巴蜀中學 BASHU SECONDARY SCHOOL

树的进阶练习

主讲老师：党东

【前向星】

存储结构：前向星

```
int h[Maxn],cnt;                //h[i]储存的是以i为起点的Edge所在的下标
struct Edge{
    int to,next;
}e[Maxn*2];
void AddEdge(int x,int y){      //添加一条新的边
    ++cnt;                      //增加1条边
    e[cnt].to=y;                //当前 边 的目的地to 为 y
    e[cnt].next=h[x];           //当前边Edge连接前一条以x作起点的边h[x]
    h[x]=cnt;                   //h[x]储存当前边所在的下标cnt
}
```

【遍历以x为根的子树】

遍历以x为根的子树

```
void DFS(int x,int prt)                    //遍历以x为根的子树
{  int i,y;
   //根据计算方法添加合适代码
   for(i=h[x];i;i=a[i].next)               //依次递归遍历x的每一个儿子
   {  y=a[i].to;
      if(y==prt)continue;                  //当x的儿子y等于x的父亲prt时，跳过
      DFS(y,x);
      //根据计算方法添加合适代码]
   }
}
```

【例1】切割树 --1558

Description

有一个N个节点的无根树，各节点编号为1..N，现在要求你删除其中的一个点，使分割开的连通块中节点个数都不超过原来的一半多。

Input

第一行：一个整数N。

后面有N-1行：每行两个整数 X 和 Y，表示一个边连接的两个节点号。

Output

输出所有可能选择的点。如果有多个节点，按编号从小到大输出，每个一行。如果找不到这样的点，输出一行："NONE".

【例1】切割树 --1558

Sample Input

10
1 2
2 3
3 4
4 5
6 7
7 8
8 9
9 10
3 8

Sample Output

3
8

【例1】切割树 --1558

【题目分析】

因为是一棵无根树，所以随便找一个点当根节点，做一次dfs。

s[i]统计以i为根节点时共有多少个节点，

最后如果一个点所有儿子的s都不超过n的一半

且总结点减去此节点的s值也不超过n的一半，那么这个点就可以删除。

【例1】切割树 --1558

【核心代码】

```
void dfs(int x)
{
    int i,y;
    sum[x]=1;vis[x]=1;
    for(i=h[x];i;i=a[i].next)
    {
            y=a[i].to;
            if(vis[y]) continue;
            dfs(y);
            sum[x]+=sum[y];
            ans[x]=max(ans[x],sum[y]);
    }
}
```

【例2】平均距离 --1556

Description

给定一个含n个点的无向连通图，任意两点间有且仅有一条路径，求两点间距离的平均值，即 $\sum dis_{ij}/(n*n-n)$ $(1\le i\le n, 1\le j\le n)$

Input

第一行一个正整数n；

接下来n-1行每行3个正整数a b c，表示a b两点间有一条长度为c的边。

Output

输出两点间平均距离，保留两位小数。

Sample Input

```
4
1 2 1
2 3 1
2 4 1
```

Sample Output

```
1.50
```

【例2】平均距离 --1556

【思路分析】

题中的无向图实际上是一棵树，数据结构推荐用邻接表或 边表。

【算法一】做n次dfs(或bfs)，每次求出一个点到其他所有点的距离，然后加起来除以(n^2-n)，复杂度O(n^2)。

【算法二】考虑树中的每条边，如果把它拿掉，则树被分成两部分；边两端的点数分别为A和B，这条边被经过的次数就是A*B，它对总的距离和的贡献就是(A*B*此边长度)， 求和再除以总路径数N*(N-1)/2

设其中一部分有c个顶点，则次条边在平均距离中的贡献为：**权值*c*(n-c)/(n2-n)**

那么就是求每条边两端点的个数计算一次dfs解决

任取一点为根，在dfs的过程中，对每个点k记录其子树包含的点数（包括自身）

设点数为a[k]，则k的父亲一侧的点数即为N-a[k] ，统计和遍历同时进行 故时间复杂度为O(n)

【例2】平均距离 --1556

【核心代码】

```
void DFS(int x)
{
   int i,y;
   vst[x]=1;son[x]=1;
   for(i=h[x];i;i=a[i].next)
   {  y=a[i].to;
        if(!vst[y])
        {  DFS(y);
           sum+=(long long)son[y]*(n-son[y])*a[i].v;
           son[x]+=son[y];
        }
   }
}
```

【例3】最轻的天平 --1557

【题目描述】天平的两边有时不一定只能挂物品，还可以继续挂着另一个天平，现在给你一些天平的情况和他们之间的连接关系，要求使得所有天平都能平衡所需物品的总重量最轻，一个天平平衡当且仅当“左端点的重量*左端点到支点的距离=右端点的重量*右端点到支点的距离”。注意题目中的输入保证这些天平构成一个整体。

【输入格式】第一行包含一个N(N<=100),表示天平的数量，天平编号为1到N，接下来包含N行描述天平的情况，每行4个整数P,Q,R,B；P和Q表示横杆上支点到左边的长度与到右边的距离的比例为P:Q；R表示左边悬挂的情况，如果R=0说明悬挂的物品，否则表示左边悬挂的是天平R；B表示右边的悬挂情况，如果B=0表示右边悬挂的是物品，否则右边悬挂着天平B。

对于所有的输入，保证W*L<231,其中W为最轻的物品重量，而L为输入中描述左右比例时出现的最大值。

【输出格式】输出一个整数表示使得所有天平都平衡所需最轻的物品总重量。

【例3】最轻的天平 --1557

【样例输入】

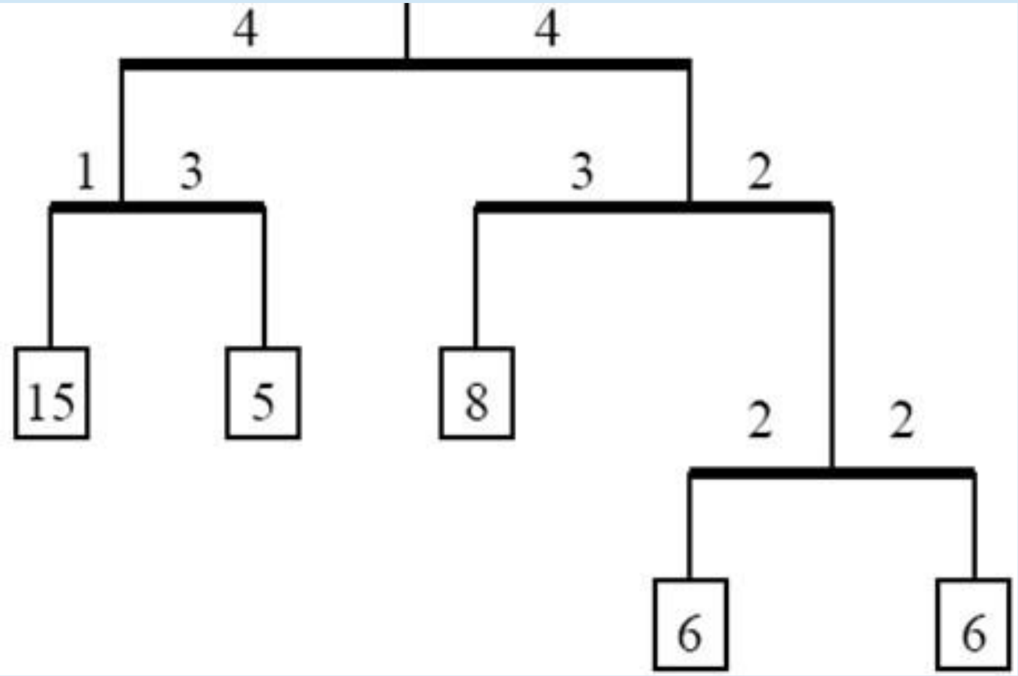
4

3 2 0 4

1 3 0 0

4 4 2 1

2 2 0 0



【样例输出】 40

【数据规模】 对于30%的数据，保证有n=1；

对于100%的数据，保证有n<=100；

【例3】最轻的天平 --1557

【思路分析】

要想一个天平平衡，首先要使得左右天平两边平衡。

假设左右两边的最轻重量 分别为W1,W2，设该天平左右两边的比例为L1:L2，

要想使得该天平衡，可能左边要放大倍数 X，右边要放大倍数 Y

则有以下关系式： W1*X*L1=W2*L2*Y;

即X/Y=(W2*L2)/(W1*L1),要想使天平重量最小，必须把X/Y化为最简分数，

所以需要求出 W2*L2和W1*L1的最大公约数P，

则X=W2*L2 div P， Y=W1*L1 div P，整个天平的重量为 W1*X+W2*Y。

【例3】最轻的天平 --1557

【核心代码】

```
int DFS(int x)
{  int L,R,d;
   if(x==0)return 1;
   L=DFS(a[x][3]);
   R=DFS(a[x][4]);
   d=gcd(L*a[x][1],R*a[x][2]);
   return L*(R*a[x][2]/d)+R*(L*a[x][1]/d);
}
```

【思考】奶牛大集会（USACO2010 MAR）1559

【问题描述】佳佳正在计划一年一度的奶牛大集会，来自全国各地的奶牛将来参加这一次集会。当然她会选择最方便的地点来举办这次集会。

每只奶牛居住在N(1<=N<=100,000) 个农场中的一个，这些农场由N-1条道路连接，并且从任意一个农场都能够到达另外一个农场。道路i连接农场A_i和B_i(1<=A_i<=N; 1<=B_i<=N),长度为L_i(1<=L_i <=1,000)。集会可以在N个农场中的任意一个举行。另外，每个牛棚中居住者C_i(0<=C_i<=1,000)只奶牛。

在选择集会的地点的时候，佳佳希望最大化方便的程度(也就是最小化不方便程度)。比如选择第X个农场作为集会地点，它的不方便程度是其它牛棚中每只奶牛去参加集会所走的路程之和，(比如，农场i到达农场X的距离是20，那么总路程就是C_i*20)。帮助佳佳找出最方便的地点来举行大集会。

　考虑一个由五个农场组成的国家，分别由长度各异的道路连接起来。在所有农场中，3号和4号没有奶牛居住。

```
 1         3         4         5
 @--1--@--3--@--3--@[2]
[1]        |
           2
           |
           @[1]
           2
```

【思考】奶牛大集会（USACO2010 MAR）1559

佳佳可以在五个农场中的任意一个举办集会，下面就是在每个位置举办集会的不方便值的统计表。

集会地点	-----		不方便程度		------	
	B1	B2	B3	B4	B5	Total
1	0	3	0	0	14	17
2	3	0	0	0	16	19
3	1	2	0	0	12	15
4	4	5	0	0	6	15
5	7	8	0	0	0	15

若佳佳在农场1举办集会，那么每个农场各自的不方便值分别是

农场1 0--到达不需要时间!

农场2 3--总的距离是 2+1=3 x 1 奶牛 = 3

农场3 0--没奶牛!

农场4 0--没奶牛!

农场5 14--总的距离是 3+3+1=7 x 2 奶牛 = 14

因此，总的不方便值是17。

最小不方便值是15,当在3号，4号或者5号农场举办集会的时候。

【思考】奶牛大集会（USACO2010 MAR）1559

【文件输入】

第1行：一个整数N。

第2到N+1行：第i+1行有一个整数C_i。

第N+2行到2*N行：

第i+N+1行为3个整数：A_i,B_i和L_i。

【文件输出】 输出文件仅有一行为一个值，表示最小的不方便值。

【样例输入】

5
1
1
0
0
2
1 3 1
2 3 2
3 4 3
4 5 3

【样例输出】 15