



Universität zu Köln  
Praktikum B, Kernphysik

# Versuchsauswertung

## B3.1: Statistik der Kernzerfälle

Betreuer: Dennis Bittner  
Durchgeführt und ausgewertet von:  
Lucas Eipper  
Benedikt Leicher

Durchführung: 17.12.2024

# Abstract

In diesem Versuch wird die statistische Natur des Kernzerfalls instabiler Atomkerne untersucht. Hierfür werden Zerfallsereignisse zweier  $^{137}\text{Cs}$ -Quellen mithilfe eines Geigerzählers erfasst und analysiert. Obwohl die Zerfälle unabhängig voneinander und zu zufälligen Zeitpunkten stattfinden, folgen sie statistischen Verteilungen, die sich durch bestimmte Gesetzmäßigkeiten beschreiben lassen. Die gemessenen Daten werden auf die Poisson- und Gauß-Verteilung geprüft, um die Verteilung der Zählraten zu analysieren.

Zusätzlich wird die Zeitdifferenz zwischen aufeinanderfolgenden Zerfällen betrachtet, um weitere Gesetzmäßigkeiten zu identifizieren. Mit Hilfe des  $\chi^2$ -Tests wird die Übereinstimmung der gemessenen Verteilungen mit theoretischen Annahmen quantitativ bewertet. Ziel des Versuchs ist es, ein tieferes Verständnis für die statistische Beschreibung radioaktiver Prozesse und die Limitierungen der Messmethoden zu gewinnen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Zufallsvariablen . . . . .	1
1.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung, -dichte und -funktion . . . . .	1
1.3	Binomialverteilung . . . . .	2
1.4	Zerfallswahrscheinlichkeit . . . . .	3
1.5	Poisson-Verteilung . . . . .	4
1.5.1	Zusammenhang zwischen Binomial- und Poisson-Verteilung . . . . .	4
1.6	Gaußverteilung . . . . .	5
1.6.1	Zusammenhang zwischen Poisson- und Gaußverteilung . . . . .	5
1.6.2	Satz von Moivre-Laplace . . . . .	5
1.7	Intervallverteilung . . . . .	6
1.8	Zählrohr . . . . .	7
1.9	Totzeit . . . . .	9
1.10	Zwei-Präparate-Methode . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Der <math>\chi^2</math>-Anpassungstest</b>	<b>11</b>
2.1	Grundidee des $\chi^2$ -Tests . . . . .	11
2.2	Die $\chi^2$ -Verteilung . . . . .	12
2.3	Bestimmung des Ablehnungsbereichs . . . . .	13
2.4	Der $\chi^2$ -Test in der Praxis . . . . .	13
2.5	Totzeit und $\chi^2$ . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>16</b>
3.1	Durchzuführende Messungen . . . . .	16
3.2	Datenanalyse . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>17</b>
4.1	Poisson-Verteilung . . . . .	17
4.2	Gauß-Verteilung . . . . .	19
4.3	Intervall-Verteilung . . . . .	22

4.4	$\chi^2$ -Test . . . . .	24
4.4.1	Messdaten . . . . .	24
4.4.2	Hypothese a: Konstante Präparatstärke (Mittelwert) . . . . .	24
4.4.3	Hypothese b: Konstante Präparatstärke (Mittelwert - 10%) . . . . .	25
4.4.4	Hypothese c: Linear abfallende Präparatstärke . . . . .	26
4.4.5	Berechnung der Halbwertszeit . . . . .	27
4.4.6	Ergebnisse der Hypothesentests . . . . .	28
4.5	Totzeit des Zählrohrs . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>30</b>
5.1	Poissonverteilung . . . . .	30
5.2	Gaußverteilung . . . . .	31
5.3	Intervall-Verteilung . . . . .	31
5.4	$\chi^2$ -Test . . . . .	31
5.5	Totzeit des Zählrohrs . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>33</b>
<b>7</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>34</b>

# 1 Theoretische Grundlagen

## 1.1 Zufallsvariablen

Zufallsexperimente liefern Ereignisse, die oft durch reelle Zahlen dargestellt werden müssen, um eine mathematische Analyse zu ermöglichen. Eine *Zufallsvariable* ist eine Funktion, die jedem Elementarereignis  $\omega$  eines Zufallsexperiments eindeutig eine reelle Zahl zuordnet:

$$X : \omega \rightarrow x(\omega), \quad x(\omega) \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Wichtig ist, dass diese Zuordnung eindeutig ist, sodass jedes Ereignis  $\omega$  genau einer reellen Zahl  $x$  entspricht.

Zufallsvariablen können diskret oder kontinuierlich sein:

- *Diskrete Zufallsvariablen* beschreiben Ereignisse mit abzählbaren Ergebnissen, z. B. die Augenzahl eines Würfels oder die Ziehung der Lottozahlen.
- *Kontinuierliche Zufallsvariablen* beschreiben Größen, die jeden Wert in einem Intervall annehmen können, wie etwa die Zeit zwischen zwei Straßenbahnen oder die gemessene Energie eines Photons.

In der Physik werden Zufallsvariablen häufig bei Experimenten verwendet. Ein Beispiel ist die Messung der Energie eines Photons mit einem Germaniumdetektor. Die gemessene Energie  $E_g$  entspricht dabei nicht exakt der tatsächlichen Energie  $E_t$ , da viele weitere Faktoren wie die Temperatur des Detektors die Messung beeinflussen. In solchen Fällen ist die Zufallsvariable nicht einfach anzugeben, sondern hängt von mehreren physikalischen Größen ab.

## 1.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung, -dichte und -funktion

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable  $X$  beschreibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit  $X$  einen Wert kleiner oder gleich  $x$  annimmt und wird durch die Verteilungsfunktion  $F(x)$  dargestellt.

Für *diskrete Zufallsvariablen* wird die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  verwendet, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit  $X$  genau den Wert  $x$  annimmt. Die Verteilungsfunktion ergibt sich als Summe dieser Wahrscheinlichkeiten:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i). \quad (2)$$

Bei *kontinuierlichen Zufallsvariablen* beschreibt die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x)$ , wie die Wahrscheinlichkeiten über die Werte verteilt sind. Die Verteilungsfunktion wird hier durch Integration der Dichtefunktion bestimmt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy. \quad (3)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  in einem Intervall  $[a, b]$  liegt, ergibt sich durch:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (4)$$

Diskrete Variablen erlauben die direkte Berechnung einzelner Wahrscheinlichkeiten, während bei kontinuierlichen Variablen nur Intervalle betrachtet werden können.

### 1.3 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass bei  $N$ -maliger Wiederholung eines Zufallsexperiments mit zwei möglichen, sich gegenseitig ausschließenden Ereignissen  $A$  und  $B$ , das Ereignis  $A$  genau  $n$ -mal auftritt. Die Wahrscheinlichkeiten für  $A$  und  $B$  sind gegeben durch:

$$P(A) = p, \quad P(B) = 1 - p. \quad (5)$$

Die Wahrscheinlichkeit für  $n$ -maliges Eintreten von  $A$  berechnet sich mit dem Binomialkoeffizienten:

$$P(N, n, p) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}, \quad \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}. \quad (6)$$

Der Erwartungswert und die Varianz der Binomialverteilung sind:

$$E[X] = Np, \quad \text{Var}(X) = Np(1-p). \quad (7)$$

Ein Beispiel ist das Werfen eines Würfels: Die Wahrscheinlichkeit, bei 10 Würfeln genau 3-mal eine 6 zu werfen, ist:

$$P(10, 3, 1/6) \approx 0.155. \quad (8)$$

Die Binomialverteilung kann auch in physikalischen Kontexten wie dem radioaktiven Zerfall angewandt werden, bei dem  $N$  identische Kerne betrachtet und  $n$  Zerfälle innerhalb einer Zeit  $t$  gezählt werden. Allerdings wird bei sehr großen  $N$  die numerische Berechnung der Binomialverteilung unhandlich.

## 1.4 Zerfallswahrscheinlichkeit

Die Zerfallswahrscheinlichkeit  $\alpha$  ist eine charakteristische Konstante eines Isotops, mit der sich beschreiben lässt, wie wahrscheinlich es ist, dass ein instabiler Atomkern in einer (infinitesimal) kleinen Zeitspanne  $\Delta t$  zerfällt. Für diese kurze Zeitspanne gilt:

$$\omega = \alpha \cdot \Delta t. \quad (9)$$

Für größere Zeitspannen  $\Delta t$  muss die Wahrscheinlichkeit  $\omega$  durch eine genauere Herleitung bestimmt werden. Zunächst betrachtet man die Wahrscheinlichkeit, dass der Kern über eine Zeitspanne  $\Delta t$  nicht zerfällt. Dazu wird  $\Delta t$  in  $k$  gleichlange Abschnitte unterteilt, wobei gilt:

$$1 - \omega = \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{k}\right)^k. \quad (10)$$

Durch den Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  ergibt sich:

$$1 - \omega = e^{-\alpha t}. \quad (11)$$

Die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall innerhalb der Zeit  $t$  lautet somit:

$$\omega(t) = 1 - e^{-\alpha t}. \quad (12)$$

Falls die Halbwertszeit  $T_{1/2}$  eines Isotops bekannt ist, kann man  $\alpha$  wie folgt berechnen:

$$\omega(T_{1/2}) = \frac{1}{2} \implies e^{-\alpha T_{1/2}} = \frac{1}{2} \implies \alpha = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}}. \quad (13)$$

Ein Beispiel ist das Isotop  $^{137}\text{Cs}$ , dessen Halbwertszeit  $T_{1/2} \approx 30.17$ , Jahre [1] beträgt. Umgerechnet in Sekunden ergibt sich  $T_{1/2} \approx 9.5 \times 10^8$ , s, woraus:

$$\alpha = \frac{\ln(2)}{9.5 \times 10^8, \text{s}} \approx 7.3 \times 10^{-6} \text{s}^{-1}. \quad (14)$$

Für eine große Anzahl  $N$  identischer instabiler Kerne ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach der Zeit  $t$  genau  $n$  Kerne zerfallen, durch die Binomialverteilung beschrieben:

$$\omega(N, n, t) = \binom{N}{n} \cdot (1 - e^{-\alpha t})^n \cdot e^{-\alpha t(N-n)}. \quad (15)$$

Um die Notation zu vereinfachen, definiert man

$$p = 1 - e^{-\alpha t}. \quad (16)$$

Dadurch wird die Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(N, n, p) = \binom{N}{n} \cdot p^n \cdot (1 - p)^{N-n}. \quad (17)$$

Diese Funktion beschreibt die Zerfallswahrscheinlichkeit für  $n$  aus  $N$  Kernen in der Zeit  $t$ .

## 1.5 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, deren Wahrscheinlichkeitsfunktion lautet:

$$P(n, \lambda) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}. \quad (18)$$

Dabei ist  $\lambda$  ein Parameter, der den Mittelwert  $m$  und die Varianz  $\sigma^2$  der Verteilung beschreibt:

$$m = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda. \quad (19)$$

### 1.5.1 Zusammenhang zwischen Binomial- und Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung ergibt sich als Grenzverteilung der Binomialverteilung unter den Bedingungen  $N \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$  und  $N \cdot p = \lambda = \text{konstant}$ . In diesem Fall ist  $\lambda$  sowohl der Erwartungswert der Binomialverteilung als auch der Poisson-Verteilung. Die Poisson-Verteilung ist eine gute Näherung der Binomialverteilung, wenn  $N \cdot p \leq 10$  gilt.



## 1.6 Gaußverteilung

Die Gauß- oder Normalverteilung ist eine kontinuierliche Verteilung, deren Wahrscheinlichkeitsdichte durch die Gleichung beschrieben wird:

$$P(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}. \quad (20)$$

Hierbei steht  $\mu$  für den Mittelwert und  $\sigma^2$  für die Varianz der Verteilung. Bei  $\mu = 0$  und  $\sigma^2 = 1$  spricht man von der Standardnormalverteilung.

### 1.6.1 Zusammenhang zwischen Poisson- und Gaußverteilung

Die Poisson-Verteilung:

$$P(n, \lambda) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \quad (21)$$

konvergiert für große  $\lambda$  gegen die Normalverteilung. In diesem Fall wird die Poisson-Verteilung durch die Normalverteilung:

$$P(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \cdot e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2\lambda}}. \quad (22)$$

Dies bedeutet, dass die Poisson-Verteilung bei großen  $\lambda$  zunehmend eine kontinuierliche Verteilung wird.

### 1.6.2 Satz von Moivre-Laplace

Der Satz von Moivre-Laplace besagt, dass die Binomialverteilung:

$$P(N, n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}, \quad (23)$$

für  $N \rightarrow \infty$  und  $0 < p < 1$  gegen die Normalverteilung konvergiert:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Np(1-p)}} \cdot e^{-\frac{(x-Np)^2}{2Np(1-p)}}. \quad (24)$$

Diese Näherung ist zuverlässig, wenn  $Np(1-p) \geq 9$  gilt. Bei asymmetrischen Binomialverteilungen (z. B. bei sehr kleinen oder großen  $p$ ) muss  $N$  größer sein, damit die Normalverteilung eine gute Annäherung bietet.

## 1.7 Intervallverteilung

Die Intervallverteilung beschreibt die Zeitdifferenz zwischen zwei aufeinander folgenden Zerfällen instabiler Kerne. Für  $N$  instabile Kerne berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass die Zeitdifferenz zwischen zwei Zerfällen den Wert  $\Delta t$  annimmt, als Produkt zweier Wahrscheinlichkeiten  $W = W_1 \cdot W_2$ .

- $W_1$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Zeit  $\Delta t$  kein Zerfall stattfindet:

$$W_1 = e^{-\lambda} \quad (25)$$

- $W_2$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach der Zeit  $\Delta t$  ein Zerfall stattfindet:

$$W_2 = a \, dt \quad (26)$$

Die gesamte Wahrscheinlichkeit ergibt sich zu:

$$W = W_1 \cdot W_2 = e^{-\lambda} a \, dt \quad (27)$$

Da  $\lambda = a \, t$ , folgt:

$$W = e^{-at} a \, dt \quad (28)$$

Die Dichtefunktion ergibt sich durch Ableitung:

$$P = e^{-at} \cdot a \quad (29)$$

Für  $n$  betrachtete Ereignisse gilt:

$$P_n = a \frac{(at)^n}{n!} e^{-at} \quad (30)$$

Diese Verteilung wird als Intervallverteilung bezeichnet.

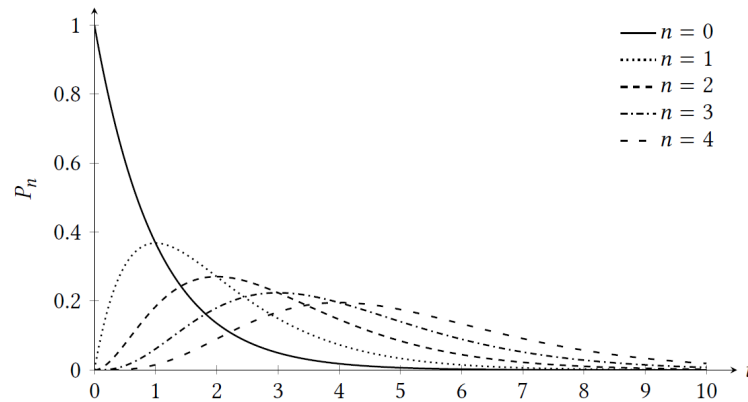


Abbildung 1: Intervallverteilung für  $a = 1$  [1]

## 1.8 Zählrohr

Ionisationsdetektoren sind mit Gas gefüllte Detektoren, die durch Stoßprozesse Ionisierende Strahlung detektieren. Die bekannteste Bauform eines solchen Detektors ist das Zählrohr. Dabei handelt es sich um einen hohlen Zylinder, der mit Gas gefüllt ist. In der Mitte des Zylinders verläuft ein dünner Draht. Zwischen Außenwandung und dem Draht besteht ein elektrisches Potential - eine Spannung, sodass die Außenwand als Kathode, und der Draht als Anode fungiert. Durch das Potential, wird der Zylinder zu einem Kondensator mit einer Kapazität  $C$ . [2](Siehe Abb. 2)

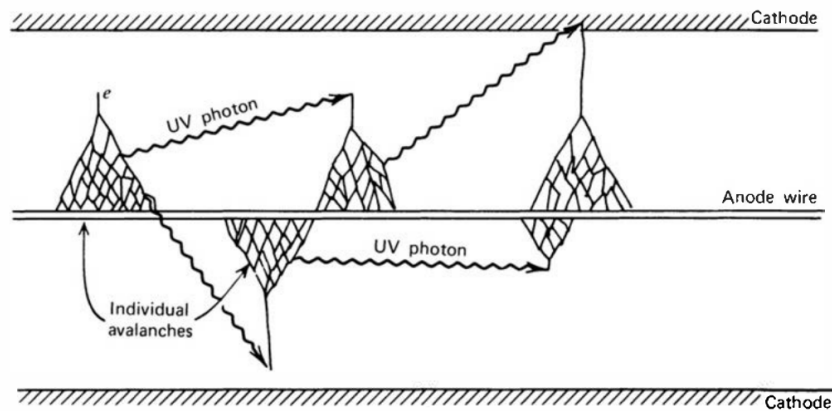


Abbildung 2: Schematischer Aufbau eines Geiger-Zählrohrs und Geiger-Entladung [2]

Diese Art der Detektoren werden, je nach Betriebsspannung, als Ionisationskammer, Proportional-Zählrohr oder Geiger-Müller-Zählrohr bezeichnet.

Um zu erklären, warum die angelegte Spannung einen Unterschied in der Funktionsweise machen, ist es zunächst nötig zu verstehen, wie sich ionisierende Strahlung in Gasen verhält. Das im Versuch verwendete  $^{137}\text{Cs}$  ist ein  $\beta^-$ -Strahler und emittiert Elektronen. Tritt solch ein Elektron in das Zählrohr ein, wechselwirkt es mit den Gasatomen, wird abgebremst und gibt dabei seine kinetische Energie an die umliegenden Gasatome ab. Ist die kinetische Energie des Elektrons groß genug, wird es Gasatome ionisieren, also ein Elektron aus der Atomhülle der Gasatome entfernen. Durch das Potential zwischen Wand und Draht, wird dieses Elektron in Richtung Draht beschleunigt. Ist die Spannung groß genug, erzeugen die Elektronen auf dem Weg weitere freie Elektronen, die ebenfalls Richtung Draht beschleunigt werden. Die gesammelte Ladung am Draht, führt zu einer Änderung der Kapazität des Zählrohrs, was sich durch einen Spannungspuls im Ausgangssignal äußert. Allerdings, werden die Elektronen bei niedrigen Spannungen zu einer gewissen Wahrscheinlichkeit auf dem Weg rekombinieren, sodass nicht alle den Draht erreichen. Dieser Bereich ist in Abb. 3 mit I gekennzeichnet. Im Bereich II ist die Spannung hoch genug, sodass alle Elektronen den Draht erreichen. In diesem Spannungsbereich werden Ionisationskammern betrieben. Im Bereich III ist die Spannung bereits so hoch, dass die durch Ionisation entstandenen Elektronen weitere Gasatome ionisieren und so weiter. Dabei entstehen Elektronenlawinen in einem kleinen Radius um den Draht. Die Anzahl der entstehenden Sekundärelektronen ist dabei proportional zu der Anzahl der Primärelektronen. Da diese Elektronenlawinen nur einem kleinen Bereich um den Draht entstehen können, ist das Ausgangssignal unabhängig von dem Ort an dem die  $\beta^-$ -Teilchen im Detektor absorbiert wurden, was wiederum den Effekt hat, dass das Ausgangssignal proportional zur kinetischen Energie der einfallenden  $\alpha$ -Teilchen ist. [2][3]

Im Bereich V ist die Spannung so hoch, dass jedes Elektron mindestens ein weiteres Gasatom ionisiert. Dabei werden auch Atome angeregt, welche wiederum UV-Photonen emittieren, die im gesamten Zählrohr eine Kettenreaktion auslösen: Die UV-Photonen ionisieren durch den Photoeffekt weitere Gasatome im gesamten Volumen des Zählrohrs (siehe Abb. 2). Diese Reaktion wird als Geiger-Entladung bezeichnet [2]. Der Ausgangspuls lässt

nun zwar keine Schlüsse über Art und Energie der Strahlung zu, jedoch ist er so groß, dass im allgemeinen keine Verstärker mehr benötigt werden um das Signal zu verarbeiten.

In diesem Bereich nennt man das Zählrohr Geiger-Müller-Zählrohr. In unserem Experiment wird so ein Zählrohr zur Detektion von  $\beta^-$ -Zerfällen der  $^{137}\text{Cs}$  Proben genutzt.

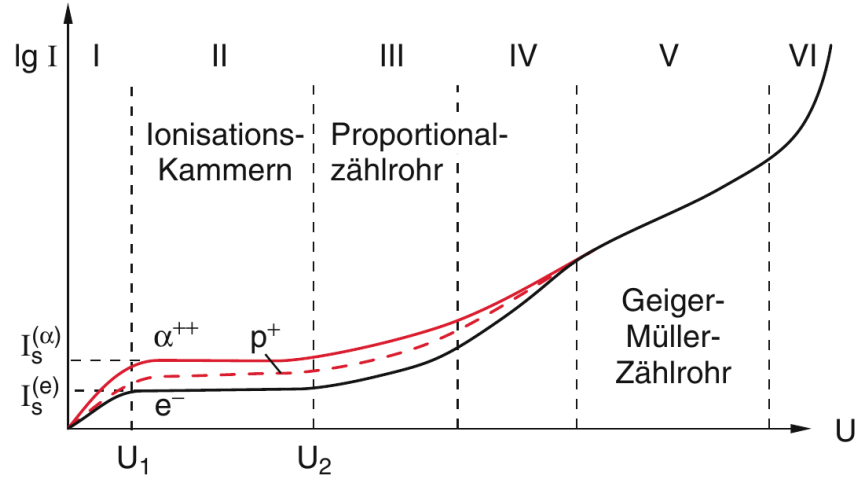


Abbildung 3: Arbeitsbereiche eines Ionisationsdetektors [3]

## 1.9 Totzeit

Die Verwendung eines Geiger-Müller-Zählrohrs bringt einen Nachteil mit sich: Solange die Geiger-Entladung aus 1.8 nicht beendet ist, kann kein weiteres Teilchen detektiert werden. Die Zeit, die benötigt wird, bis ein Detektor ein weiteres Ereignis aufzeichnen kann bezeichnet man als Totzeit  $\tau$

Die gemessene Zählrate  $a'$  ist also kleiner als die tatsächlichen Zählrate  $a$ . Das heißt, dass man man für jedes detektierte Teilchen noch  $\tau a$  Teilchen hinzufügen muss. Damit gilt also

$$a = a' + a'\tau$$

Durch Umformen bekommt man einen Ausdruck für die tatsächliche Zählrate

$$a = \frac{a'}{1 - a'\tau} \quad (31)$$

Demnach wird auch der tatsächliche Mittelwert  $m$  vom gemessenen Mittelwert  $m'$  abweichen. Für einen Zeitintervall  $T$  gilt

$$m = aT = a \frac{m'}{a'} = \frac{m'}{1 - a'\tau} \quad (32)$$

Wenn die Messwerte aus einer Poisson-Verteilung kommen, (siehe 1.5), dann gilt  $m = \sigma^2$ . Des weiteren bleibt die relative Breite erhalten

$$\frac{\sigma}{m} = \frac{\sigma'}{m'} = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

oder

$$\sigma'^2 = \frac{m'^2}{m} = m' \cdot \frac{a'}{a}$$

Daraus folgt

$$\sigma'^2 = m' \cdot (1 - \tau a') \text{ oder } \sigma^2 = \sigma' \cdot \left(\frac{a}{a'}\right)^2 = \frac{m'}{1 - \tau a} = m \quad (33)$$

Man sieht dass  $a/a' \geq 1$ , damit ist die gemessene Verteilung schmäler als die wahre Verteilung. Dies wird sich in einem zu kleinen Wert für  $\chi^2$  im  $\chi^2$ -Test bemerkbar machen. (Siehe 2)

## 1.10 Zwei-Präparate-Methode

Wie oben gezeigt, spielt die Totzeit eine große Rolle bei der Auswertung und Einordnung der Messergebnisse. Da die Totzeit unbekannt ist, muss sie erst bestimmt werden. Ein häufig verwendetes Verfahren ist die Zwei-Präparate-Methode, die im Folgenden erläutert wird. Um die Totzeit zu bestimmen, wird zunächst die Zählrate von zwei verschiedenen Proben, dann beide Proben gleichzeitig gemessen. Danach wird noch die Zählrate des Hintergrundes, also ohne Probe gemessen. Dabei ist die Zählrate von Probe 1  $z'_1$ , von der zweiten Probe  $z'_2$  und beide zusammen  $z'_{12}$  und  $u'$  der Hintergrund.

Damit ergeben sich die tatsächlichen Zählraten ergeben sich wie folgt[1]

$$z_i = p_i + u; i = 1, 2, 12$$

Dabei sind  $p_i$  die tatsächlichen vom Hintergrund bereinigten Zählraten .

Die Idee hinter dieser Methode besteht darin, dass die Zählraten der beiden Proben addiert

werden kann um auf die Zählrate von beiden Präparaten zu bekommen, d.h.[1]

$$p_{12} = p_1 + p_2 \quad (34)$$

So entsteht ein Gleichungssystem mit 8 Gleichungen und 8 Unbekannten. Durch einsetzen und Umformen erhält man folgende Beziehung für die Totzeit.

$$\tau = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A} \quad (35)$$

Wobei die Parameter A B und C gegeben sind durch

$$A = u'z'_{12}z'_2 - z'_1z'_{12}z'_2 + u'z'_{12}z'_1 - u'z'_1z_2 \quad (36)$$

$$B = -2z'_{12}u' + 2z'_1z'_2 \quad (37)$$

$$C = z'_{12} - z'_1 + u' - z'_2 \quad (38)$$

## 2 Der $\chi^2$ -Anpassungstest

Um zu überprüfen, ob eine gemessene Verteilung einer der in 1.5 bis 1.7 beschriebenen Verteilungen entspricht, wird häufig der sogenannte  $\chi^2$ -Test verwendet.

Der  $\chi^2$ -Anpassungstest ist ein statistisches Verfahren, das verwendet wird, um zu überprüfen, ob die Verteilung einer Zufallsvariablen  $X$  mit einer bestimmten hypothetischen Verteilung übereinstimmt. Ein typisches Beispiel ist die Prüfung, ob  $X$  standardnormalverteilt ist, d. h. eine Gauß-Verteilung mit Mittelwert  $\mu = 0$  und Varianz  $\sigma^2 = 1$  aufweist.

### 2.1 Grundidee des $\chi^2$ -Tests

Um die Idee hinter dem  $\chi^2$ -Test zu veranschaulichen, betrachten wir eine Zufallsvariable  $X$  und formulieren die Hypothese:

$$H_0 : X \text{ ist standardnormalverteilt.} \quad (39)$$

Wir führen ein Zufallsexperiment durch und erhalten Messwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Um die Stärke der Abweichung der Messwerte von der hypothetischen Verteilung zu bewerten, wird

die Summe der quadrierten Abweichungen betrachtet:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (40)$$

Falls  $\chi^2$  zu groß oder zu klein ist, gibt dies Hinweise darauf, dass die Hypothese  $H_0$  abgelehnt werden sollte.

## 2.2 Die $\chi^2$ -Verteilung

Eine quadrierte standardnormalverteilte Zufallsvariable folgt einer speziellen Verteilung, der  $\chi^2$ -Verteilung. Werden  $f$  solcher Zufallsvariablen aufsummiert, erhält man eine  $\chi^2$ -Verteilung mit  $f$  Freiheitsgraden. Für diese Verteilung gilt:

- Erwartungswert:

$$\langle \chi_f^2 \rangle = m = \int_0^\infty x \cdot f(x, f) = f, \quad (41)$$

- Varianz:

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (x - m)^2 \cdot f(x, f) = 2f. \quad (42)$$

Die Dichtefunktion der  $\chi^2$ -Verteilung lautet:

$$f(x, f) = \begin{cases} \frac{x^{f/2-1} \cdot e^{-x/2}}{2^{f/2} \Gamma(f/2)} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0, \end{cases} \quad (43)$$

wobei  $\Gamma(x)$  die Gammafunktion ist:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (44)$$

Die Verteilungsfunktion  $F(x, f)$  ist nicht elementar darstellbar und wird definiert als:

$$F(x, f) = \int_0^x \frac{y^{f/2-1} e^{-y/2}}{2^{f/2} \Gamma(f/2)} dy. \quad (45)$$



## 2.3 Bestimmung des Ablehnungsbereichs

Um die Hypothese  $H_0$  zu testen, legen wir einen Ablehnungsbereich fest. Dies erfolgt durch die Wahl einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ , z. B.  $\alpha = 0.05$ . Der Ablehnungsbereich wird durch die minimalen und maximalen zulässigen Werte von  $\chi^2$  definiert, sodass die Flächen unter der Dichtefunktion an den Rändern jeweils  $\alpha/2$  betragen:

$$\int_{x=0}^{\chi_{\min}^2} f(x, f) dx = \frac{\alpha}{2} \stackrel{\text{mit } \alpha}{=} 0.025, \quad (46)$$

$$\int_{x=0}^{\chi_{\max}^2} f(x, f) dx = 1 - \frac{\alpha}{2} \stackrel{\text{mit } \alpha}{=} 0.975. \quad (47)$$

## 2.4 Der $\chi^2$ -Test in der Praxis

Im vorherigen Abschnitt wurde erläutert, wie der  $\chi^2$ -Test verwendet wird, um zu prüfen, ob eine Zufallsvariable standardnormalverteilt ist. In diesem Abschnitt wenden wir den Test an, um eine praktische Hypothese zu überprüfen. Wir betrachten eine Sammlung von  $N$  instabilen Kernen (z. B.  $^{137}\text{Cs}$ ), deren Zerfälle über mehrere Zeitintervalle gemessen werden. Die Anzahl der Zerfälle in jedem Intervall  $\Delta t$  wird  $d$ -mal gezählt, sodass wir Messwerte  $n_i$  für  $i = 1, 2, \dots, d$  erhalten.

Die zu prüfende Hypothese lautet, dass die Präparatstärke konstant ist und dem Mittelwert der  $n_i$  entspricht. Obwohl die Präparatstärke aufgrund der Halbwertszeit von  $^{137}\text{Cs}$  von ca. 30 Jahren nicht exakt konstant ist, ist sie in der kurzen Beobachtungszeit relativ stabil.

Da die  $n_i$ -Messwerte einer Gaußverteilung folgen, gilt für den Mittelwert:

$$m = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d n_i. \quad (48)$$

Die Differenzen der  $n_i$  zum Mittelwert ( $n_i - m$ ) sind ebenfalls gaußverteilt mit einem Mittelwert von 0. Wenn wir diese Differenzen durch die Standardabweichung  $\sqrt{m}$  teilen, erhalten wir Werte, die standardnormalverteilt sind. Da die Gaußverteilung eine Grenzver-

teilung der Poisson-Verteilung darstellt, gilt für die Varianz  $\sigma^2 = m$ . Die standardnormalisierten Werte sind daher:

$$\frac{n_i - m}{\sqrt{m}}. \quad (49)$$

Das  $\chi^2$  wird nun wie folgt berechnet:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^d \frac{(n_i - m)^2}{m}. \quad (50)$$

Diese Berechnung dient dazu, zu testen, ob die beobachteten Werte signifikant vom Mittelwert abweichen. Ein sehr kleiner Wert für  $\chi^2$  kann die Hypothese ablehnen, auch wenn die Abweichungen gering sind, da bei der Standardnormalverteilung Streuungen mit einer Varianz von 1 um den Mittelwert erwartet werden.

## 2.5 Totzeit und $\chi^2$

Die Totzeit des Detektors beeinflusst die Zählraten  $\frac{n_i}{\Delta t}$  und führt zu einer Korrektur der gemessenen Werte. Da die wahren Zählraten durch die Totzeit reduziert werden, muss eine Korrektur vorgenommen werden, um die tatsächlichen Zählraten zu bestimmen. Die totzeitkorrigierte Zählrate  $k_i$  ergibt sich zu:

$$k_i = \frac{n_i}{1 - \frac{m}{\Delta t} \tau}, \quad (51)$$

wobei  $m$  der Mittelwert der Zählraten ist und  $\tau$  die Totzeit des Detektors. Mit dieser Korrektur wird der Mittelwert  $M$  und das korrigierte  $\chi^2$  berechnet:

$$M_{\text{kor}} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d k_i, \quad (52)$$

$$\chi_{\text{kor}}^2 = \sum_{i=1}^d \frac{(k_i - M_{\text{kor}})^2}{M_{\text{kor}}}. \quad (53)$$

Alternativ lässt sich das korrigierte  $\chi^2$  auch ohne explizite Berechnung der korrigierten Zählraten angeben:

$$\chi_{\text{kor}}^2 = \frac{1}{1 - \frac{m}{\Delta t \tau}} \chi^2. \quad (54)$$

Das korrigierte  $\chi^2$  ist immer größer als das nicht korrigierte, da die Totzeit die Varianz der Zählraten verringert. Dies zeigt, dass ohne Korrektur die Messung zu einem kleineren  $\chi^2$  führt, was möglicherweise zu einer falschen Verwerfung der Hypothese führen könnte.

## 3 Versuchsdurchführung

Der Versuchsaufbau umfasst zwei  $^{137}\text{Cs}$ -Quellen, ein Zählrohr mit Spannungsversorgung, Zählrohrelektronik, einen Zähler, einen Signalstretcher sowie einen Computer. Die Zählrohrelektronik erzeugt bei jedem registrierten Zerfall ein Rechtecksignal, welches entweder in den Zähler oder über den Signalstretcher in den Computer eingespeist wird. Während der Zähler nur die Anzahl der Signale in einer voreingestellten Zeitspanne erfasst, ermöglicht der Computer zusätzlich die Aufzeichnung der exakten Zeitpunkte der Signale.

### 3.1 Durchzuführende Messungen

Die Messungen gliedern sich in zwei Teile: Langzeitmessungen mit dem Computer und Messungen zur Bestimmung der Totzeit mithilfe der Zwei-Präparate-Methode.

#### Langzeitmessungen mit dem Computer:

- 45 Minuten mit Quelle Nr. 6 bei 600 V
- 45 Minuten mit Quelle Nr. 6 bei 500 V
- 45 Minuten mit Quelle Nr. 6 und Nr. 7 zusammen bei 500 V

#### Messungen zur Bestimmung der Totzeit:

- Quelle Nr. 6 bei 500 V, 550 V und 600 V (jeweils 5 Minuten)
- Quelle Nr. 7 bei 500 V, 550 V und 600 V (jeweils 5 Minuten)
- Quelle Nr. 6 und Nr. 7 zusammen bei 500 V, 550 V und 600 V (jeweils 5 Minuten)
- Untergrund bei 500 V, 550 V und 600 V (jeweils 5 Minuten)

### 3.2 Datenanalyse

Die aufgenommenen Daten werden mit den Programmen `divide.py`, `binomial.py` und `interval.py` ausgewertet. Für jede Messung werden Poisson-Verteilungen, Gauß-Verteilungen sowie Intervallverteilungen mit unterschiedlichen Unterstellungen extrahiert. Diese dienen der Analyse der statistischen Eigenschaften des Zerfalls und der Charakterisierung der Totzeit des Zählrohrs.

## 4 Auswertung

### 4.1 Poisson-Verteilung

Drei 45-minütige Messungen dienten zur Analyse der Poisson-Verteilungen. Mithilfe des Programms `bionomial.py` wurden Zerfallszahlen in Zeitintervallen von 0,2 Sekunden ermittelt. Der erste Parameter bestimmt die Intervallgröße, der zweite, hier 1, legt fest, wie viele Histogrammbalken zusammengefasst werden.

Die Poisson-Wahrscheinlichkeitsverteilung wird beschrieben durch:

$$P(n, \lambda) = N \cdot \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \quad (55)$$

wobei  $N$  die Normierung (Gesamtanzahl der Intervalle) und  $\lambda$  den Mittelwert darstellt.

Der Mittelwert  $\lambda$  ergibt sich als gewichtetes arithmetisches Mittel:

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M x_i y_i, \quad (56)$$

mit  $y_i$  als Anzahl der Intervalle mit  $x_i$  Zerfällen. Die Varianz  $\sigma^2$  wird berechnet als:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^M (x_i - m)^2 y_i. \quad (57)$$

Die experimentellen Verteilungen wurden anschließend mit den theoretischen Poisson-Verteilungen verglichen. Abbildungen 4 bis 6 zeigen die Ergebnisse, wobei die Diagramme mithilfe von Julia erstellt wurden. Zerfallszahlen  $N$ , Mittelwerte  $\lambda$  und Varianzen  $\sigma^2$  wurden berechnet und in Tabelle 1 zusammenfassend dargestellt.

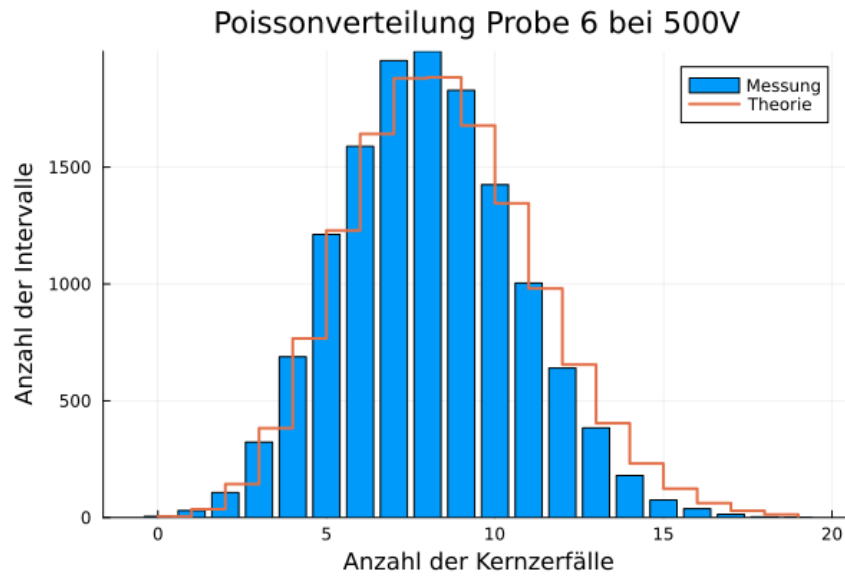


Abbildung 4: Poissonverteilung von Probe 6 bei einer Spannung von 500V

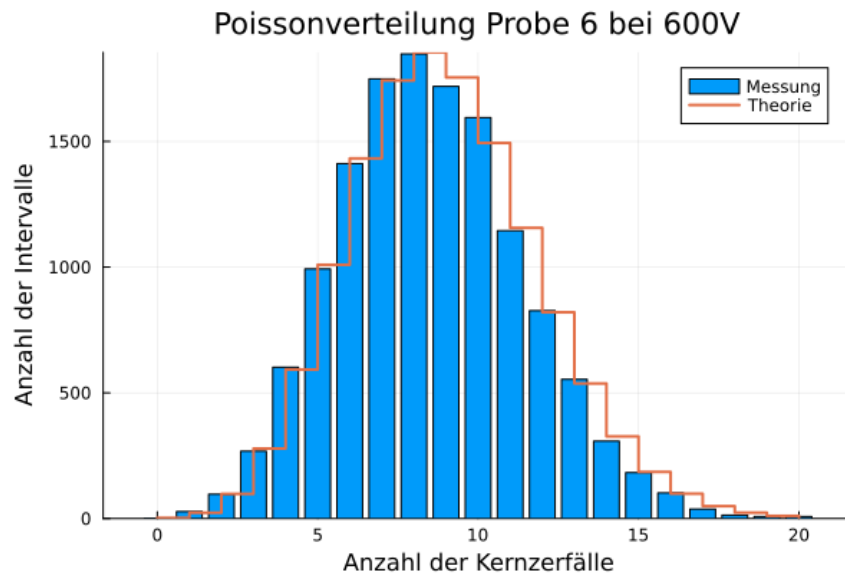


Abbildung 5: Poissonverteilung von Probe 6 bei einer Spannung von 600V

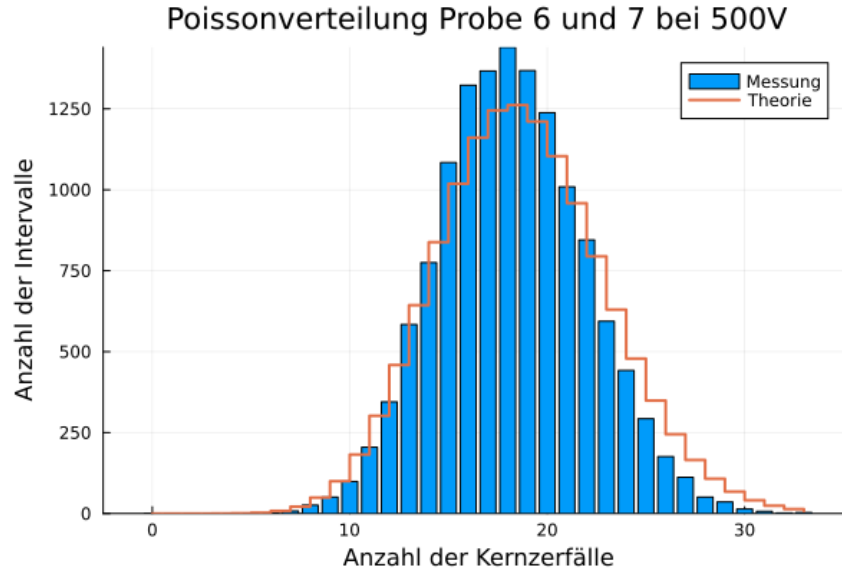


Abbildung 6: Poissonverteilung von Probe 6 und 7 bei einer Spannung von 500V

Probe	Spannung [V]	Normierungskonstante $N$	Mittelwert $m$	Varianz $\sigma^2$
6	500	13499	18,23	13,90
6	600	13499	8,52	8,35
6&7	500	13499	18,24	13,90

Tabelle 1: Mittelwerte, Varianz und Normierungskonstante der Poissonverteilungen

## 4.2 Gauß-Verteilung

Für die Analyse der Gauß-Verteilung wurde erneut das Programm binomial.py verwendet. Diesmal wurden Intervalle von 5s und ein Binning-Parameter von 3 gewählt, da bei großen  $\lambda$  die Poisson-Verteilung in eine Gauß-Verteilung übergeht. Die theoretische Verteilung folgt der Funktion:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \cdot F \cdot \sqrt{n} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2m/n}} \quad (58)$$

mit

$$m = \frac{z' \cdot \Delta t}{n} \quad (59)$$

Hierbei ist:

- $F$ : Normierungsfaktor (Anzahl aller Messungen),
- $m$ : Mittelwert, berechnet aus der gemessenen Zählrate  $z'$  und dem Zeitparameter  $\Delta t$
- $n$ : Binning-Parameter,
- $x$ : gemessene Zerfallszahl.

Die Gauß-Verteilungen wurden für die Messdaten von Quelle 6 bei 500V, Quelle 6 bei 600V und den Quellen 6 und 7 bei 500V ermittelt. In den Abbildungen 7, 8 und 9 sind die experimentellen Daten sowie die theoretischen Verteilungen dargestellt. Die berechneten Mittelwerte  $m$ , Normierungsfaktoren  $M$  und Zählraten  $z'$  sind in Tabelle 2 zusammengefasst.

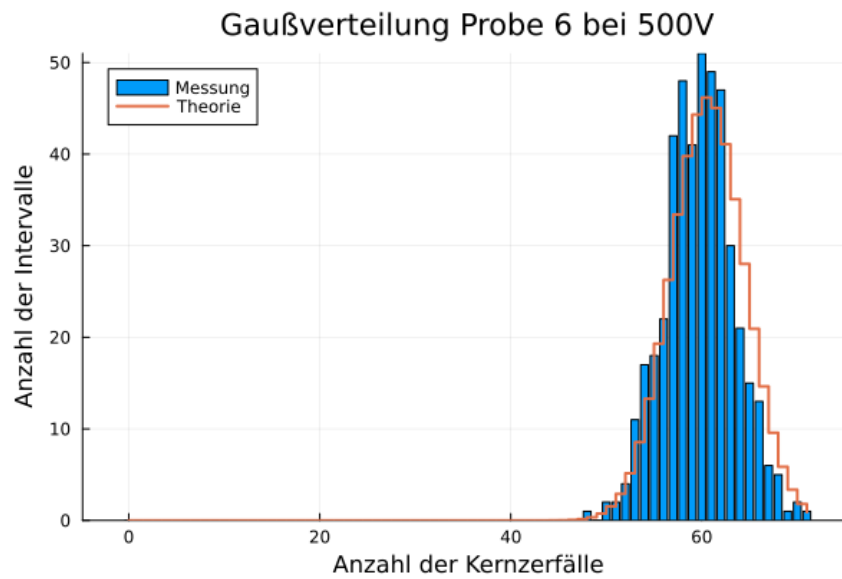


Abbildung 7: Gaußverteilung von Probe 6 bei einer Spannung von 500V



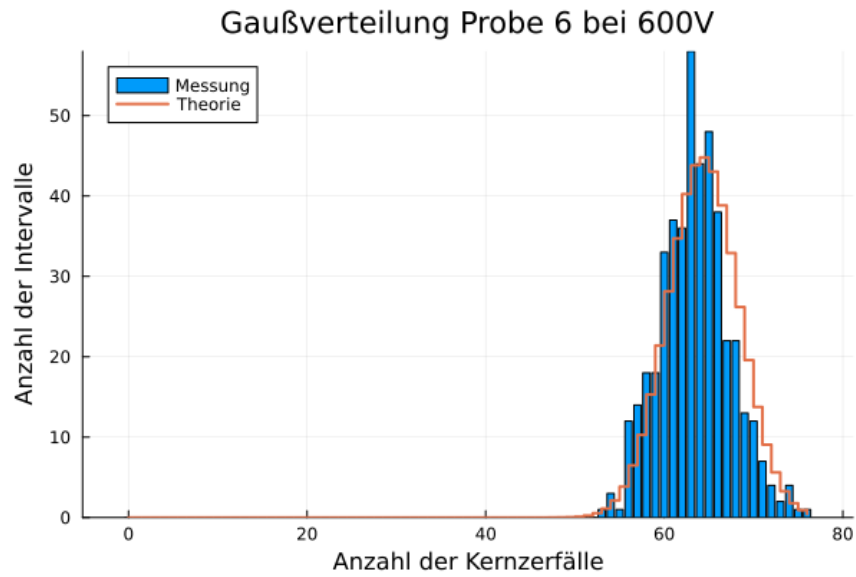


Abbildung 8: Gaußverteilung von Probe 6 bei einer Spannung von 600V

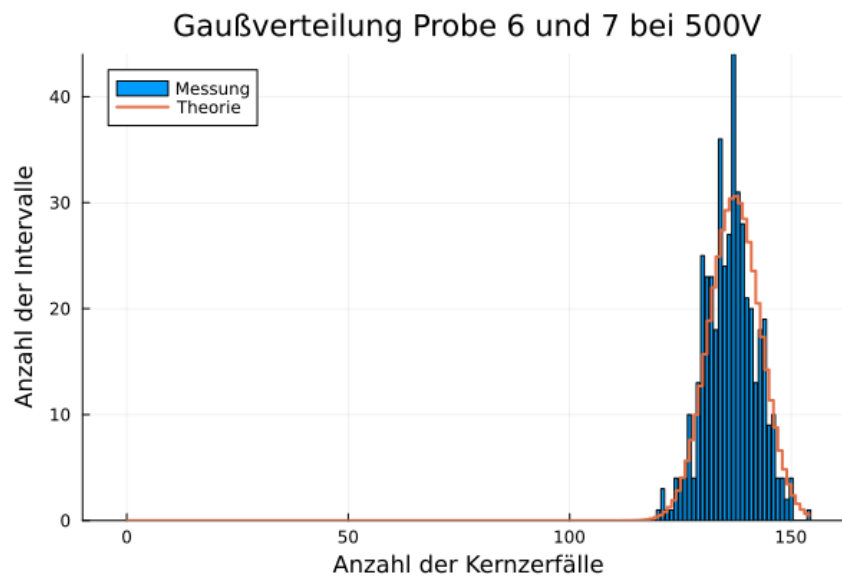


Abbildung 9: Gaußverteilung von Probe 6 und 7 bei einer Spannung von 500V

Probe	Spannung [V]	Normierungskonstante $F$	Mittelwert $m$	Zählrate $z'$ [1/s]
6	500	674	80,16	40,08
6	600	674	85,14	42,57
6&7	500	674	182,35	91,17

Tabelle 2: Mittelwerte, Zählraten und Normierungskonstante der Gaußverteilungen

### 4.3 Intervall-Verteilung

In diesem Abschnitt wurde die Intervall-Verteilung der zweiten Messung (Probe 6 bei 500V) für die Werte  $n = 0$ ,  $n = 1$  und  $n = 2$  untersucht. Der Parameter  $n$  gibt an, welche Zeitdifferenz zwischen den Zerfällen betrachtet wird:  $n = 0$  beschreibt die Zeit zwischen dem nächsten Zerfall,  $n = 1$  zwischen dem übernächsten, und  $n = 2$  zwischen dem überübernächsten Zerfall. Die experimentellen Daten sind in Abbildung 10 dargestellt. Es wurde stets der Parameter  $\Delta t = 0,001 \cdot s$  für interval.py gewählt [1].

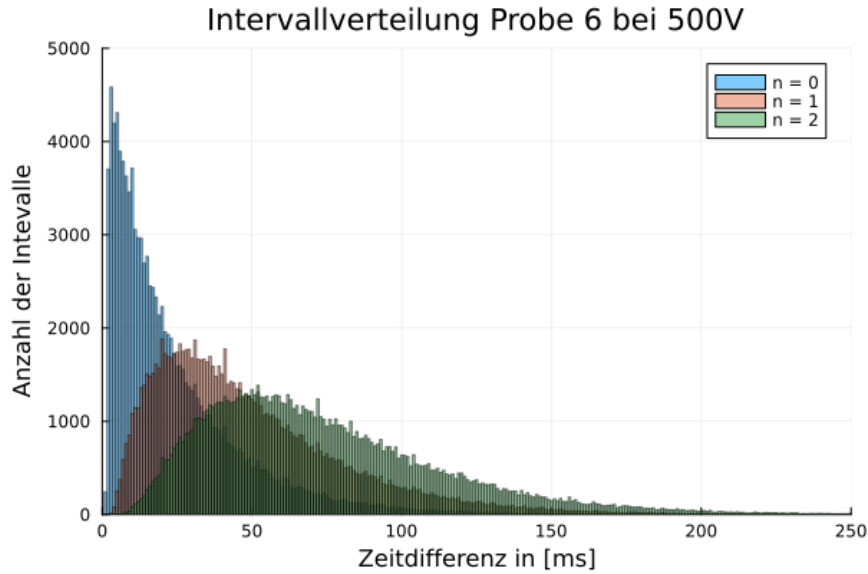


Abbildung 10: Experimentelle Intervall-Verteilung für  $n = 0$ ,  $n = 1$  und  $n = 2$ .

Für den Fall  $n = 0$  wurde die experimentell ermittelte Intervall-Verteilung mit der theoretischen Funktion verglichen, die gegeben ist durch die Gleichung

$$P(t) = N \cdot a e^{-at} \quad (60)$$

Hierbei stellt  $N$  die Normierungskonstante dar, die über  $N = a \cdot T$  berechnet wird, wobei  $T$  die Gesamtdauer der Messung und  $a$  die Zählrate ist. Es ist wichtig zu beachten, dass  $a$  von der gemessenen Zählrate  $a'$  abweicht, wobei für unseren Fall  $a' \approx 0.040 \frac{1}{\text{ms}}$ . Der Wert von  $a$  wurde durch einen Fit der Messdaten zusammen mit der theoretischen Funktion ermittelt (siehe Abbildung 11), wobei ein Wert von  $a = (0,04513) \pm 0,0002 \frac{1}{\text{ms}}$  und  $N = (116110 \pm 330)$  erhalten wurde. Die ersten 6 Werte wurden beim fitten vernachlässigt, da diese mit einem Wert von Null die Totzeit verfälschen würden. Die Zeitdifferenz in diesem Bereich ist zu klein um hier sinnvoll Zerfälle zu detektieren.

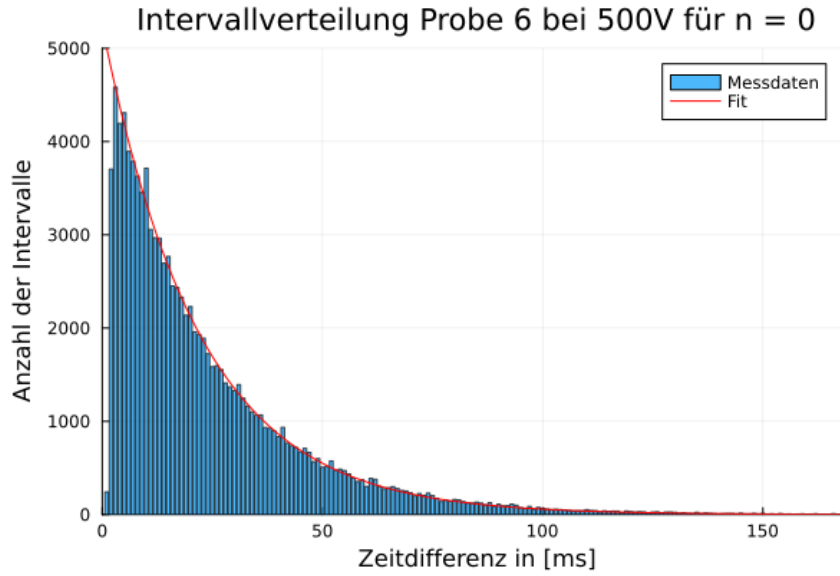


Abbildung 11: Fit der Intervall-Verteilung für  $n = 0$ .

Anschließend wurde die Totzeit  $\tau$  für den Fall  $n = 0$  mithilfe der Formel

$$a = \frac{a'}{1 - a'\tau} \quad (61)$$

und der umgestellten Gleichung

$$\tau = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a} \quad (62)$$

berechnet. Mit den bereits bestimmten Werten ergibt sich eine Totzeit von  $\tau \approx (2,79 \pm 0,11)$  ms.

## 4.4 $\chi^2$ -Test

Im folgenden Abschnitt, soll die Präparatstärke, sowie dessen zeitlicher Verlauf untersucht werden. Dazu werden mit dem  $\chi^2$ -Test drei Hypothesen getestet. Zunächst wird überprüft ob der Mittelwert der Zählraten konstant bleibt (Hypothese a). Dann wird die Hypothese getestet, dass die Präparatstärke 90% des Mittelwertes entspricht (Hypothese b). Zuletzt wird getestet, ob die Präparatstärke linear abfällt (Hypothese c), als erste lineare Näherung eines exponentiellen Abfalls. Die Hypothesen werden ebenfalls an den Totzeitkorrigierten Daten getestet.

### 4.4.1 Messdaten

Es werden die Messwerte der Messung von Probe 6 und 7 bei 500V verwendet. Die ersten 51 Zählraten wurden über Zeitintervalle  $\Delta t = 10$  s analysiert. Für die Berechnungen wurde das Hilfsprogramm `divide.py` verwendet. Des Weiteren wird nach 4.2 angenommen, dass die Meswerte standardnormalverteilt sind, d.h.  $\sigma^2 = m$ .

Für die Totzeitkorrektur wird der entsprechende Wert aus Tabelle 5 verwendet (Siehe 4.5), sodass

$$\tau = (3,92 \pm 0,2) \text{ ms}$$

### 4.4.2 Hypothese a: Konstante Präparatstärke (Mittelwert)

Die Präparatstärke wird als konstant angenommen und entspricht dem Mittelwert der gemessenen Zählraten:

$$m = \frac{1}{51} \sum_{i=1}^{51} n_i \approx 907,76. \quad (63)$$

Der  $\chi^2$ -Wert ergibt sich zu:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{51} \frac{(n_i - m)^2}{m} \approx 37,87. \quad (64)$$

Nach der Totzeitkorrektur, berechnet gemäß

$$\chi_{\text{kor}}^2 = \frac{\chi^2}{1 - \frac{m\tau}{\Delta t}} \approx 58.8, \quad (65)$$

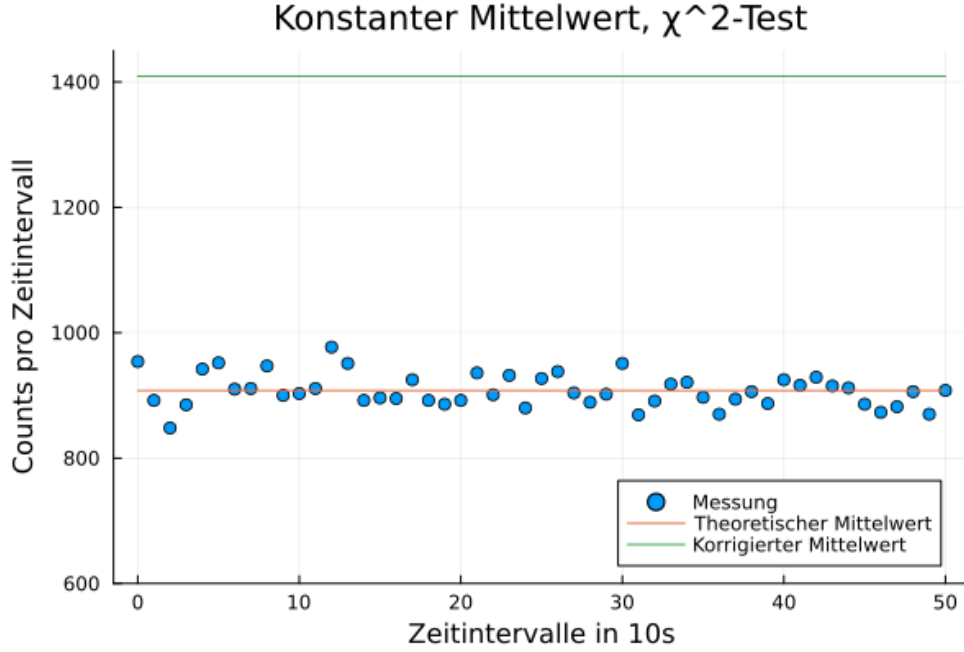


Abbildung 12:  $\chi^2$ -Hypothese a: Konstante Präparatstärke entspricht dem Mittelwert der Zählraten.

#### 4.4.3 Hypothese b: Konstante Präparatstärke (Mittelwert - 10%)

In dieser Hypothese wird der Mittelwert der Zählraten um 10% reduziert:

$$m_v = 0.9 \cdot m \approx 816,98. \quad (66)$$

Der  $\chi^2$ -Wert ergibt sich zu:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{51} \frac{(n_i - m_v)^2}{m_v} \approx 556,48. \quad (67)$$

Die Totzeitkorrektur liefert:

$$\chi_{\text{kor}}^2 = \frac{\chi^2}{1 - \frac{m_v\tau}{\Delta t}} \approx 1268. \quad (68)$$

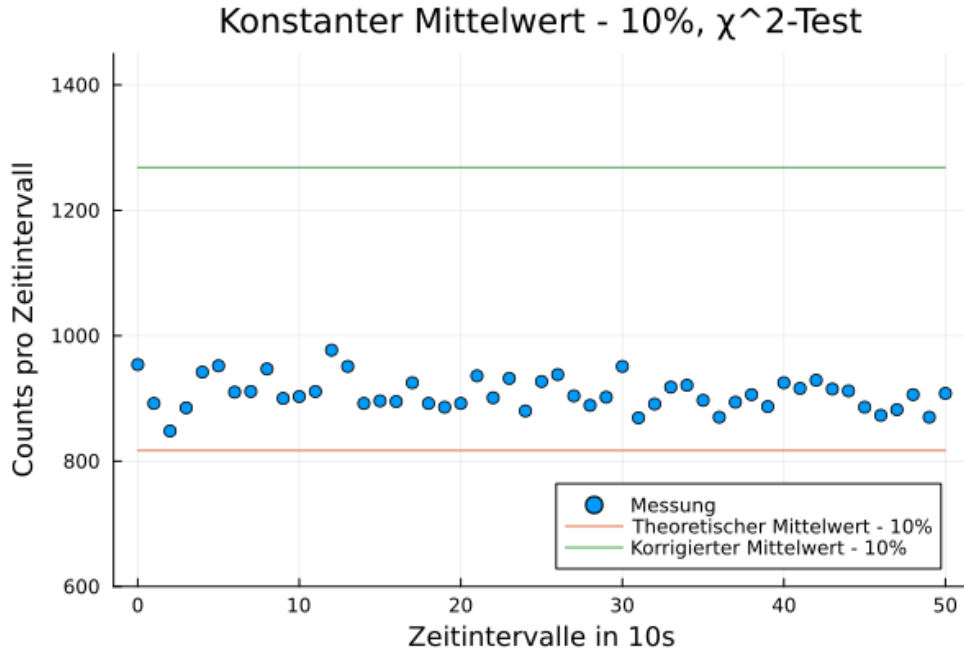


Abbildung 13:  $\chi^2$ -Hypothese b: Konstante Präparatstärke entspricht 90% des Mittelwerts der Zählraten.

#### 4.4.4 Hypothese c: Linear abfallende Präparatstärke

Für die dritte Hypothese wird eine linear abfallende Präparatstärke mit Anfangswert  $m_1 = m$  und einer Abnahmerate von 1 pro Zeitintervall angenommen:

$$m_{i+1} = m_i - 1. \quad (69)$$

Der  $\chi^2$ -Wert ergibt sich zu:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{51} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i} \approx 76,88. \quad (70)$$

Die Totzeitkorrektur liefert:

$$\chi_{\text{kor}}^2 = \sum_{i=1}^{51} \frac{\chi_i^2}{1 - \frac{m_i \tau}{\Delta t}} \approx 58,12. \quad (71)$$

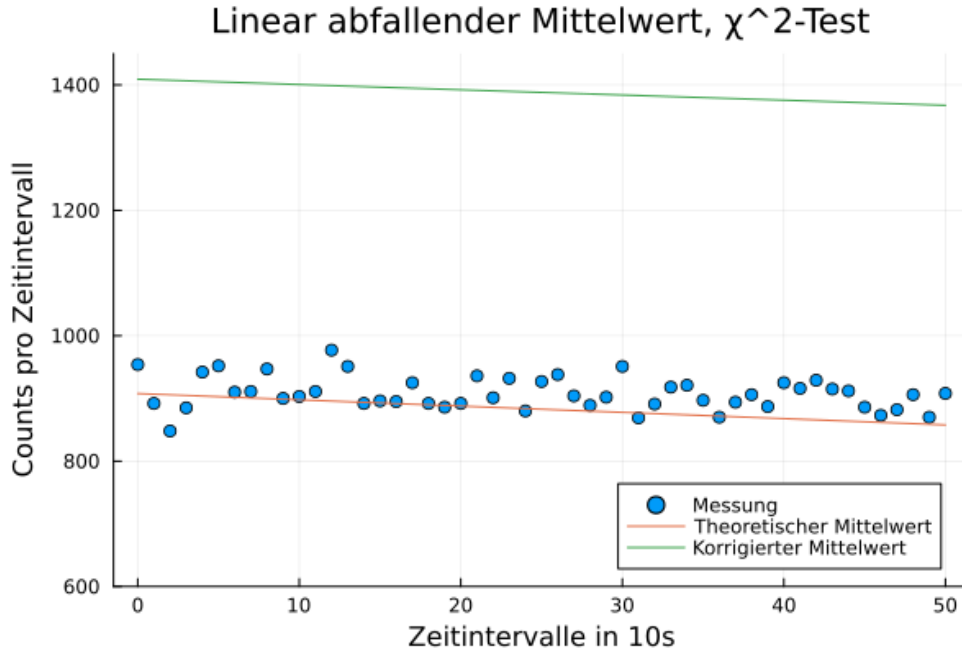


Abbildung 14:  $\chi^2$ -Hypothese c: Linear abfallende Präparatstärke.

#### 4.4.5 Berechnung der Halbwertszeit

Unter der Annahme, dass die Präparatstärke exponentiell abnimmt, gilt für die Halbwertszeit:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}. \quad (72)$$

Die Dämpfungskonstante  $\lambda$  wird durch die Abnahme der Präparatstärke pro Intervall abgeschätzt:

$$\lambda = \frac{1}{\Delta t \cdot m_1} \approx 110,16 \mu\text{s}^{-1}. \quad (73)$$

Daraus folgt:

$$T_{1/2} \approx \ln(2) \cdot m_1 \cdot \Delta t \approx 4705.38 \text{ s} \approx 1,75 \text{ h}. \quad (74)$$

Dieser Wert weicht stark von der bekannten Halbwertszeit der  $^{137}\text{Cs}$ -Quelle von ca. 30 Jahren ab [4]. Dies verdeutlicht, dass die Annahme einer linearen Abnahme für diese Messung unrealistisch ist.

#### 4.4.6 Ergebnisse der Hypothesentests

Die berechneten Werte für  $\chi^2$  und  $\chi_{\text{kor}}^2$  werden mit den kritischen Werten aus der Tabelle für den  $\chi^2$ -Test verglichen. Für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% beträgt der Akzeptanzbereich bei 50 Freiheitsgraden [32.4, 71.4]. Die Ergebnisse für die drei Hypothesen lauten:

Hypothese	$\chi^2$	$\chi_{\text{kor}}^2$
a	37,87	58,8
b	556,48	240,0
c	76,88	58,12

Tabelle 3: Berechnete  $\chi^2$ -Werte und korrigierte  $\chi_{\text{kor}}^2$ -Werte für die Hypothesen a, b und c.

#### 4.5 Totzeit des Zählrohrs

Die Totzeit des Zählrohrs wurde mithilfe der Zwei-Präparate-Methode bestimmt. Dabei wurden Zählraten für fünfminütige Messungen von Quelle 6, Quelle 7, beiden Quellen gemeinsam sowie dem Untergrund bei den Spannungen von 500V, 550V und 600V aufgenommen. Die gemessenen Zählraten sind in Tabelle 4 zusammengefasst. Die Fehler resultieren aus den statistischen Abweichungen der Abzählrate und beträgt  $\sqrt{n}$ . Die folgenden Werte wurden mit Julia ausgewertet und die Fehlerfortpflanzung wurde mit der Erweiterung Measurements bestimmt.

Quelle	500V	550V	600V
6	$0.04228 \pm 0.00038$	$0.04251 \pm 0.00038$	$0.04313 \pm 0.00038$
7	$0.06403 \pm 0.00046$	$0.06444 \pm 0.00046$	$0.06474 \pm 0.00046$
6 und 7	$0.08511 \pm 0.00053$	$0.09176 \pm 0.00055$	$0.09383 \pm 0.00056$
Untergrund	$0.00817 \pm 0.00017$	$0.00834 \pm 0.00017$	$0.00844 \pm 0.00017$

Tabelle 4: Gemessene Zählrate in  $[\text{ms}]^{-1}$  bei verschiedenen Spannungen.

Die Totzeit wurde mit der Formel

$$\tau = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (75)$$



wobei die Koeffizienten  $A$ ,  $B$  und  $C$  aus den Zählraten ermittelt wurden [1.10](#). Aufgrund der quadratischen Natur der Gleichung ergeben sich zwei Lösungen, von denen  $\tau_+$  als physikalisch sinnvoll angesehen wird. Die berechneten Totzeiten sind in [Tabelle 5](#) dargestellt.

Totzeit	500V	550V	600V
$\tau_+$ [ms]	$3.92 \pm 0.24$	$1.91 \pm 0.23$	$1.52 \pm 0.22$
$\tau_-$ [ms]	$18.61 \pm 0.12$	$18.61 \pm 0.11$	$18.47 \pm 0.11$

Tabelle 5: Totzeiten  $\tau$  bei verschiedenen Spannungen.

Es zeigt sich, dass die Totzeit  $\tau_+$  mit steigender Spannung abnimmt. Dies liegt daran, dass höhere Spannungen die Elektronen schneller zur Anode beschleunigen, wodurch der Kondensator schneller wieder einsatzbereit ist.

## 5 Diskussion

### 5.1 Poissonverteilung

Theoretisch sollten Mittelwert  $m$  und Varianz  $\sigma^2$  bei einer Poisson-Verteilung übereinstimmen. In Tabelle 1 zeigt sich jedoch eine deutliche Abweichung, insbesondere bei der Messung mit 500V, wo die Varianz (13,90) kleiner als der Mittelwert (18,23) ist. Diese Diskrepanz deutet auf experimentelle Effekte wie die Totzeit des Detektors hin, die die gemessenen Werte beeinflusst.

Die Totzeit führt dazu, dass nicht alle Zerfälle erfasst werden können, was zu einer Stauchung der Verteilung und einer Verringerung der Varianz führt. Dies erklärt, warum die Varianz bei 500V und 600V kleiner ist als der Mittelwert. Zudem fällt auf, dass bei höherer Spannung (600V) die Varianz (8,35) dem Mittelwert (8,52) näher kommt, was darauf hindeutet, dass die Totzeit durch die höhere Spannung teilweise kompensiert wird.

Die Verteilung bei 500V ist schmaler und weist einen höheren Peak auf, was eine geringere Streuung der Zerfallszahlen anzeigt. Im Gegensatz dazu ist die Verteilung bei 600V breiter und flacher, was auf eine größere Streuung und eine geringere Konzentration der Zerfallszahlen hindeutet. Dies spiegelt sich auch in den Mittelwerten und Varianzen wider: Während die Werte bei 500V stärker um den Mittelwert ( $m = 18,23$ ) konzentriert sind, zeigt 600V eine größere Verteilung um den Mittelwert ( $m = 8,52$ ).

Für die Messung mit beiden Proben (500V) ist der Mittelwert mit 18,24 nahezu identisch mit der Einzelprobe, die Varianz bleibt jedoch reduziert (13,90). Dies deutet darauf hin, dass die Totzeit bei höherer Zerfallsrate (durch die doppelte Anzahl an Zerfällen) eine noch größere Rolle spielt. Die Verteilung ist sichtbar stärker gestaucht.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die gemessenen Verteilungen aufgrund der Totzeit systematisch von der theoretischen Poisson-Verteilung abweichen. Insbesondere zeigt die Messung mit 600V eine bessere Übereinstimmung von  $m$  und  $\sigma^2$ , da die kürzere

Totzeit des Detektors zu einer realistischeren Erfassung der Zerfälle führt. Für die Messung mit beiden Proben wird die Näherung einer Poisson-Verteilung jedoch zunehmend ungültig, da hier die Totzeit einen erheblichen Einfluss hat.

## 5.2 Gaußverteilung

Wie schon bei der Poissonverteilung, weichen die Graphen leicht von der theoretischen Überlegung ab. Grund dafür ist auch hier die nicht berücksichtigte Totzeit. Jedoch ist anzumerken, dass die Verläufe besser passen als bei der Poissonverteilung.

## 5.3 Intervall-Verteilung

Die gemessene Verteilung für  $n = 0, 1, 2$  entsprechen dem erwarteten Verlauf (siehe Abb. 10). Mit steigendem  $n$  steigt der Mittelwert und die Kurve streckt sich.

Für  $n = 0$  hat die Berechnung über einen Fit eine Totzeit  $\tau \approx (2,79 \pm 0,11)ms$ . Es ist anzumerken, dass dieser Wert im Widerspruch mit der in 4.5 berechneten Totzeit steht.

## 5.4 $\chi^2$ -Test

Für Hypothese a liegen die Werte von  $\chi^2$  und dem korrigierten  $\chi^2_{kor}$  innerhalb des Akzeptanzbereichs, sodass die Hypothese nicht abgelehnt wird. Dies entspricht der physikalischen Erwartung, da die Halbwertszeit der Quelle deutlich länger ist als der betrachtete Messzeitraum.

Hypothese b wird aufgrund der hohen  $\chi^2$ -Werte abgelehnt, da die berechneten Werte außerhalb des Akzeptanzbereichs liegen.

Hypothese c zeigt eine lineare Abnahme der Präparatstärke. Der berechnete Wert für  $T_{1/2}$  weicht jedoch stark von der bekannten Halbwertszeit ab, sodass diese Hypothese ebenfalls unrealistisch erscheint.

## 5.5 Totzeit des Zählrohrs

Die gemessenen Totzeiten entsprechen der erwarteten Größenordnung [2] und fallen, wie erwartet, bei steigender Spannung ab. Die Totzeit bei 500V weicht jedoch von dem durch

die Intervall-Verteilung ermittelten Wert ab. Diese Abweichung ließe sich dadurch erklären, dass sich die Justage des Labornetzteils im Versuchsteil [4.5](#) als schwierig herausgestellt hat. Der Drehregler zur Feinjustage der Spannung war sehr empfindlich, wodurch die genaue Spannung möglicherweise nicht genau genug eingestellt werden konnte.

## 6 Abbildungsverzeichnis

### Abbildungsverzeichnis

1	Intervallverteilung für $a = 1$ [1] . . . . .	7
2	Schematischer Aufbau eines Geiger-Zählrohrs und Geiger-Entladung [2] . .	7
3	Arbeitsbereiche eines Ionisationsdetektors [3] . . . . .	9
4	Poissonverteilung von Probe 6 bei einer Spannung von 500V . . . . .	18
5	Poissonverteilung von Probe 6 bei einer Spannung von 600V . . . . .	18
6	Poissonverteilung von Probe 6 und 7 bei einer Spannung von 500V . . . .	19
7	Gaußverteilung von Probe 6 bei einer Spannung von 500V . . . . .	20
8	Gaußverteilung von Probe 6 bei einer Spannung von 600V . . . . .	21
9	Gaußverteilung von Probe 6 und 7 bei einer Spannung von 500V . . . . .	21
10	Experimentelle Intervall-Verteilung für $n = 0$ , $n = 1$ und $n = 2$ . . . . .	22
11	Fit der Intervall-Verteilung für $n = 0$ . . . . .	23
12	$\chi^2$ -Hypothese a: Konstante Präparatstärke entspricht dem Mittelwert der Zählraten. . . . .	25
13	$\chi^2$ -Hypothese b: Konstante Präparatstärke entspricht 90% des Mittelwerts der Zählraten. . . . .	26
14	$\chi^2$ -Hypothese c: Linear abfallende Präparatstärke. . . . .	27

## 7 Literaturverzeichnis

### Literatur

- [1] U. Köln. „B3.1: Statistik der Kernzerfälle“. In: (2021).
- [2] G. Knoll. *Radiation Detection and Measurement*. Wiley, 2010. URL: <https://shorturl.at/KYDE2>.
- [3] W. Demtröder. *Experimentalphysik 4*. Springer, 2017. URL: <https://shorturl.at/CWuQh>.
- [4] *NuDat3*. URL: <https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/>. aufgerufen am 3.11.24.