通信原理

谢 逸
中山大学・计算机学院
2024年・春季

改编自樊昌信《通信原理教程》（第4版）课件

作业

- 习题: 2.1, 2.2, 2.3, 2.14, 2.22, 2.26

2.1　设一个随机过程 $X(t)$ 可以表示成：

$$X(t)=2\cos(2\pi t+\theta) \qquad -\infty<t<\infty$$

式中 θ 是一个离散随机变量，它具有如下概率分布：

$$P(\theta=0)=0.5, \quad P(\theta=\pi/2)=0.5$$

试求 $E[X(t)]$ 和 $R_X(0,1)$。

2.2　设一个随机过程 $X(t)$ 可以表示成：

$$X(t)=2\cos(2\pi t+\theta) \qquad -\infty<t<\infty$$

判断它是功率信号还是能量信号？并求出其功率谱密度或能量谱密度。

2.3 设有一信号可表示为：

$$x(t)=\begin{cases}4\exp(-t) & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

试问它是功率信号还是能量信号？并求出其功率谱密度或能量谱密度。

2.14 设有一周期信号 $x(t)$ 加于一个线性系统的输入端，得到的输出信号为：

$$y(t)=\tau[\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t]$$

式中，τ 为常数。试求该线性系统的传输函数 $H(f)$。

2.22 一个中心频率为 f_c、带宽为 B 的理想带通滤波器如图 P2.4 所示。假设输入是均值为零、功率谱密度为 $n_0/2$ 的高斯白噪声，试求：

（1）滤波器输出噪声的自相关函数；（2）滤波器输出噪声的平均功率；（3）输出噪声的一维概率密度函数。

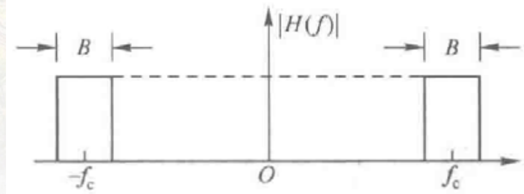


图 P2.4

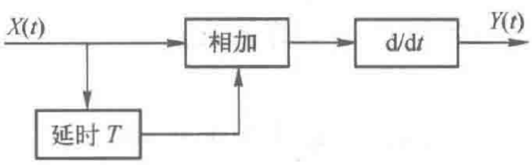


图 P2.6

2.26 $X(t)$ 是功率谱密度为 $P_X(f)$ 的平稳随机过程，该过程通过图 P2.6 所示的系统。

（1）试问输出随机过程 $Y(t)$ 是否平稳？

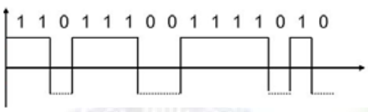
（2）求出 $Y(t)$ 的功率谱密度。

作业

- 思考题:
  - 简述确知信号、随机信号、能量信号、功率信号
  - 简述4种频率特性以及适用的信号
  - 功率谱密度和自相关函数的关系
  - 什么是白噪声？频谱和自相关函数的特点是什么？
  - 随机过程的平稳与各态历经性
  - 无失真传输的条件
  - 随机信号经过线性系统，输出和输入的统计特性。

为什么通信需要涉及随机过程？

- 根本原因：在接收前，接收端对接收内容一无所知，只能根据接收信号推测，而接收信号通常受到随机噪声的干扰发生畸变。
- 推测依据：
  - 信号与“0/1”之间的(时域/频域)关联性；
  - “0/1”序列前后的关联性导致信号的前后关联性；
  - ……



第2章 信号

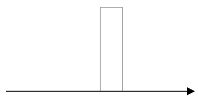
2.1 信号的类型

2.1.1 确知信号和随机信号

- 什么是确知信号 – 其取值在任何时间都是确定的和可预知的信号。
- 什么是随机信号 – 其取值不确定，且不能事先确切预知的信号。
- 只有经过理想信道传输的信号，才可能是确知信号。
- 经过实际信道传输的信号通常是随机信号。

2.1.2 能量信号和功率信号

- 信号的功率：设 $R = 1$, 则 $P = V^2/R = I^2R = V^2 = I^2$
- 信号的能量：设S代表V或I，若S随时间变化，则写为$s(t)$,
  于是，信号的能量 $E = \int s^2(t)\mathrm{d}t$



- 能量信号：满足 $0 < E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt < \infty$
- 平均功率：$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt$ ，故能量信号的平均功率 $P = 0$。

能量有限，时间无限
功率为0

- 功率信号：$P \neq 0$ 的信号，即持续时间无穷的信号。
- 功率信号的平均功率有限，但能量为无穷大。

能量无限，时间无限
功率有限

非周期信号→周期无穷大→能量有限→平均功率为0 →能量信号→傅里叶变换→频谱密度
周期信号→周期有限→能量无限→功率有限→功率信号→傅里叶级数→频谱

从傅里叶级数（周期信号、功率信号）→傅里叶变换（非周期信号、能量信号）

周期信号$f_T(t)$的傅里叶级数展开： $f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos(n\Omega t)+b_n\sin(n\Omega t)]\quad n\in N$

$\Omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f\qquad \omega_n=n\Omega$

$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt$

$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(2\pi fnt)dt$

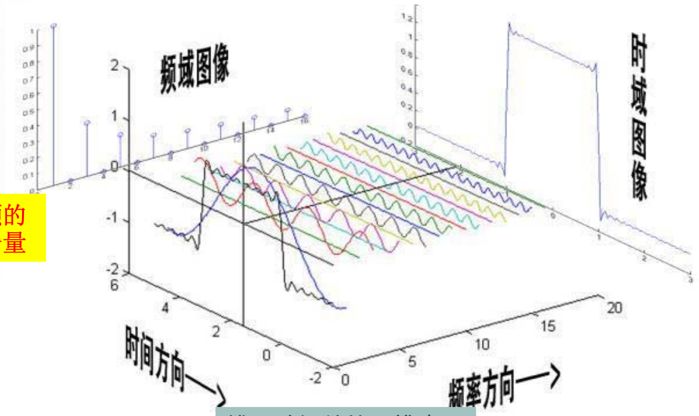
$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(2\pi fnt)dt$

只包含基频的倍数频率分量

$e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$

$\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$\sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=-i\cdot\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$



傅里叶级数的三维表示

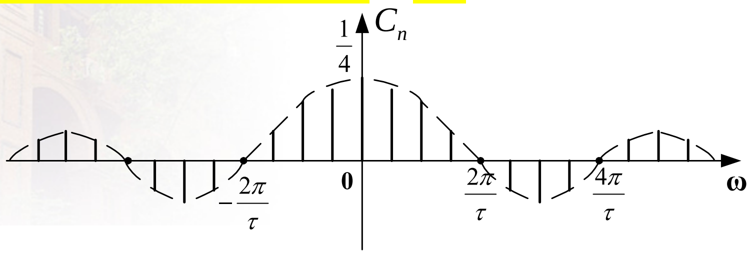
$$f_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau\right]e^{i\omega_n t}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{i\omega_n t}$$

$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau$ ：频谱，各个频率分量对原信号的贡献

从傅里叶级数（周期信号、功率信号）→傅里叶变换（非周期信号、能量信号）

$$f_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau\right]e^{i\omega_n t}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{i\omega_n t}$$

$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau$



特点：

(1)周期信号的频谱具有谐波(离散)性。谱线位置是基频Ω的整数倍； $\omega_n=n\Omega$

(2)一般具有收敛性。总趋势减小。

(3) $\omega_n=n\Omega;\quad \omega_{n+1}-\omega_n=\Omega=\frac{2\pi}{T}$:基频　周期越大，基频越小，相邻谱线的距离越小，趋向连续

从傅里叶级数（周期信号、功率信号）→傅里叶变换（非周期信号、能量信号）

非周期信号$f(t)$：设其周期$T\to+\infty$，令：

$$F(i\omega_n)=\lim_{T\to\infty}\frac{C_n}{1/T}\Rightarrow C_n=\lim_{T\to\infty}F(i\omega_n)\frac{1}{T}=F(i\omega_n)\lim_{f\to 0}f=F(i\omega_n)\mathrm{d}f$$

由傅里叶级数展开得到：$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau$ $\Rightarrow \lim_{T\to\infty}F(i\omega_n)\frac{1}{T}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau$

$$\Rightarrow F(i\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

考虑到：
$T\to\infty$，$\Omega\to$无穷小，记为$d\omega$；
$\omega_n=n\Omega\to\omega$（由离散量变为连续量）

类似地，由傅里叶级数展开： $f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{i\omega_n t}\Rightarrow f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to\infty}F(i\omega_n)\frac{1}{T}e^{i\omega_n t}$

$$\mathrm{d}f=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\omega$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(i\omega_n)e^{i\omega_n t}\mathrm{d}f\Rightarrow f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(i\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

从傅里叶级数（周期信号、功率信号）→傅里叶变换（非周期信号、能量信号）

周期信号一般能量无限，因此仅考虑其平均功率：$\frac{1}{T}\int_0^T f_T^2(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2$

C_n: 频谱 (*n*次正弦谐波谐波的幅度)；
$|C_n|^2$代表*n*次正弦谐波在原信号中的平均功率

非周期信号一般能量有限，且： $F(i\omega_n)=\lim_{T\to\infty}\frac{C_n}{1/T}\Rightarrow C_n=\lim_{T\to\infty}F(i\omega_n)\frac{1}{T}=F(i\omega)\mathrm{d}f$

由于 $C_n=F(i\omega)\mathrm{d}f$，且$C_n$被称为频谱，
所以 $F(i\omega)=C_n/\mathrm{d}f$ 的物理含义是单位频率的频谱，也就是频谱密度。

2.2 确知信号的性质

2.2.1频域性质

■ 功率信号(周期信号)的频谱：设$s(t)$为周期性功率信号，T_0为周期，则有

$$C(jn\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

式中，$\omega_0=2\pi/T_0=2\pi f_0$

∵ $C(jn\omega_0)$是复数，∴ $C(jn\omega_0)=|C_n|e^{j\theta_n}$

式中，$|C_n|$ — 频率为nf_0的分量的振幅；

θ_n — 频率为nf_0的分量的相位。

◆信号$s(t)$的傅里叶级数表示法：

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C(jn\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

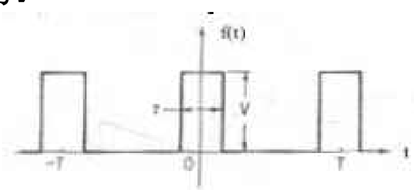
傅里叶级数的物理意义：把信号分解为不同正弦信号（幅度、频率、相位）的叠加，通过这些正弦波的频率得到原信号的频率分量组成。

【例2.1】 试求周期性矩形波的频谱。

解：设一周期性矩形波的周期为T，宽度为τ，幅度为V

$$f(t)=\begin{cases}V & -\tau/2\le t\le\tau/2\\ 0 & \tau/2<t<(T-\tau/2)\end{cases}$$

$$f(t)=f(t-T)\qquad -\infty<t<\infty$$

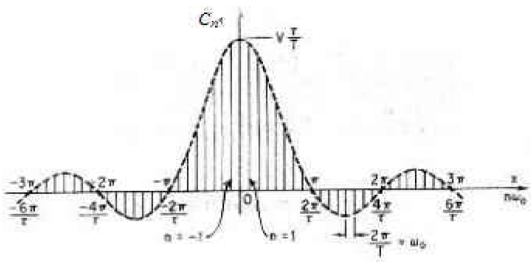


求频谱：

$$C(jn\omega_0)=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}Ve^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\left[-\frac{V}{jn\omega_0}e^{-jn\omega_0 t}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$=\frac{V}{T}\times\frac{e^{jn\omega_0\tau/2}-e^{-jn\omega_0\tau/2}}{jn\omega_0}=\boxed{\frac{2V}{n\omega_0 T}\times\sin n\omega_0\frac{\tau}{2}}$$

频谱的物理含义：不同频率的正弦波对原信号的贡献率



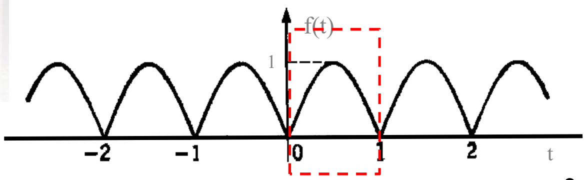
频谱图

【例2.2】试求全波整流后的正弦波的频谱。

解：设此信号的表示式为 $f(t)=\begin{cases}\sin(\pi t) & 0<t\le 1\\ f(t-1) & -\infty<t<+\infty\end{cases}$

求频谱：

$$C(jn\omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}s(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\int_0^1\sin(\pi t)e^{-j2\pi nt}dt=\frac{-2}{\pi(4n^2-1)}$$



信号的傅里叶级数表示式： $f(t)=\frac{-2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}e^{j2\pi nt}$

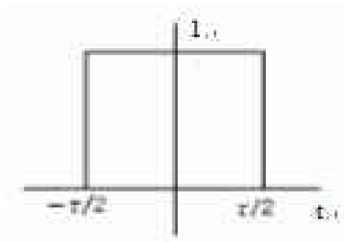
- 能量信号（非周期信号）的频谱密度

设一能量信号为**s(*t*)**，则其频谱密度为：

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt$$

***S*(*ω*)**的逆变换为原信号：

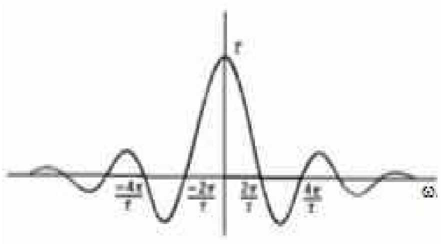
$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$



【例2.3】试求一个矩形脉冲的频谱密度。

解：设此矩形脉冲的表示式为

$$g(t)=\begin{cases}1 & |t|\le\tau/2\\ 0 & |t|>\tau/2\end{cases}$$



则它的频谱密度就是它的傅里叶变换：

$$G(\omega)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{j\omega}(e^{j\omega\tau/2}-e^{-j\omega\tau/2})=\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

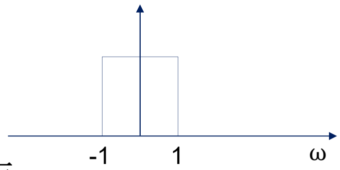
【例2.4】试求抽样函数的波形和频谱密度。

解：抽样函数的定义是

$$\mathrm{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$$

而$Sa(t)$的频谱密度为：

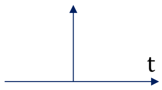
$$Sa(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} \pi & -1 \le \omega \le +1 \\ 0 & \text{其他处} \end{cases}$$



和上例比较可知，$Sa(t)$的波形和上例中的$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\omega})$曲线相同，而$Sa(t)$的频谱密度$Sa(\omega)$的曲线和上例中的$g(t)$波形相同。

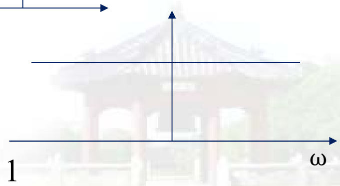
【例2.5】试求单位冲激函数及其频谱密度。

解：单位冲激函数常简称为δ函数，其定义是：



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

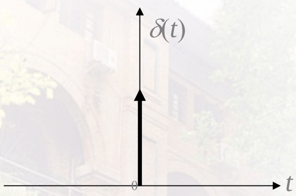
$$\delta(t) = 0 \qquad t \neq 0$$

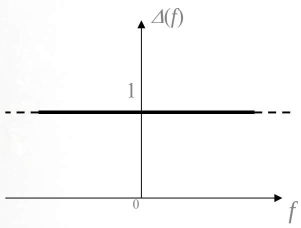


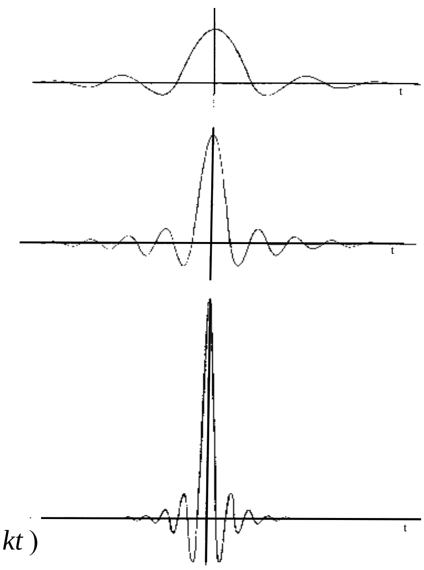
δ(t)的频谱密度：$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

17

◆Sa(t)及其频谱密度的曲线：







◆δ函数的物理意义：

高度为无穷大，宽度为无穷小，面积为1的脉冲。

◆用抽样函数**Sa(t)**表示δ函数：Sa(t)有如下性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\pi} Sa(kt) dt = 1$$

当 $k \to \infty$ 时，振幅 $\to \infty$，

波形的零点间隔 $\to 0$，　故有 $\delta(t) = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{\pi} Sa(kt)$

◆δ函数的性质

➢对$f(t)$的抽样： $f(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt$

➢δ函数是偶函数： $\delta(t)=\delta(-t)$ $f(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t_0-t)dt$

➢δ函数是单位阶跃函数的导数：

$$u(t)=\begin{cases}0, & \text{当}\ t<0,\\ 1, & \text{当}\ t\ge 0\end{cases}$$

$$u'(t)=\delta(t)$$

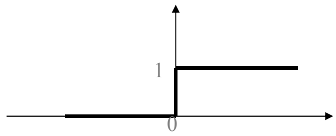


图2.2.6 单位阶跃函数

◆能量信号的频谱密度**S(f)**和周期性功率信号的频谱**C(jnω$_0$)**的区别:

➢***S*(*f*)** — 连续谱； ***C*(j*nω*$_0$)** — 离散谱

➢***S*(*f*)**的单位：**V/Hz**； ***C*(j*nω*$_0$)** 的单位：**V**

➢***S*(*f*)**在一频率点上的幅度＝无穷小。

【例2.6】试求无限长余弦波的频谱密度。

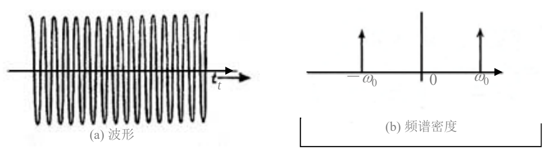
解：设一个余弦波的表示式为$f(t)=\cos\omega_0 t$，则其频谱密度$F(\omega)$按式(2.2-10)计算，可以写为

$$F(\omega)=\lim_{\tau\to\infty}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\cos\omega_0 t e^{-j\omega t}dt=\lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{2}\left\{\frac{\sin[(\omega-\omega_0)\tau/2]}{(\omega-\omega_0)\tau/2}+\frac{\sin[(\omega+\omega_0)\tau/2]}{(\omega+\omega_0)\tau/2}\right\}$$

$$=\lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{2}\left\{Sa\left[\frac{\tau(\omega-\omega_0)}{2}\right]+Sa\left[\frac{\tau(\omega+\omega_0)}{2}\right]\right\}$$

参照式(2.2-19)，上式可以改写为

$$F(\omega)=\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$



◆引入$\delta(t)$，就能将频谱密度概念推广到功率信号上。

■ 能量谱密度

设一个能量信号**s(t)**的能量为***E***，则其能量由下式决定：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$$

若此信号的频谱密度，为***S(f)***，则由巴塞伐尔定理得知：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

上式中$|S(f)|^2$称为能量谱密度，也可以看作是单位频带内的信号能量。上式可以改写为：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)df$$

式中，$G(f) = |S(f)|^2$ （J / Hz） 为能量谱密度。

◆$G(f)$的性质：因**s(t)**是实函数，故$|S(f)|^2$是偶函数，∴

$$E = 2\int_{0}^{\infty} G(f)df$$

■ 功率谱密度

令s(t)的截短信号为$s_T(t)$，$-T/2 < t < T/2$，则有

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} s_T^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(f)|^2 df$$

信号功率： $$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |S_T(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} P(f)df$$

其中： $$P(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}|S_T(f)|^2$$ ：功率谱(单位频率的功率)

对于周期性信号，功率***P***：

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s^2(t)df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C(jn\omega_0)|^2$$

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |C(j\omega)|^2 \delta(f - nf_0)df$$

2.2.2 时域性质

■ 自相关函数

◆能量信号的自相关函数定义：

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)s(t+\tau)dt \qquad -\infty<\tau<\infty$$

◆功率信号的自相关函数定义：

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)s(t+\tau)dt \qquad -\infty<\tau<\infty$$

◆性质：

➢ $R(\tau)$只和 τ 有关，和 t 无关

➢ 当$\tau=0$时，能量信号的$R(\tau)$等于信号的能量；
功率信号的$R(\tau)$等于信号的平均功率。

■ 互相关函数

◆能量信号的互相关函数定义：

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s_1(t)s_2(t+\tau)dt, \qquad -\infty<\tau<\infty$$

◆功率信号的互相关函数定义：

$$R_{12}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s_1(t)s_2(t+\tau)dt, \qquad -\infty<\tau<\infty$$

◆性质：

➢ **1.** $R_{12}(\tau)$只和 τ 有关，和 t 无关；

➢ **2.** $R_{21}(\tau)=R_{12}(-\tau)$

证：令$x=t+\tau$，则

$$R_{21}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s_2(t)s_1(t+\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty}s_2(x-\tau)s_1(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}s_1(x)s_2[x+(-\tau)]dx=R_{12}(-\tau)$$

2.3 随机信号的性质

2.3.1 随机变量的概率分布

- 随机变量的概念：若某种试验***A***的随机结果用X表示，则称此X为一个随机变量，并设它的取值为x。

  例如，在一定时间内电话交换台收到的呼叫次数是一个随机变量。

- 随机变量的分布函数：
  - ◆定义：$F_X(x) = P(X \le x)$
  - ◆性质：$\because\ P(a < X \le b) + P(X \le a) = P(X \le b)$,

    $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$，

    $\therefore\ P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$

◆离散随机变量的分布函数：

- 设X的取值为：$x_1 \le x_2 \le \dots \le x_i \le x_n$，其取值的概率分别为$p_1$, $p_2, \dots, p_i, \dots, p_n$，则有

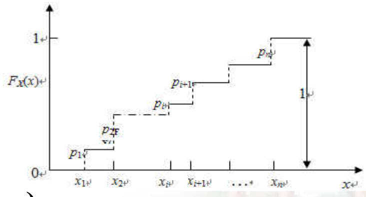
  $$P(X < x_1) = 0, \qquad P(X \le x_n) = 1$$

- $\because P(X \le x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_i)$,

  $\therefore$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \sum_{k=1}^{i} p_k & x_1 \le x < x_{i+1} \\ 1 & x \ge x_n \end{cases}$$

- 性质：
  - ✓ $F_X(-\infty) = 0$
  - ✓ $F_X(+\infty) = 1$
  - ✓ 若$x_1 < x_2$，则有：$F_X(x_1) \le F_X(x_2)$，为单调增函数。

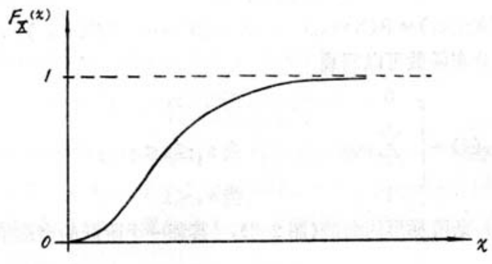


◆连续随机变量的分布函数：

当x连续时，由定义分布函数定义

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

可知， $F_X(x)$ 为一连续单调递增函数：



2.3.2 随机变量的概率密度

■ 连续随机变量的概率密度$p_X(x)$

◆$p_X(x)$的定义： $p_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$

◆$p_X(x)$的意义：

- $p_X(x)$是$F_X(x)$的导数，是$F_X(x)$曲线的斜率
- 能够从$p_X(x)$求出$P(a < X \le b)$：

$$P(a < X \le b) = \int_a^b p_X(x)dx$$

◆$p_X(x)$的性质：

- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(y)dy$
- $p_X(x) \ge 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1$

■ 离散随机变量的概率密度

离散随机变量的分布函数可以写为：

$$F_X(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i u(x-x_i)$$

式中，p_i： $x=x_i$ 的概率

$u(x)$：单位阶跃函数

将上式两端求导，得到其概率密度：

$$p_X(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i\delta(x-x_i)$$ 对概率抽样

◆性质：

当 $x\neq x_i$ 时，$p_x(x)=0$，

当 $x=x_i$ 时， $p_x(x)=\infty$

2.4 常见随机变量举例（请课外回顾概率论）

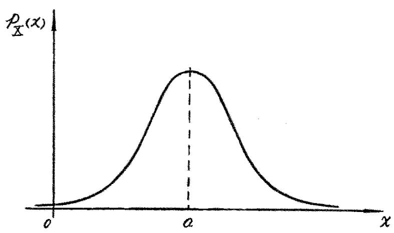
■ 正态分布随机变量

◆定义：概率密度

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

式中，$\sigma>0$, $a=$ 常数

◆概率密度曲线：



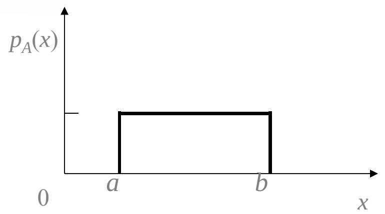
■均匀分布随机变量

◆定义：概率密度

$$p_X(x)=\begin{cases}1/(b-a) & a\le x\le b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

式中，***a***，***b***为常数

◆概率密度曲线：



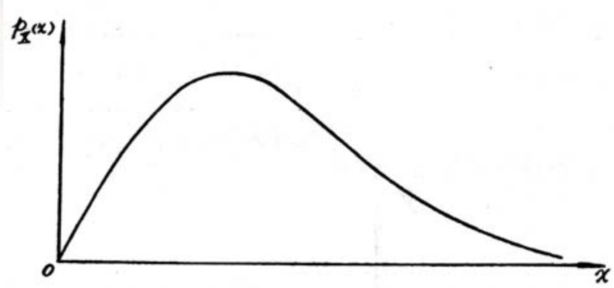
■瑞利(Rayleigh)分布随机变量

◆定义：概率密度为

$$p_X(x)=\frac{2x}{a}\exp\left(-\frac{x^2}{a}\right)\qquad x\ge 0$$

式中，***a*** **> 0**，为常数。

◆概率密度曲线：



2.5 随机变量的数字特征（请课外回顾概率论）

2.5.1 数学期望

- 定义：对于连续随机变量 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)dx$
- 性质：
  - $E(C)=C$
  - $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
  - $E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$
  - $E(C+X)=C+E(X)$
  - $E(XY)=E(X)E(Y)$

  若***X***和***Y***互相独立，且***E*(*X*)**和***E*(*Y*)**存在。
  - $E(CX) = CE(X)$

2.5.2 方差

- 定义： $D(X)=\sigma_X^2=E[(X-\overline{X})^2]$

  式中， σ_X—标准偏差， $\overline{X}$—X的数学期望
  - 方差的改写： $D(X)=\overline{X^2}-\overline{X}^2$

  证： $E[(X-\overline{X})^2]=E[X^2-2X\overline{X}+\overline{X}^2]=\overline{X^2}-2\overline{X}^2+\overline{X}^2=\overline{X^2}-\overline{X}^2$
  - 对于离散随机变量， $D(X)=\sum_i (x_i-\overline{X})^2 p_i$
  - 对于连续随机变量， $D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\overline{X})^2 p_X(x)dx$
- 性质：
  - ***D*(*C*) = 0**
  - ***D*(*X*+*C*)=*D*(*X*)，*D*(*CX*)=*C*²*D*(*X*)**
  - ***D*(*X*+*Y*)=*D*(*X*)+*D*(*Y*)**
  - $D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)=D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$

2.5.3 矩

- 定义：随机变量*X*的*k*阶矩为 $E[(X-a)^k]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^k p_X(x)dx$
  - ◆*k*阶原点矩：$a=0$时的矩：

$$m_k(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k p_X(x)dx$$

  - ◆*k*阶中心矩：$a=\overline{X}$ 时的矩：

$$M_k(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\overline{X})^k p_X(x)dx$$

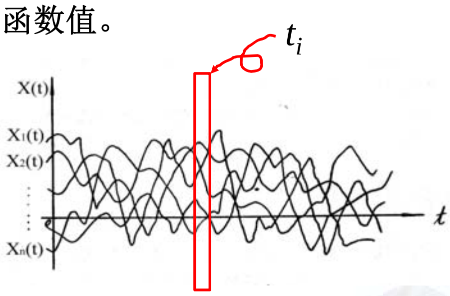
- 性质：
  - ◆ 一阶原点矩为数学期望：$m_1(X)=E(X)$
  - ◆ 二阶中心矩为方差：$M_2(X)=D(X)=\sigma_X^2$

2.6 随机过程

2.6.1 随机过程的基本概念

- ***X*(*A*, *t*)** — 事件***A***的全部可能“实现”的总体；
- ***X*(A_i, t)** — 事件***A***的一个实现，为确定的时间函数；
- ***X*(*A*, t_k)** — 在给定时刻t_k上的函数值。
  - ◆简记：$X(A,t)\to X(t)$

    $X(A_i,t)\to X_i(t)$



- 例：接收机噪声
- 随机过程的数字特征：
  - ◆统计平均值：

$$E[X(t_i)]=\int_{-\infty}^{\infty}xp_{X_i}(x)dx=m_X(t_i)$$

  - ◆方差：$D[X(t_i)]=E\{X(t_i)-E[X(t_i)]\}^2$
  - ◆自相关函数：$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$

2.6.2 平稳随机过程

- 平稳随机过程的定义：

  统计特性与时间起点无关的随机过程。（又称严格平稳随机过程）

- 广义平稳随机过程的定义：

  平均值、方差和自相关函数与时间起点无关的随机过程。

- 广义平稳随机过程的性质：
  - $E[X(t)]=m_X=$常数
  - $D[X(t)]=E\{X(t)-E[X(t)]\}^2=\sigma_X^2=$常数
  - $R_X(t_1,t_2)=R_X(t_1-t_2)=R_X(\tau) \qquad \tau=t_1-t_2$

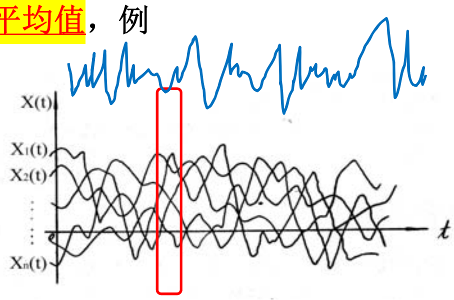
- 严格平稳随机过程一定也是广义平稳随机过程。但是，广义平稳随机过程就不一定是严格平稳随机过程。

2.6.3 各态历经性

- “各态历经”的含义：

  平稳随机过程的一个实现能够经历此过程的所有状态。

- 各态历经过程的特点：可用时间平均值代替统计平均值，例



◆各态历经过程的统计平均值m_X:

$$m_X=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}X_i(t)dt$$

◆各态历经过程的自相关函数$R_X(\tau)$:

$$R_X(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}X_i(t)X_i(t+\tau)dt$$

◆一个随机过程若具有各态历经性，则它必定是严格平稳随机过程。但是，严格平稳随机过程就不一定具有各态历经性。

■ 稳态通信系统的各态历经性：

假设信号和噪声都是各态历经的。

◆一阶原点矩$m_X = E[X(t)]$ — 是信号的直流分量；

◆一阶原点矩的平方$m_X{}^2$ — 是信号直流分量的归一化功率；

◆二阶原点矩$E[X^2(t)]$ — 是信号归一化平均功率；

◆二阶原点矩的平方根$\{E[X^2(t)]\}^{1/2}$ — 是信号电流或电压的均方根值（有效值）；

◆二阶中心矩σ_X^2 — 是信号交流分量的归一化平均功率;

◆若$m_X = m_X{}^2 = 0$，则$\sigma_X^2 = E[X^2(t)]$；

◆标准偏差σ_X — 是信号交流分量的均方根值；

◆若$m_X = 0$，则σ_X就是信号的均方根值 。

2.6.4 平稳随机过程的自相关函数和功率谱密度

■ 自相关函数的性质

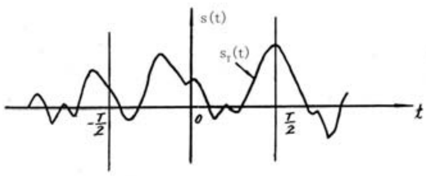
◆ $R(0) = E[X^2(t)] = P_X$

◆ $R(\tau) = R(-\tau)$

◆ $|R(\tau)| \le R(0)$

◆ $R(\infty) = E^2[X(t)]$

◆ $R(0) - R(\infty) = \sigma_X^2$



■ 功率频谱密度的性质

◆复习：确知信号的功率谱密度： $P(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{|S_T(f)|^2}{T}$ 确定的能量谱

◆类似地，平稳随机过程的功率谱密度为：

$$P_X(f) = E[P(f)] = \lim_{T\to\infty} \frac{E|S_T(f)|^2}{T}$$

随机的能量谱

➢平均功率： $P_X = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{E[|S_T(f)|^2]}{T} df$

- 自相关函数和功率谱密度的关系

由 $$\frac{E[|S_T(f)|^2]}{T} = E\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_T(t)e^{-j\omega t}dt\int_{-T/2}^{T/2} s_T{}^*(t')e^{j\omega t'}dt'\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)e^{-j\omega t}dt\int_{-T/2}^{T/2} s(t')e^{j\omega t'}dt'\right]$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} R(t-t')e^{-j\omega(t-t')}dt'dt$$

式中， $R(t-t') = E[s(t)s(t')]$

令 $\tau = t - t'$，$k = t + t'$，则上式可以化简成

$$\frac{E[|S_T(f)|^2]}{T} = \int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

于是有 $$P_X(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{E[|S_T(f)|^2]}{T} = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

维纳-辛钦定理。该定理指出：任意一个均值为常数的广义平稳随机过程的功率谱密度是其自相关函数的傅立叶变换。

上式表明，$P_X(f)$和$R(\tau)$是一对傅里叶变换：

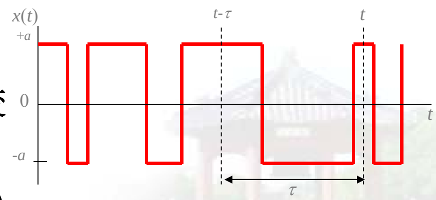
$$P_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f)e^{j\omega\tau}df$$

- $P_X(f)$的性质：
  - $P_X(f) \geq 0$, 并且$P_X(f)$是实函数。
  - $P_X(f) = P_X(-f)$，即$P_X(f)$是偶函数。

【例2.7】设有一个二进制数字信号$x(t)$，如图所示，其振幅为$+a$或$-a$；在时间 T 内其符号改变的次数k服从泊松分布

$$P(k) = \frac{(\mu T)^k e^{-\mu T}}{k!}, \qquad k \geq 0$$



式中，μ是单位时间内振幅的符号改变的平均次数。

试求其相关函数$R(\tau)$和功率谱密度$P(f)$。

解：由图可以看出，乘积$x(t)x(t-\tau)$只有两种可能取值：a^2, 或 $-a^2$。因此，

式 $R(\tau)=E[x(t)x(t-\tau)]$ 可以化简为：

$R(\tau)=a^2\times[a^2$出现的概率$]+(-a^2)\times[(-a^2)$出现的概率$]$

式中，“出现的概率”可以按上述泊松分布 $P(k)$计算。

若在 τ秒内$x(t)$的符号有偶数次变化，则出现 $+a^2$;

若在 τ秒内$x(t)$的符号有奇数次变化，则出现 $-a^2$。

因此，

用 τ代替泊松分布式中的T，得到

$$R(\tau)=E[x(t)x(t-\tau)]=a^2[P(0)+P(2)+P(4)+\cdots]$$
$$-a^2[P(1)+P(3)+P(5)+\cdots]$$

$$R(\tau)=a^2e^{-\mu\tau}[1-\frac{\mu\tau}{1!}+\frac{(\mu\tau)^2}{2!}-\frac{(\mu\tau)^3}{3!}+\cdots]$$
$$=a^2e^{-\mu\tau}e^{-\mu\tau}=a^2e^{-2\mu\tau}$$

由于在泊松分布中 τ是时间间隔，所以它应该是非负数。所以，在上式中当τ取负值时，上式应当改写成

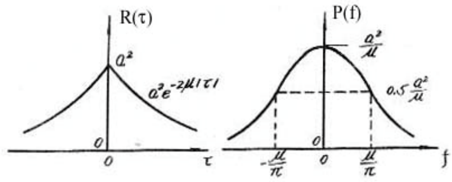
$$R(\tau)=a^2e^{2\mu\tau}$$

将上两式合并，最后得到：$R(\tau)=a^2e^{-2\mu|\tau|}$

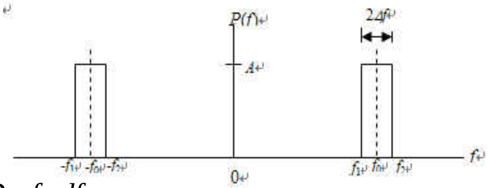
其功率谱密度$P(f)$可以由其自相关函数$R(\tau)$的傅里叶变换求出：

$$P(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}a^2e^{-2\mu|\tau|}e^{-j\omega\tau}d\tau$$
$$=\int_{0}^{\infty}a^2e^{-2\mu\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{0}a^2e^{+2\mu\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau=\frac{\mu a^2}{\mu^2+\frac{\omega^2}{4}}$$

$P(f)$和$R(\tau)$的曲线：



【例2.8】设一随机过程的功率谱密度$P(f)$如图所示。试求其自相关函数$R(\tau)$。



解：

∵功率谱密度$P(f)$已知，

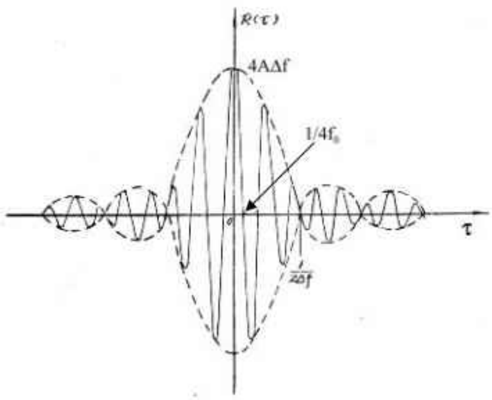
∴ $R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}P(f)e^{j2\pi f\tau}df$

$=2\int_{0}^{\infty}P(f)\cos 2\pi f\tau df=2\int_{f_1}^{f_2}A\cos 2\pi f\tau df$

$=4A\Delta f\dfrac{\sin 2\pi\Delta f\tau}{2\pi\Delta f\tau}\cos 2\pi f_0\tau$

式中， $\Delta f=\dfrac{f_2-f_1}{2}$， $f_0=\dfrac{f_2+f_1}{2}$

◆自相关函数曲线：



【例2.9】试求白噪声的自相关函数和功率谱密度。

解：白噪声是指具有均匀功率谱密度$P_n(f)$的噪声，即

$$P_n(f)=n_0/2$$

式中，n_0为单边功率谱密度（W/Hz）

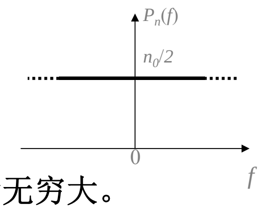
白噪声的自相关函数可以从它的功率谱密度求得:

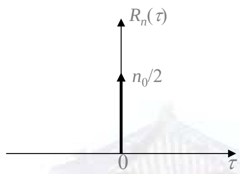
$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}P_X(f)e^{j\omega\tau}df=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n_0}{2}e^{j\omega\tau}df=\frac{n_0}{2}\delta(\tau)$$

由上式看出，白噪声的任何两个相邻时间（即$\tau\neq 0$时）的抽样值都是不相关的。

白噪声的平均功率：

$$R(0)=\frac{n_0}{2}\delta(0)=\infty$$





上式表明，白噪声的平均功率为无穷大。

■ 带限白噪声的功率谱密度和自相关函数

◆带限白噪声：带宽受到限制的白噪声

◆带限白噪声的功率谱密度：

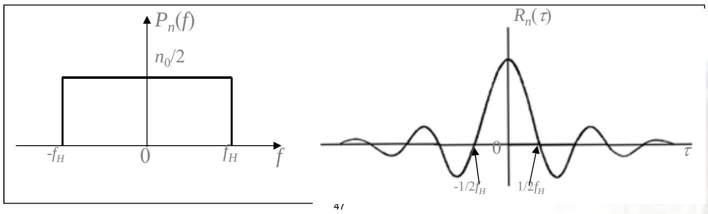
设白噪声的频带限制在$(-f_H, f_H)$之间，则有

$$P_n(f) = \begin{cases} n_0/2, & -f_H < f < f_H \\ 0, & \text{其他处} \end{cases}$$

其自相关函数为：

$$R(\tau) = \int_{-f_H}^{f_H} \frac{n_0}{2} e^{j\omega\tau} df = \frac{n_0}{2} f_H \frac{\sin 2\pi f_H \tau}{2\pi f_H \tau}$$

◆曲线：



2.7 高斯过程（正态随机过程）

■ 定义：

◆一维高斯过程的概率密度：

$$p_X(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

式中，$a = E[X(t)]$ 为均值

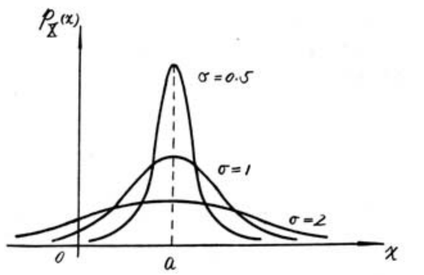
$\sigma^2 = E[X(t) - a]^2$ 为方差

σ 为标准偏差

◆∵高斯过程是平稳过程，故其概率密度$p_X(x, t)$与t无关，

即，$p_X(x, t) = p_X(x)$

◆$p_X(x)$的曲线：



◆高斯过程的严格定义：任意n维(n个时间点)联合概率密度满足：

$$p_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n|B|^{1/2}}\exp\left[\frac{-1}{2|B|}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|B|_{jk}\left(\frac{x_j-a_j}{\sigma_j}\right)\left(\frac{x_k-a_k}{\sigma_k}\right)\right]$$

式中，a_k为x_k的数学期望（统计平均值）；

σ_k为x_k的标准偏差；

$|B|$为归一化协方差矩阵的行列式，即

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & 1 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$|B|_{jk}$为行列式$|B|$中元素b_{jk}的代数余因子；

b_{jk}为归一化协方差函数，即 $b_{jk}=\dfrac{E\left[(x_j-a_j)(x_k-a_k)\right]}{\sigma_j\sigma_k}$

■ n维高斯过程的性质

◆$p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$仅由各个随机变量的数学期望$a_i$、标准偏差$\sigma_i$和归一化协方差$b_{jk}$决定，因此它是一个广义平稳随机过程 。

◆若$x_1, x_2, \ldots, x_n$等两两之间相互独立，则有当$j\neq k$时，$b_{jk}=0$。这时，

$$p_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\exp\left[-\frac{(x_k-a_k)^2}{2\sigma_k^2}\right]$$

$$=p_X(x_1,t_1)\cdot p_X(x_2,t_2)\cdots p_X(x_n,t_n)$$

即，此n维联合概率密度等于各个一维概率密度的乘积。

◆若两个随机变量的互相关函数等于零，则称为两者互不相关；若两个随机变量的二维联合概率密度等于其一维概率密度之积，则称为两者互相独立。互不相关的两个随机变量不一定互相独立。互相独立的两个随机变量则一定互不相关。

◆高斯过程的随机变量之间既互不相关，又互相独立。

正态概率密度的性质

◆$p(x)$对称于直线 $x = a$，即有：

$$p(a+x) = p(a-x)$$

◆$p(x)$在区间$(-\infty, a)$内单调上升，在区间(a, ∞)内单调下降，并且在点a处达到其极大值 $1/(\sqrt{2\pi}\sigma)$

当$x \to -\infty$或 $x \to +\infty$时，$p(x) \to 0$。

◆ $$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{a} p(x)dx = \int_{a}^{\infty} p(x)dx = 1/2$$

◆若$a = 0, \sigma = 1$，则称这种分布为标准化正态分布：

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$

正态分布函数

◆将正态概率密度函数的积分定义为正态分布函数：

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right]dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right]dz = \phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

式中，$\phi(x)$称为概率积分函数：

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]dz$$

此积分不易计算，通常用查表方法计算。

■ 用误差函数表示正态分布

◆误差函数定义：

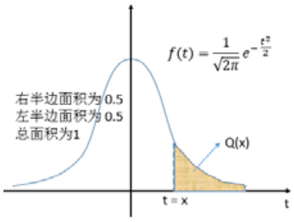
$$erf\ (x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$$ 均值附近区域概率

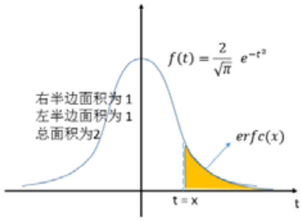
◆补误差函数定义： 离群点区域概率

$$erfc(x) = 1 - erf\,(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-z^2}dz$$

◆ 正态分布表示法：

$$F\,(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}erf\left(\dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right), & x \geq a, \\ 1 - \dfrac{1}{2}erfc\left(\dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right), & x \leq a \end{cases}$$





◆误差函数和补误差函数的值较难计算，通常用查表的方法取得其值。但是其近似值可以方便地计算出来（二维码**2.1**）

2.8 窄带随机过程

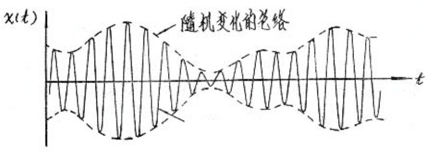
2.8.1 窄带随机过程的基本概念

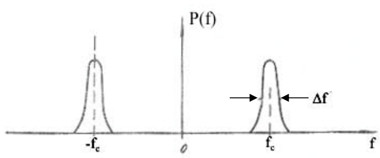
■ 何谓窄带？

设随机过程的频带宽度为Δf，中心频率为f_c。若$\Delta f \ll f_c$，则称此随机过程为窄带随机过程。

■ 窄带随机过程的波形和表示式

◆波形和频谱：





◆表示式

$$X(t)=a_X(t)\cos[\omega_0 t+\varphi_X(t)], \qquad a_X(t)\ge 0$$

式中，$a_X(t)$ — 窄带随机过程的随机包络；

$\varphi_X(t)$ —窄带随机过程的随机相位；

ω_0 — 正弦波的角频率。

上式可以改写为：

$$X(t)=X_c(t)\cos\omega_0 t-X_s(t)\sin\omega_0 t$$

式中，

$X_c(t)=a_X(t)\cos\varphi_X(t)$ — $X(t)$的同相分量

$X_s(t)=a_X(t)\sin\varphi_X(t)$ — $X(t)$的正交分量

2.9 正弦波加窄带高斯过程

- 通信系统中的正弦波加窄带高斯过程：
- 正弦波加噪声的表示式：

$$r(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)+n(t)$$

式中， A — 正弦波的确知振幅；

ω_0 — 正弦波的角频率；

θ — 正弦波的随机相位；

$n(t)$ — 窄带高斯噪声。

- $r(t)$的包络的概率密度：

$$p_r(x)=\frac{x}{\sigma^2}I_0\left(\frac{Ax}{\sigma^2}\right)\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2+A^2\right)\right], \qquad x\ge 0$$

式中， σ^2 — $n(t)$的方差；

$I_0(\bullet)$ — 零阶修正贝塞尔函数。

- $p_r(x)$ 称为广义瑞利分布，或称莱斯(Rice)分布。

当$A=0$时， $p_r(x)$ 变成瑞利概率密度。

2.10 信号通过线性系统

2.10.1 线性系统的基本概念

■ 线性系统的特性

◆有一对输入端和一对输出端

◆无源

◆无记忆

◆非时变

◆有因果关系：当前输出只决定于当前和过去的输入

◆有线性关系：满足叠加原理

若当输入为$x_i(t)$时，输出为$y_i(t)$，则当输入为

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$

时，输出为：

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

式中，a_1和a_2均为任意常数。

■ 线性系统的示意图

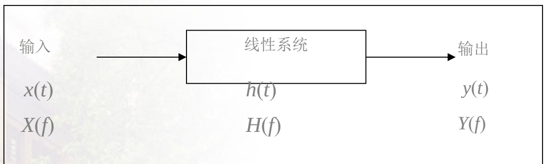
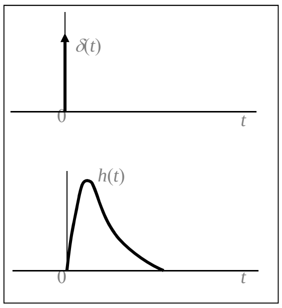


图2.10.1 线性系统示意图



2.10.2 确知信号通过线性系统

■ 时域分析法

设$h(t)$ — 系统的冲激响应

$x(t)$ — 输入信号波形

$y(t)$ —输出信号波形

则有：

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

（证明见二维码2.3）

对于物理可实现系统：

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

■ 频域分析法

◆设：输入为能量信号，令

$x(t)$ —输入能量信号

$H(f)$ — $h(t)$的傅里叶变换

$X(f)$ — $x(t)$的傅里叶变换

$y(t)$ — 输出信号

则此系统的输出信号$y(t)$的频谱密度$Y(f)$为：

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

（证明见二维码2.4）

➢ 由$Y(f)$的逆傅里叶变换可以求出$y(t)$：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j\omega t} df$$

◆设：输入$x(t)$为周期性功率信号，则有

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

式中，

$\omega_0 = 2\pi / T_0$

T_0 — 信号的周期

$f_0 = \omega_0 / 2\pi$是信号的基频

$$C(jn\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

输出为：

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(jn\omega_0) H(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

◆设：输入$x(t)$为非周期性功率信号，则当作随机信号处理

◆【例2.10】若有一个RC低通滤波器，如图2.10.4所示。试求出其冲激响应，以及当有按指数衰减的输入时其输出信号表示式。

解:设 $x(t)$ 一输入能量信号

$y(t)$ 一 输出能量信号

$X(f)$ 一 $x(t)$的频谱密度

$Y(f)$ 一 $y(t)$的频谱密度

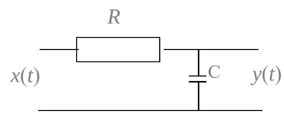


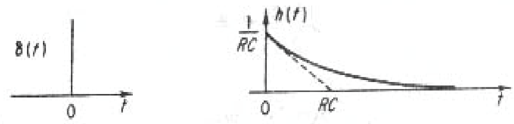
图2.10.4 RC滤波器

则此电路的传输函数为：

$$H(f)=\frac{1/j\omega C}{R+(1/j\omega C)}=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

此滤波器的冲激响应$h(t)$：

$$h(t)=\int_{-\omega}^{\infty}H(f)e^{j\omega t}df=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+j\omega RC}e^{j\omega t}df=\frac{1}{RC}e^{-t/RC}$$



滤波器输出和输入之间的关系：

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-(t-\tau)/RC}d\tau$$

假设输入$x(t)$等于：
$$x(t)=\begin{cases}e^{-at}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

则此滤波器的输出为：

$$y(t)=\frac{1}{RC}\int_{0}^{t}e^{-a\tau}e^{-(t-\tau)/RC}d\tau=\frac{e^{-t/RC}}{RC}\cdot\left.\frac{e^{\tau(1/RC-a)}}{1/RC-a}\right|_{0}^{t}$$

$$=\frac{e^{-at}-e^{-t/RC}}{1-aRC}$$

■ 无失真传输条件

设：系统是无失真的线性传输系统，输入为一能量信号***x*(*t*)**，

则其无失真输出信号***y*(*t*)**为：

$$y(t) = kx(t - t_d)$$

式中，***k*** — 衰减常数，

t_d — 延迟时间。

◆求系统的传输函数：

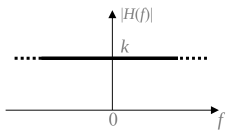
对上式作傅里叶变换：

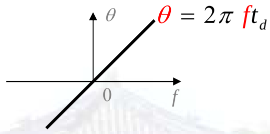
$$Y(f) = kX(f)e^{-j\omega t_d}$$

$$Y(f) = X(f)\cdot H(f) = kX(f)e^{-j\omega t_d}$$

$$\therefore \quad H(f) = ke^{-j\omega t_d} = ke^{-j\theta}$$

式中， $\theta = 2\pi f t_d$





◆无失真传输条件：

➢ 振幅特性与频率无关；

➢ 相位特性是通过原点的直线。

（实际中，***θ***难测量，常用测量t_d代替。）

2.10.3 随机信号通过线性系统

■ 物理可实现线性系统，若输入为确知信号，则有

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

若输入为平稳随机信号***X*(*t*)**，则输出***Y*(*t*)**为

$$Y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)X(t-\tau)d\tau$$

■ 输出***Y*(*t*)**的数学期望***E*[*Y*(*t*)]**

$$E[Y(t)] = E\left[\int_0^{\infty} h(\tau)X(t-\tau)d\tau\right] = \int_0^{\infty} h(\tau)E[X(t-\tau)]d\tau$$

由于已假设输入是平稳随机过程，故

$E[X(t\text{-}\tau)] = E[X(t)] = k$，$k$ = 常数。 $\qquad E[Y(t)] = k\int_0^{\infty} h(\tau)d\tau$

$$\because \quad H(0) = H(f)|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt\,|_{f=0} = \int_0^{\infty} h(t)dt$$

∴输出的数学期望： $E\left[Y(t)\right] = kH(0)$

■ 输出$Y(t)$的自相关函数

由自相关函数定义，有

$$R_Y(t_1,t_1+\tau)=E[Y(t_1)Y(t_1+\tau)]$$
$$=E\left[\int_0^\infty h(u)X(t_1-u)du\int_0^\infty h(v)X(t_1+\tau-v)dv\right]$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty h(u)h(v)E[X(t_1-u)X(t_1+\tau-v)]dudv$$

由$X(t)$的平稳性知，上式中的数学期望与t_1无关，故有

$$E[X(t_1-u)X(t_1+\tau-v)]=R_X(\tau+u-v)$$

$\therefore$
$$R_Y(t_1,t_1+\tau)=\int_0^\infty\int_0^\infty h(u)h(v)R_X(\tau+u-v)dudv=R_Y(\tau)$$

■ 由于$Y(t)$的数学期望和自相关函数都和t_1无关，故$Y(t)$是广义平稳随机过程。

■ 输出$Y(t)$的功率谱密度$P_Y(f)$：

由于功率谱密度是自相关函数的傅里叶变换，故有

$$P_Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_Y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_0^\infty du\int_0^\infty h(u)h(v)R_X(\tau+u-v)e^{-j\omega\tau}dv$$

令$\tau'=\tau+u-v$代入上式，得到

$$P_Y(f)=\int_0^\infty h(u)e^{j\omega u}du\int_0^\infty h(v)e^{-j\omega v}dv\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau')e^{-j\omega\tau'}d\tau'$$
$$=H^*(f)H(f)P_X(f)=|H(f)|^2P_X(f)$$

$\therefore$输出信号的功率谱密度等于输入信号的功率谱密度乘以$|H(f)|^2$。

【例2.11】已知一个白噪声的双边功率谱密度为$n_0/2$。试求它通过一个理想低通滤波器后的功率谱密度、自相关函数和噪声功率。

解：因为理想低通滤波器的传输特性可以表示成：$H(f)=\begin{cases} ke^{-j\omega t_d}, & |f|\le f_H \\ 0, & 其它处 \end{cases}$

所以有 $|H(f)|^2=k^2,\qquad |f|\le f_H$

输出信号的功率谱密度为 $P_Y(f)=|H(f)|^2 P_X(f)=k^2\dfrac{n_0}{2},\qquad |f|\le f_H$

输出信号的自相关函数

$$R_Y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}P_Y(f)e^{j\omega\tau}df=\left(k^2n_0/4\pi\right)\int_{-f_H}^{f_H}e^{j\omega\tau}df=k^2n_0f_H(\sin 2\pi f_H\tau/2\pi f_H\tau)$$

输出噪声功率：$\boldsymbol{P_Y = R_Y(0) = k^2 n_0 f_H}$

- 输出$Y(t)$的概率分布：

设输入随机过程为高斯过程，因为

$$Y(t)=\int_0^{\infty}h(\tau)X(t-\tau)d\tau$$

可以表示为和式的极限：

$$Y(t)=\lim_{\tau_k\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}X(t-\tau_k)h(\tau_k)\Delta\tau_k$$

上式右端和式中每一项在任一时刻上都是一个正态随机变量，无穷多个正态随机变量之和，也是正态随机变量。

但是，其数字特征已经不同于输入随机过程的。

- 结论：高斯随机过程通过线性系统后输出仍为高斯随机过程。

谢 谢

Q & A

Email: xieyi5@mail.sysu.edu.cn
https://cse.sysu.edu.cn/content/2462