

Ch6: QUINE-McCLUSKEY METHOD

6.0 Quine-McCluskey Method

- Quine-McCluskey Method란?
- Tabulation method for minimization
- Algorithmic and deterministic way to minimize
- Good for programming
 - 체계화된 프로그래밍할 수 있는 알고리즘적인 방법, 또 다른 Simplification 하는 방법
- The procedure consists of two main steps(기본적인 방법):
 1. Eliminate as many literals as possible from each term by systematically applying the theorem $XY + XY' = X \rightarrow$ The resulting terms are called prime implicants
 - 인접한 항끼리 그루핑을 통해 정리함; Prime Implicant 구하기
 2. Use a Prime Implicant chart to select a minimum set of prime implicants.
 - 차트를 통해 최소한의 PI를 찾음

6.1 Determination of Prime Implicants

· Determination of Prime Implicants

- 가장 기본적인 식: $XY + X'Y = X$

- 변형 식: $AB'CD' + AB'CD = AB'C \rightarrow X = AB'C, Y = D'$

→ 경우에 따라 눈에 쉽게 띄지 않는다. 하지만 이거를 1과 0으로 표현한다면?

'이 안 붙은 것을 1, 붙은 것을 0이라고 한다면..

$1010 + 1011 = 101$ 로 표현할 수 있다; 공식을 적용할 수 있는지 확인할 수 있다.

- 위와 같은 다른 예시: $A'BC'D + A'BCD'$ 을 확인해보자

$0101 + 0110$ 이기 때문에 결합될 수 없는 형태이다. 이를 활용하는 방식이 Quine-McCluskey 방법이다.

· Quine-McCluskey 방법을 하는 과정

- 예시: 4-Variable Minterm Expansion

$f(a, b, c, d) = \sum m(0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14)$ 일 때, 0과 1로 표현해보면

이 중에서 1이 0번, 1번, 2번, ...씩 나오는 개수대로 그룹핑을 함

group 0	<u>0 0000</u>
group 1	1 0001
	2 0010
	<u>8 1000</u>
group 2	5 0101
	6 0110
	9 1001
	<u>10 1010</u>
group 3	7 0111
	<u>14 1110</u>

그룹별로 한 이유? → 1 수가 같은 것들끼리는 결합 가능성이 없음.

	Column I	Column II	Column III
group 0	0 0000 ✓	0,1 000- ✓	0,1,8,9 -00-
group 1	1 0001 ✓	0,2 00-0 ✓	0,2,8,10 -0-0
	2 0010 ✓	0,8 -000 ✓	0,8,1,9 -00-
	8 1000 ✓	1,5 0-01	0,8,2,10 -0-0
group 2	5 0101 ✓	1,9 -001 ✓	2,6,10,14 --10
	6 0110 ✓	2,6 0-10 ✓	2,10,6,14 --10
	9 1001 ✓	2,10 -010 ✓	
	10 1010 ✓	8,9 100- ✓	
group 3	7 0111 ✓	8,10 10-0 ✓	
	14 1110 ✓	5,7 01-1	
		6,7 011-	
		6,14 -110 ✓	
		10,14 1-10 ✓	

Prime Implicants
 ← the remaining unticked terms

6/20

Grouping을 한 게 Column 1임, 그 뒤 Column들은 Column 1으로 구성함

어떻게 구성하는가? 인접한 그룹끼리는 결합 가능성이 있다는 점을 이용함

0과 1을 보면 마지막 것, 즉 0001과 0000에서의 마지막 것이 탈락함

→ 0, 1 000-으로 표기함(0과 1이 결합하여 마지막 게 사라졌다는 의미)

그 후 체크 표시는 결합이 되었음을 의미함

그 다음은 그룹 1과 그룹 2를 순차적으로 비교함. 하지만 결합 안되는 것들도 있다

→ 예: 1과 6. 바뀌는 것이 너무 많으므로

눈치 까면 알겠지만 Column 2에서는 하나씩 사라지는 거 같음

그 다음에도 마찬가지로 인접한 그룹끼리는 결합 가능성이 존재함

결합을 따질 때 -의 위치도 확인해야 함(같아야 함) → 결합 과정은 같음

중복되는 것은 삭제해주면 됨

이런 식으로 계속 결합하여 더 이상 결합할 수 없을 때까지 진행함

종료한 후에 결합 안 된 것들이 카르노 맵에서의 Prime Implicant임 → 최대의 그룹핑

남은 6개의 표현식으로 해서 끝났다고 생각하면 안됨. 최적의 표현식이 아님

$$f = \underset{(1,5)}{a'c'd} + \underset{(5,7)}{a'bd} + \underset{(6,7)}{a'bc} + \underset{(0,1,8,9)}{b'c'} + \underset{(0,2,8,10)}{b'd'} + \underset{(2,6,10,14)}{cd'}$$

→ The function is equal to the sum of its prime implicants이긴 하나

$$f = a'bd + b'c' + cd'$$

→ Using the consensus theorem to eliminate redundant terms yields

6.2 The Prime Implicant Chart

- EPI를 구해야 한다: 구하는 방법, Prime Implicant Chart
- 차트 표기법: 앞의 식 이어서..

Essential Prime Implicant : \otimes		0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
(0,1,8,9)	$b'c'$	x	x					x	\otimes		
(0,2,8,10)	$b'd'$	x		x				x		x	
(2,6,10,14)	cd'			x		x				x	\otimes
(1,5)	$a'c'd$		x		x						
(5,7)	$a'bd$					x	x				
(6,7)	$a'bc$						x	x			

Remaining cover

위에는 minterm으로 표현된 번호들을 적고 오른쪽은 체크가 안된 PI들을 적음

그 후 각 표현이 커버되는 minterm들을 표시함

보면 알겠지만, 유일하게 단 하나만으로 커버가 되는 것들이 존재함 \rightarrow EPI임(9, 14)

그 다음에 EPI가 표현하는 행과 열을 다 그어버림

		0	1	2	5	6	7	8	9	10	14
(0,1,8,9)	$b'c'$	x	x					x	x		
(0,2,8,10)	$b'd'$	x		x				x		x	
(2,6,10,14)	cd'			x		x				x	x
(1,5)	$a'c'd$		x		x						
(5,7)	$a'bd$					x	x				
(6,7)	$a'bc$					x	x				

\rightarrow 이런 식으로.

그 후에 남은 x들이 존재함 \rightarrow 그 중에 어떤 것을 써야 커버가 될지를 생각해보면 됨

여기 같은 경우는 (5, 7)을 추가로 더하면 최적의 식이 됨

- Example: Cyclic Prime Implicants (two more X's in every column in chart)
- $F = \sum m(0, 1, 2, 5, 6, 7)$
- Derivation of prime implicants

<u>0</u>	<u>000</u>	✓	0,1	00-
1	001	✓	<u>0,2</u>	<u>0-0</u>
<u>2</u>	<u>010</u>	✓	1,5	-01
5	101	✓	<u>2,6</u>	<u>-10</u>
<u>6</u>	<u>110</u>	✓	5,7	1-1
7	111	✓	6,7	11-

- The resulting prime implicant chart

			0	1	2	5	6	7
①	→ (0,1)	$a'b'$	x	x				
	(0,2)	$a'c'$	x		x			
	(1,5)	$b'c$		x		x		
②	→ (2,6)	bc'			x		x	
③	→ (5,7)	ac				x		x
	(6,7)	ad					x	x

→ One Solution: $F = a'b' + bc' + ac$

→ 각 minterm 전부 2개 이상이 존재하는 경우를 말함. EPI가 없는 케이스

- Again starting with the other prime implicant that covers column 0. The resulting table

			0	1	2	5	6	7
P_1	(0,1)	$a'b'$	x	x				
P_2	(0,2)	$a'c'$	x		x			
P_3	(1,5)	$b'c$		x		x		
P_4	(2,6)	bc'			x		x	
P_5	(5,7)	ac				x		x
P_6	(6,7)	ab					x	x

→ 다른 Solution: $F = a'c' + b'c + ab$

→ 여러 개의 솔루션이 존재한다

6.3 Petrick's Method

- Petrick's Method

- 어떤 방법인가?

A technique for determining all minimum SOP solution from a PI chart

→ EPI를 제거하고 남아있는 minterm들을 효과적으로, 체계적으로 처리하기 위한 방법

Before applying Petrick's Method, all EPIs and the minterms they cover should be removed from the chart

→ 방법 적용 전에, 모든 EPI들이 제거된 상태여야 한다

- Example: 앞의 Cyclic Prime Implicants

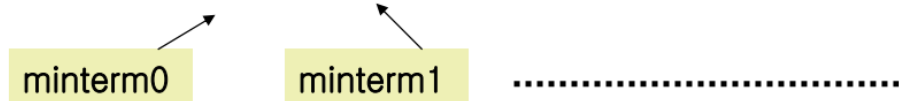
			0	1	2	5	6	7
P ₁	(0,1)	a'b'	x	x				
P ₂	(0,2)	a'c'	x		x			
P ₃	(1,5)	b'c		x		x		
P ₄	(2,6)	bc'			x		x	
P ₅	(5,7)	ac				x		x
P ₆	(6,7)	ab					x	x

첫 번째 ab가 결합된 명제를 P₁, ... 이라고 하자

명제들이 커버해야 할 것들은 minterm 0, 1, 2, 5, 6, 7임

Minterm 0은 P₁이나 P₂로 커버가 가능함(둘 중 하나: OR). 이런 식으로 전부 다 함

$$P = (P_1 + P_2)(P_1 + P_3)(P_2 + P_4)(P_3 + P_5)(P_4 + P_6)(P_5 + P_6) = 1$$



→ 각각은 AND로 되어야 함.

- Reduce P to a minimum SOP

First, we multiply out, using $(X + Y)(X + Z) = X + YZ$ and the ordinary Distributive law

→ 기존 분배법칙 활용

예시는 앞에 것 이어서.

$$\begin{aligned}
P &= (P_1 + P_2 P_3)(P_4 + P_2 P_6)(P_5 + P_3 P_6) \\
&= (P_1 P_4 + P_1 P_2 P_6 + P_2 P_3 P_4 + P_2 P_3 P_6)(P_5 + P_3 P_6) \\
&= P_1 P_4 P_5 + P_1 P_2 P_5 P_6 + P_2 P_3 P_4 P_5 + P_2 P_3 P_5 P_6 + P_1 P_3 P_4 P_6 \\
&\quad + P_1 P_2 P_3 P_6 + P_2 P_3 P_4 P_6 + P_2 P_3 P_6
\end{aligned}$$

Use $X + XY = X$ to eliminate redundant terms from P

→ 삭제 가능한 것들을 삭제함

$$P = P_1 P_4 P_5 + P_1 P_2 P_5 P_6 + P_2 P_3 P_4 P_5 + P_1 P_3 P_4 P_6 + P_2 P_3 P_6$$

- Choose for minimum solution

앞의 예시 이어서

가장 간단한 것은 145 또는 246이 될 것이다

Choose $P_1 P_4 P_5$ or $P_2 P_3 P_6 \rightarrow F = a'b' + bc' + ac$ OR $F = a'c' + b'c + ab$

6.4 Simplification of Incompletely Specified Functions

· Don't Care Condition이 있을 때?

- Example: $F(A, B, C, D) = \sum m(2, 3, 7, 9, 11, 13) + \sum d(1, 10, 15)$

Don't care terms are treated like required minterms

→ 똑같이 간주하여 테이블을 구성함

1	0001 ✓	(1,3) 00-1 ✓	(1,3,9,11) -0-1
2	0010 ✓	(1,9) -001 ✓	(2,3,10,11) -01-
3	0011 ✓	(2,3) 001- ✓	(3,7,11,15) --11
9	1001 ✓	(2,10) -010 ✓	(9,11,13,15) 1--1
10	1010 ✓	(3,7) 0-11 ✓	
7	0111 ✓	(3,11) -011 ✓	
11	1011 ✓	(9,11) 10-1 ✓	
13	1101 ✓	(9,13) 1-01 ✓	
15	1111 ✓	(10,11) 101- ✓	
		(7,15) -111 ✓	
		(11,15) 1-11 ✓	
		(13,15) 11-1 ✓	

Don't care columns are omitted when forming the PI chart

→ PI 차트부터 Don't Care의 특성을 고려해야 함

	2	3	7	9	11	13
(1,3,9,11)		x		x	x	
* (2,3,10,11)	x	x			x	
* (3,7,11,15)		x	x		x	
* (9,11,13,15)				x	x	x

→ 위에 m만, d는 하지 않음

→ 2, 7, 13에 EPI 존재함, $F = B'C + CD + AD$

참고: 늘어놓은 것

$$F = (m_2 + m_3 + m_{10} + m_{11}) + (\bar{m}_3 + m_7 + \bar{m}_{11} + m_{15}) + (m_9 + \bar{m}_{11} + m_{13} + \bar{m}_{15})$$

→ 공통적인 것들 삭제삭제삭제.

$$\text{for } ABCD = 0001, F = 0; \quad \text{for } 1010, F = 1; \quad \text{for } 1111, F = 1$$

→ 10과 15가 D중에 나타나 있음. 1은 0으로 할당되어 있음을 알 수 있다

6.5 Simplification Using Map-Entered Variables

· Map-Entered Variables Technique

- 무엇인가?

더 적은 개수의 카르노 맵으로 더 많은 개수의 변수들을 처리하는 방법

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			
01	X	E	X	F
11	1	E	1	1
10	1			X

$$G \rightarrow G(A, B, C, D, E, F) = m_0 + m_2 + m_3 + Em_5 + Em_7 + Fm_9 + m_{11} + m_{15}$$

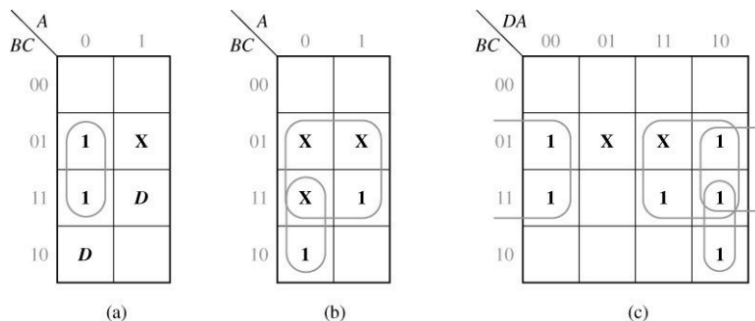
(+ don't care terms)

→ 나중에 설명 예정

- Example: 3-Variable map to simplify the function

$$F(A, B, C, D) = A'B'C + A'BC + A'BC'D + ABCD + (AB'C) \rightarrow AB'C: \text{Don't Care}$$

이 식을 3-변수 카르노 맵에 표현한다고 하자



일단 ABC 기준으로 기입하고, D는 ABC만 봤을 때 들어가는 자리에 D로 기입

→ 가장 단순화된 최소의 표현식을 얻기 위한 방법이다

Find a sum-of-products expression for F of the form: $F = MS_0 + P_1MS_1 + P_2MS_2 + \dots$

여기서 P_1, P_2, \dots 은 추가적인 변수를 말함

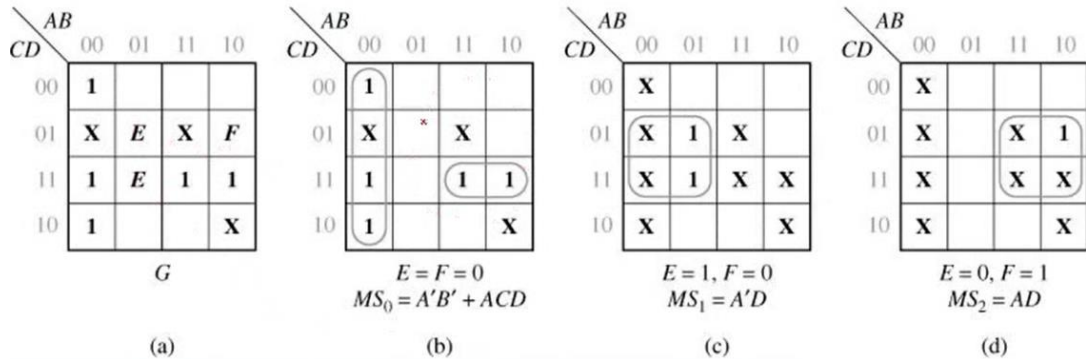
MS_0 : P_1, P_2, \dots 을 다 0으로 놓은 상태에서의 minimum expression임

MS_1 : P_1 은 1로, 나머지 P_j 값은 0으로 놓고 MS_0 에서 얻은 minimum expression을 Don't Care로 처리한 상태에서 얻은 최소의 표현식

MS_2 : P_2 는 1로, 나머지 P_j 값은 0으로 놓고 그 전에 얻은 minimum expression을

Don't Care로 처리한 상태에서 얻은 최소의 표현식

- 자 이제 앞의 내용들을 다시 보자



$$\rightarrow G(A, B, C, D, E, F) = m_0 + m_2 + m_3 + Em_5 + Em_7 + Fm_9 + m_{11} + m_{15}$$

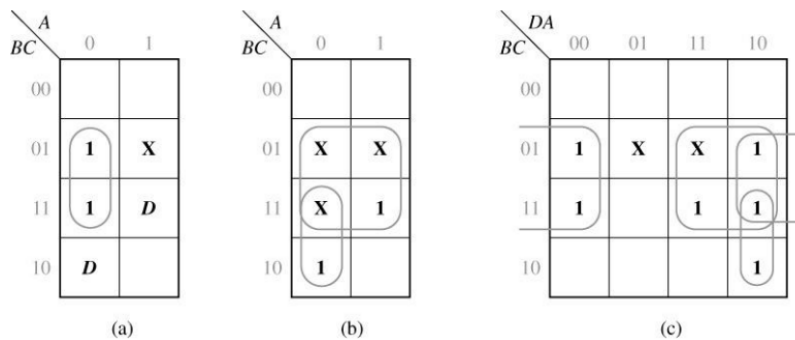
(a) E와 F를 일단 맵 안에 넣어서 표현

(b) MS_0 : E와 F 둘 다 0으로 놓고 구한 최소의 식, $MS_0 = A'B' + ACD$

(c) MS_0 에서 이미 커버된 것들은 다 X처리함 & E를 1로 놓은 상태에서 구함, $MS_1 = A'D$

(d) F를 제외한 모든 P_i 들을 0으로 두고 MS_0 은 X처리

$$\rightarrow \text{따라서 } G = (A'B' + ACD) + E(A'D) + F(AD), \text{ 괄호 안은 순서대로 } MS_0, MS_1, MS_2$$



같은 방식으로 구하면 된다

(a)와 (b)가 Map-Entered Variable을 통해 구하는 과정, (c)는 그냥 정석으로 구하는 과정

$$\rightarrow F = A'C + D(C + A'B) = A'C + CD + A'BD$$

핵심: 더 적은 개수의 카르노 맵 다이어그램을 이용하여 더 많은 변수를 처리할 수 있다

근데 사실 이 방법을 쓰려면 추가적인 변수의 나타나는 빈도가 많지 않아야 함

많으면 머리아파용

6.6 Conclusion Programmed Exercises Problems

교수님이 진도 안 나가심 안 중요한 파트인듯?