

# NOI 复习大纲

重庆市巴蜀中学 高 2022 级信竞组

## 目 录

<b>0 前言</b>	<b>1</b>
0.1 基本介绍 . . . . .	1
0.2 受众声明 . . . . .	1
0.3 使用声明 . . . . .	1
0.4 寄语 . . . . .	1
<b>1 动态规划</b>	<b>2</b>
1.1 朴素 dp . . . . .	2
1.1.1 LIS/LCS 类 dp . . . . .	2
1.1.2 区间 dp . . . . .	2
1.1.3 资源分配类 dp . . . . .	2
1.1.3.1 背包类 dp . . . . .	2
1.1.3.2 最大乘积类 dp . . . . .	2
1.1.4 子序列/子串类 dp . . . . .	2
1.1.5 双重/多重 dp . . . . .	2
1.2 状压 dp . . . . .	3
1.2.1 状压 dp . . . . .	3
1.2.2 轮廓线 dp . . . . .	3
1.2.3 插头 dp . . . . .	3
1.2.4 Stenier Tree . . . . .	3
1.3 树形 dp . . . . .	4
1.3.1 树形 dp . . . . .	4
1.3.2 换根 dp . . . . .	4
1.3.3 基环树 dp . . . . .	4
1.3.4 仙人掌 dp . . . . .	4
1.3.5 虚树 dp . . . . .	4
1.4 数位 dp . . . . .	5

1.5	概率期望 dp	6
1.6	dp 优化	7
1.6.1	决策单调性优化 dp	7
1.6.1.1	四边形不等式优化 dp	7
1.6.1.2	单调栈/二分栈优化 dp	7
1.6.1.3	分治优化 dp	7
1.6.1.4	斜率优化 dp	7
1.6.1.5	wqs 二分 (dp 凸优化)	7
1.6.2	滚动数组优化 dp	7
1.6.3	倍增优化 dp	7
1.6.4	矩阵乘法优化 dp	7
1.6.5	数据结构优化 dp	7
1.6.6	ddp	7
2	图论	8
2.1	树	8
2.1.1	树的遍历	8
2.1.2	基环树	8
2.1.3	仙人掌	8
2.2	树	9
2.3	图的连通性	10
2.3.1	有向图连通性	10
2.3.1.1	强连通分量	10
2.3.2	无向图连通性	10
2.3.2.1	缩点	10
2.3.2.2	点双/边双	10
2.4	生成树问题	11
2.4.1	最值生成树	11
2.4.2	k 值生成树	11
2.4.3	k 度限制生成树	11
2.5	最短路径问题	12
2.5.1	最短路	12
2.5.2	k 短路	12
2.5.3	分层图最短路	12
2.6	二分图与网络流	13
2.6.1	二分图最大匹配	13
2.6.2	最大流	13

2.6.3	最小费用流	13
2.6.4	上下界网络流	13
2.6.5	网络流常见模型	13
2.6.6	带花树	13
<b>3</b>	<b>数学</b>	<b>14</b>
3.1	数论	14
3.1.1	常见数论定理	14
3.1.1.1	crt, excrt	14
3.1.1.2	裴蜀定理	14
3.1.1.3	费马小/大定理	14
3.1.2	素数	14
3.1.2.1	Miller_Rabin 素数判定	14
3.1.2.2	Pollard_Rho 质因数分解	14
3.1.3	整除	14
3.1.3.1	mod 的运算	14
3.1.3.2	ceil 和 floor 的运算	14
3.1.4	Dirichlet 卷积	14
3.1.4.1	线性筛	14
3.1.4.2	杜教筛	14
3.1.4.3	Min_25 筛	14
3.1.5	原根, ord	15
3.1.6	BSGS	15
3.1.7	类欧几里得	15
3.2	组合数学	16
3.2.1	Lucas 定理	16
3.2.1.1	Lucas 定理	16
3.2.1.2	exLucas 定理	16
3.2.2	容斥原理	16
3.2.2.1	容斥原理	16
3.2.2.2	二项式反演 (广义容斥)	16
3.2.2.3	子集反演	16
3.2.2.4	min-max 反演, $k$ 值反演	16
3.2.3	Catalan 数	16
3.2.4	Stirling 数	16
3.2.4.1	第一类 Stirling 数	16
3.2.4.2	第二类 Stirling 数	16

3.2.4.3	Stirling 反演	16
3.2.5	Bernoulli 数	16
3.3	线性代数	17
3.3.1	Gauss 消元	17
3.3.2	线性基	17
3.3.3	Matrix-Tree 定理	17
3.4	多项式	18
3.4.1	Lagrange 插值	18
3.4.1.1	Lagrange 插值	18
3.4.1.2	Lagrange 反演	18
3.4.1.3	exLagrange 反演	18
3.4.2	FFT/NTT	18
3.4.2.1	多项式基本模板	18
3.4.2.2	分治 FFT/NTT	18
3.4.2.3	单位根反演	18
3.4.3	幂级数	18
3.4.3.1	集合幂级数 FWT/FMT/FST	18
3.4.3.2	生成函数	19
3.4.4	常数系数齐次线性递推	19
3.4.5	特征根/多项式	19
3.5	群论	20
3.5.1	置换群	20
3.5.2	Burnside 引理及不动点	20
3.5.3	polya 计数	20
3.6	博弈论	21
3.7	线性规划	22
3.7.1	单纯形法	22
3.8	基础微积分	23
3.8.1	Simpson 积分	23
3.8.2	偏导数	23
3.8.2.1	Lagrange 乘数法	23
3.8.2.2	最小二乘法	23
3.8.3	差分	23
3.8.3.1	分部求和法	23
3.8.3.2	多重差分	23
3.9	贪心, 随机化算法	24
3.9.1	01 分数规划	24

3.9.2	拟阵	24
3.9.3	随机化算法	24
3.10	计算几何	25
3.10.1	向量	25
3.10.2	凸包	25
3.10.2.1	旋转卡壳	25
3.10.2.2	Minkowski 合并凸包	25
3.10.3	半平面交	25
3.10.4	三角剖分	25
3.10.5	三维计算几何	25
3.10.5.1	三维凸包	25
3.10.5.2	四面体剖分	25
4	字符串	26
4.1	Hash	26
4.2	KMP/exKMP	27
4.3	AC 自动机	28
4.4	SA/SAM	29
4.5	manacher/PAM	30
5	数据结构	31
5.1	基础数据结构	31
5.2	树状数组 bit	32
5.3	线段树 sgt	33
5.3.1	zkw 线段树	33
5.3.2	线段树合并/分裂	33
5.3.3	Beats (吉司机树)	33
5.3.4	李超线段树	33
5.4	平衡树	34
5.4.1	Splay	34
5.4.2	Treap/fhq-Treap	34
5.4.3	笛卡尔树	34
5.4.4	替罪羊树	34
5.5	KD-Tree	35
5.6	可并堆和左偏树	36
5.7	序列分治算法	37
5.7.1	CDQ 分治	37

5.7.2	整体二分	37
5.8	树上分治算法	38
5.8.1	点分治	38
5.8.1.1	动态点分治	38
5.8.2	边分治	38
5.8.3	树链剖分 HLD	38
5.8.4	Link-Cut-Tree	38
5.8.5	Top-Tree	38
5.8.6	长链剖分 LPD	38
5.8.7	dsu on tree	38
5.8.8	Euler-Tour-Tree	38
5.9	可持久化数据结构	39
5.10	Dancing-Links X	40
6	更新日志	41
6.1	version beta 1.0	41

## 0 前言

### 0.1 基本介绍

此清单由 disangan233 整理并制作。

题目来源：BSOJ-code, Luogu, CodeForces, AtCoder。

编写语言：LaTeX, 模板：noi thesis。

最近更新时间：2019/12/17, 目前共添加题目：6 道。

Github: NOI-Review-Outline

### 0.2 受众声明

如果你是一名 Bashu OIer, 本清单将会极大程度贴合你的做题需求面。

如果你不是, 欢迎来 Bashu Online Judge 注册账号使用!

### 0.3 使用声明

所有表格里的题目名称均为超链接形式, 默认本窗口打开。

如果你能实现 LaTeX 内链接打开为 `_target=blank`, 请联系本清单制作者。

### 0.4 寄语

我们的目标是星辰大海, 谁没有一个 Au 的梦想呢? 努力去做实现吧!

你可是一名 OIer 啊, 既然来到 OI 就不应该携带悔恨离去呢!

颓废是没有明天的, 努力学习吧!

汝虽菜, 亦有大智慧! 盖学文化课者所无也。

以上选自《did 语录》,《锴皇正传》。

# 1 动态规划

## 1.1 朴素 dp

### 1.1.1 LIS/LCS 类 dp

### 1.1.2 区间 dp

### 1.1.3 资源分配类 dp

#### 1.1.3.1 背包类 dp

#### 1.1.3.2 最大乘积类 dp

### 1.1.4 子序列/子串类 dp

### 1.1.5 双重/多重 dp



## 1.2 状压 dp

### 1.2.1 状压 dp

### 1.2.2 轮廓线 dp

### 1.2.3 插头 dp

### 1.2.4 Stenier Tree

## 1.3 树形 dp

### 1.3.1 树形 dp

### 1.3.2 换根 dp

编号	题目名称	知识点
1195	「POJ3585」Accumulation Degree	换根 dp
4201	「APIO2014」连珠线	换根 dp
4766	「SHOI2014」概率充电器	换根 dp，概率期望
6101	「十二省模拟」树的双直径	换根 dp，up-down dp
6304	「10.05模拟」签到题	换根 dp
6415	「11.14模拟」涅槃	换根 dp

### 1.3.3 基环树 dp

### 1.3.4 仙人掌 dp

### 1.3.5 虚树 dp

## 1.4 数位 dp

## 1.5 概率期望 dp

## 1.6 dp 优化

### 1.6.1 决策单调性优化 dp

#### 1.6.1.1 四边形不等式优化 dp

#### 1.6.1.2 单调栈/二分栈优化 dp

#### 1.6.1.3 分治优化 dp

#### 1.6.1.4 斜率优化 dp

#### 1.6.1.5 wqs 二分 (dp 凸优化)

### 1.6.2 滚动数组优化 dp

### 1.6.3 倍增优化 dp

### 1.6.4 矩阵乘法优化 dp

### 1.6.5 数据结构优化 dp

### 1.6.6 ddp

## 2 图论

### 2.1 树

#### 2.1.1 树的遍历

#### 2.1.2 基环树

#### 2.1.3 仙人掌

## 2.2 树

## 2.3 图的连通性

### 2.3.1 有向图连通性

#### 2.3.1.1 强连通分量

### 2.3.2 无向图连通性

#### 2.3.2.1 缩点

#### 2.3.2.2 点双/边双



## 2.4 生成树问题

### 2.4.1 最值生成树

### 2.4.2 k 值生成树

### 2.4.3 k 度限制生成树

## 2.5 最短路径问题

### 2.5.1 最短路

### 2.5.2 k 短路

### 2.5.3 分层图最短路

## 2.6 二分图与网络流

### 2.6.1 二分图最大匹配

### 2.6.2 最大流

### 2.6.3 最小费用流

### 2.6.4 上下界网络流

### 2.6.5 网络流常见模型

### 2.6.6 带花树

## 3 数学

### 3.1 数论

#### 3.1.1 常见数论定理

##### 3.1.1.1 crt, exCRT

**crt**

**exCRT**

##### 3.1.1.2 裴蜀定理

##### 3.1.1.3 费马小/大定理

#### 3.1.2 素数

##### 3.1.2.1 Miller\_Rabin 素数判定

##### 3.1.2.2 Pollard\_Rho 质因数分解

#### 3.1.3 整除

##### 3.1.3.1 mod 的运算

##### 3.1.3.2 ceil 和 floor 的运算

#### 3.1.4 Dirichlet 卷积

##### 3.1.4.1 线性筛

##### 3.1.4.2 杜教筛

##### 3.1.4.3 Min\_25 筛

3.1.5 原根,  $\text{ord}$

3.1.6 BSGS

3.1.7 类欧几里得

## 3.2 组合数学

### 3.2.1 Lucas 定理

#### 3.2.1.1 Lucas 定理

#### 3.2.1.2 exLucas 定理

### 3.2.2 容斥原理

#### 3.2.2.1 容斥原理

#### 3.2.2.2 二项式反演（广义容斥）

#### 3.2.2.3 子集反演

#### 3.2.2.4 min-max 反演, $k$ 值反演

### 3.2.3 Catalan 数

### 3.2.4 Stirling 数

#### 3.2.4.1 第一类 Stirling 数

#### 3.2.4.2 第二类 Stirling 数

#### 3.2.4.3 Stirling 反演

### 3.2.5 Bernoulli 数

### 3.3 线性代数

#### 3.3.1 Gauss 消元

#### 3.3.2 线性基

#### 3.3.3 Matrix-Tree 定理

## 3.4 多项式

### 3.4.1 Lagrange 插值

#### 3.4.1.1 Lagrange 插值

#### 3.4.1.2 Lagrange 反演

#### 3.4.1.3 exLagrange 反演

### 3.4.2 FFT/NTT

#### 3.4.2.1 多项式基本模板

多项式乘法

多项式求逆

多项式  $\ln$

多项式  $\exp$

多项式除法

多项式开根

多项式快速幂

多项式三角函数

多项式双曲函数

#### 3.4.2.2 分治 FFT/NTT

#### 3.4.2.3 单位根反演

### 3.4.3 幂级数

#### 3.4.3.1 集合幂级数 FWT/FMT/FST



### 3.4.3.2 生成函数

普通型生成函数 **OGF**

指数型生成函数 **EGF**

### 3.4.4 常系数齐次线性递推

### 3.4.5 特征根/多项式

## 3.5 群论

### 3.5.1 置换群

### 3.5.2 Burnside 引理及不动点

### 3.5.3 polya 计数

## 3.6 博弈论

## 3.7 线性规划

### 3.7.1 单纯形法

## 3.8 基础微积分

### 3.8.1 Simpson 积分

### 3.8.2 偏导数

#### 3.8.2.1 Lagrange 乘数法

#### 3.8.2.2 最小二乘法

### 3.8.3 差分

#### 3.8.3.1 分部求和法

#### 3.8.3.2 多重差分

## 3.9 贪心，随机化算法

### 3.9.1 01 分数规划

### 3.9.2 拟阵

### 3.9.3 随机化算法

## 3.10 计算几何

### 3.10.1 向量

### 3.10.2 凸包

#### 3.10.2.1 旋转卡壳

#### 3.10.2.2 Minkowski 合并凸包

### 3.10.3 半平面交

### 3.10.4 三角剖分

### 3.10.5 三维计算几何

#### 3.10.5.1 三维凸包

#### 3.10.5.2 四面体剖分

## 4 字符串

### 4.1 Hash



## 4.2 KMP/exKMP

## 4.3 AC 自动机

## 4.4 SA/SAM

## 4.5 manacher/PAM

## 5 数据结构

### 5.1 基础数据结构

## 5.2 树状数组 bit

## 5.3 线段树 sgt

### 5.3.1 zkw 线段树

### 5.3.2 线段树合并/分裂

### 5.3.3 Beats (吉司机树)

### 5.3.4 李超线段树

## 5.4 平衡树

### 5.4.1 Splay

### 5.4.2 Treap/fhq-Treap

### 5.4.3 笛卡尔树

### 5.4.4 替罪羊树



## 5.5 KD-Tree

## 5.6 可并堆和左偏树

## 5.7 序列分治算法

### 5.7.1 CDQ 分治

### 5.7.2 整体二分

## 5.8 树上分治算法

### 5.8.1 点分治

#### 5.8.1.1 动态点分治

### 5.8.2 边分治

### 5.8.3 树链剖分 HLD

### 5.8.4 Link-Cut-Tree

### 5.8.5 Top-Tree

### 5.8.6 长链剖分 LPD

### 5.8.7 dsu on tree

### 5.8.8 Euler-Tour-Tree

## 5.9 可持久化数据结构

## 5.10 Dancing-Links X

## 6 更新日志

### 6.1 version beta 1.0

2019/11/21, 本清单正式开始撰写, 采用 markdown 格式, 完善了 dp 板块知识点。

2019/11/22, 完善了数学板块知识点, 更新了 42 道题目。

2019/11/23, 因为 markdown 太丑了, disangan233 通宵把本题单全面更新成了 LaTeX, 题目已搬迁 6 道。

2019/12/14, LaTeX 扩充, 完善图论、字符串板块、数据结构知识点。

2019/12/17, 完成了成套 Github 系统, 开始编写配套文件。