Lista 2

Allan

02/03/2021

Questão 1

(Com reposisao, E importa a ordem)

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{\dots, -\}, i = 1, \dots, n\}$$

a)

$$|A| = \underbrace{2.2.2\dots 2}_n = 2^n$$

b)

$$|B| = 2$$
 ou 2^2 ou $2^3 \dots 2^n$

Quantas configurações podem ser de n ou menos simbolos:

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} 2^{j} = 2 + 2^{2} + \dots + 2^{n}$$

$$s_{n} = 2 + 2^{2} + \dots + 2^{n}$$

$$2s_{n} = 2^{2} + 2^{3} + \dots + 2^{n+1}$$

$$2s_{n} - s_{n} = -2 + 2^{n+1}$$

$$s_{n} = 2(2^{n} - 1)$$

Questão 2

(Sem reposisao, e importa a ordem)

$$\Omega = \{(x_1, ..., x_r) : x_i \in \{1, ..., n\}, i = 1, ..., r, x_i \neq x_i, \forall i \neq j\}$$

 $A_i = \{\text{Obter sucesso na i-ésima tentativa}\}$

$$\bullet \quad \frac{F}{1^o}.\frac{F}{2^o}.\frac{F}{3^o}...\frac{F}{r-1}.\frac{S}{r}$$

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{r-1}^c \cap A_r) = \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{P(A_1^c)} \cdot \underbrace{\frac{n-2}{n-1}}_{P(A_2^c | A_1^c)} \cdot \underbrace{\frac{n-3}{n-2}}_{P(A_3^c | A_1^c \cap A_2^c)} \dots \underbrace{\frac{n-(r-1)}{n-(r-2)}}_{P(A_r | A_1^c \cap \dots \cap A_{r-1}^c)} = \frac{1}{n}$$

(Sem reposisao, E importa a ordem) $x_i = j \Leftrightarrow$ Pessoa i pular na parada j

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_6) : x_i \in \{1, \dots, 10\}, i = 1, \dots, 10\}$$

$$|\Omega| = 10.10.10...10 = 10^6$$

$$A = \{(x_1, ..., x_6) : x_i \in \{1, ..., 10\}, i = (1, ..., 10), x_i \neq x_j, \forall i \neq j\}$$

$$|A| = \frac{10!}{6!} = A_{10,6}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{A_{10,6}}{10^6}$$

Questão 4

(Sem reposisao, importa a ordem) $x_i = j \Leftrightarrow \text{ bola i na caixa j}$

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \{1, \dots, r\}, i = 1, \dots, n\}$$

$$|\Omega| = r.r...r = r^n$$

- $A_j = \{ \text{A caixa j com 2, sendo a n-ésima bola a segunda desta} \}, j = 1, ..., r$

A caixa j com a bola n (fixo) e uma bola dentre as n-1 restantes nas r caixas:

•
$$\frac{1}{1} \cdots \frac{2}{i-1} \cdot \frac{2}{i} \cdot \frac{1}{i+1} \cdots \frac{7}{r}$$

$$|A_j| = \underbrace{\frac{(n-1)}{\underbrace{(n-1)}}.\underbrace{\frac{(r-1).(r-2)...(r-(n-2))}{\text{n-2 bolas para as r-1 caixas}}}_{\text{para colocar na caixa i}}.\underbrace{\frac{(r-1).(r-2)...(r-(n-2))}{\text{n-2 bolas para as r-1 caixas}}}$$

- $A = A_1 \cap ... \cap A_r$; Dijuntos
- $|A| = \sum_{j=1}^{r} |A_j|$; Dijuntos

$$|A| = \sum_{j=1}^{r} [(n-1)(r-1)...(r-(n-2))]$$

$$= r.(n-1)(r-1)...(r-(n-2))$$

$$= (n-1) \cdot \frac{r!}{(r-(n-1)!)}$$

$$= (n-1)A_{r,n-1}$$

$$P(A) = \frac{(n-1)A_{r,n-1}}{r^n}$$

(Com reposisao, e não importa a ordem)

• $x_i = j \Leftrightarrow \text{ bola i na caixa j}$

$$\Omega = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in \{1, ..., n\}, i = 1, ..., n, \}$$

$$|\Omega| = n.n.n...n = n^n$$

a)

 $A_i = \{$ caixa i sem a bola e as (n-1) caixas com as n bolas de tal forma que nenhuma caixa fique vazia $\}$

 $B_j = \{ \text{Caixa i vazia. Caixa j com 2 bolas e as n-2 caixas com 1 bola} \}$

• $A_i = \bigcup_{j=2}^n B_j$

$$|B_j| = \underbrace{\binom{n}{2}.1}_{\substack{\text{Escolher 2} \\ \text{bolas dentre n} \\ \text{para a caixa j}}} \underbrace{\binom{n-2}!}_{\substack{\text{Colocar as outras n-2} \\ \text{bolas nas n-2 caixas}}}$$

• $P(B_j) = \frac{\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n}$

$$P(A_i) = \sum_{j=2}^{n} P(B_j) = \frac{(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n}$$

Todas as possibilidades de uma caixa vazia:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \frac{n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n} = \frac{\binom{n}{2}(n)!}{n^n}$$

b)

1.

• $C = \{\text{Caixa 1 vazia (fixo}) \text{ e as outras n-1 caixas com as n bolas distribuidas aleatoriamente} \}$

$$|C| = \underbrace{(n-1)...(n-1)}_{\text{n bolas para as n-1 caixas}} = (n-1)^n$$

$$P(C) = \frac{(n-1)^n}{n^n}$$

2.

- $A = \{Apenas 1 caixa vazia\}; i = 2,...n$
- $A_i = \{ \text{caixa i sem a bola e as (n-1) caixas com as n bolas de tal forma que nenhuma caixa fique vazia} \}$

•
$$|A| = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \frac{n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n} = \frac{\binom{n}{2}(n)!}{n^n}$$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A_1)}{P(C)} = \frac{\binom{\binom{n}{2}(n-1)!}{n^n}}{\binom{(n-1)^n}{2}} = \frac{\binom{\binom{n}{2}(n-1)!}{(n-1)^n}}{(n-1)^n}$$

c)

- $C = \{\text{Caixa 1 vazia (fixo) e as outras n-1 caixas com as n bolas distribuidas aleatoriamente}\}$
- $A = \{Apenas \ 1 \ caixa \ vazia\}; i = 2, ...n$

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_1)}{P(A)} = \frac{\binom{\binom{n}{2}(n-1)!}{\binom{n}{2}(n)!}}{\binom{\binom{n}{2}(n)!}{n^n}} = \frac{(n-1)!}{n \cdot (n-1)!} = \frac{1}{n}$$

Questão 6

(Com reposisao, e não importa a ordem)

• $x_i = j \Leftrightarrow \text{ bola i na caixa j}$

$$\Omega = \{ [x_1, \dots, x_n] : x_i \in \{1, \dots, r\}, i = 1, \dots, n, \}$$

$$|\Omega| = \underbrace{r.r.r...r}_{\text{n bolas com r possib. de caixas}} = r^n$$

 $A = \{\text{Caixa 1 tenha j bolas e r-1 caixas com j-n bolas distribuidas aleatoriamente}\}$

$$|A| = \underbrace{\binom{n}{j}.1}_{\substack{\text{j bolas de n} \\ \text{para a caixa 1 sem} \\ \text{importar a ordem}}}_{\substack{\text{n-j bolas com a} \\ \text{posib. de r-1 caixas}}} (r-1)^{(n-j)}$$

•
$$P(A) = \frac{\binom{n}{j}.(r-1)^{(n-j)}}{r^n}$$

* A complementar...

(Sem reposisao, e não importa a ordem)

$$\begin{cases} x = b \text{ bolas pretas} \\ y = r \text{ bolas vermelhas} \end{cases}$$

•
$$S = \{x_1, ..., x_b, y_1, ..., y_r\}$$

 $\omega= \mathrm{Bola}$ retirada da caixa

$$\Omega = \{ [\omega_1, \dots, \omega_n] : \omega_i \in S, \ i = 1, \dots, n, \ \omega_i \neq \omega_i, \ p/i \neq j \}$$

$$|\Omega| = {b+r \choose n}$$

• $A_i = \{\text{Tirar bola preta n-1 vezes}\}$

Não Importa a ordem

•
$$A = \{[y_1, ..., y_{n-1}] : |y_i \in \{1, ..., r\}, \forall \{1, ..., n-1\}\}$$

$$P(A) = \underbrace{\frac{\begin{pmatrix} r \\ (n-1) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} b+r \\ (n-1) \end{pmatrix}}}_{\text{De b+r bolas } \text{n-1 são tiradas}}$$

• $B_n|A=\{$ A n-ésima bola é preta e as n-1 bolas não são $\}$

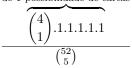
$$P(B_n|A) = \frac{\underbrace{b}}{\underbrace{b+r-(n-1)}}$$
 De b+r bolas n-1 foram tiradas

$$P(A \cap B_n) = P(A).P(B_n|A) = \frac{\binom{r}{n-1}}{\binom{b+r}{n-1}} \cdot \frac{b}{b+r-(n-1)}$$

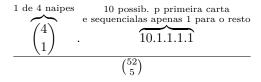
$$\begin{split} P(A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n) &= P(A_1^c).P(A_2^c | A_1^c)...P(A_{n-1}^c | A_1^c \cap \ldots \cap A_{n-2}^c).P(A_n) \\ &= \frac{\binom{r}{n-1}\frac{1}{r}.\frac{1}{r-1}.\frac{1}{r-2}...\frac{1}{r-(n-1)}.\binom{b}{1}\frac{1}{b}}{\binom{r+b}{n-1}} \end{split}$$

a)

1 naipe de 4 para exatamente esta sequencia de 1 possibilidade de cartas



b)



c)

A ordem importa

• $(x, x, x, x, y) \neq (y, y, y, y, x)$; 2 formas diferentes

De 13 cartas, 2 para serem os números e 4 de 4 naipes diferentes e 1 de 4 de naipes diferentes $\underbrace{\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13\\2\end{pmatrix}}_{\left(52\\5\right)}$ Número de ordens que importa

De 4 naipes tirar os 4 de 13 cartas tirar 1 número 1 de 48 para a 5° carta

$$\underbrace{\frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}}_{\left(\substack{5\\2}\right)}$$

d)

A ordem importa

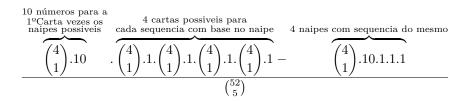
• $(x, x, x, y, y) \neq (y, y, y, x, x)$; 2 formas diferentes

De 13 cartas, 2 para serem de mesmo número e 3 de 4 naipes diferentes e 2 de 4 de naipes diferentes $\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}}.$

e)

Não importa a ordem

f)



 $\mathbf{g})$

Ordem importa

• $(x, x, x, y, z) \neq (y, y, y, z, x) \neq (z, z, z, x, y)$; 3 formas diferentes

De 13 cartas, 3 para serem os números 3 de 4 naipes diferentes e 1 de 4 de naipes diferentes $\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}}.\underbrace{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}}$

h)

Ordem importa

• $(x, x, y, y, z) \neq (y, y, z, z, x) \neq (z, z, x, x, y)$; 3 formas diferentes

De 13 cartas, 3 para serem os número 2 de 4 naipes diferentes e 1 de 4 de naipes diferentes $\underbrace{\left(\frac{4}{2}\right).\left(\frac{4}{2}\right).\left(\frac{4}{1}\right).\left(\frac{13}{3}\right)}_{\left(\frac{52}{5}\right)}.\underbrace{\begin{array}{c}\text{Número de ordens}\\\text{que importa}\end{array}}_{3}$

i)

Ordem importa

• $(w, w, x, y, z) \neq (x, x, y, z, w) \neq (y, y, z, w, x) \neq (z, z, w, x, y)$; 4 formas diferentes

De 13 cartas, 4 para serem
os número
2 de 4 naipes diferentes
e 1 de 4 de naipes diferentes $\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}}$ Número de ordens que importa

 $\verb|choose|(13,4)*choose|(4,2)*choose|(4,1)*choose|(4,1)*choose|(4,1)*d|$

[1] 1098240

 $choose(12,3)*choose(4,2)*4^3*13$

[1] 1098240

Questão 9

(Sem reposisao, E não importa a ordem) $x_i = j \Leftrightarrow$ Pessoa i pular na parada j

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{1, ..., 10\}, \ i = 1, ..., 10, \ x_i \neq x_j\}$$
$$|\Omega| = \binom{10}{3}$$

Escolher e 6 o 3 (fixo) Escolher o 3° número entre 10 - 2 restantes

Questão 10

 $\begin{array}{c} {\rm Pegar~k~objetos~(fixo)}\\ {\rm e~entre~os~r\text{-}k~restantes}\\ {\rm pegar~n\text{-}k~que~falta~pra~completar~a~amostragem~n} \end{array}$

$$\underbrace{\binom{r-k}{n-k}}_{\binom{r}{n}}\underbrace{1.1...1}_{\binom{r}{n}}$$

Classes dos baralhos
$$\begin{cases} vermelhas = 26 \text{ cartas} \\ pretas = 26 \text{ cartas} \end{cases}$$

Escolher 2 de cada classe sem importar a ordem:

$$\frac{\binom{26}{2}.\binom{26}{2}}{\binom{52}{4}}$$

Questão 12

- $A = \{ \text{Pelo menos } 1 \}$
- $P(A) = 1 P(A^c)$

Das 5 premiadas 0 teve o bilhete adquirido e das n-5 não premiadas 3 constaram

$$1 - \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{n-5}{3}}{\binom{n}{3}}$$