

# 邏輯語言的形式化 命題邏輯的建構

哲學研究所博士班 朱弘道

1



# 這份 PPT 的目的

- 這份 PPT 希望帮大家澄清幾件事：
  1. 為何需要形式語言？什麼是形式語言？
  2. 命題邏輯（語句邏輯）的基本符號與規則
    - 命題、連接詞、輔助符號及三者的作用
    - 原子（簡單） / 複合語句、成分語句
    - 命題邏輯的語法及完構語句

# 為什麼需要形式語言？

- 本學期學習邏輯的目的：判斷論證**有效** / **無效**
- 判斷論證**有效** / **無效**需要知道命題的**真** / **假**
  - 有效論證：不可能前提皆**真**而結論為**假**
- 但，日常語言會有點難判斷真 / 假
  - 情感語言、知識理論、未來事件、空論域……
- 因此，需要**形式語言**避免這些問題

# 什麼是形式語言

- 用**符號**取代論證、語句中的某些部分
  - 除去語句中的雜訊及模糊處
  - 更容易判斷論證有效 / 無效及語句的真假值
- **形式語言**會是本學期的學習重點

# 本學期會教的形式語言

- **語句邏輯**（或稱「命題邏輯」）：期中考**前**
  - 以**語句**為**符號化**的單位，例如：
    - 將**今天是雨天**的語句符號化為 **R**
    - 將**今天是晴天**的語句符號化為 **S**
- **述詞邏輯**：期中考**後**（所以暫時不用理它）

# 語句邏輯會使用哪些符號？

• 語句邏輯的符號包含三種：

1. 語句： $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、……等大寫英文字母

2. 連接詞： $\sim$ 、 $\cdot$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 、 $\leftrightarrow$

3. 輔助符號： $( )$ 、 $[ ]$ 、 $\{ \}$

# 原子語句與複合語句

- 語句可分為**原子（簡單）** / **複合**語句
- **大寫英文字母**通常表達**一個語句的肯定狀態**
  - **R**：今天是雨天；**S**：今天是晴天
  - 以形式邏輯的角度來看，這種**僅含有一個單一字母**的語句會是**原子語句**（後有詳細定義）

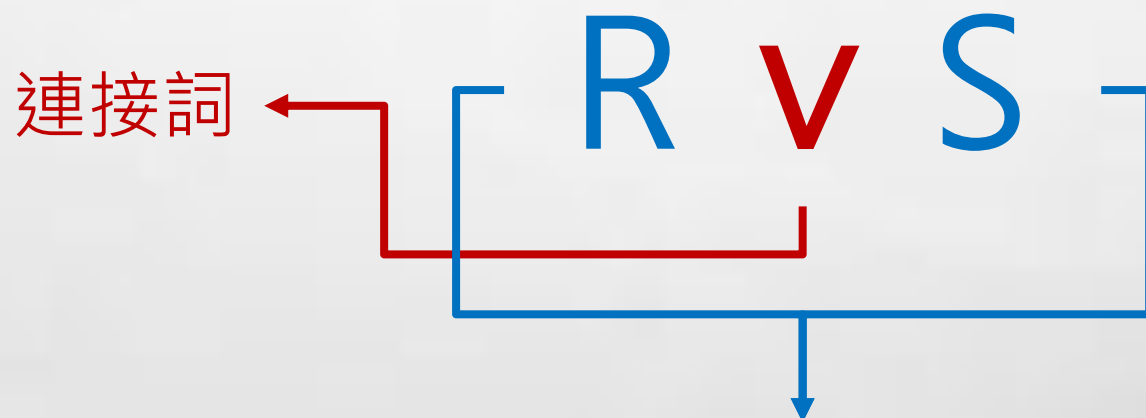
# 原子語句與複合語句

- 但不是所有的語句都是原子語句，因此需要加入連接詞，以表達複雜一點的**複合語句**
  - **R**：今天是雨天； **S**：今天是晴天
  - **R** **∨** **S**：今天是雨天**或**今天是晴天
  - 簡言之，**原子語句 + 連接詞 = 複合語句**



# 複合語句的結構

這是一個普通而相較單純的複合語句

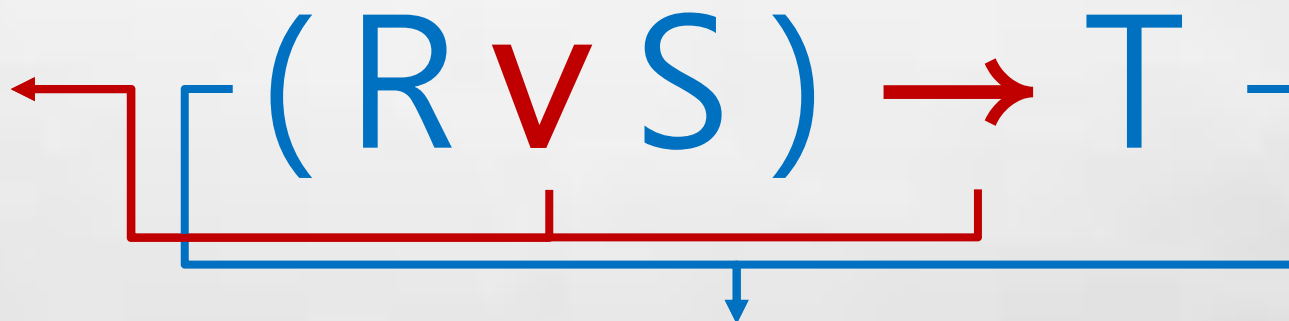


$R$  與  $S$  為  $R \vee S$  的成分 ( component ) 語句

# 複合語句的結構

這是一個更複雜一點的複合語句

連接詞



$(R \vee S)$  與  $T$  為  $(R \vee S) \rightarrow T$  的成分語句  
且  $R$  與  $S$  為  $R \vee S$  的成分語句  
故  $R$  與  $S$  亦為  $(R \vee S) \rightarrow T$  的成分語句

# 複合語句的結構



- 原子語句的定義是，該語句的任一部分不會是語句
- R 是 ~ R 的一部分，且 R 是語句，故 ~ R 是複合語句

# 連接詞的作用

- 結合語句，表達更複雜的意義
  - 只有如此嗎？
- 回想一下，為什麼要建構形式語言？
  - 為了有效判斷語句的**真 / 假**
    - 連接詞應該要可以輔助**判斷複合語句的真假值**

# 連接詞的作用

## 數學運算符號 $+$ $-$ $\times$ $\div$

- 知道算式中的**各項數值**，  
就可以知道**計算結果**
  - EX.  $2 + 2$

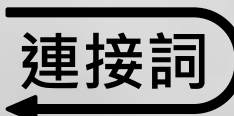
算式的各項數值：2  
算式的計算結果：4



## 邏輯連接詞

- 知道複合語句中**所有原子語句的真假值**，就可以知道**此複合語句的真假值**

原子語句的真假值  
複合語句的真假值



# 連接詞的作用

- 簡言之，連接詞的作用為：
  - 藉由投入**原子語句真假值**，產出**複合語句真假值**
- 理解連接詞的作用，就是看這些連結詞**如何**藉由原子語句的真假值產生複合語句的真假值
  - 以下將藉由**真值表**進行說明，關於真值表請參考另兩份檔案：**真值表的基本操作**、**連接詞真值表**

# 連接詞的作用：「 $\sim$ 」

- 如前述，連接詞有五項：  
 $\sim$ 、 $\cdot$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 、 $\leftrightarrow$
- 「 $\sim$ 」寫在其成分語句的左方，其結果見右欄：
- 當  $\Phi$  為 **T**， $\sim\Phi$  為 **F**，  
當  $\Phi$  為 **F**， $\sim\Phi$  為 **T**

$\Phi$	$\sim\Phi$
T	F
F	T

$\Phi$  可以帶入任何語句（含複合語句）

# 連接詞的作用：「 $\cdot$ 」

- 「 $\cdot$ 」寫在其兩項成分語句的中間，其作用結果見右欄：
- 僅當  $\Phi$  與  $\Psi$  皆為  $T$ ， $\Phi \cdot \Psi$  方為  $T$ ，否則皆為  $F$

$\Phi$	$\Psi$	$\Phi \cdot \Psi$
$T$	$T$	$T$
$T$	$F$	$F$
$F$	$T$	$F$
$F$	$F$	$F$

- $\Phi$  和  $\Psi$  可以帶入任何語句（包含複合語句）



# 連接詞的作用：「 $\vee$ 」

- 「 $\vee$ 」寫在其兩項成分語句的中間，其作用結果見右欄：
- 僅當  $\Phi$  與  $\Psi$  皆為  $F$ ， $\Phi \vee \Psi$  方為  $F$ ，否則皆為  $T$

$\Phi$	$\Psi$	$\Phi \vee \Psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- $\Phi$  和  $\Psi$  可以帶入任何語句（包含複合語句）

# 連接詞的作用：「 $\rightarrow$ 」

- 「 $\rightarrow$ 」寫在其兩項成分語句的中間，其作用結果見右欄：
- 僅當  $\Phi$  為 **T**，且  $\Psi$  為 **F**， $\Phi \rightarrow \Psi$  方為 **F**，否則皆為 **T**

$\Phi$	$\Psi$	$\Phi \rightarrow \Psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- $\Phi$  和  $\Psi$  可以帶入任何語句（包含複合語句）

# 連接詞的作用：「 $\leftrightarrow$ 」

- 「 $\leftrightarrow$ 」寫在其兩項成分語句的中間，其作用結果見右欄：
- 僅當  $\Phi$  與  $\Psi$  真假值相同， $\Phi \leftrightarrow \Psi$  方為 **T**，否則皆為 **F**

$\Phi$	$\Psi$	$\Phi \leftrightarrow \Psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- $\Phi$  和  $\Psi$  可以帶入任何語句（包含複合語句）

# 複合語句真假值的判斷

- 據此，如果知道  $R$  為  $T$ ， $S$  為  $F$ ：
  - 則可以知道  $R \cdot S$  為  $F$ ， $R \vee S$  為  $T$
  - $R$ 、 $S$  的真假值藉「 $\cdot$ 」與「 $\vee$ 」的作用產生真假值
- 但要運算出結果，還需要其他條件：
  - 語句排列合乎語法規則
  - 語句排列可判定運算先後順序

# 邏輯語法規則

- 計算數學題目時：
  - 可以看得懂  $2 \times 3 + 4$ ，並且知道答案為 10
  - 但是看不懂  $42 + \times 3$ ，無法進行運算
- 邏輯語句也需要遵守語法規則，例如可以判定  $R \cdot S$  的真假值，但無法判定  $R S \cdot$  的真假值

# 邏輯語法規則

- 基本的語法在**連接詞的作用**已經有簡單說明：
  - 「 $\sim$ 」後需接語句
  - 「 $\cdot$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 、 $\leftrightarrow$ 」兩端都需接語句
- 但知道以上幾點，仍有不足，例如：
  - 當  $P$  為  $F$ ， $Q$  為  $T$  時， $\sim P \vee Q$  的真假值為何？

# 邏輯語法規則

- 當  $P$  為  $F$ ， $Q$  為  $T$  時， $\sim P \vee Q$  的真假值？
  - 如果先計算  $\sim P$  的真假值，再使用  $\sim P$  與  $Q$  的真假值計算  $\sim P \vee Q$  的真假值，答案為  $T$
  - 如果先計算  $P \vee Q$ ，接著再使用  $P \vee Q$  的真假值計算  $\sim P \vee Q$  的真假值，答案為  $F$
- 答案為  $T$ ，因「 $\sim$ 」強度較強，要先進行計算

# 強度

- 數學運算中， $2+3\times 4$  的答案為 14，因為「 $\times$ 」的強度較強，因此需要先計算  $3\times 4$
- $\sim P \vee Q$  中，「 $\sim$ 」的強度大於「 $\vee$ 」
  - 強度排序： $\sim > \cdot = \vee = \rightarrow = \leftrightarrow$
  - 因此，要先計算含有「 $\sim$ 」的  $\sim P$
- 如果有兩個強度相同的連接詞呢？



# 如果強度相同

- $P$  為  $F$ ， $Q$  為  $T$ ， $P \rightarrow Q \rightarrow P$  的真假值為何？
  - 先計算  $P \rightarrow Q$ ，則真假值為  $F$
  - 先計算  $Q \rightarrow P$ ，則真假值為  $T$
- 哪個正確？
  - 都不正確，因為兩個「 $\rightarrow$ 」的強度相同，此題無法計算，所以需要加上括號

# 括號的作用

- 括號的作用是輔助標示計算的先後順序
  - $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$  表示先計算  $P \rightarrow Q$
  - $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$  表示先計算  $Q \rightarrow P$
- 只要語句中包含**不確定計算順序的狀況**，就需要使用括號，**即使實際上不會對真假值有影響**
  - $(P \cdot Q) \cdot R$  與  $P \cdot (Q \cdot R)$  仍需要加括號

# 括號的作用

- 括號的強度高於「 $\sim$ 」
- 當  $P$  為  $F$ ， $Q$  為  $T$  時， $\sim P \vee Q$  的真假值為  $T$ ，  
但  $\sim (P \vee Q)$  的真假值則為  $F$ 
  - 因為  $P \vee Q$  的真假值要先計算，而後再加上「 $\sim$ 」，  
計算  $\sim (P \vee Q)$  的真假值

# 括號的注意事項

- 括號前後連接對象
  - 會連接：原子語句、 $\sim$  以及同方向的其他括號
  - 不會連接： $\cdot$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 、 $\leftrightarrow$
- 語句中上括號數量 = 下括號數量
- 括號間可以彼此包含，但不可彼此交錯
  - $[ ( ) ]$  可以，但  $[ ( ] )$  不可以

# 完構語句

- 以語句邏輯而言，符合 6 – 28 頁的規則，且能夠確定計算真假值順序的語句就稱為**完構語句**
- 本學期進行考試、作業時，**所有的語句皆要寫成完構語句**，否則扣分

# 主要連接詞

- 完構語句可以確定其計算真假值的順序
- 而在一個完構語句的所有連接詞中，**最後一個被計算到**，藉以確認整個語句真假值的連接詞，被稱為這個語句的**主要連接詞**
- 真值表中，一個複合語句的真假值即寫在該語句的**主要連接詞正下方**

## 以下語句的主要連接詞

- $( P \rightarrow Q ) \rightarrow P$
- $P \rightarrow ( Q \rightarrow P )$
- $\sim P \vee Q$
- $\sim ( P \vee Q )$
- $\{ [ P \vee ( Q \leftrightarrow \sim R ) ] \rightarrow S \} \cdot \sim ( T \leftrightarrow U )$
- $\sim \sim \sim \sim \sim P$
- $\sim [ P \vee ( Q \leftrightarrow \sim S ) ]$
- $( A \cdot B ) \leftrightarrow ( C \rightarrow D )$

# 結語

- 本份檔案為作者嘔心瀝血之作，請盡量參考閱讀，但請勿外流或私自發布
- 有任何問題或錯誤，請來信  
[D05124003@NTU.EDU.TW](mailto:D05124003@NTU.EDU.TW) 反應