LISTA DE EXERCÍCIOS 3

1. Qualquer ponto no intervalo [0, 1) pode ser representado por meio de sua expansão decimal $0, x_1\, x_2 \ldots$... Suponha que se escolhe, aleatoriamente, um ponto do intervalo [0, 1). Seja X o primeiro dígito da expansão decimal que representa o ponto. Determine a função de probabilidade de X.

2. a) Se $X \sim B(n, p)$, determine a função de probabilidade de $Y = n - X$.
   b) Se $X \sim Geométrica(\lambda)$, determine a função de probabilidade de $Y = X - 1$.
   c) Se X tem uma função de probabilidade Binomial Negativa de parâmetros r e p, (sendo r inteiro e $0 < p < 1$), determine a função de probabilidade de $Y = X - r$.

3. Suponha que uma caixa contenha 6 bolas vermelhas e 4 pretas. Seleciona-se uma amostra aleatória de tamanho n. Seja X o número de bolas vermelhas na amostra. Determine a função de probabilidade de X para a amostragem:
   a) sem reposição.
   b) com reposição.

4. Seja N um número inteiro positivo e seja

$$p(x) = \begin{cases} c2^x, & x \in \{1, 2, 3, \ldots, N\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

   Determine o valor de c para o qual p é uma função de probabilidade.

5. Suponha que X tem uma distribuição geométrica com p = 0,8.
   Determine as probabilidades dos seguintes eventos:
   a) $P(X > 3)$
   b) $P(4 \leq X \leq 7 \text{ ou } X > 9)$;
   c) $P(3 \leq X \leq 5 \text{ ou } 7 \leq X \leq 10)$;

6. Suponha que X tem uma distribuição uniforme sobre 0, 1, ... , 99. Determine:
   a) $P(X \geq 25)$;
   b) $P(2{,}6 < X < 12{,}2)$;
   c) $P(8 < X \leq 10 \text{ ou } 30 < X \leq 32)$
   d) $P(25 \leq X \leq 30)$

7. Suponha que o número de chegadas de clientes em um posto de informações turísticas seja uma variável aleatória com distribuição *Poisson* com taxa de 2 pessoas por hora ($X \sim Poisson(2)$). Para uma hora qualquer, determine a probabilidade de ocorrer:
   a) pelo menos uma chegada;
   b) mais de duas chegadas, dado que chegaram menos de 5 pessoas.

8. Suponha que uma caixa contém 12 bolas numeradas de 1 a 12. Faz-se duas repetições independentes do experimento de selecionar aleatoriamente uma bola da caixa. Seja X o maior entre os dois números observados. Determine a função de probabilidade de X.

9. Considere a situação do Exercício 8 em que a seleção é feita sem reposição.
   a) Determine a função de probabilidade de X;
   b) Determine a função de distribuição de X: $F_X(x) = P(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$.

10. Suponha que uma caixa contenha r bolas numeradas de 1 a r. Seleciona-se sem reposição uma amostra aleatória de tamanho n. Seja Y o maior número observado na amostra e Z o menor. Determine:
    a) $P(Y \leq y),\ \forall y \in \mathbb{R}$;
    b) $P(Z \geq z),\ \forall z \in \mathbb{R}$.

11. Considere X uma variável aleatória assumindo valores em $\{0, \pm 1, \pm 2\}$.
    Suponha que $P(X = -2) = P(X = -1)$ e $P(X = 1) = P(X = 2)$ com a informação que $P(X > 0) = P(X < 0) = P(X = 0)$. Encontre a função de probabilidade e a função de distribuição de X.

12. Seja X uma v.a. com função de distribuição dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3}, & 1 \leq x < 2. \\ \frac{11}{12} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

    Determine:
    a) $P(X < 3)$; b) $P(X = 1)$; c) $P(X = 1)$; d) $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$; e) $P(2 < X \leq 4)$; f) $P(2 \leq X \leq 4)$.

Exercício	**Resposta**
1	$p(k) = \begin{cases} 1/10\,, & k = 0, 1, 2, \ldots, 9 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
2	a) $Y \sim B(n, 1-p)$ b) $p_Y(k) = \begin{cases} p(1-p)^k, & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ c) $p_Y(k) = \begin{cases} \binom{-r}{k}(-1)^k p^r (1-p)^k, & k = 0, 1, \ldots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
3	a) $p_Y(k) = \begin{cases} \frac{\binom{6}{k}\binom{4}{n-k}}{\binom{10}{n}}, & k = 0, 1, 2, \ldots 6 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ b) $X \sim B(n, 3/5)$
4	$\frac{1}{2(2^N - 1)}$
5	a) $(0{,}2)^3$; b) $(0{,}2)^3 - (0{,}2)^7 + (0{,}2)^9$; c) $(0{,}2)^2 - (0{,}2)^5 + (0{,}2)^6 - (0{,}2)^{10}$

Exercício	Resposta
6	a) 3/4; b) 1/10; c) 1/25; d) 3/50
7	a) $1 - e^{-2}$; b) $\frac{\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}}{1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}} = \frac{2}{7}$
8	$P(X = k) = \begin{cases} \frac{2k-1}{144}, & k = 1, 2, \dots 12 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
9	a) $P(X = k) = \begin{cases} \frac{k-1}{\binom{12}{2}}, & k = 2, 3, \dots 12 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ b) $P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{\binom{[x]}{2}}{\binom{12}{2}}, & 2 \leq x < 12 \\ 1, & x \geq 12 \end{cases}$
10	a) $P(Y \leq y) = \begin{cases} 0, & y < n \\ \frac{\binom{[y]}{n}}{\binom{r}{n}}, & n \leq y < r \\ 1, & y \geq r \end{cases}$ b) $P(Z \geq z) = \begin{cases} 1, & z < 1 \\ \frac{\binom{r+1-z}{n}}{\binom{r}{n}}, & z = 1,2, \dots, r-n+1 \\ \frac{\binom{r-[z]}{n}}{\binom{r}{n}}, & i < z < i+1,\ i = 1,2, \dots, r-n \\ 0, & z > r-n+1 \end{cases}$
11	$p(k) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & k = \pm 1, \pm 2 \\ \frac{1}{3}, & k = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ e $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{1}{6}, & -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{3}, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{2}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{6}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$
12	a) 11/12; b) 1/6; c) 3/4; d) 1/12; e) 1/3