

1.4 递推算法



巴蜀中學
BASHU SECONDARY SCHOOL

1.4 递推算法

主讲老师：党东



1.4 递推算法



一、递推概念

- 给定一个数的序列 $H_0, H_1, \dots, H_n, \dots$
- 若存在整数 n_0 , 使当 $n > n_0$ 时, 可以用等号(或大于号、小于号)将 H_n 与其前面的某些项 $H_i (0 < i < n)$ 联系起来, 这样的式子就叫做递推关系。



1.4 递推算法



巴蜀中學
BASHU SECONDARY SCHOOL

二、解决递推问题的一般步骤

- 建立递推关系式
- 确定边界条件
- 递推求解



1.4 递推算法



三、递推的两种形式

■ 顺推法和倒推法

顺推法：所谓顺推法是从已知条件出发，逐步推算出要解决的问题的方法叫顺推。

如斐波拉契数列，设它的函数为 $f(n)$ ，已知 $f(1)=1$ ， $f(2)=1$ ； $f(n)=f(n-2)+f(n-1)$ ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$)。则我们通过顺推可以知道， $f(3)=f(1)+f(2)=2$ ；
 $f(4)=f(2)+f(3)=3$直至我们要求的解。

逆推法：所谓逆推法从已知问题的结果出发，用迭代表达式逐步推算出问题的开始的条件，即顺推法的逆过程，称为逆推。

四、递推的应用分类

- 一般递推问题
- 组合计数类问题
- 一类博弈问题的求解
- 动态规划问题的递推关系



【例1】faibonacci数列 1062



巴蜀中學
BASHU SECONDARY SCHOOL

【问题描述】已知faibonacci数列的前几个数分别为0, 1, 1, 2, 3, 5,编程求出此数列的第n项。 ($n \leq 60$)

- $a[1]=0;a[2]=1;$
- $\text{for}(i=3;i \leq n;i++)a[i]=a[i-2]+a[i-1];$
- 思考：当 $n \leq 10^9$ 时，如何求解？



【练习1】兔子繁殖 --1063



【问题描述】 有一对小兔,过一个月之后长成大兔,到第四个月就可以生下一对小兔,并且以后每个月都生下一对小兔。而所生的一对小兔也同样到一个月之后长成大兔,到第四个月就可以生下一对小兔,并且以后也每个月都生下一对小兔.假设所有的兔子均不死亡,问第n个月后共有多少对兔子? 请设计一个程序, 解决这一问题。

【文件输入】 输入仅一个整数n ($n \leq 50$)

【文件输出】 输出仅一个整数, 为第n个月后共有多少对兔子

【样例输入】 5

【样例输出】 3

【练习2】昆虫繁殖 --1265



【问题描述】 科学家在热带森林中发现了一种特殊的昆虫，这种昆虫的繁殖能力很强。每对成虫过x个月产y对卵，每对卵要过两个月长成成虫。假设每个成虫不死，第一个月只有一对成虫，且卵长成成虫后的第一个月不产卵(过X个月产卵)，问过Z个月以后，共有成虫多少对？

$0 \leq X \leq 20, 1 \leq Y \leq 20, X \leq Z \leq 50$

【文件输入】 x,y,z的数值

【文件输出】 过Z个月以后，共有成虫对数

【样例输入】 1 2 8

【样例输出】 37

【例2】Hanoi塔问题



【问题描述】

Hanoi塔由 n 个大小不同的圆盘和三根木柱a,b,c组成。开始时，这 n 个圆盘由大到小依次套在a柱上，如图1所示。要求把a柱上 n 个圆盘按下述规则移到c柱上：

- (1)一次只能移一个圆盘；
- (2)圆盘只能在三个柱上存放；
- (3)在移动过程中，不允许大盘压小盘。

问将这 n 个盘子从a柱移动到c柱上，总计需要移动多少个盘次？

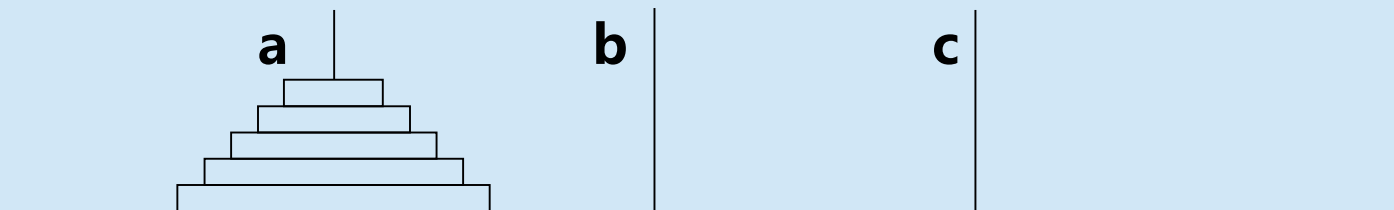


图1

【例2】Hanoi塔问题



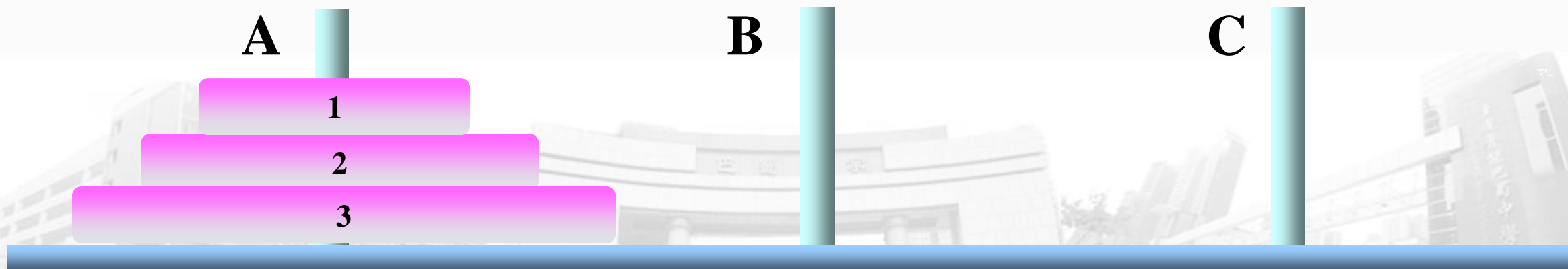
巴蜀中學
BASHU SECONDARY SCHOOL

【思路分析】

当 $n=1$ 时: $A \rightarrow C$

当 $n=2$ 时: $A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C$

当 $n=3$ 时:



【例2】Hanoi塔问题



【思路分析】

设 $f(n)$ 为 n 个盘子从1柱移到3柱所需移动的最少盘次。

当 $n=1$ 时, $f(1)=1$ 。

当 $n=2$ 时, $f(2)=3$ 。

以此类推, 当1柱上有 $n(n>2)$ 个盘子时, 我们可以利用下列步骤:

第一步: 先借助3柱把1柱上面的 $n-1$ 个盘子移动到2柱上, 所需的移动次数为 $f(n-1)$ 。

第二步: 然后再把1柱最下面的一个盘子移动到3柱上, 只需要1次盘子。

第三步: 再借助1柱把2柱上的 $n-1$ 个盘子移动到3上, 所需的移动次数为 $f(n-1)$ 。

由以上3步得出总共移动盘子的次数为: $f(n-1)+1+f(n-1)$ 。

所以: $f(n)=2 f(n-1)+1$

$$h_n=2h_{n-1}+1=2^n-1$$

边界条件: $h_1=1$

【问题描述】一辆重型卡车欲穿过1000公里的沙漠，卡车耗汽油为1升/公里，卡车总载油能力为500公升。显然卡车装一次油是过不了沙漠的。因此司机必须设法在沿途建立若干个贮油点，使卡车能顺利穿过沙漠。试问司机如怎样建立这些贮油点？每一贮油点应存储多少汽油，才能使卡车以消耗最少汽油的代价通过沙漠？

编程计算及打印建立的贮油点序号，各贮油点距沙漠边沿出发的距离以及存油量。

格式如下：

No.	Distance(k.m.)	Oil(litre)
1	× ×	× ×
2	× ×	× ×
...

【例3】导弹拦截（2010普及）1176



【问题描述】 经过11年的韬光养晦，某国研发出了一种新的导弹拦截系统，凡是与它的距离不超过其工作半径的导弹都能够被它成功拦截。当工作半径为0时，则能够拦截与它位置恰好相同的导弹。但该导弹拦截系统也存在这样的缺陷：每套系统每天只能设定一次工作半径。而当天的使用代价，就是所有系统工作半径的平方和。

某天，雷达捕捉到敌国的导弹来袭。由于该系统尚处于试验阶段，所以只有两套系统投入工作。如果现在的要求是拦截所有的导弹，请计算这一天的最小使用代价。

【输入格式】

输入第一行包含4个整数 x_1 、 y_1 、 x_2 、 y_2 ，每两个整数之间用一个空格隔开，表示这两套导弹拦截系统的坐标分别为 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 。

第二行包含1个整数 N ，表示有 N 颗导弹。接下来 N 行，每行两个整数 x 、 y ，中间用一个空格隔开，表示一颗导弹的坐标 (x, y) 。不同导弹的坐标可能相同。

【输出格式】 输出只有一行，包含一个整数，即当天的最小使用代价。

【提示】

两个点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 之间距离的平方是 $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ 。

两套系统工作半径 r_1 、 r_2 的平方和，是指 r_1 、 r_2 分别取平方后再求和，即 $r_1^2 + r_2^2$ 。

【例3】导弹拦截 (2010普及) 1176



【样例输入1】

0 0 10 0

2

-3 3

10 0

【样例输出1】 18

【样例1说明】 样例1中要拦截所
平方分别为18和0。

【样例输入2】

0 0 6 0

5

-4 -2

-2 3

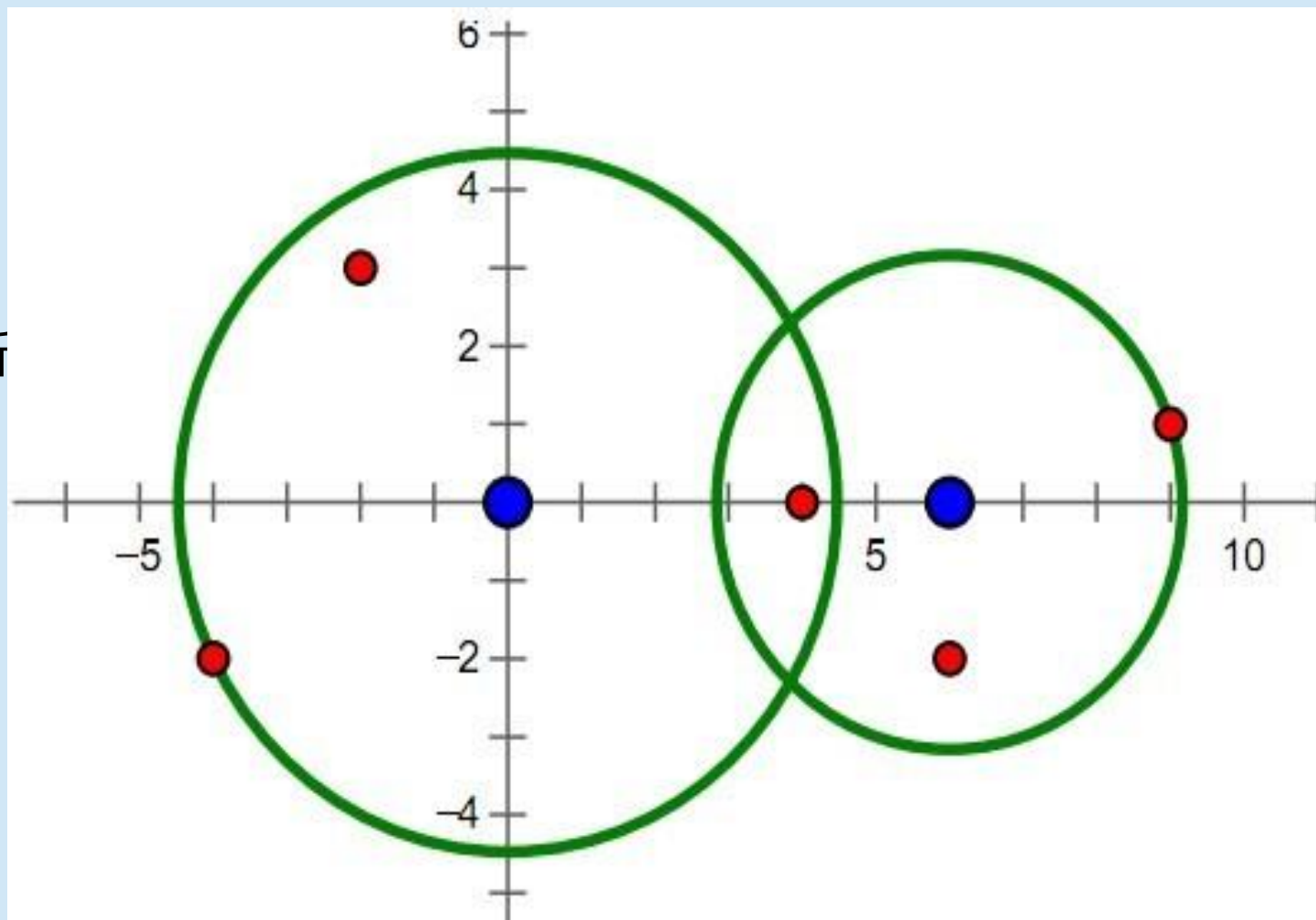
4 0

6 -2

9 1

【样例输出2】 30

【样例2说明】 样例中的导弹拦截系统和导弹所在的位置如下图所示。要拦截所有导弹，在满足最小使用代价的前提下，两套系统工作半径的平方分别为20和10。



1.4 递推算法



(二) 递推的应用 (组合计数)

■ 例题5：错排问题 (经典问题) 【1244】

n 个数，分别为 $1 \sim n$ ，排成一个长度为 n 的排列。若每一个数的位置都与数的本身不相等，则称这个排列是一个错排。例如， $n=3$ ，则错排有2 3 1、3 1 2。编写程序，求 n 的错排个数



1.4 递推算法



(二) 递推的应用 (组合计数)

【分析】

我们设 k 个元素的错位全排列的个数记做： $f(k)$ 。

四个元素的错位排列 $f(4)$ 我们用穷举法可以找到如下9个：

$(2,1,4,3);(3,4,1,2);(4,3,2,1)$

$(4,3,1,2);(2,4,1,3);(2,3,4,1)$

$(4,1,2,3);(3,4,2,1);(3,1,4,2)$

■ 它们有什么规律呢？

1.4 递推算法



(二) 递推的应用 (组合计数)

【分析】

- 通过反复的试验，我们发现事实上有两种方式产生错位排列：
- A、将 k 与 $(1, 2, \dots, k-1)$ 的某一个数互换，其他 $k-2$ 个数进行错排，这样可以得到 $(k-1) \times f(k-2)$ 个错位排列。
- B、另一部分是将前 $k-1$ 个元素的每一个错位排列(有 $f(k-1)$ 个)中的每一个数与 k 互换，这样可以得到剩下的 $(k-1) \times f(k-1)$ 个错位排列。
- 根据加法原理，我们得到求错位排列的递推公式 $f(k)$:

$$f(k) = (k-1) * (f(k-1) + f(k-2))$$

(三) 递推的应用 (动态规划中的递推)

■ 例6 最小伤害【1271】

【问题描述】把儿站在一个 $N \times N$ 的方阵中最左上角的格子里。他可以从一个格子走到它右边和下边的格子里。每一个格子都有一个伤害值。他想在受伤害最小的情况下走到方阵的最右下角。

【输入数据】第一行输入一个正整数 n 。以下 n 行描述该矩阵。矩阵中的数保证是不超过 1000 的正整数。

【输出数据】输出最小伤害值。

【样例输入】

```
3
1 3 3
2 2 2
3 1 2
```

【样例输出】 8

【数据规模】 $n \leq 1000$

a			f		
1	3	3	1	4	7
2	2	2	3	(2)5	(2)7
3	1	2	6	(1)6	(2)8

(三) 递推的应用 (动态规划中的递推)

【分析】

- $F[i][j]$: 设走到 (i,j) 这格的最小伤害值, $a[i,j]$ 表示 (i,j) 这格的伤害值。
- $F[i][j] = \min(f[i-1][j], f[i][j-1]) + a[i][j]$
- 边界条件: $f[1][1] = a[1][1]$
 $f[i][1] = f[i-1][1] + a[i][1] (2 \leq i \leq n)$
 $f[1][i] = f[1][i-1] + a[1][i] (2 \leq i \leq n)$

1.4 递推算法



【代码】

```
int a[1001][1001]={0},f[1001][1001]={0},n,i,j,k;
int main()
{  cin>>n;
   for(i=1;i<=n;i++)
       for(j=1;j<=n;j++)scanf("%d",&a[i][j]);
   f[1][1]=a[1][1];
   for(i=2;i<=n;i++)
   {   f[1][i]=a[1][i]+f[1][i-1];
       f[i][1]=a[i][1]+f[i-1][1];
   }
   for(i=2;i<=n;i++)
       for(j=2;j<=n;j++)
           f[i][j]=min(f[i-1][j],f[i][j-1])+a[i][j];
   cout<<f[n][n];
}
```

1.4 递推算法



■ 练习1 路径计数1 【1272】

Description

给一个 $N \times N$ 的网格，你一开始在 $(1, 1)$ ，即左上角的那个格子，你需要到达 (N, N) ，即右下角。你每次只能向下或向右移动，问有多少种方案。你只需要输出答案mod 100003后的结果即可。

Input

输入文件path.in的第1行只有一个正整数，为 N 。

Output

输出文件path.out包括1行只有一个正整数，为答案mod 100003后的结果。

Sample Input

3

Sample Output

6

【数据规模】

对于100%的数据， $n \leq 1000$ 。

1.4 递推算法



■ 练习2 路径计数2 【1272】

Description

一个 $N \times N$ 的网格，你一开始在 $(1, 1)$ ，即左上角。每次只能移动到下方相邻的格子或者右方相邻的格子，问到达 (N, N) ，即右下角有多少种方法。

但是这个问题太简单了，所以现在有 M 个格子上有障碍，即不能走到这 M 个格子上。

Input

第1行包含两个非负整数 N, M ，表示了网格的边长与障碍数。

接下来 M 行，每行两个不大于 N 的正整数 x, y 。表示坐标 (x, y) 上有障碍不能通过，且有 $1 \leq x, y \leq n$ ，且 x, y 至少有一个大于1，并注意障碍坐标有可能相同。

Output

输出文件path.out仅包含一个非负整数，为答案mod 100003后的结果。

Sample Input

3 1 3 1

Sample Output

5

【数据规模与约定】

对于20%的数据，有 $N \leq 3$ ；对于40%的数据，有 $N \leq 100$ ；

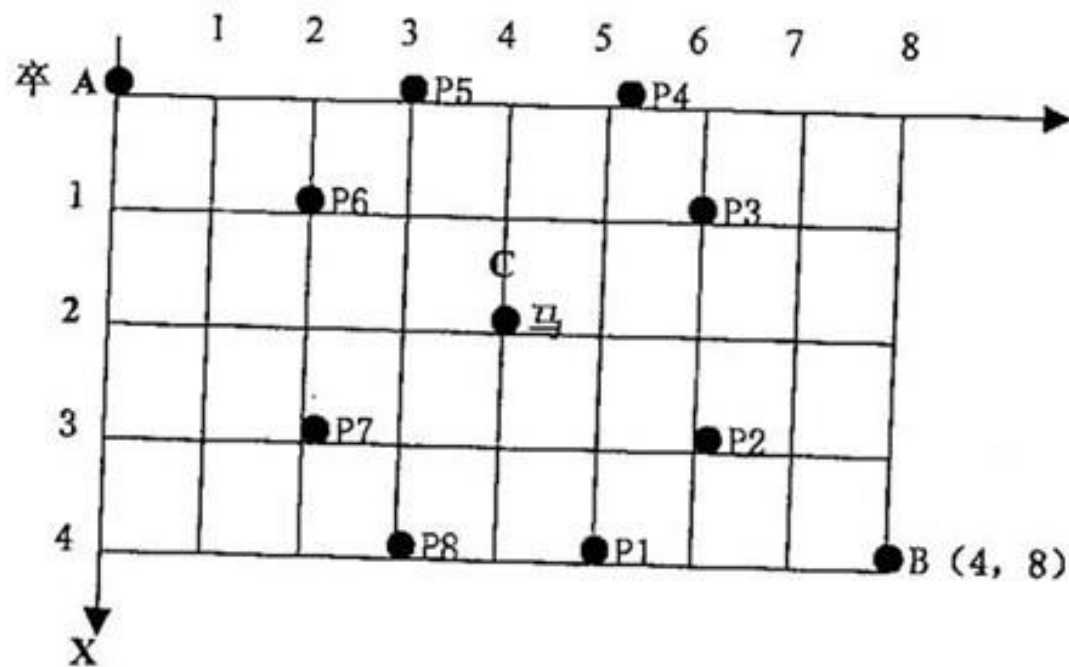
对于40%的数据，有 $M=0$ ；对于100%的数据，有 $N \leq 1000, M \leq 100000$ 。

1.4 递推算法



■ 练习3 过河卒【1209】

【问题描述】如图，A 点有一个过河卒，需要走到目标 B 点。卒行走规则：可以向下、或者向右。同时在棋盘上的任一点有一个对方的马（如上图的 C 点），该马所在的点和所有跳跃一步可达的点称为对方马的控制点。例如上图 C 点上的马可以控制 9 个点（图中的 P1，P2 ... P8 和 C）。卒不能通过对方马的控制点。



1.4 递推算法



■ 练习3 过河卒【1209】

棋盘用坐标表示，A 点 (0, 0)、B 点 (n,m) (n,m 为不超过 20 的整数，并由键盘输入)，同样马的位置坐标是需要给出的（约定：C \neq A，同时 C \neq B）。现在要求你计算出卒从 A 点能够到达 B 点的路径的条数。

【输入文件】

键盘输入 B 点的坐标 (n,m) 以及对方马的坐标 (X,Y)
{不用判错}

【输出文件】

屏幕输出一个整数（路径的条数）。

【样例输入】

6 6 3 2

【样例输出】

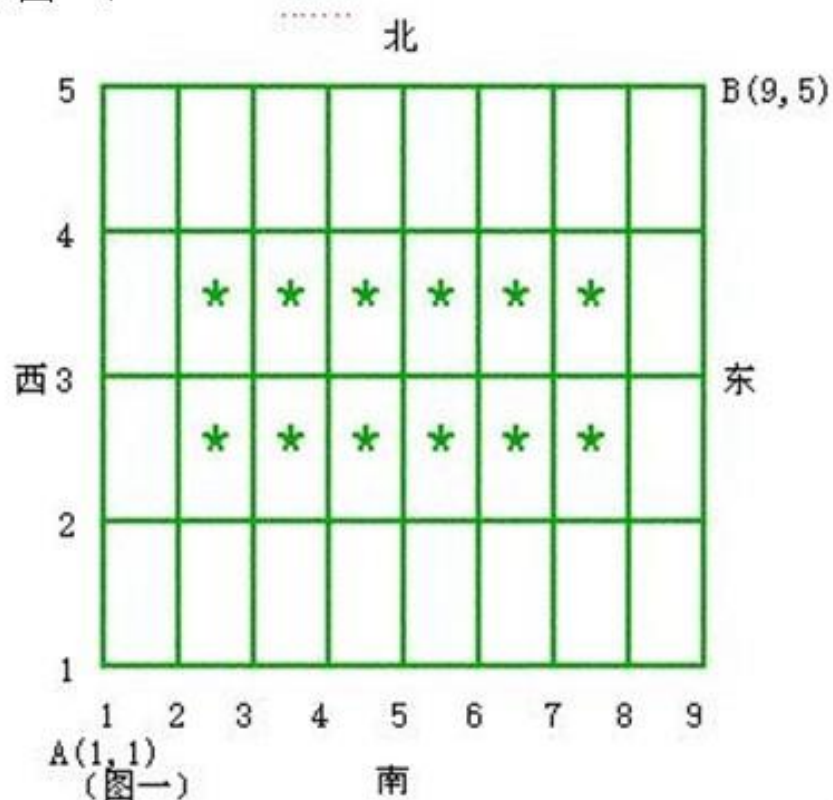
17

1.4 递推算法



■ 练习4 街道问题【1226】

【问题描述】 设有一个 $N \times M$ ($1 \leq N \leq 50$, $1 \leq M \leq 50$) 的街道 (如图一):



规定行人从 $A(1,1)$ 出发, 在街道上只能向东或北方向行走。

图二为 $N=3$, $M=3$ 的街道图, 从 A 出发到达 B 共有 6 条可供行走的路径:

■ 练习4 街道问题【1226】

1. A-A1-A2-A5-B ↓
2. A-A1-A4-A5-B ↓
3. A-A1-A4-A7-B ↓
4. A-A3-A4-A5-B ↓
5. A-A3-A4-A7-B ↓
6. A-A3-A6-A7-B ↓

若在 $N \times M$ 的街道中，设置一个矩形障碍区域（包括围住该区域的街道）不让行人通行，如图一中用“*”表示的部分。 ↓

此矩形障碍区域用 2 对顶点坐标给出，图一中的 2 对顶点坐标为：(2, 2), (8, 4)，此时从 A 出发到达 B 的路径仅有两条。 ↓

程序要求 ↓

任务一：给出 N, M 后，求出所有从 A 出发到达 B 的路径的条数。 ↓

任务二：给出 N, M ，同时再给出此街道中的矩形障碍区域的 2 对顶点坐标 $(X1, y1), (X2, Y2)$ ，然后求出此种情况下所有从 A 出发到达 B 的路径的条数。 ↓

【输入文件】 第一行若为 1，表示执行任务一，然后 N 和 M ；若为 2，表示执行任务二，然后 N 和 M ，第 2,3 行，分别为 2 对顶点坐标，用空格分开； ↓

【输出文件】 输出相应的结果。 ↓

【样例输入】 1 2 2 ↓

【样例输出】 2 ↓

阶段练习

- 错排问题 【1244】
- 最小伤害 【1271】
- 路径计数1 【1272】
- 路径计数2 【1273】
- 过河卒 【1209】
- 街道问题 【1226】

1.4 递推算法



■ 进阶练习1 位数问题【1266】

【问题描述】 在所有的N位数中，有多少个数中有偶数个数字3？由于结果可能很大，你只需要输出这个答案mod 12345的值。

【文件输入】 读入一个数N($1 \leq N \leq 1000$)

【文件输出】 输出有多少个数中有偶数个数字3。

【样例输入】 2

【样例输出】 73

1.4 递推算法



■ 进阶练习2 铺磁砖问题【1267】

【问题描述】 用 1×1 和 2×2 的磁砖不重叠地铺满 $N \times 3$ 的地板，问共有多少种不同的方案？

【文件输入】 输入一个整数 n ($1 \leq N \leq 1000$)。

【文件输出】 输出方案数，由于结果可能很大，你只需要输出这个答案 mod 12345 的值。

【样例输入】 2

【样例输出】 3

1.4 递推算法



■ 进阶练习2 铺磁砖问题【1267】

【题目分析】

先设一个 f 表示 $i*3$ 的地板铺的方法, $f[1]=1$; $f[2]=3$;

$i*3$ 的地板数是这样得到的:

$(i-1)*3$ 的地板比 $i*3$ 的地板少的地方全铺上 $1*1$ 的瓷砖, 这有一种铺法;

或者

在 $(i-2)*3$ 的地板比 $i*3$ 的地板少的地方铺上 $2*2$ 的瓷砖和2个 $1*1$ 的瓷砖, 这有两种铺法;

所以得到递推式: $f=f[i-1]+2*f[i-2]$;

1.4 递推算法



■ 进阶练习3 路程问题【1268】

【问题描述】从原点出发，一步只能向右走、向上走或向左走。恰好走N步且不经经过已走的点共有多少种走法？

【文件输入】输入一个整数n ($1 \leq n \leq 1000$)。

【文件输出】输出走法数。由于结果可能很大，你只需要输出这个答案 mod 12345 的值。

【样例输入】 2

【样例输出】 7

■ 进阶练习4 编码 【】

【问题描述】 编码工作常被运用于密文或压缩传输。这里我们用一种最简单的编码方式进行编码：把一些有规律的单词编成数字。

字母表中共有26个小写字母{a,b,c...,z}。这些特殊的单词长度不超过6且字母按照升序排列。把所有这样的单词放在一起，按字典顺序排列，一个单词的编码就对应着它在字典中的位置，例如：a-1;b-2;z-26;ab-27;ac-28;你的任务就是对于所给的单词，求出它的编码。

【文件输入】 仅一行，被编码的单词。

【文件输出】 仅一行，对应的编码。如果单词不在字母表中，输出0。

【样例输入】 ab

【样例输出】 27

1.4 递推算法



■ 进阶练习4 编码 【】

【算法分析】 算法的思想如下：

①设计一个计算 $C(n,m)$ 的函数

②初始化，读入字符串

③计算1~len-1的所有单词个数

```
for(i=1;i<=len-1;i++) ans+=C(26,i);
```

④计算“零头”

```
for(i=0;i<=len-1;i++)
```

//从第2个字母开始,依次计算它们带来的零头

⑤输出结果ans;

1.4 递推算法



■ 进阶练习5 圆周上的弦【1269】

【问题描述】 圆周上有 N 个点。连接任意多条（可能是0条）不相交的弦（共用端点也算相交）共有多少种方案？

【文件输入】 输入一个整数 n ($1 \leq N \leq 1000$)。

【文件输出】 输出方案数。由于结果可能很大，你只需要输出这个答案 mod 12345 的值。

【样例输入】 4

【样例输出】 9