Numerical Analysis　HW #4

系級：大氣一　姓名：甘祐銓　學號：B11209013
系級：大氣一　姓名：陳冠豪　學號：B11209022

0. symbol interpretation

以下的矩陣表示皆為

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

其中 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 為每個聯立方程組的係數

$\mathbf{X}_{n\times 1}$ 為聯立方程組的解

$\mathbf{B}_{n\times 1}$ 每個聯立方程組的常數項

1. Backward substitution

(a) 自訂函式 Back.py

```python
import numpy as np

def BackwardSub(n, A, AX, X):
    for i in range(n-1,-1,-1):
        if (i==n-1):
            X[i,0] = AX[i,0]/A[i,i]
        else:
            a0 = 0
            for j in range(n-1,i,-1):
                a1 = A[i,j]*X[j,0]
                a0 = a0 + a1
            X[i,0] = (AX[i,0]-a0)/A[i,i]

    return(X)
```

(b) 利用自訂函式 (Back.py) 算出

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(c) 利用自訂函式 (Back.py) 算出

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2. **Gauss elimination method and backward substitution**

(a) 自訂函式 Gauss.py

```python
import For
import Back

def Gauss_elim(n, A, AX, X):
    A, AX = For.ForwardSub(n, A, AX)
    X = Back.BackwardSub(n, A, AX, X)

    return(X)
```

自訂函式 For.py (尚未考慮主對角線元素為 0 的程式)

```python
import numpy as np

def ForwardSub(n, A, AX):
    for j in range(n):
        for i in range(j+1, n):
            ratio = A[i,j] / A[j,j]
            A[i,:] = A[i,:] - ratio * A[j,:]
            AX[i,0] = AX[i,0] - ratio * AX[j,0]

    return(A,AX)
```

自訂函式 Back.py 如第 1 題的 (a) 小題所示

(b) 將方程組改寫成矩陣運算

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=17 \\ 2x_1-4x_2+x_3-5x_4=8 \\ 2x_1+x_2-2x_3-4x_4=10 \\ -x_1+2x_2+x_3-2x_4=17 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 8 \\ 10 \\ 17 \end{bmatrix}$$

寫成增廣矩陣後，利用自訂函式 (For.py) 進行矩陣列運算將其寫成上三角矩陣

增廣矩陣 $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 17 \\ 2 & -4 & 1 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -2 & -4 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 17 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 17 \\ 0 & -8 & -3 & -7 & -26 \\ 0 & 0 & -4.875 & -3.375 & -14.25 \\ 0 & 0 & 0 & -5.53846154 & 16.61538462 \end{array}\right]$$

再利用自訂函式 (Back.py) 算出其解

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(c) 將方程組改寫成矩陣運算

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=23 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-2x_4+x_5=37 \\ 3x_1-4x_2+x_3-x_4+3x_5=30 \\ 4x_1+x_2+2x_3+2x_4+3x_5=23 \\ 5x_1+5x_2-3x_3+x_4+4x_5=3 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 37 \\ 30 \\ 23 \\ 3 \end{bmatrix}$$

寫成增廣矩陣後，利用自訂函式 (`For.py`) 進行矩陣列運算將其寫成上三角矩陣

增廣矩陣 $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 23 \\ 2 & -3 & 4 & -2 & 1 & 37 \\ 3 & -4 & 1 & -1 & 3 & 30 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 3 & 23 \\ 5 & 5 & -3 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 23 \\ 0 & -7 & -2 & -10 & 9 & 63 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

再利用自訂函式 (`Back.py`) 算出其解

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3. **Modify your function Gauss_elim(A,AX) to solve the "0" in below question**

自訂函式 For.py (考慮主對角線元素為 0 的程式)

```
1  import numpy as np
2
3  def ForwardSub(n, A, AX):
4      for j in range(n):
5          if A[j,j] == 0:
6              for k in range(j+1, n):
7                  cA = np.empty((1,n))
8                  if A[k,j] != 0:
9                      cA[0,:] = A[j,:]
10                     A[j,:] = A[k,:]
11                     A[k,:] = cA[:]
12                     cAX = AX[j,0]
13                     AX[j,0] = AX[k,0]
14                     AX[k,0] = cAX
15
16         for i in range(j+1, n):
17             ratio = A[i,j] / A[j,j]
18             A[i,:] = A[i,:] - ratio * A[j,:]
19             AX[i,0] = AX[i,0] - ratio * AX[j,0]
20
21     return(A,AX)
```

因為在將增廣矩陣經由矩陣列運算形成上三角矩陣的過程當中，會利用 $\frac{a_{ij}}{a_{jj}}$ 來進行運算 (如上面程式碼中的第 17 行)

此時主對角線的元素不能為 0，故需要與其他列對調才能繼續接下來的運算

(a) 情況一：在尚未進行列運算時，主對角線的元素就為 0

以下列矩陣為舉例，我們發現在尚未進行列運算前，a_{11} 的值為 0，此時我們需要向下找到第一個不為 0 的元素 (在舉例中即為 a_{31})，將兩列進行交換 (在舉例中即為第一列與第三列交換)，即可繼續進行列運算。

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & b_4 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & b_5 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_3]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & b_3 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & b_2 \\ 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & b_1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & b_4 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & b_5 \end{array}\right]$$

作業 3.1

將方程組改寫成矩陣運算

$$\begin{cases} 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 46 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 16 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 12 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 \\ 16 \\ 12 \end{bmatrix}$$

寫成增廣矩陣後，將主對角線元素為 0 的那列與其他列對調，再利用自訂函式 (For.py) 進行矩陣列運算將其寫成上三角矩陣

增廣矩陣 $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 46 \\ 4 & -3 & -2 & 16 \\ 2 & 4 & -3 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -2 & 16 \\ 0 & 2 & 3 & 46 \\ 2 & 4 & -3 & 12 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 46 \\ 0 & 0 & 24.5 & 245 \end{array}\right]$$

再利用自訂函式 (`Back.py`) 算出其解

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(b) 情況二：在進行列運算的過程中，主對角線的元素為 0

以下列矩陣為舉例，我們發現第二列在進行列運算時，a_{22} 的值為 0，此時我們需向下找到第一個不為 0 的元素 (在舉例中即為 a_{32})，將兩列進行交換 (在舉例中即為第二列與第三列交換)，即可繼續進行列運算。

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{12} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & b_1 \\ 0 & 0 & a'_{23} & a'_{24} & a'_{25} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & a'_{35} & b'_3 \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} & a'_{45} & b'_4 \\ 0 & a'_{52} & a'_{53} & a'_{54} & a'_{55} & b'_5 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{12} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & b_1 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & a'_{35} & b'_3 \\ 0 & 0 & a'_{23} & a'_{24} & a'_{25} & b'_2 \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} & a'_{45} & b'_4 \\ 0 & a'_{52} & a'_{53} & a'_{54} & a'_{55} & b'_5 \end{array}\right]$$

作業 3.2

將方程組改寫成矩陣運算

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 23 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 = 30 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 30 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 23 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 30 \\ 30 \\ 23 \\ 3 \end{bmatrix}$$

寫成增廣矩陣後，將主對角線元素為 0 的那列與其他列對調，再利用自訂函式 (`For.py`) 進行矩陣列運算將其寫成上三角矩陣

增廣矩陣 $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 23 \\ 2 & 4 & 4 & -2 & 1 & 30 \\ 3 & -4 & 1 & -1 & 3 & 30 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 3 & 23 \\ 5 & 5 & -3 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R'_2 = R_2 - 2R_1]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 23 \\ 0 & 0 & -2 & -10 & -9 & -16 \\ 3 & -4 & 1 & -1 & 3 & 30 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 3 & 23 \\ 5 & 5 & -3 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 23 \\ 0 & 0 & -2 & -10 & -9 & -16 \\ 3 & -4 & 1 & -1 & 3 & 30 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 3 & 23 \\ 5 & 5 & -3 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 23 \\ 3 & -4 & 1 & -1 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & -2 & -10 & -9 & -16 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 3 & 23 \\ 5 & 5 & -3 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 23 \\
3 & -4 & 1 & -1 & 3 & 30 \\
0 & 0 & -2 & -10 & -9 & -16 \\
4 & 1 & 2 & 2 & 3 & 23 \\
5 & 5 & -3 & 1 & 4 & 3
\end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 23 \\
0 & -5 & -18 & -19 & -21 & -112 \\
0 & 0 & -2 & -10 & -9 & -16 \\
0 & 0 & 0 & -115 & -96 & -39 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3.07478261 & -12.29913043
\end{array}\right]
$$

再利用自訂函式 (`Back.py`) 算出其解

$$
\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}
$$