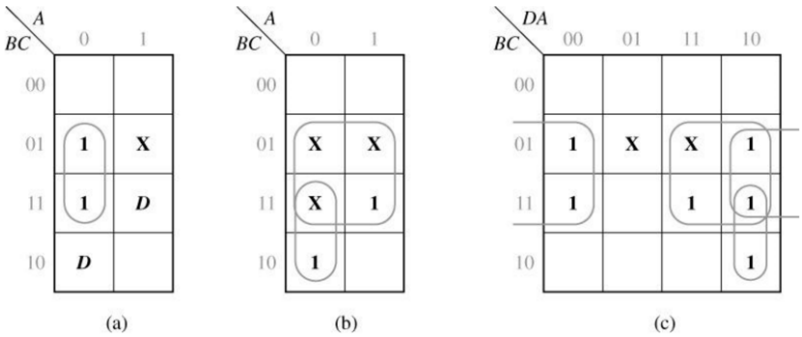
(a) E와 F를 일단 맵 안에 넣어서 표현

(b) MS_0: E와 F 둘 다 0으로 놓고 구한 최소의 식, $MS_0 = A'B' + ACD$

(c) MS_0에서 이미 커버된 것들은 다 X처리함 & E를 1로 놓은 상태에서 구함, $MS_1 = A'D$

(d) F를 제외한 모든 P_i들을 0으로 두고 MS_0은 X처리

→ 따라서 G = (A'B' + ACD) + E(A'D) + F(AD), 괄호 안은 순서대로 MS_0, MS_1, MS_2



같은 방식으로 구하면 된다

(a)와 (b)가 Map-Entered Variable을 통해 구하는 과정, (c)는 그냥 정석으로 구하는 과정

→ F = A'C + D(C + A'B) = A'C + CD + A'BD

핵심: 더 적은 개수의 카르노 맵 다이어그램을 이용하여 더 많은 변수를 처리할 수 있다

근데 사실 이 방법을 쓰려면 추가적인 변수의 나타나는 빈도가 많지 않아야 함

많으면 머리아파용

6.6 Conclusion Programmed Exercises Problems

교수님이 진도 안 나가심 안 중요한 파트인듯?