

---

# Fluid Mechanics

**basics**

**14 apr 2025**



---

## Incompressible Fluid Mechanics

---



If you want to start a new basics-book, it could be a good idea to start from this template.

Please check out the Github repo of the project, [basics-book project](#).

- Incompressible Fluid Mechanics
  - *Statics*
  - *Surface tension*
  - *Kinematics*
  - *Balance equations*
  - *Bernoulli theorems and vorticity dynamics*
  - *Exact solutions of Navier-Stokes equations*
  - *Similitude*
  - *Aerodynamics*
  - *Boundary layer*
  - *Instability and turbulence*



## 1.1 Definizione di fluido

Un fluido è un materiale che non è in grado di sopportare sforzi di taglio, quando è in quiete o in moto con velocità uniforme in un sistema di riferimento inerziale (invarianza galileiana). I fluidi «ordinari» sono isotropi, cioè sono indipendenti dall'orientazione nello spazio. Un fluido isotropo in quiete è quindi caratterizzato da uno stato di sforzo idrostatico,

$$\mathbb{T}^{(s)} = -p\mathbb{I} ,$$

avendo indicato con  $\mathbb{T}^{(s)}$  il tensore degli sforzi in quiete,  $p$  la pressione all'interno del fluido e  $\mathbb{I}$  il tensore identità. Il vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$  agente su una superficie di fluido con normale  $\hat{\mathbf{n}}$  si ottiene tramite il **teorema di Cauchy** per i mezzi continui

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} ,$$

che lega il vettore sforzo al tensore degli sforzi tramite il versore normale alla superficie considerata, e che nel caso di fluido in quiete, diventa

$$\mathbf{t}_n^{(s)} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T}^{(s)} = -p\hat{\mathbf{n}} .$$

Per il principio di azione e reazione, lo sforzo agente su un materiale a contatto con un fluido è di intensità uguale e direzione opposta. La risultante  $\mathbf{R}$  delle forze agenti su un volume di fluido  $V$  è data dalla somma dell'integrale su  $V$  delle forze di volume  $\mathbf{f}$  e dell'integrale sulla superficie  $S$ , contorno del volume  $V$ , del vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$ ,

$$\mathbf{R} = \int_V \mathbf{f} + \oint_S \mathbf{t}_n .$$

## 1.2 Equazione di equilibrio: forma integrale e differenziale

Un sistema meccanico è in equilibrio quando la risultante delle forze esterne e la risultante dei momenti esterni agenti sul fluido sono nulle,

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{R}^{ext} \\ \mathbf{0} = \mathbf{M}^{ext} . \end{cases}$$

Per un mezzo continuo non polare, è possibile dimostrare che l'equilibrio ai momenti si riduce alla condizione di simmetria del tensore degli sforzi. L'equilibrio delle forze agenti su un volume di fluido  $V$  in quiete, delimitato dalla superficie  $\partial V = S$ , soggetto a forze per unità di volume  $\mathbf{f}$  in  $V$  e forze per unità di superficie  $\mathbf{t}_n = -p\mathbf{n}$  su  $S$  diventa

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}^{ext} = \int_V \mathbf{f} + \oint_S \mathbf{t}_n = \int_V \mathbf{f} - \oint_S p\mathbf{n} .$$

La condizione appena ottenuta è una **condizione di equilibrio integrale**, per l'intero volume fluido  $V$ . Se il campo di pressione  $p$  è sufficientemente regolare, è possibile applicare il teorema del gradiente ([thm:grad]{reference-type=»ref» reference=»thm:grad»}) all'integrale di superficie e raccogliere i termini a destra dell'uguale sotto un unico integrale di volume  $V$ ,

$$\mathbf{0} = \int_V (\mathbf{f} - \nabla p) .$$

Poiché la condizione di equilibrio deve essere valida indipendentemente dal volume  $V$  considerato, imponendo che l'integranda sia identicamente nulla, si ottiene l'**equazione di equilibrio in forma differenziale**

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) - \nabla p(\mathbf{r}) = \mathbf{0} ,$$

dove è stata esplicitata la dipendenza dei campi  $\mathbf{f}$ ,  $p$  dall'ordinata spaziale  $\mathbf{r}$ . Nel caso in cui sia noto il campo di forze di volume  $\mathbf{f}$  all'interno del dominio considerato, l'equazione differenziale alle derivate parziali ([eqn:statica:diff]{reference-type=»ref» reference=»eqn:statica:diff»}), con le opportune condizioni al contorno, permette di calcolare il campo di pressione  $p(\mathbf{r})$ .

## 1.3 Legge di Stevino

La legge di Stevino descrive il campo di pressione come funzione della quota, nelle vicinanze della superficie terrestre. La legge di Stevino viene ricavata dall'integrazione dell'equilibrio in forma differenziale ([eqn:statica:diff]{reference-type=»ref» reference=»eqn:statica:diff»}), nel caso in cui le forze di volume siano dovute alla gravità  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{g}(\mathbf{r})$ , avendo indicato con  $\rho(\mathbf{r})$  la densità del fluido e con  $\mathbf{g}$  il campo di accelerazione gravitazionale,

$$-\nabla p(\mathbf{r}) + \rho(\mathbf{r})\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} .$$

Nell'ipotesi di essere sufficientemente vicino alla terra da poter considerare il campo vettoriale  $\mathbf{g}$  uniforme e diretto verso il basso lungo la normale alla superficie terrestre, è possibile scrivere l'equazione precedente in un sistema di coordinate cartesiane. Orientando l'asse  $z$  verso l'alto lungo la normale alla superficie, le tre componenti cartesiane dell'equazione vettoriale sono

$$\begin{cases} \partial p(x, y, z)/\partial x = 0 \\ \partial p(x, y, z)/\partial y = 0 \\ \partial p(x, y, z)/\partial z = -\rho(x, y, z)g . \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ricava che il campo di pressione non può dipendere dalle coordinate  $x$ ,  $y$  ed è quindi solo funzione di  $z$ . Poiché il campo di pressione dipende solo da  $z$ ,  $p = P(z)$ , la terza equazione diventa un'equazione differenziale ordinaria,

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(x, y, z)g ,$$



alla quale deve essere aggiunta una condizione al contorno del tipo  $P(z_0) = p_0$ .<sup>1</sup> Senza ulteriori ipotesi, il problema composto dall'equazione ([eqn:statica:Pz]{reference-type=»ref» reference=»eqn:statica:Pz»}) e dalla condizione al contorno necessaria ha come incognite il campo di pressione  $P$  e il campo di densità  $\rho$ . In generale, per risolvere il problema è necessario la legge di stato del fluido che mette in relazione i due campi. Nell'ipotesi che la densità  $\rho$  e la forza di gravità siano costanti, la soluzione del problema ([eqn:statica:Pz]{reference-type=»ref» reference=»eqn:statica:Pz»}) coincide con la *legge di Stevino*,

$$p(z) + \rho g z = p_0 = \text{cost} ,$$

avendo orientato l'asse  $z$  verso l'alto e imposto la condizione al contorno in  $z_0 = 0$ .

### Exercise 1.1

Utilizzando la legge di stato dei gas perfetti per l'aria,  $P = \rho R T$ , e l'approssimazione lineare dell'andamento della temperatura con la quota  $z$ , con gradiente termico  $dT/dz = a = -6.5^\circ/km$ , si ricavi l'andamento con la quota  $z$  delle variabili termodinamiche  $(P, \rho, T)$  per l'atmosfera standard. Si trascuri l'andamento di  $g$  con la quota. Trascurando la curvatura terrestre, si utilizzi un sistema di coordinate cartesiane per scrivere le componenti dell'equazione vettoriale ([eqn:statica:diff:g]{reference-type=»ref» reference=»eqn:statica:diff:g»}).

### Exercise 1.2

[[exe:stdatm:sphe]]{#exe:stdatm:sphe label=»exe:stdatm:sphe»} Utilizzando la legge di stato dei gas perfetti per l'aria,  $P = \rho R T$ , e l'approssimazione lineare dell'andamento della temperatura con la quota  $r$ , con gradiente termico  $dT/dr = a = -6.5^\circ/km$ , si ricavi l'andamento con la quota  $r$  delle variabili termodinamiche  $(P, \rho, T)$  per l'atmosfera standard, senza trascurare l'effetto della curvatura terrestre. Si utilizzi un sistema di coordinate sferiche per scrivere le componenti dell'equazione vettoriale ([eqn:statica:diff:g]{reference-type=»ref» reference=»eqn:statica:diff:g»}). Si valuti poi l'errore che si commette nell'esercizio [exe:stdatm:cart]{reference-type=»ref» reference=»exe:stdatm:cart»} trascurando la curvatura terrestre sul calcolo delle variabili termodinamiche a quota  $z = 10 km$ .

## 1.4 Galleggiamento di un corpo immerso in un fluido

Un corpo immerso in fluido riceve dal basso verso l'alto una spinta uguale al peso della massa del fluido spostato. Se un corpo di volume  $V_s$  immerso in un fluido  $\rho_f$  ne sposta un volume  $\tilde{V}_f$ , su di esso agisce una forza (di Archimede o di galleggiamento)

$$\mathbf{F}_{Arch} = -\rho_f \tilde{V}_f \mathbf{g} = - \int_{\tilde{V}_f} \rho_f \mathbf{g} .$$

La legge di Archimede vale per un sistema immerso nel campo di gravità  $\mathbf{g}$ , uniforme in spazio. Forze di galleggiamento nascono su un corpo immerso in un fluido in cui c'è un gradiente di pressione. La legge di Archimede è solo un caso particolare di galleggiamento, forse il più evidente, per il quale il campo di gravità è all'origine del gradiente di pressione. In generale, la forza di galleggiamento su un corpo immerso completamente in un fluido vale

$$\mathbf{F}_{gall} = - \int_{S_s} p \hat{\mathbf{n}} = - \int_{V_s} \nabla p .$$

Un esempio di galleggiamento di interesse aeronautico si incontra quando si svolge un esperimento in galleria del vento, se nella camera di prova è presente un gradiente di pressione diretto nella direzione  $\hat{\mathbf{x}}$  della corrente. Se in prima approssimazione si considera un gradiente di pressione  $\nabla p = -G_P \hat{\mathbf{x}}$ ,  $G_P > 0$  e costante, si può stimare la forza di

<sup>1</sup> In generale, servono delle condizioni di compabilità dei dati affinché il problema sia risolvibile. Ad esempio, non dovrebbe essere difficile convincersi che il campo di densità deve dipendere solo dalla coordinata  $z$  nel caso considerato.

galleggiamento  $\mathbf{F}_{gall} = V_s G_P \hat{\mathbf{x}}$  dovuta al gradiente di pressione in galleria del vento, assente in condizioni di aria libera. Questa azione contribuisce al valore misurato della resistenza del modello. La valutazione di questa azione «spuria» sul corpo e la correzione delle misure effettuate rientrano nell'ambito delle *correzioni di galleria*.

Si ritorna ora sulla legge di Archimede che descrive le forza di galleggiamento che un fluido esercita su un corpo immerso. Nel problema di un corpo immerso in un fluido, la risultante delle forze di galleggiamento entra nell'equazione di equilibrio del corpo in direzione verticale (direzione della gravità,  $\mathbf{g}$ ). Il punto di applicazione della risultante delle forze di galleggiamento e la sua posizione relativa rispetto al baricentro del corpo influenzano la stabilità delle condizioni di equilibrio.

## 1.5 Risultante delle forze: legge di Archimede

Si considera il problema di un corpo immerso in un fluido di densità uniforme  $\rho$  molto maggiore della densità dell'aria: la pressione agente sulla superficie del corpo esposta all'aria si può considerare costante, uguale a  $p_a$ . La legge di Stevino descrive la distribuzione di pressione all'interno del fluido. Si sceglie l'asse  $z$  in direzione verticale, così che il campo di gravità è  $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$ . Scegliendo l'origine dell'asse  $z$  in corrispondenza del pelo libero, la pressione all'interno del fluido vale  $p(z) = p_a - \rho g z$ , per  $z < 0$ . Facendo riferimento alla figura [fig:archimede\_01]{reference-type=»ref» reference=»fig:archimede\_01»}, si può calcolare la risultante delle forze  $\mathbf{R}$  come

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= - \oint_S p \hat{\mathbf{n}} = - \int_{S_a} p \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_f} p \hat{\mathbf{n}} = \\ &= - \int_{S_a} p_a \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_f} p_a \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_f} \rho g z \hat{\mathbf{n}} = \\ &= - \underbrace{\int_S p_a \hat{\mathbf{n}}}_{=0} + \int_{S_f} \rho g z \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \int_{S_f} \rho g z \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\int_{S_0} \rho g z \hat{\mathbf{n}}}_{=0, z|_{S_0}=0} = \oint_{\tilde{S}_f} \rho g z \hat{\mathbf{n}} = \int_{\tilde{V}_f} \rho g \hat{\mathbf{z}} = \rho \tilde{V}_f g \hat{\mathbf{z}} = M_{\tilde{V}_f} g \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned}$$

avendo sommato l'integrale nullo  $\int_{S_0} \rho g z \hat{\mathbf{n}}$ , per poter ottenere l'integrale di  $\rho g z$  sulla superficie  $\tilde{S}_f = S_f \cup S_0$  e applicare il teorema del gradiente ([thm:grad]{reference-type=»ref» reference=»thm:grad»}). Come stabilito dal principio di Archimede, la risultante delle forze di galleggiamento  $\mathbf{R}$  agenti sul corpo agisce dal basso verso l'alto con un'intensità pari al peso del volume di fluido spostato,  $M_{\tilde{V}_f} g$ .

## 1.6 Punto di applicazione

Il punto di applicazione della forza di galleggiamento è il punto dove bisogna applicare la risultante delle forze per ottenere un sistema di azioni equivalente al sistema di azioni continuo generato dalla pressione. Dall'equivalenza ai momenti dei due sistemi di azioni, si ottiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_O \times \mathbf{R} &= - \oint_S p \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} = - \int_{S_a} p \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_f} p \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= - \int_{S_a} p_a \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_f} p_a \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_f} \rho g z \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= - \underbrace{\int_S p_a \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}}_{=0} + \int_{S_f} \rho g z \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= \int_{S_f} \rho g z \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\int_{S_0} \rho g z \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}}_{=0, z|_{S_0}=0} = \\
 &= \oint_{\tilde{S}_f} \rho g z \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\tilde{S}_f} \rho g \delta_{\ell z} r_\ell \epsilon_{ijk} r_j n_k = \rho g \int_{\tilde{V}_f} \frac{\partial}{\partial r_k} (\delta_{\ell z} r_\ell \epsilon_{ijk} r_j) = \\
 &= \rho g \int_{\tilde{V}_f} \delta_{\ell z} \epsilon_{ijk} \left( \frac{\partial r_\ell}{\partial r_k} r_j + r_\ell \frac{\partial r_j}{\partial r_k} \right) = \\
 &= \rho g \int_{\tilde{V}_f} \delta_{\ell z} \epsilon_{ijk} (\delta_{\ell k} r_j + r_\ell \delta_{jk}) = \\
 &= \rho g \int_{\tilde{V}_f} \epsilon_{ijz} r_j + \delta_{\ell z} \underbrace{\epsilon_{ijj}}_{=0} r_\ell = \\
 &= \rho g \int_{\tilde{V}_f} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{z}}.
 \end{aligned}$$

Usando un sistema di assi cartesiani e ricordando che  $\mathbf{R} = R\hat{\mathbf{z}}$ , si può scomporre l'equazione nelle componenti non nulle,  $x$  e  $y$ ,

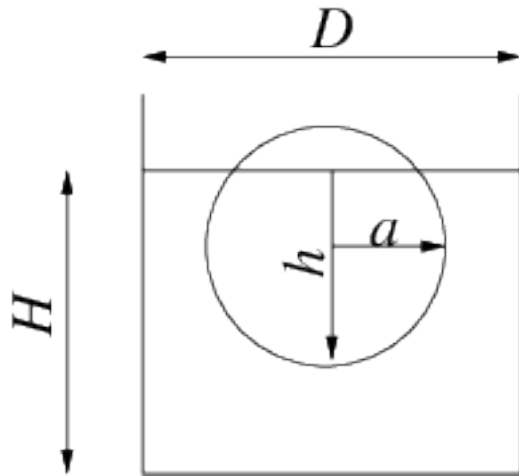
$$\begin{cases} x_0 R = \rho g \int_{\tilde{V}_f} x \\ y_0 R = \rho g \int_{\tilde{V}_f} y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{\rho g}{R} \int_{\tilde{V}_f} x = \frac{1}{\tilde{V}_f} \int_{\tilde{V}_f} x \\ y_0 = \frac{\rho g}{R} \int_{\tilde{V}_f} y = \frac{1}{\tilde{V}_f} \int_{\tilde{V}_f} y. \end{cases}$$

## 1.7 Stabilità statica dell'equilibrio

## 1.8 Exercises

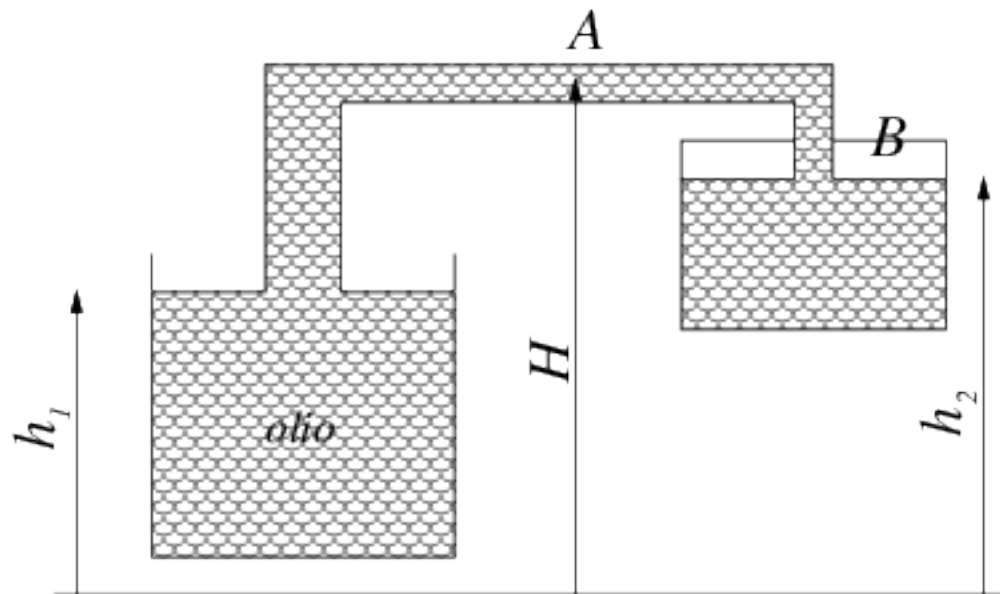
**Exercise 1.1** Si consideri, sulla superficie terrestre, un recipiente di diametro  $D = 2 \text{ m}$  e profondità  $H = 3 \text{ m}$  contenente acqua di densità  $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ . Al suo interno è inserita una sfera di raggio  $a = 0.2 \text{ m}$  e densità pari a  $\rho_s = 842.06 \text{ kg/m}^3$ . Determinare in modo univoco la posizione assunta dalla sfera nel liquido. Tale posizione varia se invece che sulla terra ci si trova sulla Luna?

( $h = 0.3 \text{ m}$ , non varia sulla Luna.)



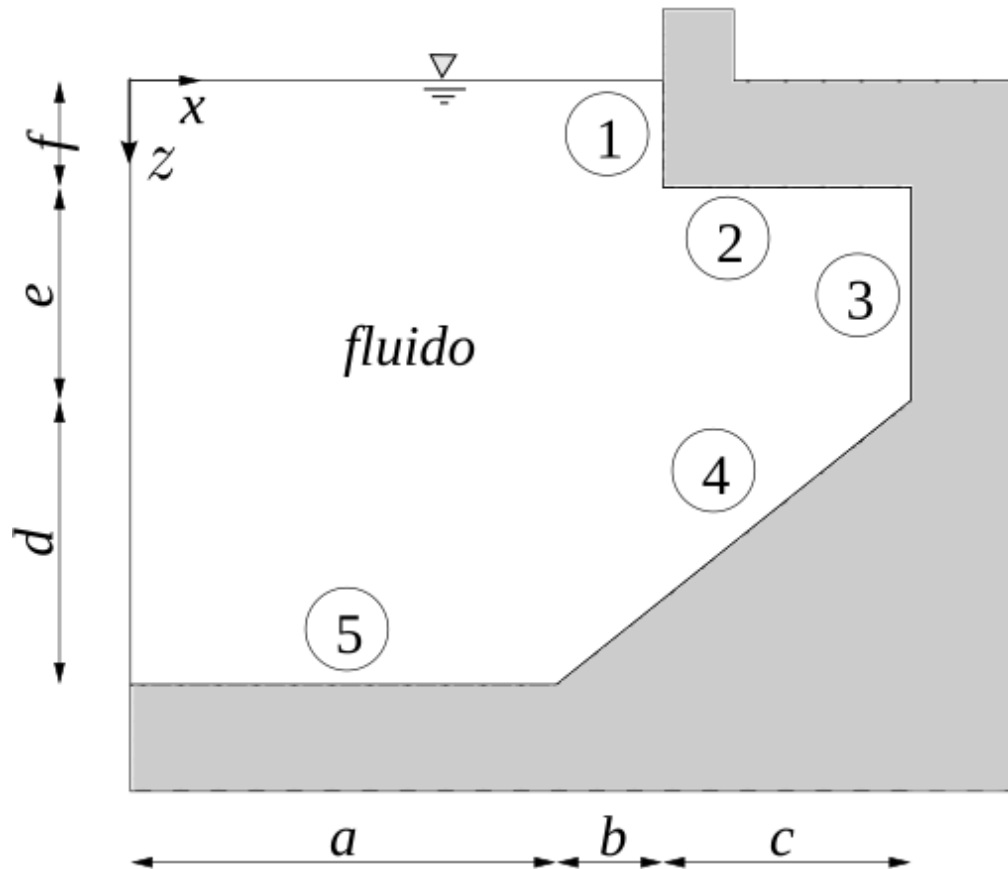
Exercise 1.2 Si consideri il sistema rappresentato in figura in cui un recipiente aperto all'atmosfera, contenente olio con densità  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ , è collegato tramite una tubazione a un secondo recipiente, contenente a sua volta olio e aria non miscelati. Date le due altezze  $h_1 = 1.5 \text{ m}$  e  $h_2 = 1.8 \text{ m}$  del pelo libero nei due recipienti e l'altezza  $H = 2.5 \text{ m}$  della tubatura, determinare il valore della pressione nei punti A e B in figura, esprimendolo sia in Pascal sia in metri d'acqua. Considerare la pressione atmosferica standard ( $101325 \text{ Pa}$ ).

( $p_A = 93477 \text{ Pa} = 9.53 \text{ m}_{H_2O}$ ,  $p_B = 98970.6 \text{ Pa} = 10.10 \text{ m}_{H_2O}$ .)



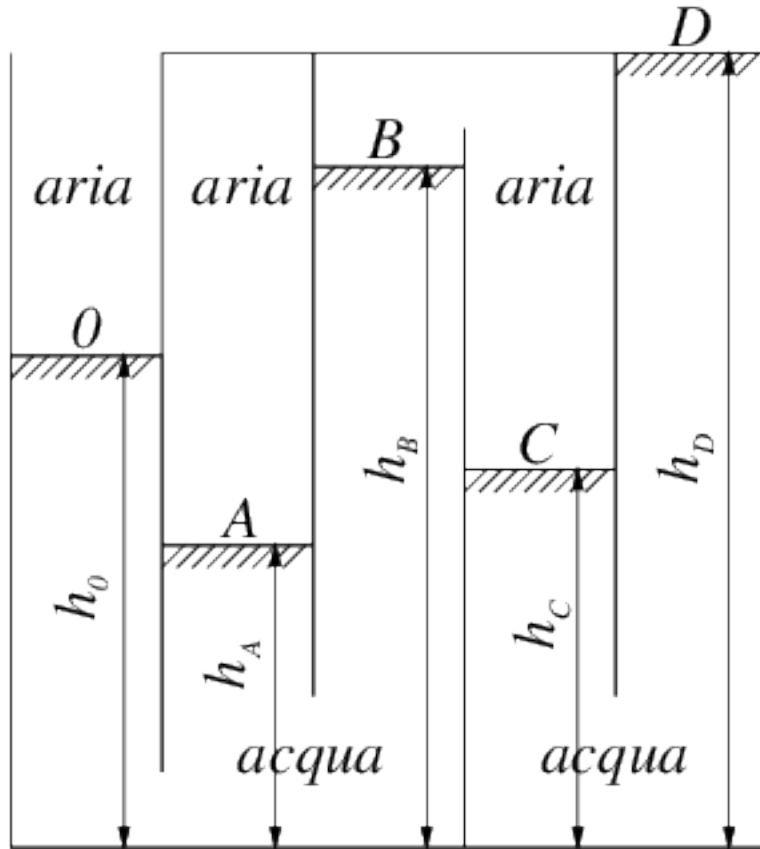
Exercise 1.3 Si consideri la sezione di diga rappresentata in figura. Si determini il modulo e la direzione del risultante delle forze per unità di apertura agente sui diversi tratti rettilinei della diga stessa sapendo che la pressione atmosferica è di  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Dimensioni:  $a = 10 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ ,  $c = 8 \text{ m}$ ,  $d = 10 \text{ m}$ ,  $e = 5 \text{ m}$ ,  $f = 3 \text{ m}$ .

( $\mathbf{R}_1 = 347100\hat{\mathbf{x}} \text{ N/m}$ ,  $\mathbf{R}_2 = -1043200\hat{\mathbf{z}} \text{ N/m}$ ,  $\mathbf{R}_3 = 774500\hat{\mathbf{x}} \text{ N/m}$ ,  $\mathbf{R}_4 = 2284000\text{N/m}\hat{\mathbf{x}} + 2284000\text{N/m}\hat{\mathbf{z}}$ ,  $\mathbf{R}_5 = 2774000\hat{\mathbf{z}} \text{ N/m}$ .)



**Exercise 1.4** Si consideri il sistema di recipienti rappresentato in figura, in cui la zona tratteggiata contiene acqua, di densità pari a  $10^3 \text{ kg/m}^3$  mentre nella restante parte é presente aria di densità pari a  $1.2 \text{ kg/m}^3$ . Determinare la pressione nei punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sapendo che le rispettive altezze sono  $h_A = 1 \text{ m}$ ,  $h_B = 1.4 \text{ m}$ ,  $h_C = 1.2 \text{ m}$  e  $h_D = 1.6 \text{ m}$ . Sia inoltre  $h_0 = 1.3 \text{ m}$  e la pressione esterna  $P_0 = 101325 \text{ Pa}$ .

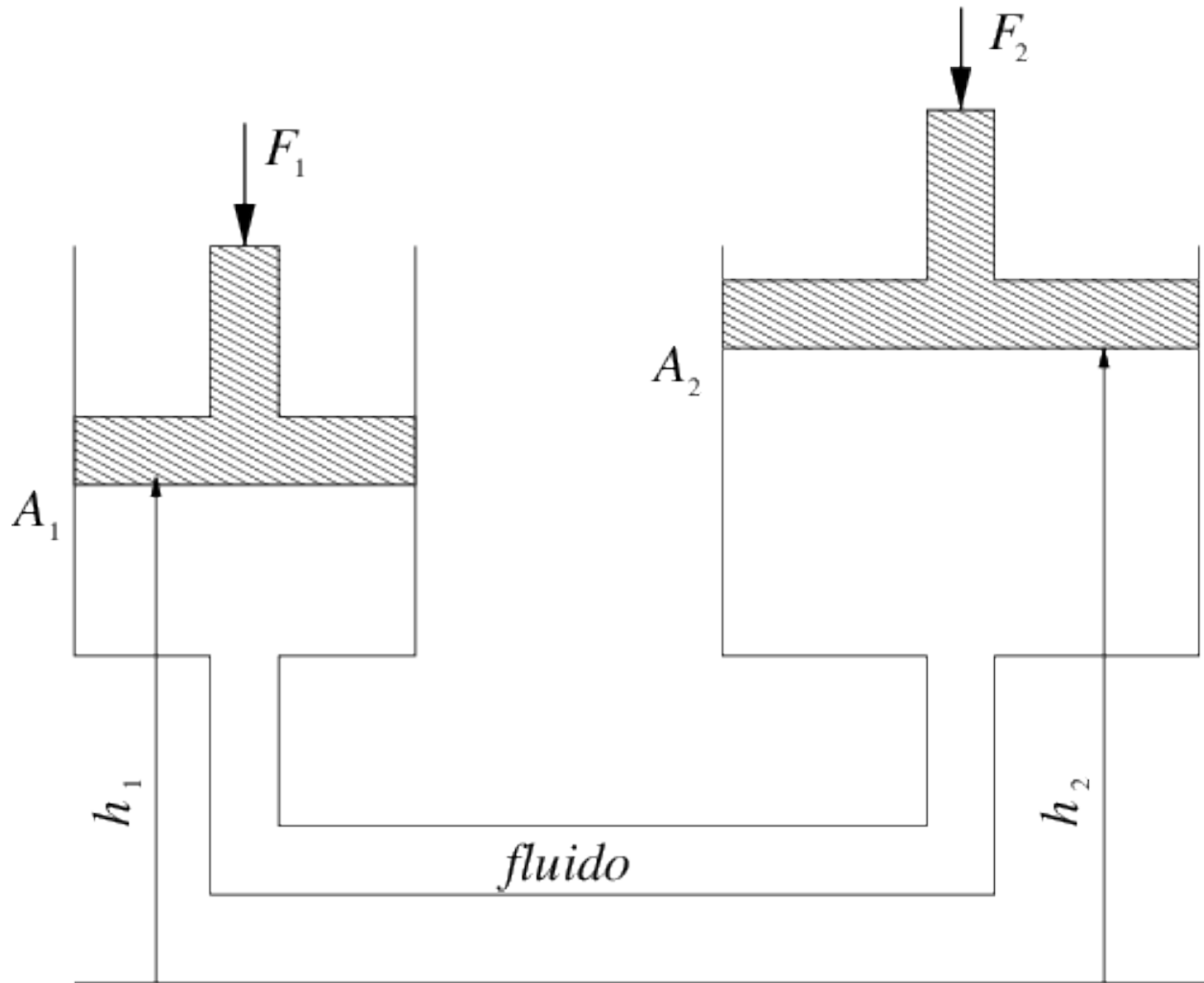
( $P_A = 104262 \text{ Pa}$ ,  $P_B = 100346 \text{ Pa}$ ,  $P_C = 100348 \text{ Pa}$ ,  $P_D = 97424 \text{ Pa}$ .)



Exercise 1.5 La leva idraulica, rappresentata in figura, é formata da due sistemi cilindro-pistone. Determinare la forza che é necessario applicare al secondo pistone per mantenere il sistema in equilibrio quando sul primo agisce una forza  $F_1 = 5000 \text{ N}$ , allorché i pistoni si trovano nella posizione indicata in figura.

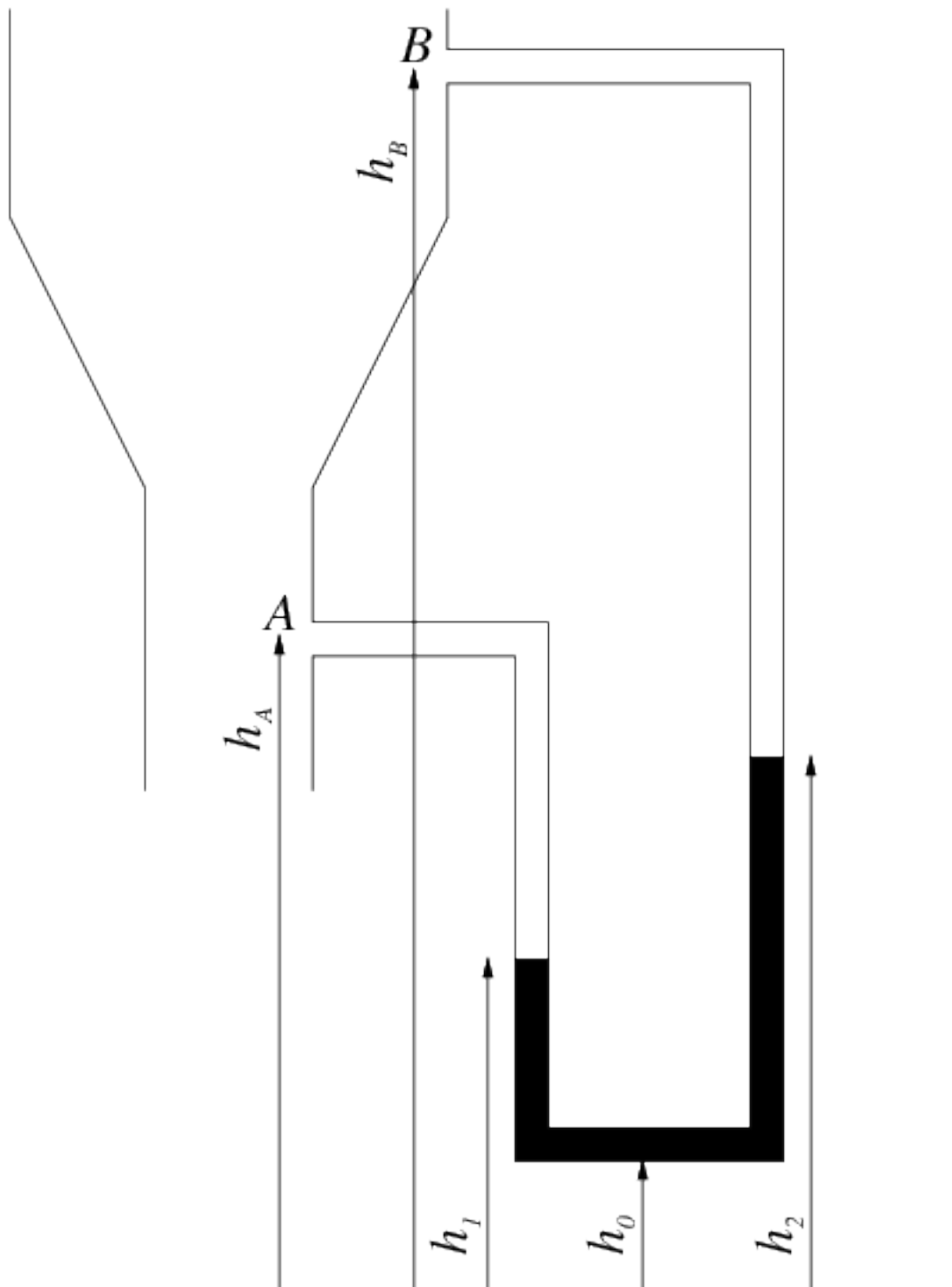
Dati: diametro primo cilindro:  $d_1 = 0.2 \text{ m}$ ; diametro secondo cilindro:  $d_2 = 0.4 \text{ m}$ ; diametro del condotto che unisce i due cilindri:  $0.025 \text{ m}$ ; densità del fluido di lavoro:  $600 \text{ kg/m}^3$ ; altezza del primo pistone  $h_1 = 1 \text{ m}$ , altezza del secondo pistone  $h_2 = 2 \text{ m}$ .

( $p_1 = 159155 \text{ Pa}$ ,  $p_2 = 153269 \text{ Pa}$ ,  $\mathbf{F}_2 = -19260.3\hat{\mathbf{z}} \text{ N}$ .)



Exercise 1.6 Si consideri il manometro riportato in figura utilizzato per misurare la differenza di pressione esistente fra due sezioni diverse di un condotto. Determinare la differenza di pressione fra i punti  $A$  e  $B$  riportati sul disegno sapendo che il liquido manometrico é acqua e ha una densità di  $998 \text{ kg/m}^3$ , che il fluido che scorre all'interno del condotto é aria e ha una densità di  $1.225 \text{ kg/m}^3$ , che  $h_A = 1 \text{ m}$ , che  $h_B = 1.2 \text{ m}$ , che  $h_0 = 0.1 \text{ m}$ , che  $h_1 = 0.3 \text{ m}$  e che  $h_2 = 0.7 \text{ m}$ .

$$(p_B - p_A = -3913.75 \text{ Pa})$$

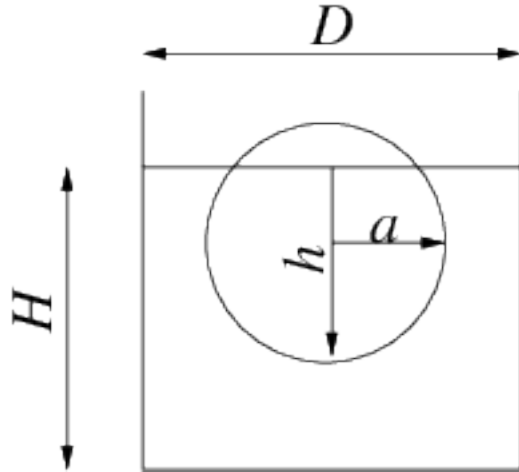




### 1.8.1 Exercise 1.1

**Exercise 1.1** Si consideri, sulla superficie terrestre, un recipiente di diametro  $D = 2\text{ m}$  e profondità  $H = 3\text{ m}$  contenente acqua di densità  $\rho = 998\text{ kg/m}^3$ . Al suo interno è inserita una sfera di raggio  $a = 0.2\text{ m}$  e densità pari a  $\rho_s = 842.06\text{ kg/m}^3$ . Determinare in modo univoco la posizione assunta dalla sfera nel liquido. Tale posizione varia se invece che sulla terra ci si trova sulla Luna?

( $h = 0.3\text{ m}$ , non varia sulla Luna.)



**Concetti.** Legge di Archimede. Condizione di equilibrio. Calcolo del volume di solidi (integrali di volume). Adimensionalizzazione. Soluzione di semplici equazioni non lineari per via grafica (studio di funzione) e/o numerica.

**Svolgimento.** Per svolgere l'esercizio bisogna calcolare la condizione di equilibrio del corpo, soggetto alla propria forza peso e alla forza che il fluido esercita su di esso (legge di Archimede). Nell'equazione di equilibrio, l'incognita  $h$  compare nella formula del volume immerso nel fluido. L'equazione di equilibrio è un'equazione non lineare in  $h$ , da risolvere per via grafica o numerica.

- Scrittura dell'equazione di equilibrio del corpo soggetto al proprio peso e alla forza esercitata su di esso dal fluido, diretta verso l'alto e pari al peso del volume del fluido spostato (legge di Archimede).  $\rho_s V_s g = \rho V_c g \Rightarrow \rho_s V_s = \rho V_c$

*Osservazione.* Si trova subito la risposta all'ultimo quesito: poiché  $g$  non compare nell'equazione di equilibrio, la condizione di equilibrio sulla Luna è uguale a quella che si ha sulla Terra.

- Calcolo del volume della sfera e della calotta sferica:

– Volume della sfera:  $V_s = \frac{4}{3}\pi a^3$

– Volume della calotta sferica:  $V_c = \pi h^2(a - \frac{h}{3})$

(per credere, verificare casi limite:  $h = 0$ ,  $h = a$ ,  $h = 2a$ ; alla fine dell'esercizio è riportato il calcolo, tramite un integrale di volume)

- Le formule per i volumi  $V_c$  e  $V_s$  sono inserite nell'eq. [eqn:equil\_archimede]{reference-type=>ref» reference=>eqn:equil\_archimede». L'equazione viene semplificata e scritta in forma adimensionale, introducendo la variabile  $x = \frac{h}{a}$ , per mettere in evidenza il parametro che governa il problema, cioè il rapporto di densità  $\rho_s/\rho$ . L'equazione di terzo grado in  $x$  viene risolta, considerando i limiti fisici del problema ( $0 \leq x \leq 2$ ):  $\rho_s \pi h^2(a - \frac{h}{3}) = \rho_s \frac{4}{3}\pi a^3 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2(1 - \frac{x}{3}) = \frac{\rho_s}{\rho}$  Alcuni metodi per risolvere equazioni non lineari possono essere ad esempio:

- metodi iterativi. Ad esempio metodo di Newton

x	res
1.0000	-3.437475e-01
1.4583	-2.406993e-02
1.4990	-5.841602e-04
1.5000	-4.027539e-07
1.5000	-1.924017e-13

- metodo grafico (educativo: per problemi più complicati, prima di calcolare le soluzioni con metodi numerici, è bene avere un'idea di cosa si sta cercando). Si cercano le intersezioni delle funzioni  $f_1(x) = \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right)$  e  $f_2(x) = \frac{\rho_s}{\rho}$ .

*Osservazione.* Per valori di  $\frac{\rho_s}{\rho}$  compresi tra 0 e 1, esiste una e una sola soluzione fisica del problema. Per i valori di densità «estremi»  $\rho_s = 0$  (la sfera non pesa niente),  $\rho_s = \rho_f$  (la sfera ha la stessa densità del fluido), esistono infinite soluzioni: ad esempio, nel caso di  $\rho_s = \rho_f$  la posizione di equilibrio è indipendente dalla profondità alla quale è posta la sfera. Nel grafico, la funzione  $f_1(x)$  rappresenta il volume immerso della sfera (diviso il volume totale della sfera stessa) al variare della distanza  $h$  del punto più basso dal pelo libero: questa deve quindi essere rappresentata, come in figura, nulla per valori di  $x < 0$  (sfera completamente fuori dall'acqua), con il ramo di cubica per  $0 < x < 2$  (sfera parzialmente immersa), uguale a 1 per  $x > 2$  (sfera completamente immersa). La funzione  $f_1(x)$  può quindi essere definita a tratti:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right) & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

*Discussione dei risultati.* Quando diminuisce la densità relativa del solido, la linea rossa si abbassa e la soluzione  $x = \frac{h}{a}$  diminuisce (la sfera ha una porzione maggiore al di fuori dall'acqua). Esiste una e una sola soluzione che abbia senso fisico, fino a quando la densità relativa è compresa tra 0 e 1: non ha senso considerare valori negativi (la densità è una quantità positiva), mentre per valori di  $\frac{\rho_s}{\rho}$  maggiori di 1 non può esistere una condizione di equilibrio statico (la sfera affonda...).

**Calcolo volume cupola sferica.** È comodo svolgere il calcolo in coordinate cilindriche  $(r, \theta, z)$ . Il volume  $V_{im}$  della parte immersa è uguale a

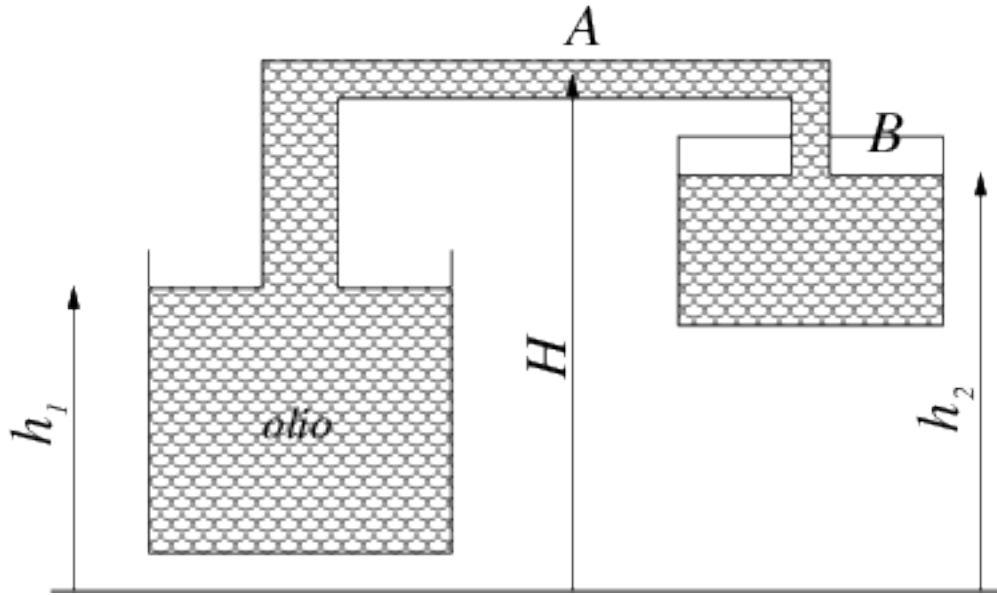
$$\begin{aligned} V_{im} &= \iiint_{V_{im}} dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a}^l \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} dV \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a}^l \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} r dr dz d\theta \\ &= 2\pi \int_{z=-a}^l \frac{a^2 - z^2}{2} dz \\ &= \frac{\pi}{3} [2a^3 + 3a^2l - l^3] \end{aligned}$$

Definendo  $h = R + l$  come la quota immersa della sfera, si ottiene:  $V_{im} = \pi h^2 \left(a - \frac{h}{3}\right)$

### 1.8.2 Exercise 1.2

Exercise 1.2 Si consideri il sistema rappresentato in figura in cui un recipiente aperto all'atmosfera, contenente olio con densità  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ , è collegato tramite una tubazione a un secondo recipiente, contenente a sua volta olio e aria non miscelati. Date le due altezze  $h_1 = 1.5 \text{ m}$  e  $h_2 = 1.8 \text{ m}$  del pelo libero nei due recipienti e l'altezza  $H = 2.5 \text{ m}$  della tubatura, determinare il valore della pressione nei punti A e B in figura, esprimendolo sia in Pascal sia in metri d'acqua. Considerare la pressione atmosferica standard ( $101325 \text{ Pa}$ ).

$$(p_A = 93477 \text{ Pa} = 9.53 \text{ m}_{H_2O}, p_B = 98970.6 \text{ Pa} = 10.10 \text{ m}_{H_2O}.)$$



**Concetti.** Legge di Stevino,  $P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$ . Conversione  $\text{Pa}$  - metri di  $H_2O$ ,  $1 \text{ m}_{H_2O} = P[\text{Pa}] = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot 1 \text{ m} = 9810 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}^2} \cdot 1 \text{ m} = 9810 \text{ Pa}$ .

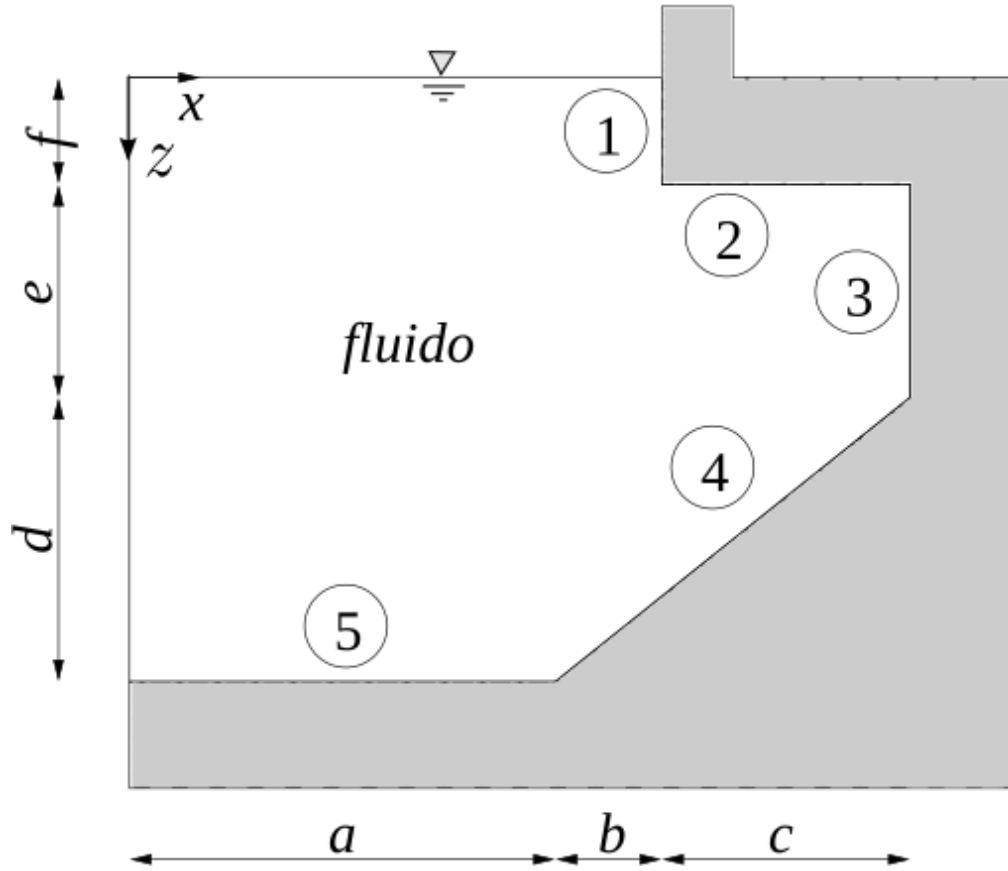
**Svolgimento.** Il problema si risolve applicando due volte la legge di Stevino e la conversione da Pascal  $\text{Pa}$  a metri d'acqua  $\text{m}_{H_2O}$ . Sia  $O$  il punto sul pelo libero nel serbatoio aperto di sinistra, sul quale agisce la pressione ambiente.

$$\begin{cases} P_A = P_O + \rho g(h_1 - H) = 93477 \text{ Pa} = \frac{93477}{9810} \text{ m}_{H_2O} = 9.53 \text{ m}_{H_2O} & (\text{Stevino O-A}) \\ P_B = P_O + \rho g(h_1 - h_2) = 98970.6 \text{ Pa} = \frac{98970.6}{9810} \text{ m}_{H_2O} = 10.10 \text{ m}_{H_2O} & (\text{Stevino O-B}) \end{cases}$$

### 1.8.3 Exercise 1.3

Exercise 1.3 Si consideri la sezione di diga rappresentata in figura. Si determini il modulo e la direzione del risultante delle forze per unità di apertura agente sui diversi tratti rettilinei della diga stessa sapendo che la pressione atmosferica è di  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Dimensioni:  $a = 10 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ ,  $c = 8 \text{ m}$ ,  $d = 10 \text{ m}$ ,  $e = 5 \text{ m}$ ,  $f = 3 \text{ m}$ .

$$(\mathbf{R}_1 = 347100\hat{\mathbf{x}} \text{ N/m}, \mathbf{R}_2 = -1043200\hat{\mathbf{z}} \text{ N/m}, \mathbf{R}_3 = 774500\hat{\mathbf{x}} \text{ N/m}, \mathbf{R}_4 = 2284000\text{N/m}\hat{\mathbf{x}} + 2284000\text{N/m}\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{R}_5 = 2774000\hat{\mathbf{z}} \text{ N/m}.)$$



**Concetti.** Legge di Stevino,  $P_1 + \rho gh_1 = P_2 + \rho gh_2$ . Calcolo della risultante delle azioni statiche, data la distribuzione di pressione e la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  uscente dal volume fluido,  $\mathbf{R} = \int_S P \hat{\mathbf{n}} \, dS$ .

**Svolgimento.** Si risolve il problema bidimensionale, al quale «manca» la dimensione perpendicolare al piano del disegno. La risultante per unità di apertura agente sul lato  $\ell$  (unità di misura nel SI,  $N/m$ ) sarà quindi il risultato dell'integrale di linea

$$\mathbf{R} = \int_{\ell} P \hat{\mathbf{n}} \, d\ell.$$

Per ogni lato si calcola la distribuzione di pressione, grazie alla legge di Stevino. Si integra la distribuzione di pressione per ottenere il modulo della risultante; la direzione coincide con quella della normale (uscente dal volume occupato dal fluido). Per lo svolgimento, è stato scelto il sistema di riferimento rappresentato in figura, con l'asse  $x$  diretto verso destra e l'asse  $z$  verso il basso.

- Lato 1. Pressione lineare in  $z$ ,  $P(z) = P_O + \rho gz$ ,  $z \in [0, f]$ . Risultante

$$\mathbf{R}_1 = \int_{\ell_1} P \hat{\mathbf{n}} \, d\ell = \int_0^f (P_O + \rho gz) \hat{\mathbf{x}} dz = \left( P_O f + \frac{1}{2} \rho g f^2 \right) \hat{\mathbf{x}} = 347100 N/m \hat{\mathbf{x}}$$

- Lato 2. Pressione costante,  $P = P_O + \rho g f$ . Risultante

$$\mathbf{R}_2 = \int_{\ell_2} P \hat{\mathbf{n}} \, d\ell = P \cdot c (-\hat{\mathbf{z}}) = (P_O + \rho g f) \cdot c (-\hat{\mathbf{z}}) = -1043200 N/m \hat{\mathbf{z}}$$

- Lato 3. Pressione lineare in  $z$ ,  $P(z) = P_O + \rho gz$ ,  $z \in [f, f + e]$ . Risultante

$$\mathbf{R}_3 = \int_{\ell_3} P \hat{\mathbf{n}} \, d\ell = \int_f^{f+e} (P_O + \rho gz) \hat{\mathbf{x}} dz = \left( P_O e + \frac{1}{2} \rho g [(f + e)^2 - f^2] \right) \hat{\mathbf{x}} = 774500 N/m \hat{\mathbf{x}}$$

- Lato 4. Pressione lineare in  $z$ ,  $P(z) = P_O + \rho g z$ ,  $z \in [f + e, f + e + d]$ . Poichè il tratto di parete è rettilineo, il vettore normale è costante e può essere portato fuori dall'integrale. Si calcola prima il modulo della risultante e poi lo si moltiplica per il versore normale. Il modulo della risultante vale

$$\begin{aligned}
 R_4 &= \int_{\ell_4} P d\ell = \int_{f+e}^{f+e+d} P(z) \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d} dz = \left( d\ell = \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d} dz \right) \\
 &= \int_{f+e}^{f+e+d} (P_O + \rho g z) \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d} dz = \\
 &= \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d} \left[ P_O d + \frac{1}{2} \rho g ((f+e+d)^2 - (f+e)^2) \right] = \sqrt{2} \cdot 2284000 N/m
 \end{aligned}$$

La forza può essere scritta come  $\mathbf{R}_4 = R_4 \hat{\mathbf{n}}_4$ , con  $\hat{\mathbf{n}}_4 = 1/\sqrt{2} \hat{\mathbf{x}} + 1/\sqrt{2} \hat{\mathbf{z}}$ . Proiettando  $\mathbf{R}_4$  lungo gli assi si ottengono le componenti orizzontali e verticali

$$\mathbf{R}_4 = 2284000 N/m \hat{\mathbf{x}} + 2284000 N/m \hat{\mathbf{z}}$$

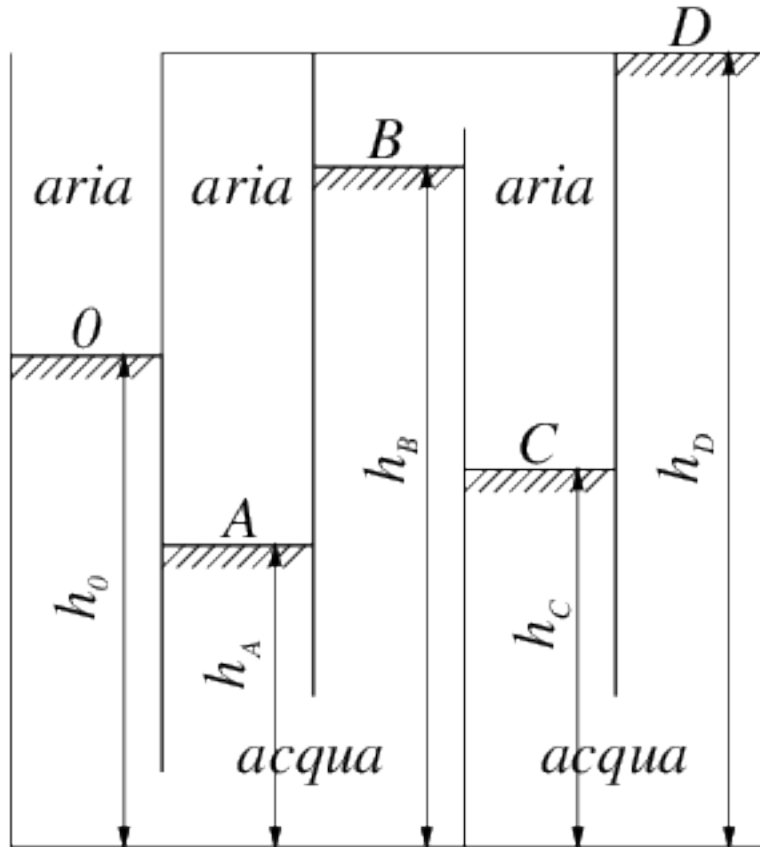
- Lato 5. Pressione costante,  $P = P_O + \rho g(f + e + d)$ . Risultante

$$\mathbf{R}_5 = P \cdot a \hat{\mathbf{z}} = (P_O + \rho g(f + e + d)) \cdot a \hat{\mathbf{z}} = 2774000 N/m \hat{\mathbf{z}}$$

### 1.8.4 Exercise 1.4

Exercise 1.4 Si consideri il sistema di recipienti rappresentato in figura, in cui la zona tratteggiata contiene acqua, di densità pari a  $10^3 \text{ kg/m}^3$  mentre nella restante parte è presente aria di densità pari a  $1.2 \text{ kg/m}^3$ . Determinare la pressione nei punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sapendo che le rispettive altezze sono  $h_A = 1 \text{ m}$ ,  $h_B = 1.4 \text{ m}$ ,  $h_C = 1.2 \text{ m}$  e  $h_D = 1.6 \text{ m}$ . Sia inoltre  $h_0 = 1.3 \text{ m}$  e la pressione esterna  $P_0 = 101325 \text{ Pa}$ .

( $P_A = 104262 \text{ Pa}$ ,  $P_B = 100346 \text{ Pa}$ ,  $P_C = 100348 \text{ Pa}$ ,  $P_D = 97424 \text{ Pa}$ .)



**Concetti.** Legge di Stevino,  $P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$ .

**Svolgimento.** Il problema viene risolto applicando ripetutamente la legge di Stevino, a partire dalla superficie 0 sulla quale agisce la pressione ambiente  $P_0$ . Nella legge di Stevino è necessario prestare attenzione ad usare la densità del fluido che mette in collegamento i due punti considerati. I punti A e B sono messi in collegamento con il punto 0 dall'acqua. I punti B e C sono messi in collegamento tra di loro dall'aria. I punti C e D di nuovo dall'acqua. La soluzione del problema è quindi

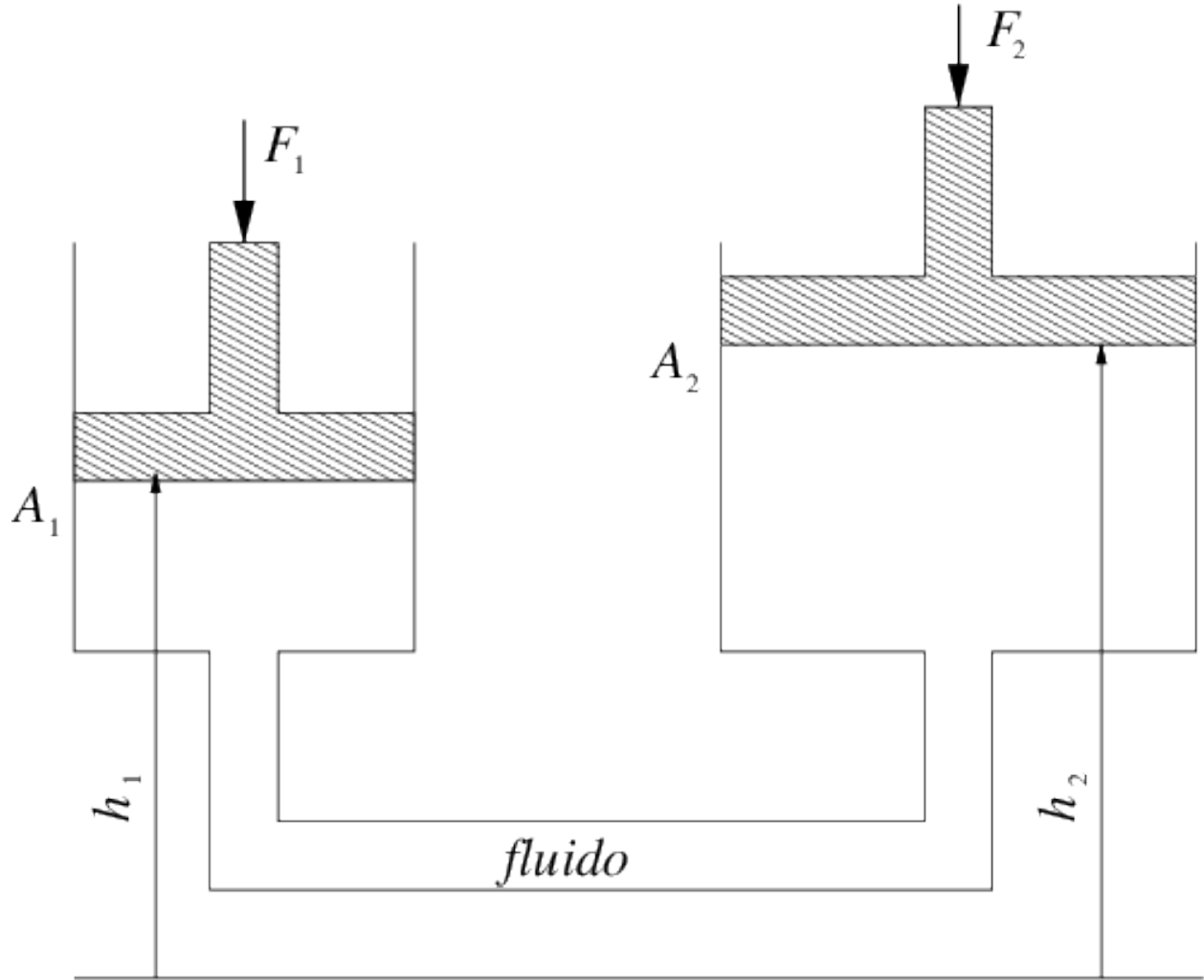
$$\begin{aligned}
 P_0 &= 101325 \text{ Pa} && \text{dato} \\
 P_A &= P_0 + \rho g (h_0 - h_A) = \dots \\
 P_B &= P_0 + \rho g (h_0 - h_B) = \dots \\
 P_C &= P_B + \rho_a g (h_B - h_C) = \dots \\
 P_D &= P_C + \rho g (h_C - h_D) = \dots
 \end{aligned}$$

### 1.8.5 Exercise 1.5

**Exercise 1.5** La leva idraulica, rappresentata in figura, è formata da due sistemi cilindro-pistone. Determinare la forza che è necessario applicare al secondo pistone per mantenere il sistema in equilibrio quando sul primo agisce una forza  $F_1 = 5000 \text{ N}$ , allorché i pistoni si trovano nella posizione indicata in figura.

Dati: diametro primo cilindro:  $d_1 = 0.2 \text{ m}$ ; diametro secondo cilindro:  $d_2 = 0.4 \text{ m}$ ; diametro del condotto che unisce i due cilindri:  $0.025 \text{ m}$ ; densità del fluido di lavoro:  $600 \text{ kg/m}^3$ ; altezza del primo pistone  $h_1 = 1 \text{ m}$ , altezza del secondo pistone  $h_2 = 2 \text{ m}$ .

$$(p_1 = 159155 \text{ Pa}, p_2 = 153269 \text{ Pa}, \mathbf{F}_2 = -19260.3 \hat{\mathbf{z}} \text{ N.})$$



**Concetti.** Legge di Stevino. Risultante statica. Leva idraulica.

**Svolgimento.** Il problema si risolve scrivendo le condizioni di equilibrio tra le forze esterne e la risultante dello sforzo di pressione sulle facce opposte dei pistoni e applicando la legge di Stevino tra le due sezioni  $A_1$  e  $A_2$ . Si ottiene un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite  $p_1, p_2, F_2$ ,

$$\begin{cases} F_1 = p_1 \pi \frac{d_1^2}{4} & \text{(Equilibrio pistone 1)} \\ p_2 = p_1 - \rho g(h_2 - h_1) & \text{(Legge di Stevino)} \\ F_2 = p_2 \pi \frac{d_2^2}{4} & \text{(Equilibrio pistone 2) ,} \end{cases}$$

la cui soluzione è

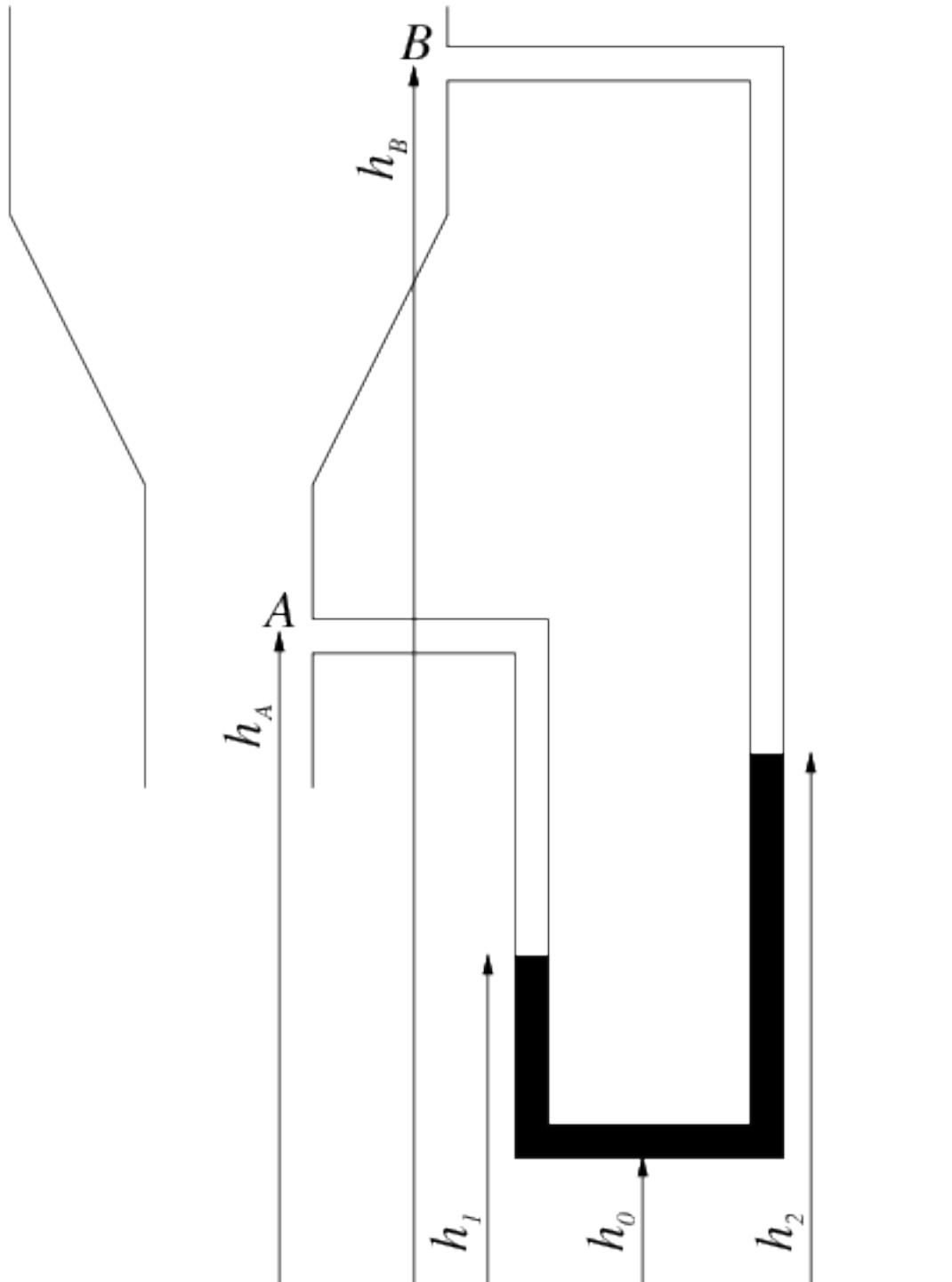
$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{4}{\pi} \frac{F_1}{d_1^2} & = 159155 Pa \\ p_2 = \frac{4}{\pi} \frac{F_1}{d_1^2} - \rho g(h_2 - h_1) & = 153269 Pa \\ F_2 = \frac{d_1^2}{d_2^2} F_1 - \frac{\pi}{4} d_2^2 \rho g(h_2 - h_1) & = 19260.3 N . \end{cases}$$

La componente verticale  $F_2$  della forza  $\mathbf{F}_2$  è positiva diretta verso il basso, come nel disegno. Si può scrivere quindi  $\mathbf{F}_2 = -F_2 \hat{\mathbf{z}}$ , se il versore  $\hat{\mathbf{z}}$  è orientato verso l'alto.

### 1.8.6 Exercise 1.6

Exercise 1.6 Si consideri il manometro riportato in figura utilizzato per misurare la differenza di pressione esistente fra due sezioni diverse di un condotto. Determinare la differenza di pressione fra i punti  $A$  e  $B$  riportati sul disegno sapendo che il liquido manometrico é acqua e ha una densità di  $998 \text{ kg/m}^3$ , che il fluido che scorre all'interno del condotto é aria e ha una densità di  $1.225 \text{ kg/m}^3$ , che  $h_A = 1 \text{ m}$ , che  $h_B = 1.2 \text{ m}$ , che  $h_0 = 0.1 \text{ m}$ , che  $h_1 = 0.3 \text{ m}$  e che  $h_2 = 0.7 \text{ m}$ .

( $p_B - p_A = -3913.75 \text{ Pa}$ )





**Concetti.** Legge di Stevino. Manometro. Venturi.  $P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$

**Svolgimento.** Si scrive la legge di Stevino tra i punti A e 1, 1 e 2, 2 e B:

$$\begin{cases} P_B + \rho_a g z_B = P_2 + \rho_a g z_2 \\ P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 \\ P_A + \rho_a g z_A = P_1 + \rho_a g z_1 \\ \Delta P = P_B - P_A \end{cases} \quad \text{Sirisolveilsistemalineare(comepi piace).Adesempio,partendodallaterzaeinserendonellaseco}$$

$$-(\rho - \rho_a)g(z_2 - z_1) - \rho_a g(z_B - z_A) = -3909.8 Pa$$

**Osservazione.**

Il sistema lineare ([eqn:stevino:underdet]{reference-type=»ref» reference=»eqn:stevino:underdet»}) è sotto determinato (se esiste una soluzione, ne esistono infinite), essendo un sistema lineare di 4 equazioni in 5 incognite,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_A$ ,  $P_B$ ,  $\Delta P$ . Il sistema lineare può essere scritto usando il formalismo matriciale come  $\underline{\underline{A}} \underline{x} = \underline{b}$  con  $\underline{\underline{A}} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} =$$

$$\begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_1 \\ P_2 \\ \Delta P \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} \rho_a g(h_2 - h_B) \\ \rho g(h_1 - h_2) \\ \rho_a g(h_A - h_1) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4), esiste una soluzione  $\underline{x}$  del problema, tale che  $\underline{\underline{A}} \underline{x} = \underline{b}$ . Dal teorema del rango, si sa che il numero delle colonne (= 5) di una matrice è uguale alla dimensione del suo rango (= 4) ed il suo nucleo (quindi = 1). Il nucleo della matrice  $\underline{\underline{A}}$ , tutti i vettori  $\underline{v}$  t.c.  $\underline{\underline{A}} \underline{v} = \underline{0}$ , uno spazio vettoriale di dimensione uno. Se  $\underline{x}$  è soluzione del sistema, allora anche tutti i vettori  $\underline{v}$  +  $\underline{x}$  sono soluzioni del sistema, poiché  $\underline{\underline{A}}(\underline{x} + \underline{v}) = \underline{\underline{A}} \underline{x} + \underline{\underline{A}} \underline{v} = \underline{b} + \underline{0}$ . Si può dimostrare il nucleo di  $\underline{\underline{A}}$  generato dal vettore  $\underline{v} = (1, 1, 1, 1, 0)^T$ . Quindi

$$\begin{bmatrix} P_A^* \\ P_B^* \\ P_1^* \\ P_2^* \\ \Delta P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oradovrebbe apparire chiaro come non si è possibile determinare il valore assoluto delle pressioni  $P_1, P_2, P_A, P_B$ . La differenza  $P = P_B - P_A$ , unica (e uguale al risultato ottenuto nello svolgimento del problema) : l'unicità di  $\Delta P$  dipende dalla forma dei vettori del nucleo di  $\underline{\underline{A}}$  che hanno componente  $\Delta P$  nulla.



## 2.1 Legge di Young-Laplace.

La superficie di interfaccia tra due liquidi può essere modellata come una membrana, una superficie bidimensionale all'interno della quale agisce una forza per unità di lunghezza, tangente alla superficie stessa. La forza per unità di spessore  $\gamma$  agente nella membrana viene definita *tensione superficiale*. La legge di Young-Laplace lega la tensione superficiale, il salto di pressione attraverso la superficie di interfaccia e la curvatura della superficie stessa. Nel caso di tensione superficiale costante, vale

$$p_b - p_a = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 2\gamma H$$

dove con  $R_1$  e  $R_2$  sono stati indicati i due raggi di curvatura della superficie e con  $H$  si è indicata la curvatura media.

{ width=»95%» }

## 2.2 Legge di Young-Laplace in due dimensioni

Viene ricavata la legge di Young-Laplace in due dimensioni, scrivendo l'equilibrio di un elemento di membrana (monodimensionale) soggetta agli sforzi esercitati dai due fluidi su di essa e alla tensione superficiale al suo interno. L'equazione vettoriale di equilibrio viene proiettata in direzione normale e tangente alla superficie. La superficie nell'intorno di un punto, viene approssimata come un arco infinitesimo di una circonferenza, come in figura.

Si considera un elemento infinitesimo di superficie di dimensioni  $\Delta x \sim R\Delta\theta$ . Anche l'angolo  $\Delta\theta$  è «piccolo» ( $\cos \Delta\theta \sim 1$ ,  $\sin \Delta\theta \sim \Delta\theta$ , la dimensione dell'elemento di superficie è approssimabile con la sua proiezione su un piano normale a  $\hat{\mathbf{n}}$ , ...). Con  $R$  viene indicato il raggio di curvatura della superficie.

Si scrive l'equilibrio.  $\mathbf{t}_a \Delta x + \mathbf{t}_b \Delta x - \mathbf{f}(x) + \mathbf{f}(x) + \Delta \mathbf{f} = 0$

Proiettando nelle direzioni normale e tangente alla superficie,

$$\begin{aligned}(t_{a_n} + t_{b_n})\Delta x + \gamma \sin \frac{\Delta \theta}{2} + (\gamma + \Delta \gamma) \sin \frac{\Delta \theta}{2} &= 0 \\ (t_{a_t} + t_{b_t})\Delta x - \gamma \cos \frac{\Delta \theta}{2} + (\gamma + \Delta \gamma) \cos \frac{\Delta \theta}{2} &= 0\end{aligned}$$

Inserendo i valori approssimati di  $\sin \Delta \theta$  e  $\cos \Delta \theta$ , trascurando i termini di ordine superiore ( $\Delta \gamma \Delta \theta$ ):

$$\begin{aligned}(t_{a_n} + t_{b_n})\Delta x + 2\gamma \frac{\Delta \theta}{2} &= 0 \\ (t_{a_t} + t_{b_t})\Delta x + \Delta \gamma &= 0\end{aligned}$$

Se si può confondere la coordinata che descrive la superficie con la coordinata  $x$ , si può approssimare  $\Delta \gamma \sim \frac{\partial \gamma}{\partial x} \Delta x$ . Usando la relazione  $\frac{\Delta x}{2} \sim R \frac{\Delta \theta}{2}$  e semplificando l'elemento  $\Delta x$ :

$$\begin{aligned}(t_{a_n} + t_{b_n}) + \frac{\gamma}{R} &= 0 \\ (t_{a_t} + t_{b_t}) + \frac{\partial \gamma}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

Nel caso in cui si consideri un problema di statica, lo sforzo **sul** fluido è dovuto solo al contributo di pressione, che agisce in direzione normale alla superficie:  $\mathbf{t}_a = -P_a \hat{\mathbf{n}}_a$ ,  $\mathbf{t}_b = -P_b \hat{\mathbf{n}}_b$ . Lo sforzo che il fluido esercita sulla superficie di interfaccia è uguale in modulo e opposto in direzione. Le due normali sono tra di loro opposte: si sceglie di definire la normale  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_a = -\hat{\mathbf{n}}_b$ . Di conseguenza, le componenti degli sforzi agenti sulla superficie di interfaccia, proiettati lungo  $\hat{\mathbf{n}}$  e un versore tangente sono:  $t_{a_n} = P_a$ ,  $t_{b_n} = -P_b$ ,  $t_{a_t} = 0$ ,  $t_{b_t} = 0$ . Se  $\gamma$  è costante (la tensione superficiale può avere gradienti non nulli a causa di gradienti di temperatura o di concentrazione), l'equilibrio in direzione tangente è identicamente soddisfatto.

$$P_a - P_b + \frac{\gamma}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_b - P_a = \frac{\gamma}{R}$$

### 2.2.1 Estensione al caso 3D.

Per estendere la dimostrazione al caso 3D, nel quale la superficie è 2D, si procede in modo analogo a quanto nel paragrafo precedente. Va considerata la curvatura di una superficie e non di una curva (esistono due raggi di curvatura), ... Un utile primo riferimento di *geometria differenziale* di curve e superfici, è disponibile in rete seguendo il collegamento

[Differential Geometry, Shiffrin.](#)

L'esistenza della tensione superficiale spiega il fenomeni della capillarità, l'esistenza dei menischi formati dalla superficie di separazione di due fluidi, il galleggiamento di insetti, graffette... sull'acqua, la formazione di superfici «minimali» di sapone, la bagnabilità delle superfici e la rottura di getti di piccolo diametro e la formazione di gocce. Infine, può essere utilizzata anche come mezzo non convenzionale di propulsione per barchette di carta

[Boat without a motor - Marangoni effect](#)

## 2.3 Exercises

### 2.3.1 Exercise 2.1

Sia  $\theta$  l'angolo di contatto l'interfaccia tra aria, liquido e solido; sia  $\gamma$  la tensione superficiale tra aria e liquido; sia  $\rho$  la densità del liquido. Determinare l'altezza  $h$  dal liquido in una colonnina cilindrica di raggio  $r = 0.5 \text{ mm}$  rispetto al livello nella vasca. Calcolare poi la pressione all'interno della colonnina. (Si può considerare valida l'approssimazione che la pressione agente sulla vasca e sulla superficie superiore del liquido all'interno della colonnina sia uguale). Si considerino condizioni termodinamiche e materiale della colonnina tali che: se il liquido è acqua:  $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ ,  $\theta = 1$ ,  $\gamma = 0.073 \text{ N/m}$ . se il liquido è mercurio:  $\rho = 13579 \text{ kg/m}^3$ ,  $\theta = 140$ ,  $\gamma = 0.559 \text{ N/m}$ . ( $h_{H_2O} = 2.97 \text{ cm}$ ,  $P_{H_2O} - P_0 = -291.95 \text{ Pa}$ ;  $h_{Hg} = -1.28 \text{ cm}$ ,  $P_{Hg} - P_0 = 1712.87 \text{ Pa}$ )

Tensione superficiale. Angolo di contatto. Capillarità. Menisco.

Scrivendo l'equilibrio per il volume di fluido nel capillare si trova l'altezza  $h$ . Successivamente si trova la  $p$  usando la legge di Stevino. Infine si fanno osservazioni su angolo di contatto, menisco e salto di pressione all'interfaccia.

- Si scrive l'equilibrio del volume di fluido. Il problema è di statica. Le forze agenti sono la forza dovuta alla tensione superficiale (che agisce sul perimetro della superficie superiore) e la forza peso, poichè per ipotesi la pressione agente sulla superficie superiore è uguale alla pressione ambiente  $P_a$ ; e quindi??? Perchè la componente verticale della risultante dovuta alla pressione esterna è zero??? Vedere immagine...).  $F_\gamma = F_g \Rightarrow$

$$2\pi r \gamma \cos \theta = \pi r^2 h \rho g \Rightarrow h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r} \Rightarrow \begin{cases} h_{H_2O} = 2.97 \text{ cm} \\ h_{Hg} = -1.28 \text{ cm} \end{cases} \quad \text{*Commenti sul risultato.*}$$

L'effetto della capillarità è evidente per tubi stretti (proporzionalità con  $1/r$ ). La  $h$  può assumere sia valori positivi, sia valori negativi, a seconda dell'angolo di contatto  $\theta$ .

- Si calcola la pressione nel fluido in cima alla colonnina sfruttando la legge di Stevino.  $P = P_0 - \rho g h = P_0 - \frac{2\gamma \cos \theta}{r} \Rightarrow \begin{cases} P_{H_2O} - P_0 = -291.95 \text{ Pa} \\ P_{Hg} - P_0 = 1712.87 \text{ Pa} \end{cases} \quad \text{*Commenti sul risultato.*}$  Per  $\theta \leq \pi/2$ ,  $h \geq 0$ ,  $P \leq P_0$ . Per  $\theta \geq \pi/2$ ,  $h \leq 0$ ,  $P \geq P_0$ . Questi risultati sono compatibili (meno male) con le relazioni tra curvatura (stretta parente del menisco e dell'angolo di contatto) e il salto di pressione.

$$\theta \leq \pi/2 \quad h \geq 0 \quad P \leq P_a$$

$$\theta \geq \pi/2 \quad h \leq 0 \quad P \geq P_a$$

### 2.3.2 Exercise 2.2

Due lamine piane uguali parallele sono separate da una distanza  $d$ . Tra le lamine è presente un sottile strato di liquido. Sono note l'area della superficie  $A$  e il perimetro  $L$  delle due lamine, la pressione ambiente  $p_a$ , la tensione superficiale del liquido  $\gamma$  e l'angolo di contatto  $\theta$ . Si chiede di determinare la componente perpendicolare alle lamine della forza agente su ciascuna delle due lamine. {width=85%}

Tensione superficiale. Angolo di contatto.

La condizione descritta nell'esercizio è una condizione equilibrio. La forza agente su una lamina è dovuta a due fenomeni: la tensione superficiale sul perimetro del fluido e la differenza di pressione tra fluido e ambiente. Si consideri positiva la forza se è una forza di attrazione.

$$F = F_\gamma + F_p$$

- Calcolo di  $F_\gamma$ .  $F_\gamma = \gamma L \sin \theta$
- Calcolo di  $F_p$ . Il salto di pressione viene calcolato scrivendo l'equilibrio all'interfaccia.  $F_p = (p_a - p) A \cos \theta : (p_a - p)d = 2\gamma \cos \theta$
- La componente totale richiesta risulta quindi:  $F = \frac{2\gamma A \cos \theta}{d} + L\gamma \sin \theta$

{width=50%}

### 2.3.3 Exercise 2.3

Si vuole calcolare la forma del pelo libero tra aria ed acqua, di densità  $\rho$ , nelle vicinanze di una parete piana infinita, conoscendo la tensione superficiale  $\gamma$  e l'angolo di contatto a parete  $\theta$ . La pressione dell'aria è uniforme e uguale a  $P_a$ .

{width=85%}

Poiché si studia il problema nelle vicinanze di una parete piana infinita, è lecito assumere che la soluzione non dipenda dalla coordinata che descrive la lunghezza della parete, la coordinata  $z$  facendo riferimento al disegno (TODO). L'equazione di Young-Laplace per una superficie bidimensionale in uno spazio tridimensionale,  $P_1 - P_2 =$

$\gamma \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]$ , si riduce al caso di una superficie monodimensionale in uno spazio bidimensionale, la superficie di contatto piana  $R_2 = \infty$  e si riduce a  $P_1 - P_2 = \gamma \frac{1}{R_1}$ . Poiché  $R_1 = R$ , l'equazione di Young-Laplace si riduce a  $P_1 - P_2 = \frac{\gamma}{R}$ . Poiché  $R \rightarrow \infty$ , si ha  $\frac{\gamma}{R} \rightarrow 0$ , mantenendo  $\theta$  fissato, equi-

La pressione nell'aria è costante e uguale al valore della pressione ambiente  $P_2 = P_a$ . Si può calcolare la pressione  $P_1(x)$  dell'acqua a contatto con la superficie utilizzando la legge di Stevino,  $P_1(x) - P_a = \rho g y(x)$ , essendo  $y(x)$  la quota della superficie, rispetto alla quota di riferimento  $y=0$ , scelta come la quota alla quale la pressione dell'Young diventa  $\rho g y(x) = \gamma k(x)$ . Ricordando che la curvatura di una superficie è rappresentata dalla funzione  $\kappa(x)$  può essere espresso

aggiungere i dettagli?),  $\kappa(x) = \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}}$ , si ricava il problema differenziale che descrive la forma della superficie di contatto

Laplace accompagnata dalla condizione al contorno a parete, in  $x=0$ , che lega la derivata della superficie all'angolo di contatto, ed integrando una volta l'equazione differenziale si ottiene  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{1}{(1+y'(x)^2)^{1/2}} = A$ , dove  $A$  rappresenta la costante di integrazione. Affinché la quota della superficie tenda alla quota di riferimento a grande distanza  $\rightarrow 0$ , "con una sensata regolarità", necessario che anche la sua pendenza si annulli,  $y'(x) \rightarrow 0$ . Questa condizione impone il valore della costante di integrazione,  $A = 1$ . Integrando nuovamente l'equazione,  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{1}{(1+y'(x)^2)^{1/2}} = 1$ , si ottiene la soluzione del problema (TODO : aggiungere i dettagli),  $\frac{1}{\sqrt{2a^2 - y(x)^2}} + \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{Ch}^{-1} \left( \frac{\sqrt{2}a}{y(x)} \right) = x + B$ , con la costante di integrazione  $B$  da calcolare utilizzando la condizione al contorno a parete.

**Osservazione.** Questo problema fornisce un esempio di calcolo della forma della superficie di contatto tra due fluidi. Nonostante il problema studiato sia uno dei più semplici che si possano immaginare, la sua soluzione analitica richiede già un notevole impegno. Coloro che nutrono passione per l'argomento, sono invitati a calcolare la forma dell'interfaccia tra acqua e aria in un dominio delimitato da due pareti verticali, risolvendo numericamente (esiste una soluzione analitica anche per questo problema, ma risulta ancora più «criptica» di quella ricavata per il problema con una sola parete) il

$$\text{problema differenziale non lineare, } \$ \begin{cases} \rho g y(x) - \frac{y''(x)}{(1+y'(x)^2)^{3/2}} = 0 & , \quad x \in [0, L] \\ y'(x=0) = -\frac{1}{\tan \theta} \\ y'(x=L) = \frac{1}{\tan \theta} \end{cases} \$$$





La cinematica è la parte della meccanica che studia il moto di sistemi, indipendentemente dalle cause che lo generano, a differenza della dinamica. Prima di ricavare le equazioni che descrivono la dinamica di un fluido, sembra quindi opportuno concentrarsi sulla sua cinematica.

La cinematica e la dinamica dei mezzi continui, come ad esempio i solidi o i fluidi, possono essere descritte con un approccio lagrangiano o euleriano. La **descrizione lagrangiana**, utilizzata spesso in meccanica dei solidi, consiste nel seguire nello spazio il moto delle singole particelle del mezzo continuo. La **descrizione euleriana**, utilizzata spesso in meccanica dei fluidi, consiste nel descrivere l'evoluzione del mezzo continuo utilizzando come variabili indipendenti sia la variabile spaziale  $\mathbf{r}$  sia la variabile temporale  $t$ .

### 3.1 Descrizione integrale lagrangiana ed euleriana

In una descrizione *integrale* del fenomeno, l'approccio lagrangiano segue l'evoluzione di un **volume materiale**, i cui punti si muovono in maniera solidale con il mezzo continuo. In un approccio euleriano invece viene introdotto un **volume di controllo**, fisso nello spazio, e i flussi delle quantità meccaniche (massa, quantità di moto, energia, ...) contribuiscono al bilancio delle quantità meccaniche relative al volume di controllo considerato. Queste due descrizioni sono casi particolari di un approccio generale al problema, definito *ALE* (arbitrario lagrangiano-euleriano), che descrive l'evoluzione di un volume in moto arbitrario. Le tre diverse descrizioni del problema possono essere messe in relazione tra di loro, tramite le formule di Leibniz, che forniscono l'espressione della derivata temporale di integrali su domini dipendenti dal tempo. Si riporta qui, senza dimostrazione, il **teorema del trasporto di Reynolds**

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{S(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

che fornisce l'espressione della derivata temporale dell'integrale della funzione  $f(\mathbf{x}, t)$  (che può essere scalare, vettoriale o in generale tensoriale) nel volume mobile  $V(t) \ni \mathbf{x}$ , la cui frontiera  $S(t)$  si muove con velocità  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_s, t)$ ,  $\mathbf{x}_s \in S(t)$ . La normale  $\hat{\mathbf{n}}$  alla superficie  $S(t)$  è uscente dal volume  $V(t)$ . Si rimanda all'appendice «Richiami di analisi» per la dimostrazione del teorema e per le formule della derivata temporale di flussi e circuitazioni su domini dipendenti dal tempo. Siano ora

- $V(t)$  un volume materiale, la cui frontiera si muove con la velocità del fluido  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$

- $V_c$  un volume di controllo, la cui frontiera è fissa nello spazio,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- $v(t)$  un volume in moto arbitrario, la cui frontiera si muove con velocità generica  $\mathbf{v}$ .

Come si vedrà nel capitolo sui «Bilanci integrali», il bilancio integrale di una quantità meccanica  $f$  in un volume materiale  $V(t)$  descrive la variazione nel tempo dell'integrale  $\int_{V(t)} f$ . Il teorema di Reynolds applicato all'integrale svolto su un volume materiale  $V(t)$  e all'integrale svolto sul volume in moto generico  $v(t)$ , coincidente con  $V(t)$  all'istante di tempo  $t$  considerato,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f &= \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{S(t)} f \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t) \equiv V(t)} f &= \int_{v(t) \equiv V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{s(t) \equiv S(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}},\end{aligned}$$

permette di ricavare il legame tra la descrizione lagrangiana e una descrizione arbitraria del problema. Confrontando le ultime due espressioni, si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \frac{d}{dt} \int_{v(t) \equiv V(t)} f + \oint_{s(t) \equiv S(t)} f (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Dalla formula scritta per il volume arbitrario  $v(t)$ , si ricava il legame tra a descrizione lagrangiana e la descrizione euleriana del problema, considerando il volume arbitrario coincidente con un volume di controllo  $V_c$  fisso, per il quale  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \frac{d}{dt} \int_{V_c \equiv V(t)} f + \oint_{S_c \equiv S(t)} f \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

## 3.2 Descrizione puntuale lagrangiana ed euleriana

In una descrizione *puntuale* del fenomeno, vengono introdotti due sistemi di coordinate: uno è solidale con il mezzo continuo dipendente dal tempo, mentre l'altro è fisso. Si può pensare al sistema di riferimento solidale con il continuo come un'«etichetta» che viene applicata a ogni **punto materiale** del mezzo continuo stesso. Un sistema di riferimento fisso, invece, è indipendente dal moto del mezzo continuo, come ad esempio un sistema di coordinate cartesiane, la cui origine e i cui assi sono fissi nel tempo. Mentre il mezzo continuo evolve nel tempo (trasla, ruota, si deforma ...), un punto materiale ha coordinate costanti  $\mathbf{x}_0$  rispetto al sistema di riferimento «solidale al volume», cioè che si muove e si deforma insieme al volume: questa coordinata, detta lagrangiana, può essere pensata come l'«etichetta» assegnata al punto materiale del continuo. Le coordinate euleriane  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  del punto materiale con coordinate lagrangiane  $\mathbf{x}_0$ , ne descrivono il moto nel sistema di riferimento fisso e in generale sono una funzione del tempo

Il sistema di riferimento solidale al corpo dipende dal tempo, mentre le coordinate lagrangiane  $\mathbf{x}_0$  di un punto materiale sono costanti. Il sistema di riferimento fisso è indipendente dal tempo, mentre le coordinate euleriane  $\mathbf{x}$  di un punto materiale del volume (quindi con  $\mathbf{x}_0$  costante) sono dipendenti dal tempo.

Assumendo che all'istante  $t = 0$  i due sistemi di coordinate coincidano, e che quindi coincidano anche le coordinate euleriane e lagrangiane  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$ , le coordinate lagrangiane  $\mathbf{x}_0$  rappresentano la configurazione (iniziale) di riferimento della configurazione attuale  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ . La trasformazione  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  descrive l'evoluzione nel tempo  $t$  dei punti  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  appartenenti al volume  $V_0 = V(0)$ , all'istante iniziale. La velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  del mezzo continuo nel punto  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ , per definizione di punto materiale, coincide con la velocità  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, t)$  del punto etichettato con  $\mathbf{x}_0$ : questa è la derivata nel tempo della sua posizione  $\mathbf{x}$ , cioè con la derivata nel tempo della mappa  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  a coordinata lagrangiana (che identifica la particella) costante,

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} (\mathbf{x}_0, t) =: \frac{d\mathbf{x}}{dt}(\mathbf{x}_0, t) =: \frac{D\mathbf{x}}{Dt}(\mathbf{x}_0, t),$$

dove è stato introdotto il simbolo  $D/Dt$  di **derivata materiale** che rappresenta l'evoluzione della quantità alla quale è applicata, seguendo il moto del mezzo continuo: la derivata materiale rappresenta la variazione nel tempo della quantità

«sentita» dalle singole particelle materiali. Nella descrizione euleriana del problema, i campi sono funzioni delle variabili indipendenti spazio  $\mathbf{x}$  e tempo  $t$ . Data una funzione  $f(\mathbf{x}, t)$  (scalare, vettoriale, tensoriale), viene indicata con

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}},$$

la derivata parziale rispetto al tempo, che rappresenta la variazione della quantità  $f(\mathbf{x}, t)$  nel punto fisso  $\mathbf{x}$  dello spazio, che coordinata euleriana costante.

È possibile trovare il legame tra le due derivate utilizzando la *regola di derivazione di funzioni composte* e la funzione  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  che descrive il moto dei punti materiali del sistema. Data una funzione  $f(\mathbf{x}, t)$  (rappresentazione euleriana), viene definita  $f_0(\mathbf{x}_0, t)$  come la funzione composta  $f_0 = f \circ \mathbf{x}$  (descrizione lagrangiana). Ipotizzando poi che si possano esprimere le coordinate lagrangiane come funzione di quelle euleriane,  $\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t)$ , è possibile scrivere  $f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = f_0(\mathbf{x}_0, t) = f_0(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t), t)$ . Utilizzando la regola di derivazione per le funzioni composte, si ottiene il legame cercato,

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_t \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_t = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f, \end{aligned}$$

dove si è indicato con  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t), t)$  il campo di velocità riferito a una descrizione euleriana del problema e si è riconosciuto l'operatore  $\nabla$  nell'ultimo passaggio. Infine è possibile «rimuovere» la funzione  $f$  per ottenere la relazione tra la forma delle due derivate, valida per funzioni scalari, vettoriali, tensoriali,

$$\frac{D-}{Dt} := \frac{d-}{dt} := \frac{\partial -}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial -}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla -.$$

Come esempio, applichiamo la regola ([eqn:cin:lagr-eul]{reference-type=»ref» reference=»eqn:cin:lagr-eul»}) per ricavare la forma euleriana e lagrangiana del campo di velocità e di accelerazione delle particelle del continuo. Il campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  si ottiene dalla derivata materiale della trasformazione  $\mathbf{x}(x_0, t)$ ,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, t)}_{=0} \cdot \underbrace{\nabla \mathbf{x}}_{=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, t).$$

In questo caso, non è stato ottenuto nulla di nuovo. Il campo di accelerazione nella descrizione euleriana del fenomeno viene ottenuto calcolando l'accelerazione delle particelle materiali con la derivata materiale alla velocità. Per componenti, l'accelerazione della particella materiale identificata con  $\mathbf{x}_0$  è

$$a_i(\mathbf{x}, t) = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Introducendo l'operatore advettivo  $\mathbf{v} \cdot \nabla$ , è possibile scrivere il campo di accelerazione (che comparirà nel bilancio della quantità di moto) in forma vettoriale

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t),$$

dove sono stati esplicitati gli argomenti  $(\mathbf{x}, t)$  delle funzioni, per evidenziare la rappresentazione euleriana.

Una volta compresa la differenza tra le due descrizioni del problema, non è necessario esprimere in maniera esplicita gli argomenti delle funzioni. Da qui in avanti, verrà privilegiata una descrizione euleriana, per campi, del problema.

In alcuni casi, come ad esempio problemi che riguardano lo studio di correnti attorno a corpi mobili, può essere conveniente utilizzare una rappresentazione arbitraria del problema, descrivendo il fenomeno seguendo l'evoluzione delle

grandezza meccaniche su punti, «etichettati» dalla coordinata arbitraria  $\mathcal{Q}$ , il cui moto è descritto in coordinate euleriane dalla funzione  $\mathbf{x}(\mathcal{Q}, t)$ . Seguendo lo stesso procedimento svolto per le particelle materiali, la velocità  $\mathbf{v}$  di questi punti in moto arbitrario è uguale alla derivata parziale

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \bigg|_{\mathcal{Q}},$$

svolta a coordinata  $\mathcal{Q}$  costante. Ancora seguendo lo stesso procedimento svolto in precedenza, è possibile ricavare la relazione tra la rappresentazione arbitraria e quella euleriana,

$$\frac{\partial \_}{\partial t} \bigg|_{\mathcal{Q}} = \frac{\partial \_}{\partial t} \bigg|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \nabla \_.$$

e, confrontando la ([eqn:cin:lagr-eul]{reference-type=»ref» reference=»eqn:cin:lagr-eul«}) e la ([eqn:cin:ale-eul]{reference-type=»ref» reference=»eqn:cin:ale-eul«}), la relazione tra la rappresentazione arbitraria e quella lagrangiana,

$$\frac{\partial \_}{\partial t} \bigg|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial \_}{\partial t} \bigg|_{\mathcal{Q}} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \nabla \_.$$

### 3.3 Velocità di traslazione, rotazione e deformazione

In questa sezione viene studiato il moto di un segmento materiale, che segue il moto del mezzo continuo. Viene introdotto il tensore gradiente di velocità  $\nabla \mathbf{u}$ , con  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  il campo di velocità. Questo tensore viene prima scritto come somma della sua parte antisimmetrica  $\mathbb{W}$  e della sua parte simmetrica  $\mathbb{D}$ , la quale può essere a sua volta scomposta nella parte idrostatica e nella parte deviatorica  $\mathbb{D}^d$ . Viene infine descritta la natura di questi tensori grazie alla loro influenza sul moto di segmento materiale.

Il segmento materiale viene identificato dal vettore  $\Delta \mathbf{x}_{12}(t) = \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)$ , i cui estremi sono i punti di coordinate  $\mathbf{x}_1(t)$  e  $\mathbf{x}_2(t)$ . Indicando con  $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t)$  e  $\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_2(t), t)$  loro velocità, è possibile ricavare l'evoluzione temporale del segmento materiale,  $\Delta \mathbf{x}_{12}(t + \Delta t) = \Delta \mathbf{x}_{12}(t) + (\mathbf{u}_2(t) - \mathbf{u}_1(t)) \Delta t + o(\Delta t)$ . Tornando alla descrizione euleriana del problema, è possibile scrivere la differenza di velocità introducendo il tensore gradiente di velocità,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2(t) - \mathbf{u}_1(t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_2(t), t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) = \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t) + \Delta \mathbf{x}_{12}(t), t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) = \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) + o(|\Delta \mathbf{x}_{12}(t)|) = \\ &= \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}(t) + o(|\Delta \mathbf{x}_{12}(t)|). \end{aligned}$$

Riarrangiando i termini si può scrivere,

$$\Delta \mathbf{x}_{12}(t + \Delta t) = \Delta \mathbf{x}_{12}(t) + [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}(t) + o(|\Delta \mathbf{x}_{12}(t)|)] \Delta t + o(\Delta t).$$

e facendo tendere a zero  $\Delta t$ , si ricava

$$\frac{d\Delta \mathbf{x}_{12}}{dt}(t) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}(t) + o(|\Delta \mathbf{x}_{12}(t)|).$$

Nell'ipotesi che i termini  $o(|\Delta \mathbf{x}_{12}(t)|)$  siano trascurabili, la velocità  $\mathbf{u}_2$  del punto  $\mathbf{x}_2$  differisce dalla velocità  $\mathbf{u}_1$  del punto  $\mathbf{x}_1$  del termine  $d\Delta \mathbf{x}_{12}/dt$  che rappresenta le eventuali rotazioni e le deformazioni del mezzo continuo,

$$\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{u}_1(t) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}(t).$$

### 3.3.1 Tensore gradiente di velocità

Il tensore gradiente di velocità può essere scritto come somma  $\nabla \mathbf{u} = \mathbb{D} + \mathbb{W}$  della sua parte simmetrica  $\mathbb{D}$ , il **tensore velocità di deformazione**, e della sua parte antisimmetrica  $\mathbb{W}$ , il **tensore di spin**,

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad , \quad \mathbb{W} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla^T \mathbf{u}) \quad ,$$

i quali possono essere scritti in componenti, in un sistema di coordinate cartesiane come

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad , \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] .$$

Il tensore velocità di deformazione può essere poi scomposto nella sua parte idrostatica e nella sua parte deviatorica  $\mathbb{D}^d$ ,

$$\mathbb{D} = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbb{D}) \mathbb{I} + \mathbb{D}^d \quad , \quad \mathbb{D}^d = \mathbb{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbb{D}) \mathbb{I} ,$$

dove la traccia  $\text{tr}(\mathbb{D})$  è uguale alla divergenza del campo di velocità  $\nabla \cdot \mathbf{u}$ . Il tensore di spin è un tensore antisimmetrico del secondo ordine. Nello spazio tridimensionale ha solo tre componenti indipendenti, che contengono le componenti del vettore vorticità  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ . Ad esempio, utilizzando un sistema di coordinate cartesiane, è possibile scrivere il tensore di spin come

$$\mathbb{W} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \text{Spin}(\boldsymbol{\omega}) .$$

L'operazione  $\mathbb{W} \cdot \mathbf{v}$  tra il tensore antisimmetrico  $\mathbb{W} = \text{Spin}(\boldsymbol{\omega})$  e un vettore  $\mathbf{v}$  qualsiasi coincide con l'operazione  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ . Introducendo la scomposizione di  $\nabla \mathbf{u}$  nella formula ([eqn:cin:relative-vel-1]{reference-type=»ref» reference=»eqn:cin:relative-vel-1»}), si ricava

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2(t) = \mathbf{u}_1(t) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_1(t), t) \times (\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)) + \quad & \text{(atto di moto rigido)} \\ + \mathbb{D}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot (\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)) . \quad & \text{(deformazione)} \end{aligned}$$

Da questa formula si possono riconoscere i contributi alla velocità  $\mathbf{u}_2$  di «traslazione» (la velocità del punto  $\mathbf{x}_1$ ), di rotazione con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}$  e di deformazione,  $\mathbb{D} \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}$ .

### 3.3.2 Derivate temporali di oggetti materiali

In questa sezione vengono descritti gli effetti dei singoli termini nei quali può essere scomposto il gradiente di velocità tramite i loro effetti sull'evoluzione di un segmento materiale  $\mathbf{v}$  o di una combinazione di segmenti materiali «elementari» (come ad esempio il prodotto scalare o il triplo prodotto), per i quali i termini di ordine  $o(|\mathbf{v}|)$  sono considerati trascurabili.

#### Vettore materiale.

Scrivendo il vettore  $\mathbf{v}$  come prodotto del suo modulo  $v$  per il versore  $\hat{\mathbf{n}}$  che ne identifica la direzione,  $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{n}}$ , è possibile esprimerne la derivata nel tempo come,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{n}} + v \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} .$$

### Vettore materiale: modulo.

Utilizzando l'identità  $\dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = 0^1$ , moltiplicando scalarmente per  $\hat{\mathbf{n}}$  l'ultima espressione, si ricava la derivata nel tempo del modulo  $v$  del vettore  $\mathbf{v}$ ,

$$\frac{dv}{dt} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \underbrace{v \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{n}}}_{=0} = \hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbb{D} + \mathbb{W}] \cdot \mathbf{v} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} v,$$

avendo introdotto la scomposizione  $\nabla \mathbf{u} = \mathbb{D} + \mathbb{W}$  nella formula ([eqn:cin:material-segm]{reference-type=>ref» reference=>eqn:cin:material-segm»}) applicata al vettore materiale  $\mathbf{v}$  e utilizzato l'identità  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ , poiché  $\mathbb{W}$  è antisimmetrica. Poichè il tensore velocità di deformazione è simmetrico, esiste una base di vettori ortonormali  $\{\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2, \hat{\mathbf{p}}_3\}$  che permettono di scrivere la decomposizione spettrale di  $\mathbb{D}$ ,

$$\mathbb{D} = \lambda_1 \hat{\mathbf{p}}_1 \otimes \hat{\mathbf{p}}_1 + \lambda_2 \hat{\mathbf{p}}_2 \otimes \hat{\mathbf{p}}_2 + \lambda_3 \hat{\mathbf{p}}_3 \otimes \hat{\mathbf{p}}_3.$$

I vettori  $\hat{\mathbf{p}}_i$  sono gli autovettori del tensore  $\mathbb{D}$  che ne rappresentano le *direzioni principali*, mentre gli scalari  $\lambda_i$  sono gli autovalori associati, tali che  $\mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{p}}_i = \lambda_i \hat{\mathbf{p}}_i$ . È quindi possibile scrivere la derivata nel tempo del modulo  $v$  del vettore materiale  $\mathbf{v}$  come

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = \lambda_1 n_1^2 + \lambda_2 n_2^2 + \lambda_3 n_3^2,$$

avendo indicato con  $n_i = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_i$  le proiezioni del versore  $\hat{\mathbf{n}}$  sugli autovettori del tensore  $\mathbb{D}$ .

### Vettore materiale: direzione.

Combinando la ([eqn:cin:dvec]{reference-type=>ref» reference=>eqn:cin:dvec»}) e la ([eqn:cin:dvm]{reference-type=>ref» reference=>eqn:cin:dvm»}), è possibile ricavare la derivata nel tempo della direzione  $\hat{\mathbf{n}}$  del vettore materiale  $\mathbf{v}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} &= \frac{1}{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{1}{v} \hat{\mathbf{n}} \frac{dv}{dt} = [\mathbb{D} + \mathbb{W}] \cdot \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= [\mathbb{I} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}] \cdot \mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \mathbb{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= [\mathbb{I} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}] \cdot \mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{2} \mathbb{\Omega} \times \hat{\mathbf{n}}. \end{aligned}$$

Il tensore  $\mathbb{P} := \mathbb{I} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}$  è il proiettore ortogonale in direzione perpendicolare a  $\hat{\mathbf{n}}$ , che ha nucleo generato da  $\hat{\mathbf{n}}$ , cioè  $\mathbb{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ . Introducendo la scomposizione del tensore  $\mathbb{D}$  nella sua parte idrostatica e deviatorica, è possibile dimostrare che la parte idrostatica non influenza la derivata del versore  $\hat{\mathbf{n}}$

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} = [\mathbb{I} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}] \cdot \mathbb{D}^d \cdot \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{2} \mathbb{\Omega} \times \hat{\mathbf{n}},$$

poiché  $\mathbb{P} \cdot \mathbb{I} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbb{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ . In generale quindi la direzione di un vettore materiale dipende dalle rotazioni, rappresentate dal termine  $\frac{1}{2} \mathbb{\Omega} \times \hat{\mathbf{n}}$  e dalla parte deviatorica del tensore velocità di deformazione. Questo ultimo contributo può essere nullo in alcuni casi, come ad esempio

- quando lo stato di deformazione è «idrostatico», per il quale  $\mathbb{D}^d = 0$ ,
- quando il vettore  $\mathbf{v}$  appartenente al nucleo di  $\mathbb{D}^d$ ,  $\mathbb{D}^d \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , orientato cioè in una direzione che non subisce una deformazione deviatorica,
- quando il vettore  $\mathbf{v}$  è allineato con una delle direzioni principali  $\hat{\mathbf{p}}_i$  di  $\mathbb{D}$ : in questo caso, il vettore  $\mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  è allineato con  $\hat{\mathbf{n}}$ , poichè  $\mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lambda_i \hat{\mathbf{n}}$ , e quindi appartiene al nucleo del proiettore  $\mathbb{P}$ , cioè  $\mathbb{P} \cdot (\mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{0}$ .

<sup>1</sup> Poichè  $\hat{\mathbf{n}}$  è un versore,  $|\hat{\mathbf{n}}|^2 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$ . La derivata nel tempo di quest'ultima espressione diventa  $0 = \dot{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{n}}} = 2\dot{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , da cui si ricava l'identità desiderata.

### Angolo tra vettori materiali.

Calcolando la derivata materiale del prodotto scalare tra due vettori materiali  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ , è possibile verificare che il tensore di spin  $\mathbb{W}$  rappresenta una rotazione rigida, non modificando né i moduli dei singoli vettori materiali, né l'angolo compreso tra di essi. Infatti la derivata

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \\ &= \mathbf{w} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbb{W} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbb{W} \times \mathbf{w} = \\ &= 2\mathbf{w} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{v},\end{aligned}$$

avendo utilizzato la simmetria del tensore velocità di deformazione  $\mathbb{D}$  e l'identità vettoriale  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ . La derivata del coseno dell'angolo formato dai vettori materiali  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}}$ ,  $\mathbf{w} = w\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{w}}$  dipende solamente dalla parte deviatorica del tensore velocità di deformazione,

$$\begin{aligned}\frac{d \cos \theta_{vw}}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|} = \\ &= 2\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{w}} \cdot \mathbb{D}^d \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{w}} (\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbb{D}^d \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{w}} \cdot \mathbb{D}^d \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{w}}) = \\ &= 2(1 - \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{w}}) \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{w}} \cdot \mathbb{D}^d \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{w}} (\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{w}}) \cdot \mathbb{D}^d \cdot (\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{w}}).\end{aligned}$$

### Volume generato da vettori materiali.

Infine, è possibile dimostrare che la derivata del volume materiale (elementare, per il quale i termini  $o(|\Delta \mathbf{x}|)$  siano trascurabili)  $V = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$  del parallelepipedo formato dai tre vettori materiali  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vale

$$\frac{dV}{dt} = (\nabla \cdot \mathbf{u})V.$$

La divergenza del campo di velocità rappresenta quindi la derivata nel tempo di un volume materiale relativa al volume materiale stesso. Il **vincolo cinematico di incomprimibilità** impone che l'estensione di un volume materiale non vari nel tempo,  $dV/dt = 0$ , ed è quindi equivalente alla condizione di solenoidalità del campo di velocità,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

## 3.4 Curve caratteristiche

Per descrivere il moto di un fluido vengono definite quattro famiglie di curve: le linee di corrente, le traiettorie, le curve di emissione (o linee di fumo) e le tracce. Viene data una definizione matematica di queste curve, che possono essere ottenute durante le attività sperimentali tramite delle tecniche di visualizzazione del campo di moto, come mostrato nel seguente video, [Stanford 1963 - Flow Visualization](https://www.youtube.com/watch?v=nuQyKGuXJOs). <https://www.youtube.com/watch?v=nuQyKGuXJOs>, nel caso non funzionasse il collegamento sopra a uno degli storici video del National Committee.

Come già anticipato, secondo la descrizione euleriana del moto di un mezzo continuo, il campo di velocità è rappresentato dalla funzione vettoriale  $\mathbf{u}$  i cui argomenti indipendenti sono la coordinata spaziale  $\mathbf{r}$  e quella temporale  $t$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Vengono ora definite le quattro curve caratteristiche elencate sopra:

- Le **linee di corrente** sono curve  $\mathbf{S}$  tangenti al campo vettoriale  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  in ogni punto dello spazio  $\mathbf{r}$ , all'istante temporale  $t$  considerato. Essendo curve (dimensione=1), possono essere espresse in forma parametrica come funzioni di un parametro scalare  $p$ ,  $\mathbf{S}(p)$ . La «traduzione matematica» della definizione è quindi

$$\frac{d\mathbf{S}}{dp}(p) = \lambda(p)\mathbf{u}(\mathbf{S}(p), t),$$

cioè il vettore tangente  $d\mathbf{S}(p)/dp$  alla curva  $\mathbf{S}(p)$ , nel punto identificato dal valore del parametro  $p$ , è parallelo al vettore velocità  $\mathbf{u}$  calcolato nello stesso punto  $\mathbf{S}(p)$ , al tempo considerato  $t$ . La funzione  $\lambda(p)$  dipende dalla parametrizzazione utilizzata e non influisce sulla forma della linea di corrente. L'equazione ( $\text{eqn:cinematica:ldc}$ ) rappresenta tutte le linee di corrente: per ottenere la linea di corrente passante per un punto, è necessario imporre questa condizione come condizione al contorno.

- Una **traiettoria** descrive il moto di una singola particella materiale, la cui velocità è uguale a quella del fluido, nella posizione in cui si trova e all'istante di tempo «attuale». La traiettoria di una particella è descritta dall curva  $\mathbf{R}(t)$ , parametrizzata con il tempo  $t$ , che soddisfa il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}}{dt}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t) \\ \mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0 \end{cases}$$

L'equazione differenziale traduce la definizione di particella materiale: la velocità della particella materiale  $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{R}/dt(t)$  è uguale alla velocità del fluido nello stesso punto allo stesso istante di tempo,  $\mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t)$ . La condizione iniziale identifica tra tutte le traiettorie delle infinite particelle materiali, quella della particella che all'istante  $t_0$  passa per il punto  $\mathbf{R}_0$ . Fissati i «parametri»  $t_0$  e  $\mathbf{R}_0$  che identificano la particella desiderata, la sua traiettoria è descritta dalla curva  $\mathbf{R}(t; t_0, \mathbf{R}_0)$ , funzione del tempo «attuale»  $t$ .

- Una **linea di fumo** è il luogo dei punti descritto dalla posizione al tempo  $t$  (fissato) di tutte le particelle materiali passate per un punto (fissato) nello spazio,  $\mathbf{R}_0$ , negli istanti di tempo  $t_0$  precedenti a  $t$ ,  $t_0 < t$ .

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}}{dt}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t) \\ \mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0 \end{cases}$$

Il problema è identico a quello delle traiettorie. Cambia però il ruolo di  $t, t_0, \mathbf{R}_0$ : la linea di fumo al «tempo di osservazione»  $t$  formata da tutte le particelle passanti da  $\mathbf{R}_0$  a istanti temporali  $t_0$ , con  $t_0 < t$ , è una descritta dalla curva  $\mathbf{R}(t_0; t, \mathbf{R}_0)$ , funzione dell'istante  $t_0$ .

- Una **traccia** è il luogo dei punti descritto dalla posizione al tempo  $t$  (fissato) di tutte le particelle materiali che si trovavano su una curva  $\mathbf{R}_0(p)$  al tempo  $t_0$  (fissato).

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}}{dt}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t) \\ \mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0 \end{cases}$$

Ancora una volta il problema è identico a quello delle traiettorie ma cambia il ruolo di  $t, t_0, \mathbf{R}_0$ : fissati i parametri  $t_0$  e  $t$  che identificano rispettivamente l'istante di tempo in cui le particelle materiali desiderate si trovano sulla curva  $\mathbf{R}_0$  e l'istante di tempo in cui la curva viene osservata, la traccia è una funzione del luogo dei punti «iniziale»  $\mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{R}(\mathbf{R}_0; t, t_0)$ .

### 3.4.1 Osservazione 1.

Nel caso di campi stazionari, cioè indipendenti dal tempo,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}^{(staz)}(\mathbf{r})$ , linee di corrente, traiettorie e linee di fumo coincidono.

## 3.5 Exercises

### 3.5.1 Exercise 3.1

Sia dato il campo di moto  $\mathbf{u}(x, y) = 3\hat{x} + 3t\hat{y}$ . Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve  $= 0$  dal segmento che unisce l'origine con il punto  $(x_1, y_1) = (0, 1)$ ).

Definizione di linee di corrente, traiettorie, linee di fumo, tracce. Soluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie (problemi di Cauchy, ai valori iniziali).

Partendo dalle definizioni, si ricavano le equazioni delle curve caratteristiche. Il problema per le traiettorie, le linee di fumo e le tracce viene risolto una volta sola per ottenere il risultato in forma parametrica in funzione di  $t, t_0, \mathbf{R}_0(p) = (x_0(p), y_0(p))$ .



- **Linee di corrente.** L'equazione vettoriale che definisce una linea di corrente  $S(p) = X(p)\hat{x} + Y(p)\hat{y}$  viene scritta per componenti, 
$$\begin{cases} \frac{dX}{dp}(p) = \lambda(p) \\ \frac{dY}{dp}(p) = \lambda(p) \end{cases}$$

ricavando dalla prima  $\lambda(p)$  in funzione di  $dX/dp$ , sostituendolo nella seconda, e integrando tra  $p_0$  e  $p$ , con  $t$  fissato 
$$\int_{p_0}^p \frac{dY}{dp}(p') dp' = \int_{p_0}^p \frac{dX}{dp}(p') dp' \rightarrow Y(p) - Y(p_0) = (X(p) - X(p_0))$$
 .Dopo aver fissato una linea di corrente, imponendo il suo passaggio per un punto,  $(X(p_0), Y(p_0)) = (x_0, y_0)$ , si ottiene la sua equazione in forma cartesiana  $y = y_0 + (x - x_0)t$ . In questo problema, le linee di corrente costituiscono una famiglia di rette parallele nel piano  $x-y$ , a ogni istante temporale aumenta con il tempo.

- **Traiettorie.** Le equazioni di traiettorie, linee di fumo e tracce vengono ricavate in forma parametrica risolvendo il problema ai valori iniziali che le definisce. In un secondo momento viene ricavata la loro equazione in forma cartesiana, esplicitando il parametro in funzione di una delle due coordinate spaziali, esplicitando il parametro in funzione di una delle due coordinate spa-

ziali. Per le traiettorie, parametrizzate con  $t$ , si ottiene 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = 3 \\ \frac{dy}{dt}(t) = 3t \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x(t; R_0, t_0) = x_0 + 3(t - t_0) \\ y(t; R_0, t_0) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases}$$
 . Esplicitando in funzione di  $x$ ,  $t = t_0 + \frac{x - x_0}{3}$ , e sostituendo nella coordinata  $y$  si ottiene l'equazione in forma cartesiana,  $y(x; R_0, t_0) = \frac{1}{6}x^2 + \left[-\frac{1}{3}x_0 + t_0\right]x + y_0 + \frac{1}{6}x_0^2 - x_0t_0$ , all'interno della quale  $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0)$  e  $t_0$  compaiono ancora come parametri. Dalla ([eqn:ese:trai]{reference-type=»ref» reference=»eqn:ese:trai»}), le traiettorie sono parabole con la concavità rivolta verso l'alto.

- **Linee di fumo (curve di emissione).** La forma parametrica dell'equazione delle linee di fumo (funzioni di  $t_0$ ) è 
$$\begin{cases} x(t_0; t, R_0) = x_0 + 3(t - t_0) \\ y(t_0; t, R_0) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases}$$

Esplicitando  $t_0$  in funzione di  $x$ ,  $t_0 = t - \frac{x - x_0}{3}$ , e sostituendo nella coordinata  $y$  si ottiene l'equazione in forma cartesiana,  $y(x; t, R_0) = -\frac{1}{6}x^2 + \left[\frac{1}{3}x_0 + t\right]x + y_0 - \frac{1}{6}x_0^2 + x_0t_0$ , all'interno della quale  $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0)$  e  $t_0$  compaiono ancora come parametri. Dalla ([eqn:ese:trai]{reference-type=»ref» reference=»eqn:ese:trai»}), le linee di fumo sono parabole con la concavità rivolta verso il basso.

- **Tracce.** La forma parametrica dell'equazione delle tracce è 
$$\begin{cases} x(R_0; t, t_0) = x_0 + 3(t - t_0) \\ y(R_0; t, t_0) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases}$$

Il segmento che unisce l'origine al punto  $(x_1, y_1) = (0, 1)$  è descritto in forma parametrica come 
$$R_0(p) = \begin{cases} x_0(p) = 0 \\ y_0(p) = p \end{cases}, \quad p \in$$

$[0, 1]$ . La forma parametrica delle tracce (il parametro che descrive la curva, mentre  $t_0$  sono parametri fissi) quindi  $R(R_0, t_0, p) = \begin{cases} x(p; t, t_0) = 3(t - t_0) \\ y(p; t, t_0) = p + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases}, \quad p \in [0, 1]$ . Queste sono segmenti verticali di lunghezza uguale a 1, con il punto più basso  $(0, t_0)$ ,  $\frac{3}{2}(t^2 - t_0^2)$ .

### 3.5.2 Exercise 3.2

Sia dato il campo di moto  $u(x, y) = 2Ax\hat{x} - 2Ay\hat{y}$ . Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle.

Definizione di linee di corrente, traiettorie, linee di fumo, tracce. Soluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie (problemi di Cauchy, ai valori iniziali).

Partendo dalle definizioni, si ricavano le equazioni delle curve caratteristiche.

- **Linee di corrente.** Dalla scrittura in componenti della definizione di linee di corrente si ottiene il sistema 
$$\begin{cases} \frac{dX}{dp} = \lambda(p) \\ \frac{dY}{dp} = -\lambda(p) \end{cases}$$

$\lambda(p) = \frac{X'(p)}{2AX(p)}$  dalla prima equazione e inserendolo nella seconda. Integrando tra  $p_0$  e  $p$ , dopo aver semplificato i fattori  $2A$ , si ottiene (derivare per credere) 
$$\int_{p_0}^p \left( \frac{X'(p')}{X(p')} + \frac{Y'(p')}{Y(p')} \right) dp' = \ln \frac{X(p)}{X(p_0)} + \ln \frac{Y(p)}{Y(p_0)} \rightarrow X(p)Y(p) = X(p_0)Y(p_0)$$
 Le linee di corrente appaiono come delle iperboliche equilaterie con gli assi coincidenti con gli assi. Nel processo siano diversi da zero. Nella ricerca degli equilibri del sistema, si nota che

- il punto  $(x, y) = (0, 0)$  è l'unico punto di equilibrio del sistema, punto di ristagno del campo di velocità;
- gli assi coordinati coincidono con linee di corrente: la derivata  $dX/dp$  è nulla quando  $X = 0$  (se la parametrizzazione della curva è regolare, cioè  $\lambda(p) \neq 0$ ); la derivata  $dY/dp$  è nulla quando  $Y = 0$  (se la parametrizzazione della curva è regolare, cioè  $\lambda(p) \neq 0$ ). Nel primo caso, la linea di corrente coincide con l'asse  $y$ , avendo coordinata  $X = 0$  costante e coordinata  $Y(p)$  descritta dalla seconda equazione; nel secondo caso, la linea di corrente coincide con l'asse  $x$ , avendo coordinata  $Y = 0$  costante e coordinata  $X(p)$  descritta dalla prima equazione.

- **Traiettorie.** 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2Ax(t) \\ \frac{dy}{dt} = -2Ay(t) \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t; r_0, t_0) = x_0 e^{2A(t-t_0)} \\ y(t; r_0, t_0) = y_0 e^{-2A(t-t_0)} \end{cases}$$

- **Linee di fumo.** Da quanto riportato nel punto e nell'osservazione precedenti, è immediato ricavare sia la forma

parametrica delle linee di fumo, 
$$\begin{cases} x(t_0; t, r_0) = x_0 e^{2A(t-t_0)} \\ y(t_0; t, r_0) = y_0 e^{-2A(t-t_0)} \end{cases} \quad \text{sia la forma cartesiana, } x = x_0 e^{2A(t-t_0)}, y = y_0 e^{-2A(t-t_0)}$$

#### Osservazione.

Per ricavare la forma cartesiana dell'equazione delle traiettorie bisogna esplicitare il parametro  $t$  in funzione di una delle due coordinate e inserire la formula ottenuta nell'equazione delle altre componenti. In questo caso è possibile eliminare la dipendenza da  $t$ , moltiplicando tra di loro le componenti delle traiettorie e ottenendo  $xy = x_0 y_0$ : si osserva l'equazione delle traiettorie coincide con l'equazione delle linee di corrente per il campo di velocità considerato. Le linee di corrente coincidono con le linee di corrente e le linee di fumo nel caso in cui il **campo di velocità è stazionario**: in questo caso, il sistema differenziale con il quale si ricavano linee di corrente e linee di fumo è **autonomo**, cioè il termine forzante non dipende esplicitamente dal tempo. La soluzione di un problema differenziale di un sistema autonomo non dipende dal tempo  $t$  in sé, ma dalla differenza tra il tempo  $t$  e il tempo al quale viene imposta la condizione iniziale  $t_0$ ; nella formula parametrica delle traiettorie,  $t$  e  $t_0$  compaiono sempre come differenza  $t - t_0$  e mai «in altre forme», come ad esempio nell'esercizio precedente, nel quale il campo di moto non è stazionario. Per questo motivo si arriva alla stessa equazione in forma cartesiana per le traiettorie e le linee di fumo, dopo aver esplicitato rispettivamente  $t$  e  $t_0$  in funzione di una coordinata e aver inserito questa espressione nelle formule delle altre componenti.

### 3.5.3 Exercise 3.3

Sia dato il campo di moto  $u(x, y, z) = 3y\hat{x} - 3x\hat{y} + t\hat{z}$ . Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle.

**Suggerimento.** Le componenti  $x$  e  $y$  del sistema sono accoppiate tra di loro.

Risolvendo il sistema per le **linee di corrente**, 
$$\begin{cases} \frac{dX}{dp} = \lambda(p)3Y \\ \frac{dY}{dp} = -\lambda(p)3X \\ \frac{dZ}{dp} = \lambda(p)t, \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} X(p)\frac{dX}{dp} + Y(p)\frac{dY}{dp} = 0 \\ \frac{dZ}{dp} = \lambda(p)t. \end{cases} \quad \text{Integrando la prima, si ottiene l'equazione di una circonferenza } X(p)^2 + Y(p)^2 = R^2$$

$$= R^2 \text{ (con } R^2 = X(p_0)^2 + Y(p_0)^2 \text{, descrivibile in forma parametrica come } \begin{cases} X(p) = R \cos(p) \\ Y(p) = R \sin(p) \end{cases} \text{ Con la parametrizzazione scelta}$$

$= -1/3$  e integrare l'equazione per la componente  $Z$ .

Per il calcolo dell'equazione che descrive le **traiettorie** delle particelle materiali e le **linee di fumo**, la soluzione del problema di Cauchy 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3y(t) & x(t_0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = -3x(t) & y(t_0) = y_0 \\ \frac{dz}{dt} = t & z(t_0) = z_0, \end{cases} \quad \text{ha la forma} \quad \begin{cases} x(t, r_0, t_0) = A \sin(3t) - B \cos(3t) \\ y(t, r_0, t_0) = A \cos(3t) + B \sin(3t) \\ z(t, r_0, t_0) = z_0 + \frac{t^2 - t_0^2}{2}. \end{cases} \quad \text{Le costanti di integrazione mancano}$$

$y_0 \cos(3t_0) + x_0 \sin(3t_0)$ ,  $B = y_0 \sin(3t_0) - x_0 \cos(3t_0)$ , e la soluzione del problema in forma parametrica può essere riscritta come

### 3.5.4 Exercise 3.4

Sia dato il campo di moto  $u(x, y, z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\hat{x} + \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\hat{y} + \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\hat{z}$ . Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle.

**Suggerimento.** Per risolvere l'esercizio in maniera semplice, si osservi che il campo di moto è stazionario e ha simmetria sferica: è quindi conveniente usare un sistema di coordinate sferiche.



---

Balance equations

---

In questo capitolo vengono introdotti i bilanci di alcune quantità meccaniche per un mezzo continuo. I bilanci in forma integrale permettono di descrivere l'evoluzione complessiva (integrale) di un sistema e vengono ricavati partendo da alcuni principi fondamentali della meccanica classica: la conservazione della massa, le equazioni cardinali della dinamica, il primo principio della termodinamica o bilancio dell'energia. Vengono scritti prima per un volume materiale e poi per volumi di controllo o volumi in moto generico, utilizzando il teorema del trasporto di Reynolds.

Dai bilanci in forma integrale, sotto ipotesi di sufficiente regolarità dei campi, vengono poi ricavati i bilanci in forma differenziale, che permettono di descrivere l'evoluzione locale (puntuale) di un sistema. La forma lagrangiana dei bilanci di massa, di quantità di moto e della vorticità verrà utilizzata per meglio apprezzare il significato del vincolo di incomprimibilità, il ruolo della pressione (e degli sforzi in generale) nella dinamica di un fluido e intuire l'influenza del campo di velocità sul campo di vorticità.

Successivamente, dai bilanci integrali vengono ricavate le relazioni di salto delle quantità meccaniche. Queste relazioni possono essere utilizzate per trovare determinare lo stato di un sistema formato da due sotto-sistemi, all'interno dei quali i campi sono regolari, ma che sono separati da una frontiera, attraverso la quale i campi non sono regolari: alcuni esempi di queste sono le superfici «di scorrimento» in fluidi non viscosi, attraverso le quali è discontinua la componente tangenziale della velocità, o le onde d'urto che possono formarsi in correnti comprimibili di fluidi non viscosi.

Infine, viene fornita una breve introduzione agli esercizi sui bilanci integrali, che costituisce una prima linea guida al loro svolgimento.

## 4.1 Bilanci in forma integrale

Vengono ricavati i bilanci integrali per un volume materiale  $V(t)$  partendo dai principi fondamentali della meccanica classica. Successivamente si ricavano i bilanci per un volume in moto arbitrario  $v(t)$  e, come caso particolare, volumi di controllo  $V_c$ .

## 4.2 Bilancio di massa

La massa di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume della densità  $\rho$ . Per il **principio di conservazione della massa**, la massa di un sistema chiuso (che non ha scambi di materia con l'esterno), come ad esempio un volume materiale  $V(t)$ , rimane costante e quindi la sua derivata nel tempo deve essere uguale a zero,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho = 0.$$

## 4.3 Bilancio della quantità di moto

La quantità di moto di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume della quantità di moto per unità di volume  $\rho \mathbf{u}$ , dove  $\mathbf{u}$  è la velocità delle particelle materiali. Per la **prima equazione cardinale della dinamica**, la derivata nel tempo della quantità di moto di un sistema è uguale alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} = \int_{V(t)} \mathbf{f} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n,$$

dove  $\int_{V(t)} \mathbf{f}$  rappresenta la risultante delle forze esterne di volume e  $\oint_{S(t)} \mathbf{t}_n$  la risultante delle forze esterne di superficie, avendo indicato con  $\mathbf{f}$  il campo di forze per unità di volume e  $\mathbf{t}_n$  il vettore sforzo agente sulla superficie esterna  $S(t)$  del volume  $V(t)$ . Il teorema di Cauchy nella meccanica del continuo, permette di esprimere il vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$  in funzione del tensore degli sforzi  $\mathbb{T}$  e la normale alla superficie  $\hat{\mathbf{n}}$ , come  $\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T}$ .

## 4.4 Bilancio del momento quantità di moto

Il momento della quantità di moto di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume del momento della quantità di moto per unità di volume  $\rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}$ , dove  $\mathbf{r}$  è il vettore che congiunge il polo con i punti del volume materiale. Per la **seconda equazione cardinale della dinamica**, la derivata nel tempo del momento della quantità di moto di un sistema, rispetto a un polo fisso, è uguale alla risultante momenti esterni sul sistema,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} = \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \oint_{S(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n,$$

nell'ipotesi che non ci siano momenti esterni per unità di volume e che il materiale non sia polare (due elementi di materiale adiacenti non si scambiano momenti ma solo forze).

## 4.5 Bilancio dell'energia totale

L'energia totale di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume della sua energia interna per unità di volume  $\rho e$  e della sua energia cinetica per unità di volume  $\rho |\mathbf{u}|^2/2$ . Combinando il **primo principio della termodinamica** (che riguarda solo sistemi in equilibrio) con il **teorema dell'energia cinetica** (che non include il contributo di energia interna), la derivata nel tempo dell'energia totale del sistema di un sistema è uguale alla differenza tra la potenza delle forze agenti sul sistema e i flussi di calore uscenti da esso,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e = \int_{V(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r,$$

avendo indicato con  $\mathbf{q}$  il flusso di calore uscente dal volume materiale  $V(t)$ , e con  $r$  l'intensità di una sorgente di calore per unità di massa  $r$ , distribuita all'interno del volume  $V(t)$ , come ad esempio il calore rilasciato da una reazione chimica come la combustione.

## 4.6 Bilanci integrali per volumi in moto arbitrario

Utilizzando il teorema del trasporto di Reynolds, è possibile esprimere la derivata nel tempo dell'integrale di un campo  $f$  su un volume materiale  $V(t)$  come somma della derivata nel tempo dell'integrale dello stesso campo  $f$  su un volume arbitrario  $v(t)$  e al flusso della quantità  $f$  attraverso la frontiera  $s(t) = \partial v(t)$  di  $v(t)$ , dovuto alla velocità relativa  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  tra le particelle materiali e la superficie  $s(t)$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \frac{d}{dt} \int_{v(t) \equiv V(t)} f + \oint_{s(t) \equiv S(t)} f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

I bilanci integrali riferiti a un volume arbitrario  $v(t)$ , la cui superficie  $s(t)$  si muove con velocità  $\mathbf{v}$ , risultano

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho + \oint_{s(t)} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} + \oint_{s(t)} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \oint_{s(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{s(t)} \rho e^t(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{s(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r. \end{cases}$$

## 4.7 Bilanci integrali per volumi di controllo fissi

Come caso particolare dei bilanci integrali riferiti a un volume arbitrario  $v(t)$ , i bilanci integrali riferiti a un volume di controllo fisso  $V_c$  risultano

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{u} + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_c} \mathbf{f} + \oint_{S_c} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \oint_{S_c} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_c} \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \oint_{S_c} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho e^t + \oint_{S_c} \rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{S_c} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{S_c} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r. \end{cases}$$

## 4.8 Bilanci in forma differenziale

Sotto le ipotesi di sufficiente regolarità dei campi che compaiono negli integrali di superficie, è possibile trasformare gli integrali di superficie in integrali di volume, applicando il teorema della divergenza o il lemma del teorema di Green

$$\oint_S f n_i = \int_V f_{/i},$$

avendo indicato con  $f_{/i}$  la derivata parziale rispetto alla coordinata cartesiana  $x_i$  e con  $n_i$  la proiezione lungo  $x_i$  della normale uscente dalla superficie  $S = \partial V$ . Una volta scritti tutti i termini come integrali di volume, sullo stesso volume  $V$ , è possibile sfruttare l'arbitrarietà del volume  $V$  per ricavare i bilanci in forma differenziale. In questa sezione, si partirà dai bilanci in forma integrale scritti per un volume di controllo fisso  $V = V_c$ , per il quale vale

$$\frac{d}{dt} \int_V f = \int_V \frac{\partial f}{\partial t},$$

secondo il teorema del trasporto di Reynolds.

## 4.9 Bilancio di massa

Usando il teorema del trasporto di Reynolds per volumi di controllo fissi e applicando il teorema della divergenza al termine di flusso, si può scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho + \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] = 0 .$$

Sfruttando l'arbitrarietà del bilancio integrale dal volume considerato e imponendo che l'integranda sia nulla, si ricava la *forma conservativa* del bilancio differenziale di massa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

Sviluppando la divergenza  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$ , e riconoscendo l'espressione della derivata materiale, si ottiene la *forma convettiva* del bilancio differenziale di massa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} . \end{aligned}$$

Il vincolo cinematico di incomprimibilità  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  equivale al vincolo «fisico» che impone che la densità delle singole particelle materiali rimanga costante,  $D\rho/Dt = 0$ .

## 4.10 Bilancio di quantità di moto

É possibile trasformare in un integrale di volume la risultante degli sforzi di superficie, utilizzando il teorema di Cauchy per i mezzi continui,

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} \quad , \quad t_i = n_j T_{ji} ,$$

dove  $\mathbf{t}_n$  è il vettore sforzo,  $\hat{\mathbf{n}}$  la normale alla superficie e  $\mathbb{T}$  il tensore degli sforzi. La risultante degli sforzi di superficie diventa, usando un po' di libertà nel passare dalla notazione astratta a quella indiciale,

$$\oint_S \mathbf{t}_n = \oint_S t_i = \oint_S n_j T_{ji} = \int_V T_{ji/j} = \int_V \nabla \cdot \mathbb{T} .$$

Usando il teorema del trasporto di Reynolds per volumi di controllo fissi e applicando il teorema della divergenza al termine di flusso,

$$\oint_S \{\rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}\}_i = \oint_S \rho u_i u_j n_j = \int_V (\rho u_i u_j)_{/j} = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) ,$$

si può scrivere il bilancio di quantità di moto

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \int_V [\mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbb{T}] .$$

Sfruttando l'arbitrarietà del bilancio integrale dal volume considerato e imponendo che l'integranda sia nulla, si ricava la *forma conservativa* del bilancio differenziale di quantità di moto,

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbb{T}) = \mathbf{f} .$$



Sviluppando i termini

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} &= \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad , \quad (\rho u_i u_j)_{/j} = \rho u_j u_{i/j} + u_i (\rho u_j)_{/j} \end{aligned}$$

riconoscendo che  $\mathbf{u} \cdot (\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})) = 0$  come conseguenza della conservazione della massa, si ottiene la *forma convettiva* dell'equazione della quantità di moto

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbb{T} \\ \rho \frac{D \mathbf{u}}{Dt} &= \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbb{T} . \end{aligned}$$

## 4.11 Bilancio del momento della quantità di moto

Il bilancio del momento della quantità di moto per un mezzo continuo non polare è equivalente alla condizione di simmetria del tensore degli sforzi  $\mathbb{T}^T = \mathbb{T}$  ,  $T_{ij} = T_{ji}$  .

## 4.12 Bilancio dell'energia totale

Usando un po' di libertà nel passare dalla notazione astratta a quella indiciale, la potenza degli sforzi di superficie diventa

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} &= \oint_S t_i u_i = \oint_S n_j T_{ji} u_i = \int_V (T_{ji} u_i)_{/j} = \int_V \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) \\ &= \int_V (T_{ij/j} u_i + T_{ij} u_{j/i}) = \int_V ((\nabla \cdot \mathbb{T}) \cdot \mathbf{u} + \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u}) , \end{aligned}$$

avendo utilizzato la simmetria del tensore degli sforzi,  $T_{ij/j} = \{\nabla \cdot \mathbb{T}\}_i = \{\nabla \cdot \mathbb{T}\}_i$ . Applicando il teorema della divergenza, il termine di flusso di calore

viene scritto come

$$\oint_S \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} .$$

La *forma conservativa* del bilancio differenziale di energia totale diventa quindi

$$\frac{\partial(\rho e^t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u} - \mathbb{T} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{q}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \rho r .$$

Sviluppando la derivata temporale e il termine  $\nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u}) = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e^t + e^t \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$ , riconoscendo che  $e^t (\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})) = 0$  come conseguenza della conservazione della massa, si ottiene la *forma convettiva* dell'equazione dell'energia totale,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial e^t}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e^t &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \\ \rho \frac{D e^t}{Dt} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r . \end{aligned}$$

## 4.13 Chiusura del problema

Affinché il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali formato dai bilanci di massa, quantità di moto ed energia totale, con le condizioni iniziali e al contorno adeguate, sono necessarie l'equazione di stato del materiale che ne descriva le proprietà termodinamiche<sup>1</sup> e i legami costitutivi che esprimano il tensore degli sforzi e il flusso di calore come funzioni dello stato dinamico e termodinamico del sistema. Per un fluido, il tensore degli sforzi viscosi  $\mathbb{T}$  può essere scritto come la somma del contributo idrostatico dovuto alla pressione  $p$  e il tensore degli sforzi viscosi  $\mathbb{S}$ , funzione delle derivate spaziali del campo di velocità. Un fluido che ha un *legame costitutivo lineare* tra il tensore degli sforzi viscosi e il gradiente di velocità  $\nabla \mathbf{u}$ , viene definito **fluido newtoniano**. Per un fluido newtoniano isotropo, il legame costitutivo che definisce il tensore degli sforzi è

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbb{I},$$

dove  $\mu$  e  $\lambda$  sono rispettivamente il coefficiente di viscosità dinamica e il secondo coefficiente di viscosità,  $p$  è la pressione («termodinamica»),  $\mathbb{D}$  il tensore velocità di deformazione. In generale, sia la pressione  $p$  sia i coefficienti di viscosità dipendono dallo stato termodinamico del sistema. Il flusso di calore  $\mathbf{q}$  per conduzione può essere descritto dalla **legge di Fourier**, che lo mette in relazione con il gradiente della temperatura tramite il coefficiente di conduzione termica  $k$ , in generale funzione dello stato termodinamico del sistema,

$$\mathbf{q} = -k\nabla T.$$

L'introduzione di queste leggi costitutive nelle equazioni di bilancio, aggiunge nuove incognite al sistema, per le quali non abbiamo ricavato un'equazione dinamica. Sono quindi indispensabili la legge di stato che fornisca le relazioni necessarie,

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, e) \quad , \quad \mu = \mu(\rho, e) \\ T &= T(\rho, e) \quad , \quad \lambda = \lambda(\rho, e) \\ k &= k(\rho, e) \quad , \end{aligned}$$

avendo scelto le variabili termodinamiche delle quali è nota l'equazione dinamica come due variabili termodinamiche indipendenti: la densità  $\rho$  e l'energia interna  $e$ . Ve

## 4.14 Altre equazioni di bilancio

Combinando i bilanci delle quantità meccaniche ottenuti partendo dai principi fondamentali della fisica, si possono ottenere le equazioni di bilanci di altre quantità, come ad esempio l'energia cinetica  $\rho|\mathbf{u}|^2/2$ , l'energia interna  $e$ , e la vorticità  $\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \mathbf{u}$ .

### 4.14.1 Equazione dell'energia cinetica

Moltiplicando scalarmente il bilancio della quantità di moto per il vettore velocità  $\mathbf{u}$ , si può scrivere l'equazione di bilancio dell'energia cinetica. In forma conservativa,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho|\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{u} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T}),$$

in forma convettiva,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T}) \\ \rho \frac{D}{Dt} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T}). \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Si ricorda che lo stato termodinamico di un sistema monofase è definito da due variabili termodinamiche indipendenti.

#### 4.14.2 Equazione dell'energia interna

Dalla differenza del bilancio dell'energia totale e dell'energia cinetica, si ottiene il bilancio dell'energia interna. In forma conservativa,

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) = \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r,$$

in forma convettiva,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e &= \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \\ \rho \frac{De}{Dt} &= \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r. \end{aligned}$$

#### 4.14.3 Equazione della vorticità

Applicando l'operatore di rotore al bilancio della quantità di moto, si ottiene l'equazione dinamica della vorticità. Per un fluido newtoniano (con coefficienti di viscosità costanti e uniformi),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\zeta} &= (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \boldsymbol{\zeta} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \Delta \boldsymbol{\zeta} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \\ \frac{D \boldsymbol{\zeta}}{Dt} &= (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \boldsymbol{\zeta} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \Delta \boldsymbol{\zeta} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}, \end{aligned}$$

dove è stata introdotta la viscosità cinematica del fluido,  $\nu = \mu/\rho$ .

#### 4.14.4 Equazione dell'entropia

Nell'ipotesi di equilibrio termodinamico delle singole particelle materiali<sup>2</sup> si può ricavare dal primo principio della termodinamica,  $\$de = Tds - Pdv = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$ , l'equazione di bilancio dell'entropia in forma convettiva,

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \quad \rightarrow \quad \rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} \left( \rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right).$$

Utilizzando il bilancio dell'energia interna e il bilancio di massa, si può scrivere

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} (\mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + p \nabla \cdot \mathbf{u}),$$

e separando i contributi viscosi da quelli di pressione nel tensore degli sforzi,  $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S}$ ,<sup>3</sup>

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} (\mathbb{S} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r).$$

Nel caso di fluidi newtoniani,  $\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D} + \lambda\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbb{I}$ , l'equazione dell'entropia in forma differenziale convettiva diventa

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} (2\mu\mathbb{D} : \mathbb{D} + \lambda|\nabla \cdot \mathbf{u}|^2 - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r).$$

Utilizzando la legge di Fourier,  $\mathbf{q} = -k\nabla T$ , per il flusso di calore per conduzione, si può riscrivere il termine di divergenza del flusso di calore,

$$\frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T^2} = \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) - k \nabla T \cdot \frac{\nabla T}{T^2} = \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) - k \frac{|\nabla T|^2}{T^2},$$

<sup>2</sup> Se i tempi caratteristici della termodinamica sono di gran lunga inferiori al tempo caratteristico del fenomeno fluidodinamico, si può immaginare che la singola particella fluida sia in continuo stato di equilibrio termodinamico locale. Si possono quindi estendere i risultati della Termodinamica, che in generale studia sistemi in equilibrio, alla singola particella fluida.

<sup>3</sup> Dovrebbe essere facile dimostrare che  $\mathbb{I} : \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ .

e quindi riscrivere l'equazione dell'entropia, in forma conservativa e convettiva,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u}) &= \frac{1}{T} (2\mu \mathbb{D} : \mathbb{D} + \lambda |\nabla \cdot \mathbf{u}|^2) + k \frac{|\nabla T|^2}{T^2} - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\rho r}{T} \\ \rho \frac{Ds}{Dt} &= \frac{1}{T} (2\mu \mathbb{D} : \mathbb{D} + \lambda |\nabla \cdot \mathbf{u}|^2) + k \frac{|\nabla T|^2}{T^2} - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\rho r}{T}.\end{aligned}$$

In questa equazione si riconoscono tutti i fenomeni fisici che influenzano l'entropia di una particella materiale. Si possono distinguere i contributi dovuti alla *non idealità* del fluido considerato, legati ai fenomeni viscosi e di conduzione del calore, e i contributi dovuti ai flussi di calore forniti alla sistema. I fenomeni viscosi e i processi di conduzione del calore fanno aumentare l'entropia, poiché

$$T, \mu, \lambda, k \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{D} : \mathbb{D}, |\nabla \cdot \mathbf{u}|, |\nabla T| \geq 0.$$

Gli ultimi due termini rappresentano i flussi di calore forniti al sistema e si presentano nella forma  $Q/T$ , flusso di calore diviso la temperatura della particella, coerentemente con la definizione dell'entropia in Termodinamica,

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Questi due termini possono dare un contributo positivo o negativo, a seconda del segno della sorgente di calore  $r$  e del flusso di valore  $\mathbf{q}$ . Il bilancio dell'entropia in forma integrale per un volume materiale,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho s = \int_{V(t)} \frac{1}{T} \left( 2\mu \mathbb{D} : \mathbb{D} + \lambda |\nabla \cdot \mathbf{u}|^2 + k \frac{|\nabla T|^2}{T} \right) - \oint_{\partial V(t)} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \frac{\rho r}{T},$$

permette di interpretare il ruolo dei fenomeni non ideali (viscosità e conduzione del calore) come sorgente di volume sempre positiva dell'entropia, riconoscere il ruolo della sorgente (o pozzo) di entropia di intensità per unità di massa  $r/T$  svolto da una sorgente di calore per unità di massa  $r$ , e il ruolo di flusso di entropia  $\mathbf{q}/T$  attraverso il contorno del volume  $V(t)$  svolto da un flusso di calore  $\mathbf{q}$ .

## 4.15 Relazioni di salto

...

## 4.16 Exercises

### 4.16.1 Approfondimenti su alcuni bilanci

In questa sezione vengono analizzate alcune equazioni di bilancio in forma differenziale (è quindi necessario che queste equazioni siano valide!); vengono usate sia la rappresentazione euleriana sia la rappresentazione lagrangiana, al fine di ottenere la migliore comprensione dei fenomeni fisici coinvolti.

Si indicano con  $x_0$  le coordinate lagrangiane, solidali con il continuo; si indicano con  $x$  le coordinate euleriane. I due sistemi di coordinate sono legati tra di loro dalle relazioni

$$\begin{aligned}x &= x(x_0, t) \\ \frac{Dx}{Dt} &= \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{x_0} = u\end{aligned}$$

La derivata  $\partial/\partial t$  indica la derivata temporale fatta a coordinata euleriana  $x$  costante. La derivata materiale  $D/Dt$  indica la derivata fatta «a coordinata lagrangiana» costante e rappresenta quindi la variazione temporale di una quantità legata alla particella materiale, che si muove come il continuo, per la definizione di coordinate materiali.

Il legame tra  $D/Dt$  e  $\partial/\partial t$  si trova utilizzando le regole di derivazione per funzioni composte. Scrivendo la funzione generica  $f$  come

$$f(x, t) = f(x(x_0, t), t) = f_0(x_0, t) = f_0(x_0(x, t), t), \text{ si ottiene } \frac{D}{Dt} f = \frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{x_0} f(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{x_0} f(x(x_0, t), t) = \frac{\partial f}{\partial t} \bigg|_x + \frac{\partial x}{\partial t} \bigg|_{x_0} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_t = \dots$$

## Continuità

## Quantità di moto

## Vorticità

### 4.16.2 Exercise 4.1

I bilanci integrali consentono di valutare le azioni integrali (forze, momenti, potenza) scambiati tra un fluido e un corpo a contatto con esso, senza conoscere nel dettaglio il campo di moto del fluido di interesse, ma valutando il flusso netto delle quantità meccaniche di interesse (massa, quantità di moto, momento della quantità di moto, energia, entalpia e calore) attraverso la superficie di contorno del volume fluido di interesse. Il contorno del dominio fluido  $v(t)$  viene suddiviso nella parte a contatto con il corpo di interesse  $s_{f,s}(t)$  e nella parte rimanente  $s_{f,free}(t) = \partial v(t) \setminus s_{f,s}(t)$ .

### Bilancio della quantità di moto e risultante delle forze.

La risultante delle forze agenti sul corpo<sup>1</sup> sarà uguale all'integrale del vettore sforzo agente sulla superficie  $s_{s,f}(t)$ ,  $R^s = \oint_{s_{s,f}(t)} t_{n,s}$ , avendo indicato con  $s_{s,f}(t)$  la superficie del solido con normale uscente dalla superficie solida e entrante nel solido  $\mathbf{n}$ , per il principio di azione e reazione (terzo principio della dinamica). Non stato aggiunto il pedice  $f$  al vettore sforzo agente  $\mathbf{t}$ , sulla superficie  $s_{f,s}$ . Di conseguenza rimane solo il contributo del flusso della quantità di moto attraverso la superficie  $s_{f,free}(t)$ .

$\mathbf{v}(t)$  del vettore sforzo può essere suddiviso nella somma dell'integrale svolto sulla superficie a contatto con il solido e sulla superficie  $s_{f,free}(t)$ .

In questo caso, il vettore sforzo si riduce al solo effetto della pressione  $\mathbf{t}_n = -p \mathbf{\hat{n}}$ .

Ritornando al bilancio della quantità di moto, si può scrivere  $\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} dV = - \int_{s_{f,free}(t)} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{\hat{n}} dA$

$$\begin{aligned} & \int_{s_{f,free}(t)} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{\hat{n}} dA \\ & \int_{s_{f,free}(t)} p \mathbf{\hat{n}} dA = -p \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{\hat{n}} dA \equiv 0, \text{ la risultante delle forze agenti sul solido si riduce a } R^s = \end{aligned}$$

<sup>1</sup> La risultante delle forze delle azioni scambiate con il fluido. A questa andranno sommate le forze di volume, come ad esempio il peso del corpo stesso.

## Bilancio del momento della quantità di moto e risultante dei momenti.

Riproponendo un ragionamento analogo, dal bilancio del momento della quantità di moto si può ricavare la risultante dei momenti agenti su un corpo,  $\mathbf{M} = \oint_{s_{f,s}} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n$ . Nel caso semplificato in cui il problema sia stazionario, le forze di volume sono trascurabili, gli sforzi viscosi sono trascurabili,  $-\int_{s_{f,free}} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , dove  $\mathbf{r}$  il raggio vettore tra i punti sulla superficie  $\{f, free\}(t)$  e il polo rispetto al quale si calcolano i momenti.

## Bilancio dell'energia totale.

Tramite il bilancio dell'energia totale si può ricavare la potenza fornita (o assorbita) da un corpo al fluido, e/o il calore scambiato con esso. Gli esercizi che utilizzeranno il bilancio di energia totale ricorderanno alcuni esercizi di Fisica Tecnica. Lo scopo di questi esercizi è quello di proporre un punto di vista più maturo a tali problemi, partendo ai bilanci integrali nella loro forma più generale e opportunamente semplificati considerando grandezze uniformi sulle sezioni (o equivalenti grandezze medie) e ipotesi sullo scambio di calore tra il fluido e l'esterno. Verranno analizzati sistemi aperti e chiusi, nella speranza di fornire un approccio di validità generale a problemi già trattati durante il corso di Fisica Tecnica, senza alcuna pretesa di coprire tutti gli argomenti e i dettagli trattati in quel corso, ma piuttosto consentire una visione del problema generale che coinvolga scambi di massa, lavoro e calore del sistema con l'esterno, facilmente specializzabile a casi particolari, che riduca al minimo lo sforzo mnemonico richiesto da molti casi particolari, apparentemente scorrelati l'uno dall'altro, a vantaggio di una maggiore «sensibilità» sul fenomeno fisico.

Sfruttando la suddivisione della superficie del volume fluido  $\partial v = s_{f,free} \cup s_{f,s}$ , si può riscrivere il bilancio dell'energia totale,  $\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{\partial v(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{\partial v(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r$ . riconosce la potenza  $W = \oint_{s_{f,s}} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u}$ .

$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{\partial v(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} =$

energia fornita da un corpo solido al fluido,  $= \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r$ . Se non c'è flusso di massa,  $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  sulla superficie libera  $\{f, free\}$  del volume di controllo fissa,  $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  sulla superficie  $\{f, free\}$ . Separando il contributo degli sforzi di pressione da quelli viscosi,  $\mathbf{t}_n = -p \hat{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\tau}$ .

$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{s_{f,free}(t)} \rho h^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} =$

energia fornita da un corpo solido al fluido,  $= \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ .

$= \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ .

$= \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ .

$= \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ .

$= \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ .

$= \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ .

$= \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ .

$= \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ .

$= \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ .

$= \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ .

$= \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ .

## Sistemi aperti

Per un sistema aperto in cui sono soddisfatte le ipotesi già elencate, si può scrivere  $\frac{d}{dt} \int_{\text{volume}} \rho e^t = - \oint_{\text{sf,free}} (\rho \mathbf{h}^t \cdot \mathbf{u}) + \oint_{\text{volume}} (\rho \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})$ , *esinteticamente*  $\frac{dE^t}{dt} = \Phi_{h^t} + W +$

$$\bullet W - \oint_{\text{volume}} (\rho \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}) + \oint_{\text{volume}} (\rho \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})$$

$\dot{Q}$ , *avendo definito l'energia totale interna  $E^t$  al volume  $v(t)$  studiato, il flusso netto dientalpiatotale  $\Phi_{h^t}$  attraverso la*

## Sistemi chiusi

Per un sistema chiuso (nessuno scambio di massa con l'esterno) in cui i termini cinetici sono trascurabili,  $e^t = e$ , il bilancio di energia diventa sintenticamente,  $\frac{d}{dt} \int_{\text{volume}} \rho e =$

$\frac{d}{dt} \int_{\text{volume}} \rho E = W + \oint_{\text{volume}} (\rho \mathbf{q} \cdot \mathbf{u})$ , *avendo definito  $E =$*   $\int_{\text{volume}} \rho e$ , *come l'energia internadel fluido contenutonel volume  $v(t)$* . Questa formula corrisponde al primo principio della Termodinamica, formulato in termini di potenza e non di energia, in cui è stata utilizzata la convenzione di potenza delle forze positiva e flusso di calore positivo se fornito al fluido.<sup>2</sup>

### 4.16.3 Exercise 4.2

Si consideri una rete idraulica

come quella rappresentata in figura. All'interno dei tubi scorre acqua. Sia nota le velocità media dell'acqua all'interno di alcuni dei rami della rete:  $U_1 = 1 \text{ m/s}$ ,  $U_2 = 1.5 \text{ m/s}$ ,  $U_3 = 0.5 \text{ m/s}$ ,  $U_7 = 2 \text{ m/s}$  e  $U_8 = 0.3 \text{ m/s}$ . Il verso della velocità è indicato dalle frecce sul disegno. Determinare la portata volumetrica, la portata in massa e la velocità media all'interno di ciascun ramo della rete sapendo che l'acqua ha una densità pari a  $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$  e che il diametro dei tubi è rispettivamente  $D_1 = 0.4 \text{ m}$ ,  $D_2 = 0.2 \text{ m}$ ,  $D_3 = 0.2 \text{ m}$ ,  $D_4 = 0.3 \text{ m}$ ,  $D_5 = 0.5 \text{ m}$ ,  $D_6 = 0.25 \text{ m}$ ,  $D_7 = 0.3 \text{ m}$ ,  $D_8 = 0.6 \text{ m}$ .  $Q_1 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_2 = 0.05 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_3 = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_4 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_5 = 0.06 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_6 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_7 = 0.14 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_8 = 0.08 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $U_1 = 1 \text{ m/s}$ ,  $U_2 = 1.5 \text{ m/s}$ ,  $U_3 = 0.5 \text{ m/s}$ ,  $U_4 = 1.87 \text{ m/s}$ ,  $U_5 = 0.29 \text{ m/s}$ ,  $U_6 = 2.69 \text{ m/s}$ ,  $U_7 = 2 \text{ m/s}$ ,  $U_8 = 0.3 \text{ m/s}$ ,  $\bar{Q}_1 = 125.5 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_2 = 47.08 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_3 = 15.69 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_4 = 131.8 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_5 = 54.49 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_6 = 131.8 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_7 = 141.2 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_8 = 84.74 \text{ kg/s}$

Bilancio integrale della massa. Teoria delle reti: bilancio ai nodi.

<sup>2</sup> In Termodinamica, che studia sistemi in equilibrio, il primo principio è formulato in termini di energia come,  $\Delta E = Q - L$ , *incui la variazione di energia  $\Delta E$  è uguale alla differenza del calore  $Q$  fornito al sistema e al lavoro  $L$  svolto dal sistema.*

Se il regime di moto è stazionario, la portata massica è costante e indipendente dalla sezione considerata all'interno di ogni singolo tubo. Il bilancio di massa nell' $i$ -esimo tubo è,

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_i} \rho}_{=0} = \oint_{S_i} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_{i,\alpha}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{S_{i,\beta}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \tilde{Q}_{i,\alpha} + \tilde{Q}_{i,\beta} \rightarrow \tilde{Q}_{i,\alpha} = -\tilde{Q}_{i,\beta}, \text{avendo indicato } S_{i,\alpha} \text{ e } S_{i,\beta} \text{ le due sezioni in "ingresso" e "uscita" del tubo } V_i, \text{ con } \hat{\mathbf{n}}, \tilde{Q} / \Delta t$$

$\bar{Q}_{i,\beta} = -\bar{Q}_{i,\alpha}$ . Utilizzando il verso delle frecce indicato in figura per stabilire il segno dei flussi di massa, il bilancio di massa ai nodi può essere scritto:

$$\bar{Q}_k = \rho \frac{\pi}{4} D_k^2 U_k, k=1,2,3,7,8. \text{ Successivamente si calcolano le portate volumetriche } Q_k \text{ incognite, dividendo le portate } \bar{Q}_k \text{ per } \rho, \quad k = 1 : 8.$$

#### 4.16.4 Exercise 4.3

Si sta riempiendo una bombola per immersioni subacquee. Sapendo che la pompa aspira aria a pressione ambiente di  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$  e alla temperatura di  $293 \text{ K}$  in un condotto di sezione  $1 \text{ cm}^2$  in cui la velocità media è di  $0.5 \text{ m/s}$  e che non ci sono perdite nel sistema di pompaggio, determinare la rapidità di variazione della massa d'aria e della sua densità all'interno della bombola, sapendo che il volume della bombola è pari a  $0.02 \text{ m}^3$ . ( $\frac{dM}{dt} = 6.01 \times 10^{-5} \text{ kg/s}$ ,  $\frac{d\rho}{dt} = 3.00 \times 10^{-3} \text{ kg/(m}^3\text{s)}$ ).

Bilancio integrale della massa. Legge dei gas perfetti.

Sono date la pressione  $p$  e la temperatura  $T$  all'uscita della pompa. È nota l'area  $S$  della sezione e la velocità media  $U$  su quella sezione. Si trova la variazione di massa all'interno della bombola grazie al bilancio integrale di massa nel volume della bombola  $V$  (volume di controllo, fisso),

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho_{in} S_{in} U, \text{ dove si indica con } M \text{ la massa totale, } S_{in} \text{ l'area della sezione del tubo utilizzato per riempire la bombola e } \rho_{in} \text{ la densità dell'aria all'ingresso. L'equazione si scrive anche come } \frac{dM}{dt} = \frac{P_{in}}{RT_{in}}, \text{ dove } R = 287 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)} \text{ la costante dei gas per l'aria. La derivata nel tempo della massa d'aria nella bombola vale quindi } \frac{dM}{dt} = 6.0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{s}}. \text{ Supponendo che la densità dell'aria sia uniforme all'interno della bombola, si può calcolare la sua derivata nel tempo, } \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{V} \frac{d}{dt} \int_V \rho = 2.0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3\text{s}}.$$

#### 4.16.5 Exercise 4.4

Un getto d'acqua di sezione  $S = 1 \text{ cm}^2$  ( $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ ) stazionario, piano e orizzontale viene indirizzato su un cilindro, lambendone la superficie e venendo deviato di un angolo  $\alpha = 15^\circ$ . Determinare la forza agente su una porzione del cilindro di lunghezza pari a  $H = 2 \text{ m}$ , dovuta sia al getto d'acqua, sia all'aria circostante, sapendo che: - il fluido che circonda il getto e il cilindro è aria in quiete a pressione atmosferica di  $101325 \text{ Pa}$ ; - la larghezza del getto è  $h = 2 \text{ cm}$ ; - la portata d'acqua per unità di lunghezza nel getto è  $Q = 199 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Sufficientemente lontano dal cilindro, il profilo di velocità sulle sezioni del getto è uniforme. Illustrare tutte le ipotesi semplificative adottate nella risoluzione dell'esercizio. ( $F = 1026 \hat{x} - 135 \hat{y} \text{ N}$ ).



Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Effetto Coanda (esempio della bustina da té sotto il rubinetto).

Vengono fatte alcune ipotesi: il problema stazionario; attorno al getto e al solido, l'aria è in quiete con pressione uniforme  $p_a$ ; il profilo di velocità è uniforme sulle sezioni del getto considerate nelle equazioni di bilancio.

Partendo dalle equazioni di bilancio per il volume di controllo  $V_f$  occupato dal fluido, rielaborando il termine degli sforzi di superficie sforzi di superficie, si ricava la risultante  $R$  agente sul solido in funzione del flusso di quantità di moto del fluido attraverso la superficie  $S_f = \partial V_f$ .

Innanzitutto viene ricavata l'espressione della risultante  $R$  agente sul solido.

- Vengono scritte le equazioni di bilancio per il fluido, considerando il volume  $V_f$ 

$$\int_{V_f} \rho + \int_{S_f} \rho \, \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{e} \quad \int_{V_f} \rho \, \mathbf{u} + \int_{S_f} \rho \, \mathbf{u} \, \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{S_f} \rho \, \mathbf{t}_n = 0$$

$$\&\quad \text{(quantità di moto)} \quad \text{\Rb^{\text{ext}}}$$

- Viene introdotta l'ipotesi di stazionarietà del fenomeno,  $\frac{d}{dt} \equiv 0$ . La risultante degli sforzi viene scritta come somma degli sforzi di pressione e degli sforzi viscosi,  $\begin{split}$

$$\int_{\mathcal{S}_f} \rho \, \mathrm{d}\mu \cdot \widehat{\mu} = \int_{\mathcal{S}_f} \mu_t \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{S}_f} \mu_s \, \mathrm{d}\mu - \int_{\mathcal{S}_f} p \, \widehat{\mu} \, \mathrm{d}\mu.$$

- Viene manipolato il termine degli sforzi di superficie. Il contorno  $S_f$  del volume fluido viene scomposto come unione della superficie a contatto con il solido  $S_{fs}$ , delle superfici «laterali»  $S_{fl}$  (attraverso le quali non c'è flusso di quantità meccaniche, poichè  $u \cdot \hat{n} = 0$ ) a contatto con l'aria in quiete e le sezioni «di ingresso»  $S_{f,1}$  e «di uscita»  $S_{f,2}$  sulle quali la velocità è uniforme, utilizzate per i bilanci integrali per il volume fluido. Viene indicata con  $\hat{n}_f$  la normale uscente dal volume  $V_f$ . Il contorno  $S_s$  del solido viene scomposto come unione della superficie a contatto con il fluido  $S_{sf}$  e della superficie  $S_{sl}$  a contatto con l'aria in quiete. Viene indicata con  $\hat{n}_s$  la normale uscente dal volume  $V_s$ . In questo modo, la superficie  $S_{fs}$  coincide con la superficie  $S_{sf}$ , a meno della normale invertita,  $\hat{n}_f = -\hat{n}_s$ . Su queste superfici, per il terzo principio della dinamica, lo sforzo  $t_{n_{sf}}$  agente sul solido dovuto al fluido è uguale e contrario allo sforzo  $t_{n_{fs}}$  agente sul fluido dovuto al fluido,  $t_{n_{sf}} = -t_{n_{fs}}$ . La superficie formata dall'unione  $S_{fl} \cup S_{f,1} \cup S_{f,2} \cup S_{sl} =: S_{ext}$  è una superficie chiusa con normale uscente  $\hat{n}$  uguale a  $\hat{n}_f$  sulle prime tre superfici e uguale a  $\hat{n}$  su  $S_{sl}$ . Lo sforzo agente su  $S_{ext}$  è uguale a  $-p_a \hat{n}$ , poiché le superfici libere sono a contatto con aria in quiete con pressione  $p_a$  e le traiettorie delle particelle rettilinee (senza curvatura<sup>1</sup>) sulle sezioni  $S_{f,1}$  e

<sup>1</sup> Vedi commento sull'equazione della quantità di moto e sulle traiettorie delle particelle

$S_{f,2}$ 

$$\begin{aligned}
 \oint_{S_f} t_n &= \int_{S_{f\ell}} t_n + \int_{S_{f,1+2}} t_n + \int_{S_{fs}} t_n = & (t_n|_{S_{f\ell}, S_{f,1+2}} &= -p_a \hat{n}_f) \\
 &= - \int_{S_{f\ell} \cup S_{f,1+2}} p_a \hat{n}_f + \int_{S_{fs}} t_n = & (\text{somma e sottrazione di } \int_{S_{fs}} p_a \hat{n}_f) \\
 &= - \underbrace{\int_{S_{f\ell} \cup S_{f,1+2}} p_a \hat{n}_f - \int_{S_{fs}} p_a \hat{n}_f}_{-\oint_{S_f} p_a \hat{n}_f = 0} + \int_{S_{fs}} t_n = & (\hat{n}_f = -\hat{n}_s, t_{n_{fs}} = -t_{n_{sf}} \text{ su } S_{fs}) \\
 &= - \int_{S_{sf}} p_a \hat{n}_s - \int_{S_{sf}} t_{n_{sf}} = & (\oint_{S_s = S_{sf} \cup S_{s\ell}} p_a \hat{n}_s = 0) \\
 &= + \int_{S_{s\ell}} p_a \hat{n}_s - \int_{S_{sf}} t_{n_{sf}} = & (t_{n_s} = -p_a \hat{n}_s \text{ su } S_{s\ell}) \\
 &= - \int_{S_{s\ell}} t_{n_s} - \int_{S_{sf}} t_{n_{sf}} = - \oint_{S_s} t_{n_s} = \\
 &= -R,
 \end{aligned}$$

 dove  $R$  è la risultante delle forze

- Considerando solo le superfici di  $V_f$  attraverso le quali c'è un flusso non nullo di quantità di moto, la risultante delle forze diventa  $R = - \int_{S_{f,1}} \rho u u \cdot \hat{n} - \int_{S_{f,2}} \rho u u \cdot \hat{n}$  dove le quantità all'interno degli integrali sono riferite alle superfici di integrazione. Sulle sezioni  $S_{f,1}$ ,  $S_{f,2}$  la velocità è riferita agli assi rappresentati in figura.

#### 4.16.6 Exercise 4.5

Un getto d'acqua (immagine) (fig/gettoPiatello.eps) (ρ = 999 kg/m³) stazionario, il piano e verticale viene indirizzato su un oggetto di massa M, tenuto da esso in equilibrio. Il getto ha distribuzione di velocità uniforme U lungo lo spessore H, mentre la distribuzione sul bordo dell'oggetto è triangolare di spessore h con velocità massima V. Si calcoli la velocità V e la massa M dell'oggetto supponendo che: il fluido che circonda il getto e il solido è aria in quiete a pressione atmosferica di P\_a = 101325 Pa; si possa trascurare la gravità nel bilancio di quantità di moto, ma non nell'equilibrio del corpo. (V = UH/h; M = ρU²H/||g||)

Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo.

Ipotesi: problema stazionario; sulla superficie libera del corpo e del fluido agisce solo la pressione ambiente p\_a; nessun effetto della gravità nei bilanci del fluido.

Si sceglie un asse y diretto verso l'alto.

- Scrittura delle equazioni di bilancio per il fluido.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho + \oint_{\partial\Omega} \rho u \cdot \hat{n} &= 0 & (\text{massa}) \\
 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho u + \oint_{\partial\Omega} \rho u u \cdot \hat{n} + \oint_{\partial\Omega} p \hat{n} - \oint_{\partial\Omega} s_n - \int_V \rho g &= 0 & (\text{quantità di moto})
 \end{aligned}$$

A queste, va aggiunta l'equazione di equilibrio del corpo sottoposto alla forza di gravità:  $F + Mg = 0$ .

- Dopo aver semplificato il bilancio di massa, da esso si ricava la velocità  $V$ . La velocità sui due bordi “di uscita” è  $v(s) = Vs/h$ , avendo chiamato  $s$  la coordinata che descrive tale superficie per valori compresi tra 0 e  $h$ .  

$$0 = \int_{S_{in}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{\hat{n}} + \int_{S_{out1}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{\hat{n}} + \int_{S_{out2}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{\hat{n}} =$$

$$- \rho U H + 2 \int_0^h \rho V \frac{s}{h} ds = \rho$$

$$- U H + 2 \frac{1}{2} V h$$

E quindi  $V = U \frac{H}{h}$ .

- Le equazioni vengono opportunamente semplificate secondo le ipotesi fatte (vengono eliminati i termini non stazionari e il termine contenente le forze di volume - gravità). Il bordo del dominio fluido  $\partial\Omega$  viene indicato con  $S_f$ . I contributi di pressione e viscosi vengono raccolti nel «vettore di sforzo» complessivo.

$$\oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{\hat{n}} = \oint_{S_f} s_n - \oint_{S_f} p \mathbf{\hat{n}} = \oint_{S_f} t_n$$

- Riscrittura del termine di contorno. Si indica con  $S_f$  il contorno fluido: questo è costituito dall'unione del contorno a contatto con il corpo  $S_c$  e quella «libera»  $S_l$ . Il contorno del corpo  $S_s$  è suddiviso nel contorno  $S_c$  a contatto con il fluido e nel contorno libero  $S_{cl}$ .

Nei passaggi successivi si ricava il legame tra sforzi sul contorno del dominio fluido e la forza agente sul corpo. Si usano le ipotesi che sulle superfici libere agisca solo la pressione ambiente. Si usa il fatto che l'integrale di una quantità costante per la normale su una superficie chiusa è nullo. Vengono definite le normali  $n$  e  $n_s$  come la normale uscente dal volume del fluido e quella uscente dal solido. Si definiscono  $t_n$  e  $t_{n_s}$  come lo sforzo agente sul fluido e quello agente sul solido. Si usa infine il fatto che  $n = -n_s$  (normali uscenti dai due domini, uguali e contrarie) e  $t_n = -t_{n_s}$  sulla superficie in comune (sforzi agenti sulla superficie comune, uguali e contrari; principio di azione e reazione).

$$\begin{aligned} \oint_{S_f} t_n &= \int_{S_l} t_n + \int_{S_c} t_n = & (t_n|_{S_l} = -p_a n) \\ &= - \int_{S_l} p_a n + \int_{S_c} t_n = & (\text{somma e sottrazione di } \int_{S_c} p_a n) \\ &= - \underbrace{\int_{S_l} p_a n - \int_{S_c} p_a n}_{=0} + \int_{S_c} p_a n + \int_{S_c} t_n = & (n = -n_s) \\ &= - \int_{S_c} p_a n_s + \int_{S_c} t_n = & (S_s = S_c \cup S_{cl} \text{ e } \int_{S_s} p_a n = 0) \\ &= \int_{S_{cl}} p_a n_s + \int_{S_c} t_n = & (t_{n_s}|_{S_{cl}} = -p_a n_s, t_{n_s}|_{S_c} = -t_n) \\ &= - \int_{S_{cl}} t_{n_s} - \int_{S_c} t_{n_s} = \\ &= - \int_{S_s} t_{n_s} \\ &= -R \end{aligned}$$

- Sostituendo nell'equazione del bilancio della quantità di moto si ottiene:  $R = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{\hat{n}}$
- Data la simmetria del problema si riconosce che non ci può essere una componente orizzontale. I contributi nel bilancio della quantità di moto sulla superficie di contatto tra corpo e fluido e sulla superficie laterale del getto sono nulli poichè è nullo il flusso su tali superfici. I contributi sulle sezioni “di uscita” sono uguali e contrari. Rimane

quindi solo il contributo dalla sezione “in ingresso”.

$$F = - \oint_{S_f} \rho u u \cdot \hat{n} = - \oint_{S_{i,n}} \rho u u \cdot \hat{n} = \rho U^2 H \hat{y}$$

- Si scrive l'equilibrio del corpo  $F + Mg = 0$ , con  $g = -g\hat{y}$ . Da questo segue che  $M = F/g = \frac{\rho U^2 H}{g}$ .

*Osservazioni.* Nell'elaborazione dei termini della quantità di moto è contenuta la forma della risultante delle forze sull'oggetto vista in classe.

Come giustamente osservato da qualcuno in classe, la massa è per unità di lunghezza, poichè stiamo considerando un caso bidimensionale.

#### 4.16.7 Exercise 4.6

Il motore a getto in figura è alimentato con una portata  $\dot{m}_c = 1.1 \text{ kg/s}$  di carburante liquido iniettato in direzione ortogonale all'asse del motore. Calcolare la spinta  $T$  del motore ipotizzando che: il carburante vaporizzi e si diffonda completamente; le sezioni di ingresso e uscita abbiano area uguale e pari ad  $A = 0.5 \text{ m}^2$ ; l'aria in ingresso e il gas di scarico siano alla pressione atmosferica  $P_{atm} = 26400 \text{ Pa}$ ; la velocità di ingresso e di uscita siano uniformi sulle rispettive sezioni; siano note la densità dell'aria in ingresso  $\rho_1 = 0.42 \text{ kg/m}^3$ , la velocità di ingresso  $V_1 = 240 \text{ m/s}$  e la velocità di efflusso  $V_2 = 980 \text{ m/s}$ . ( $T = -38374 \hat{x} \text{ N}$ )

$$T = \rho V_1 A (V_2 - V_1) + V_2 \dot{m}_c.$$

Bilanci integrali di massa e quantità di moto.  $\$ \begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho u \cdot \hat{n} & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho u = - \oint_{\partial V} \rho u u \cdot \hat{n} + \int_V f - \oint_{\partial V} p \hat{n} + \oint_{\partial V} s_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \$$

Ipotesi: Regime stazionario. Fluido non viscoso (?). Profilo costante di velocità. No gravità.

- Scrittura dei bilanci integrali con le semplificazioni opportune, derivanti dalle ipotesi.

$$\$ \begin{cases} \oint_{\partial V} \rho u \cdot \hat{n} = 0 & \text{(massa)} \\ \oint_{\partial V} \rho u u \cdot \hat{n} = \oint_{\partial V} t_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \$$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di profili di velocità uniformi

$$\$ \begin{cases} -\rho_1 V_1 A_1 - \dot{m}_c + \rho_2 V_2 A_2 = 0 \\ -\rho_1 \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho_2 \vec{V}_2 V_2 A_2 - \dot{m}_c \vec{v}_c = \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} t_n \end{cases} \$$$

- Relazione tra l'integrale della pressione e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con  $S_1$  la superficie di ingresso,  $S_2$  la superficie di uscita,  $S_3$  la superficie laterale interna del motore,  $S_{3_o}$  la superficie laterale esterna del motore.

$$\begin{aligned} \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} t_n &= \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} t_n + \underbrace{\oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_{3_o}} p_a \hat{n}}_{=0} = \\ &= - \int_{S_1} (p - p_a) \hat{n} - \int_{S_2} (p - p_a) \hat{n} + \int_{S_{3_o}} p_a \hat{n} + \int_{S_3} t_n = \quad (p|_{S_1} = p|_{S_2} = p_a) \\ &= \int_{S_{3_o}} p_a \hat{n} + \int_{S_3} t_n = \\ &= \oint_{S_{eng}} t_n = -\vec{F} \end{aligned}$$

- L'equazione della quantità di moto diventa quindi:  $-\rho_1 \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho_2 \vec{V}_2 V_2 A_2 - \dot{m}_c \vec{v}_c = -\vec{F}$

- Mettendo a sistema l'equazione del bilancio di massa e la proiezione in direzione orizzontale dell'equazione della quantità di moto (si assume che l'iniezione del combustibile, e quindi  $v_c$ , sia perpendicolare all'asse x e quindi non compare nel bilancio della quantità di moto in direzione x): 
$$\begin{cases} \rho_2 V_2 A = \rho_1 V_1 A + \dot{m}_c \\ -\rho_1 V_1^2 A + \rho_2 V_2^2 A = -F_x \end{cases} \quad \$$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} F_x &= \rho_1 V_1^2 A - \rho_2 V_2^2 A = \\ &= \rho_1 V_1^2 A - (\rho_2 V_2 A) V_2 = \\ &= \rho_1 V_1^2 A - V_2 (\rho_1 V_1 A + \dot{m}_c) = \\ &= \rho_1 V_1 A (V_1 - V_2) - V_2 \dot{m}_c \end{aligned}$$

E la spinta coincide con la componente lungo x appena calcolata:  $T = \rho_1 V_1 A (V_2 - V_1) + V_2 \dot{m}_c$

La spinta risulta quindi:  $T = -F_x = 38374 \text{ N}$ .

*Interpretazione dei risultati e osservazioni.*

In prima approssimazione, la spinta in un motore a getto è una funzione della portata d'aria e della differenza di velocità tra ingresso e uscita. Spesso in molte applicazioni il termine  $\dot{m}_c$  è trascurabile.

Ragionare in questo caso sulla validità dell'approssimazione  $t_n = -p\hat{n}$  nella definizione della risultante delle forze sul motore.

#### 4.16.8 Exercise 4.7

$$(F = -1765.03\hat{x} + 1765.03\hat{y} \text{ N}) \quad \{\text{width}=\gg 70\%\}$$

$$\text{Bilanci integrali di massa e quantità di moto. } \dots \begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho u \cdot \hat{n} & (\text{massa}) \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho u = - \oint_{\partial V} \rho u u \cdot \hat{n} + \int_V F - \oint_{\partial V} p \hat{n} + \oint_{\partial V} s_n & (\text{quantità di moto}) \end{cases} \quad \$$$

Vengono fatte alcune ipotesi: regime stazionario, fluido incomprimibile, fluido non viscoso, profili costanti di velocità, no gravità. Si scrivono i bilanci integrali semplificati, si riconoscono in essi e si calcolano le azioni scambiate con il corpo.

- Scrittura dei bilanci integrali opportunamente semplificati (ipotesi). 
$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho u \cdot \hat{n} = 0 & (\text{massa}) \\ \oint_{\partial V} \rho u u \cdot \hat{n} = \oint_{\partial V} t_n & (\text{quantità di moto}) \end{cases} \quad \$$$
- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di densità costante e profili di velocità uniformi 
$$\begin{cases} -V_1 A_1 + V_2 A_2 = 0 \\ -\rho V_1^2 V_1 A_1 + \rho V_2^2 V_2 A_2 = \oint_{\partial V} t_n \end{cases} \Rightarrow V_1 = V_2 = V \quad \$$$
- Relazione tra l'integrale degli sforzi sulla superficie e la risultante delle forze agenti sul gomitolo, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si

identificano con  $S_1$  la superficie di ingresso,  $S_2$  la superficie di uscita,  $S_3$  la superficie laterale.

$$\oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} t_n = \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} t_n + \underbrace{\oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p_a \hat{n}}_{=0} =$$

$$= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{n} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{n} + \underbrace{\oint_{S_3} (t_n + p_a \hat{n})}_{=-F} =$$

$$= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{n} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{n} - F$$

- Proiezione lungo i due assi del sistema di riferimento della risultante delle forze agenti sul gomito (dopo averla inserita nell'equazione di bilancio della quantità di moto) \$
 \begin{cases} F\_x = -\rho V^2 A - (p\_2 - p\_a) A \\ F\_y = \rho V^2 A + (p\_1 - p\_a) A \end{cases}

#### 4.16.9 Exercise 4.7

$$(F_x = 1.876 \cdot 10^6 \text{ N}, F_y = -6.251 \cdot 10^6 \text{ N}) \quad \{\text{width} \Rightarrow 60\% \}$$

Bilanci integrali di massa e quantità di moto. \$
 \begin{cases} \frac{d}{dt} \int\_V \rho = - \oint\_{\partial V} \rho u \cdot \hat{n} & (\text{massa}) \\ \frac{d}{dt} \int\_V \rho u = - \oint\_{\partial V} \rho u u \cdot \hat{n} + \int\_V f - \oint\_{\partial V} p \hat{n} + \oint\_{\partial V} t\_s & (\text{quantità di moto}) \end{cases}

Vengono fatte alcune ipotesi: regime stazionario, fluido incomprimibile, fluido non viscoso, profili costanti di velocità, no gravità. Si scrivono i bilanci integrali semplificati, si riconoscono in essi e si calcolano le azioni scambiate con il corpo.

- Scrittura dei bilanci integrali con le semplificazioni opportune, derivanti dalle ipotesi.

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho u \cdot \hat{n} = 0 & (\text{massa}) \\ \oint_{\partial V} \rho u u \cdot \hat{n} = \oint_{\partial V} t_n & (\text{quantità di moto}) \end{cases}$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di densità costante e profili di velocità uniformi

$$\begin{cases} -V_1 A_1 + V_2 A_2 = 0 \\ -\rho \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho \vec{V}_2 V_2 A_2 = \oint_{\partial V} t_n \end{cases} \Rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q$$

- Relazione tra l'integrale della pressione e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con  $S_1$  la superficie di ingresso,  $S_2$  la super-

$$\oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p \hat{n} = \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} t_n + \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p_a \hat{n} =$$

$$= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{n} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{n} + \underbrace{\oint_{S_3} (t_n + p_a \hat{n})}_{=-f} =$$

$$= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{n} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{n} - f$$

- L'equazione della quantità di moto diventa quindi: \$
 -\rho V\_1 V\_1 A\_1 + \rho V\_2 V\_2 A\_2 = -(p\_1 - p\_a) A\_1 \hat{n}\_1 - (p\_2 - p\_a) A\_2 \hat{n}\_2 - F

- Proiezione lungo i due assi del sistema di riferimento della risultante delle forze agenti sul gomito. Se si considera

$$p_a = 0, \text{ i risultati numerici sono i seguenti: } \begin{cases} F_x = \rho \frac{Q^2}{A_1} + (p_1 - p_a)A_1 & \Rightarrow F_x = 1.876 \cdot 10^6 N \\ F_y = -\rho \frac{Q^2}{A_2} - (p_2 - p_a)A_2 & \Rightarrow F_y = -6.250 \cdot 10^6 N \end{cases}$$

#### 4.16.10 Exercise 4.8

Un numero elevato di profili è

disposto come in figura. Il profilo di ingresso è uniforme  $u = U_\infty \hat{x}$ , mentre il profilo di uscita ha andamento  $u = \beta U_\infty (\cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{y}) \sin \frac{\pi \eta}{H}$  in ogni canale (sia  $\eta$  la coordinata che descrive la sezione di uscita). Sulla sezione di ingresso la pressione media vale  $P_1$ , sulla sezione di uscita  $P_2$ . Calcolare il fattore  $\beta$  del profilo di velocità in uscita e la risultante delle forze (per unità di apertura) agente sul singolo profilo. (Risultati:  $\beta = \frac{\pi}{2 \cos \theta}$ ,  $F = [(P_1 - P_2)H + \rho U^2 H((1 - \pi^2/8)\hat{x} + \pi^2/8 \tan \theta \hat{y})]$ )

Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Simmetria.

- Ricavare il coefficiente  $\beta$  dal bilancio di massa
- Usare le ipotesi di simmetria nel bilancio di quantità di moto per annullare alcuni termini

Si ricava il coefficiente  $\beta$  dal bilancio di massa in forma integrale. Si utilizza la simmetria del problema nel bilancio di quantità moto per ricavare le azioni sui profili.

#### 4.16.11 Exercise 4.9

Calcolare la resistenza di un profilo immerso in una corrente stazionaria con velocità asintotica  $V_\infty$ , sapendo la distribuzione della componente di velocità  $u(y)$  parallela a  $V_\infty$  a valle del profilo e assumendo che: la pressione statica sul contorno del volume di controllo sia costante e pari a quella della corrente indisturbata a monte del profilo; - sul lato superiore e inferiore del volume di controllo sia possibile trascurare la componente lungo l'asse  $x$  della perturbazione della velocità dovuta alla presenza del profilo:  $V = (V_\infty + u, v)$ .  $(R = \int_0^H \rho u(y)[V|_\infty - u(y)] dy)$

Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Esperienza in laboratorio sul difetto di scia.

Vengono scritti i bilanci integrali di massa e quantità di moto, opportunamente semplificati (ipotesi di stazionarietà  $\frac{d}{dt} \equiv 0$ , densità costante  $\rho = \bar{\rho}$ , ipotesi sulle condizioni sul bordo esterno del dominio); all'interno dei bilanci si possono riconoscere i termini legati alle azioni scambiate dal fluido con il profilo (l'incognita del problema); si sfrutta infine la

geometria rettangolare del contorno esterno e le ipotesi su di esso per ottenere una forma ulteriormente semplificata dei bilanci e trovare la soluzione del problema.

- Scrittura e semplificazione dei bilanci di massa e quantità di moto.
- $$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho + \oint_{\partial\Omega} \rho u \cdot \hat{n} = 0 \quad (\text{massa}) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho u + \oint_{\partial\Omega} \rho u u \cdot \hat{n} + \oint_{\partial\Omega} p \hat{n} - \oint_{\partial\Omega} s_n = 0 \quad (\text{quantità di moto}) \end{array} \right. \$$$

Nel problema, il contorno del dominio fluido  $\partial\Omega$  è costituito dal bordo rettangolare  $\gamma_{\infty}$  lontano dal profilo e dal bordo  $\gamma_p$  coincidente con il profilo stesso. La forza  $F$  agente sul profilo è l'integrale degli sforzi generati dal fluido (uguali e contrari agli sforzi agenti sul fluido) sul contorno del profilo. Inoltre si può fare l'ipotesi di sforzi viscosi nulli e pressione costante sul bordo esterno: l'integrale sul dominio esterno si riduce all'integrale della normale su una superficie chiusa ed è quindi nullo. Si può dunque scrivere:  $\oint_{\partial\Omega} (-p\hat{n} + s_n) = \oint_{\partial\Omega} t_n = \underbrace{\oint_{\gamma_p} t_n}_{=-F} + \underbrace{\oint_{\gamma_{\infty}} t_n}_{=0} = -F$

*Osservazione.* A differenza di quanto fatto in classe, non è stata fatta l'ipotesi di fluido non viscoso; il contributo all'infinito si annulla con l'ipotesi di pressione costante all'infinito e sforzi viscosi trascurabili. Per ritrovarsi con gli appunti, sostituire  $t_n$  con  $-p\hat{n}$ .

Dopo aver fatto l'ipotesi di stazionarietà e aver inserito la definizione di  $F$  appena data, le equazioni di bilancio possono essere scritte come:  $\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\partial\Omega} \rho u \cdot \hat{n} = 0 \\ F = - \oint_{\partial\Omega} \rho u u \cdot \hat{n} \end{array} \right. \$$

Il bilancio di quantità di moto può essere scritto esplicitando e separando le componenti vettoriali.

$$\begin{aligned} F_x \hat{x} + F_y \hat{y} &= - \oint_{\partial\Omega} \rho(u\hat{x} + v\hat{y})u \cdot \hat{n} \\ \$ \\ &= -\hat{x} \oint_{\partial\Omega} \rho u u \cdot \hat{n} - \hat{y} \oint_{\partial\Omega} \rho v u \cdot \hat{n} \end{aligned} \$$$

- Scrittura delle equazioni di bilancio in componenti (sfruttando la geometria rettangolare del bordo esterno:  $\gamma_1$  indica il bordo di sinistra,  $\gamma_2$  il bordo inferiore,  $\gamma_3$  quello di destra,  $\gamma_4$  quello superiore).

*Attenzione:* la normale è quella uscente dal dominio fluido. Sul contorno del profilo, la normale è entrante nel profilo. In più: non fare confusione tra azioni del profilo agenti sul fluido e azioni del fluido agenti sul profilo!

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \oint_{\partial\Omega} \rho u \cdot \hat{n} = - \int_{\gamma_1} \rho u - \int_{\gamma_2} \rho v + \int_{\gamma_3} \rho u + \int_{\gamma_4} \rho v \\ F_x = + \int_{\gamma_1} \rho u^2 + \int_{\gamma_2} \rho u v - \int_{\gamma_3} \rho u^2 - \int_{\gamma_4} \rho u v \\ F_y = + \int_{\gamma_1} \rho u v + \int_{\gamma_2} \rho v^2 - \int_{\gamma_3} \rho u v - \int_{\gamma_4} \rho v^2 \end{array} \right. \$$$

- Ipotesi sulla velocità sui lati orizzontali ( $u|_{\gamma_2} = u|_{\gamma_4} = V_{\infty}$  costante), per poter ulteriormente semplificare il risultato.

$$\begin{aligned} \text{tato. } \$ \left\{ \begin{array}{l} \int_{\gamma_2} \rho v - \int_{\gamma_4} \rho v = - \int_{\gamma_1} \rho u + \int_{\gamma_3} \rho u \\ F_x = + \int_{\gamma_1} \rho u^2 - \int_{\gamma_3} \rho u^2 + V_{\infty} \left[ \int_{\gamma_2} \rho v - \int_{\gamma_4} \rho v \right] \end{array} \right. \quad \text{Einserendolaprimanellaseconda :} \\ F_x = \int_{\gamma_1} \rho u^2 - \int_{\gamma_3} \rho u^2 + V_{\infty} \left[ \int_{\gamma_2} \rho v - \int_{\gamma_4} \rho v \right] \\ = \int_{\gamma_1} \rho u(u - V_{\infty}) + \int_{\gamma_3} \rho u(u - V_{\infty}) \\ \int_{\gamma_3} \rho u(V_{\infty} - u) = \\ = \int_0^H \rho u(y)(V_{\infty} - u(y)) dy \$ \end{aligned}$$

**Osservazioni.** Tramite la misura del campo di velocità in galleria è possibile stimare la resistenza del corpo. Le condizioni di «aria libera» e in galleria sono diverse. In generale, in galleria il fluido è confinato dalle pareti di galleria, maggiormente «vincolato». Inoltre sulle pareti della galleria esiste una condizione di adesione,  $u = 0$ : per la conservazione della massa, il rallentamento del fluido in corrispondenza delle pareti della galleria viene compensato da un incremento della velocità nella regione «più lontana» dalla parete, rispetto a un corpo in aria libera. Per tenere conto di effetti di **bloccaggio** dovuti al confinamento in galleria, è necessario compiere delle correzioni delle misure sperimentali. Agli effetti di bloccaggio, vanno aggiunti gli effetti di **galleggiamento** dovuti al gradiente di pressione lungo la galleria, che danno un effetto di resistenza aggiuntiva. Inoltre è importante che la dimensione del corpo rispetto alla dimensione della galleria non sia né «troppo grosso» (per problemi di «bloccaggio»), né, di solito, «troppo piccolo» (per motivi di similitudine; ma sarà



argomento di puntate successive del corso...). È importante avere in mente la necessità di prestare attenzione a questi aspetti, quando vengono svolte attività sperimentali. Ma questo sarà argomento di altri capitoli o di altri corsi...

#### 4.16.12 Exercise 4.9 - Experiment: wake defect

L'esercizio svolto in precedenza risulta propedeutico per l'analisi dei dati ottenuti tramite alcune attività sperimentali, per ottenere delle risultanti di forze e momenti da misure del campo di velocità (e pressione, a volte) tramite i bilanci integrali. Le attività svolte nel mondo reale sono affette da imprecisioni e incertezze. La quantificazione (o almeno la stima) dell'incertezza del risultato di un'attività sperimentale è parte integrante del risultato stesso. I valori  $x_i$ ,  $i = 1 : N$  di grandezze misurate possono essere combinati per calcolare delle grandezze derivate  $f(x_i)$ . I *datasheet* che accompagnano uno strumento raccolgono anche le informazioni sulla sua incertezza di misura, spesso in forma di intervallo di confidenza o di scarto quadratico medio. L'incertezza sulle misure sperimentali  $x_i$  si propaga sul valore della funzione  $f(x_i)$ . Nell'ipotesi che le incertezze di misura sulle variabili  $d_i$  siano tra di loro indipendenti e non correlate, è possibile utilizzare la **formula RSS (root-sum-squares)** per la propagazione dell'incertezza. Se la misura  $x_i$  ha incertezza  $\sigma_{x_i}$ ,

una stima dell'incertezza su  $f$  vale  $\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2$ . L'incertezza sulla quantità  $f$ , obiettivo dell'attività sperimentale, è un indicatore della bontà del metodo sperimentale utilizzato ed del sistema di misura disponibile per tale attività. In generale, l'incertezza sulla grandezza desiderata deve essere «molto minore» della grandezza stessa: in caso contrario, l'apparato sperimentale risulterebbe inadeguato all'esperimento. Essendo parte integrante del risultato, è buona regola indicare l'incertezza sui risultati delle attività sperimentali, ad esempio fornendone il valore numerico, il valore relativo alla misura o gli intervalli di confidenza sui grafici.

#### Risultante delle forze: bilancio di quantità di moto di un volume di controllo .

Esistono metodi sperimentali, come ad esempio la **PIV** (Particle Image Velocimetry o, in italiano, velocimetria a immagini di particelle), che permettono di ottenere il campo di velocità in un determinato istante all'interno di un dominio di misura, un piano bidimensionale o un volume tridimensionale. Il bilancio di quantità di moto del volume di controllo contenente un corpo solido permette poi di calcolare la risultante delle forze scambiate tra corpo e fluido.

Per semplicità, viene considerato un campo di moto bidimensionale,  $u(x, y) = u(x, y)\hat{x} + v(x, y)\hat{y}$ . Ad esempio, il campo di moto attorno alla mezzera di un'ala allungata senza freccia investita da una corrente con un angolo di incidenza ridotto è in buona approssimazione bidimensionale. In questo caso, misure PIV (PIV-2D-2C) forniscono le due componenti (2C) del campo di velocità nel piano (2D) di misura. Tramite il bilancio della quantità di moto del dominio bidimensionale, è possibile ottenere una stima della risultante delle forze (per unità di apertura) che esercita il fluido sul profilo di ala tagliato dal piano di misura. Considerando gli effetti viscosi trascurabili, al di fuori di regioni di dimensione ridotta nell'ambito di applicazioni aeronautiche (alto numero di Reynolds, strato limite e scie sottili), il bilancio integrale della quantità di moto del fluido nel volume di misura fornisce, in un caso stazionario, la risultante delle forze  $R$  agenti sul corpo,  $R = -\oint_S \rho u u \cdot \hat{n} - \oint_S p \hat{n}$ , avendo trascurato il contributo delle forze di volume. Nell'ipotesi, che è sensata per molte applicazioni aeronautiche, che si

$p_\infty + \rho \frac{|U_\infty|^2}{2} - \rho \frac{|u|^2}{2}$ . Inserendo questa espressione della pressione nell'espressione della risultante delle forze ed eliminando gli termini  $\oint_S p \hat{n}$ , si può esprimere la risultante  $R$  della forza aerodinamica agente sul corpo in funzione della sola velocità  $u$  e della densità  $\rho$ :  $R = -\oint_S \rho u u \cdot \hat{n} + \oint_S \rho \frac{|u|^2}{2} \hat{n}$ . Sotto queste ipotesi, la forza aerodinamica agente sul corpo, in questo esempio l'obiettivo della misura, sta

fornito come «risultato diretto» dell'attività sperimentale. Per semplicità, la densità del fluido viene considerata costante e nota senza incertezza: nel caso che anche il campo di densità fosse affetto da incertezza, la formula RSS permette di aggiungere abbastanza facilmente il suo effetto a quello dovuto all'incertezza sulla misura del campo di velocità.

### Risultante delle forze: discretizzazione.

Per la sua natura, la PIV fornisce dei risultati discreti (non continui): di solito, il campo di velocità viene misurato sui nodi di una griglia cartesiana. Per il calcolo della risultante  $R$  sono necessari solamente gli  $N_n$  nodi esterni  $x_i$ ,  $i = 1 : N_n$ , posti sul contorno della griglia. Il campo di velocità viene approssimato (linearmente, per semplicità) utilizzando un approccio simile a quello impiegato nella modellazione numerica a elementi finiti. Viene introdotto un insieme completo di funzioni di base  $\phi_i(x)$ ,  $i = 1 : N_n$ , lineari a tratti sul contorno  $S$ , grazie alle quali è possibile scrivere l'approssimazione  $u^h$  del campo di velocità  $u(x) \approx u^h(x) =$

$$\sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(x) U_i. Utilizzando funzioni di base lagrangiane, per le quali il valore della funzione è 1 in un solo nodo e 0 negli altri, si ha:$$

$$\delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(x) = 1, \quad \forall i = 1 : N_n, \quad \text{coefficienti } U_i \text{ della } [exp : u : fem - exp](exp:u:fem-exp) \text{ concidono con i valori nodali,}$$

$\mathbf{U}_i := \mathbf{u}(\mathbf{x}_i)$  ricavate in punti  $\mathbf{x}_i$  tramite la misura sperimentale. Introducendo il campo di velocità approssimato

$= \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) \hat{n}(\mathbf{x}) dS$ , facilmente calcolabili in maniera analitica, come spiegato nella sezione §0.0.0.9{reference-type="ref" reference="exp:u:fem-exp"}

### Sensibilità della risultante al campo di velocità.

Per ricavare tramite la formula RSS l'incertezza sulla misura della risultante delle forze  $R$  dall'incertezza sulle misure del campo di velocità  $u(x)$ , è necessario calcolare la *variazione* di  $R$  rispetto al campo  $u(x)$ . Perturbando il campo di velocità  $u(x)$  con la variazione  $\delta u(x)$ , e trascurando i termini di ordine superiore al primo, dopo aver sottratto l'equazione «non perturbata», si ottiene la perturbazione della risultante delle forze  $\delta R$ ,

$$\begin{aligned} R + \delta R &= - \oint_S \rho(u + \delta u)(u + \delta u) \cdot \hat{n} + \oint_S \frac{1}{2} \rho(u + \delta u) \cdot (u + \delta u) \hat{n} \\ \rightarrow \delta R &= - \oint_S \rho [u \hat{n} \cdot \delta u + u \cdot \hat{n} \delta u] + \oint_S \rho \hat{n} u \cdot \delta u \\ &= \oint_S \rho [-u \otimes \hat{n} - (u \cdot \hat{n}) \mathbb{I} + \hat{n} \otimes u] \cdot \delta u = \\ &= \oint_S \nabla_u R \cdot \delta u = \\ &= \oint_S \begin{bmatrix} \nabla_u R_x & \nabla_v R_x \\ \nabla_u R_y & \nabla_v R_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix} = \oint_S \begin{bmatrix} \nabla_u R_x \cdot \delta u \\ \nabla_u R_y \cdot \delta u \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{R}(\mathbf{x})$  della risultante delle forze rispetto al campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  è evidenziato in fluenza delle due componenti.

$$\oint_S \nabla_{u_j} R_i \delta u_j = -\rho \oint_S [u_i n_j + u_k n_k \delta_{ij} - n_i u_j] \delta u_j, \text{ esplicitamente in coordinate cartesiane, per ricavare l'espressione della sen.}$$

### Sensitività della risultante alle misure di velocità.

Partendo dall'espansione  $u^h(x)$  del campo di velocità, la variazione del campo  $\delta u^h(x) = \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(x) \delta U_i$ , avendo indicato con  $\delta$

la variazione dei valori nodali del campo di velocità. Le funzioni di base sono note, e quindi la loro variazione è nulla. [1] Introducendo la differenza  $fem - exp$  (eqn:du:fem-exp) di  $\delta u^h(x)$  all'interno della formula (eqn:sens:cont) che lega la variazione  $\delta R$  alla variazione  $\delta u$   $\delta R = \int_S \nabla_u R \cdot \delta u = \sum_{i=1}^{N_n} \int_S \phi_i(x) \nabla_u R \cdot \delta U_i = \sum_{i=1}^{N_n} \nabla_{U_i} R \cdot \delta U_i$ , si ricava l'espressione della sensitività  $\nabla_{U_i} R$  della risultante delle forze rispetto alla misura di velocità  $U_i$ , in funzione della sensitività  $\nabla_{U_i} R$  della risultante rispetto al campo di velocità  $u$  e alle funzioni di base  $\phi_i(x)$ ,  $\nabla_{U_i} R = \int_S \phi_i(x) \nabla_u R$ . La sensitività  $\nabla_{U_i} R$  della componente  $R_k$  della risultante delle forze rispetto alla misura  $U_i$  è  $\int_S \phi_i(x) \nabla_u R_k$ .

### Sensitività della risultante alle misure di velocità: discretizzazione.

Inserendo l'approssimazione  $u^h$  nella formula della sensitività  $\nabla_u R$ , è possibile calcolare la sensitività della risultante alle

$$\begin{aligned} \nabla_{U_i} R &= \int_S \phi_i(x) \nabla_u R = \\ &= \int_S \phi_i(x) \rho [-u \otimes \hat{n} - (u \cdot \hat{n}) \mathbb{I} + \hat{n} \otimes u] = \end{aligned}$$

misure di velocità  $U_i$ ,

$$\begin{aligned} &= \rho \sum_{j=1}^{N_n} \int_S \phi_i(x) \phi_j(x) [-U_j \otimes \hat{n} - (U_j \cdot \hat{n}) \mathbb{I} + \hat{n} \otimes U_j] = \\ &= \rho \sum_{j=1}^{N_n} [-U_j \otimes I_{ij} - (U_j \cdot I_{ij}) \mathbb{I} + I_{ij} \otimes U_j], \end{aligned}$$

$\rho \sum_{j=1}^{N_n} [-U_{j,k} I_{ij} - (U_j \cdot I_{ij}) \hat{e}_k + I_{ij,k} U_j]$ , dove  $\hat{e}_k$  è il versore in direzione  $k$  e  $U_{j,k}$ ,  $I_{ij,k}$  le componenti in quella direzione.

#### Osservazione 1.

Si può dimostrare che le sensitività  $\nabla_{U_i} R$  sono le componenti del gradiente della formula (eqn:RU) che esprime  $R$  come una funzione quadratica delle variabili  $U_i$ .

#### Osservazione 2.

Utilizzando la formula generale (eqn:sens:RU) o utilizzando la forma discretizzata delle espressioni (eqn:sens:cart:simple), si può

$$\begin{aligned} \nabla_{U_{i,x}} R_x &= \nabla_{U_{i,y}} R_y = -\rho \sum_{j=1}^{N_n} U_j \cdot I_{ij} \\ \text{dimostrare che } & \\ -\nabla_{U_{i,y}} R_x &= \nabla_{U_{i,x}} R_y = -\rho \sum_{j=1}^{N_n} U_j \times I_{ij} \cdot \hat{z} \end{aligned}$$

### Incertezza sulla risultante dall'incertezza sulla misura di velocità.

Utilizzando la formula del campo  $u^h$ , viene calcolata la varianza  $\sigma_{R_k}^2$  della componente  $R_k$ ,

$$\begin{aligned}\sigma_{R_k}^2 &= E[\delta R_k \delta R_k] = \rho^2 E \left[ \oint_{S(x)} \nabla_u R_k(x) \cdot \delta u(x) \oint_{S(y)} \nabla_u R_k(y) \cdot \delta u(y) \right] = \\ &= \oint_{S(x)} \oint_{S(y)} \nabla_u R_k(x) \cdot E[\delta u(x) \otimes \delta u(y)] \cdot \nabla_u R_k(y) \approx \text{dove sono state indicate esplicitamente le variabili in} \\ &= \oint_{S(x)} \oint_{S(y)} \nabla_u R_k(x) \cdot \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \phi_i(x) \phi_j(y) E[\delta U_i \otimes \delta U_j] \cdot \nabla_u R_k(y),\end{aligned}$$

$$\mathbf{U}_i \otimes \delta \mathbf{U}_j \text{ diventa quindi } E[\delta U_i \otimes \delta U_j] = \sigma_U^2 \delta_{ij} \text{ e di conseguenza l'incertezza della componente di forza } R_k,$$

$$R_k \text{ della componente di forza } R_k \text{ rispetto alla misura della velocit\(\mathbf{U}\)}_i = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i).$$

### Cenni sugli elementi finiti. {#sec:fem}

In questo paragrafo si fornisce qualche dettaglio sulla discretizzazione «a elementi finiti» usata nel calcolo della risultante aerodinamica e della sua incertezza. Un dominio  $S$ , come ad esempio la superficie di controno del volume di controllo considerato, viene suddiviso negli elementi  $S_k$ , l'unione dei quali costituisce il dominio  $S$   $S = \bigcup_{k=1}^{N_e} S_k$  e che non hanno punti in comune tra di loro se non i bordi. Vengono poi definite le funzioni di base  $\phi_i(\mathbf{x})$ , grazie alle quali si può rappresentare la funzione  $f$  come  $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) f_i$ . La dipendenza dalla variabile spaziale  $\mathbf{x}$  contenuta nelle funzioni di base  $\phi_i(\mathbf{x})$ , le quali vengono moltiplicate per i coefficienti  $f_i$ , che sono determinati a posteriori. In questo caso, i coefficienti  $f_i$  coincidono con i valori nodali della funzione  $f(\mathbf{x})$ ,  $f_i = f(\mathbf{x}_i)$ , dove  $\mathbf{x}_i$  sono i nodi degli elementi finiti. Le funzioni di base sono a supporto compatto, cioè sono diverse da zero solo su un dominio chiuso o limitato: il carattere "locale" delle singole funzioni di base viene sfruttato nel metodo degli elementi finiti per operare con matrici sparse, allungando così il tempo di calcolo.

In figura 2{reference-type=»ref» reference=»fig:base-fcn»} è rappresentata una parte di una suddivisione in elementi finiti  $S_k$  di un dominio monodimensionale, sul quale sono definite delle funzioni di base lagrangiane, lineari a tratti, a supporto compatto: ad esempio, la funzione di base  $\phi_{i2}(x)$  è diversa da zero solo sugli elementi  $S_{e1}$  e  $S_{e2}$ . Ogni elemento ha due nodi. Se viene definita la connettività nodi-elemento,  $I_{e1} = \{i_1, i_2\}$ ,  $I_{e2} = \{i_2, i_3\}$ , il nodo  $i_1$  il primo nodo (quello che ha l'indice=1 nell'enumerazione locale) dell'elemento  $S_{e1}$ , il nodo  $i_2$  il secondo nodo (quello che ha l'indice=2 nell'enumerazione locale) dell'elemento  $S_{e1}$ , e così via,  $I_{e3} = \{i_4, i_3\}$ , il nodo  $i_4$  il primo nodo (quello che ha l'indice=1 nell'enumerazione locale) dell'elemento  $S_{e3}$ , il nodo  $i_3$  il secondo nodo (quello che ha l'indice=2 nell'enumerazione locale) dell'elemento  $S_{e3}$ .

{#fig:base-fcn width=»55%»} {#fig:base-fcn width=»30%»}

Si utilizzano ora le proprietà della base di funzioni lineari a tratti  $\phi_i(x)$  per calcolare i vettori  $I_{ij}$  che compaiono nel calcolo della risultante delle forze e nella sua varianza,  $I_{ij} := \oint_S \phi_i(x) \phi_j(x) \hat{n}(x) \cdot d\mathbf{S}$ . Gli unici termini  $\mathbf{I}_{ij}$  che non sono nulli sono quelli in cui compaiono due funzioni, che hanno supporti in  $\cap B_j \neq \emptyset$ . In questi termini, il dominio di integrazione può essere limitato alla sola intersezione dei supporti delle due funzioni  $base-fcn$   $reference-type="ref" reference="fig:base-fcn"$ , il termine  $\mathbf{I}_{i2,i1}$  può essere riscritto come  $I_{i2,i1} = \oint_S \phi_{i2}(x) \phi_{i1}(x) \hat{n} = \int_{B_{i2} \cap B_{i1}} \phi_{i2}(x) \phi_{i1}(x) \hat{n} = \int_{S_{e1}} \phi_{i2}(x) \phi_{i1}(x) \hat{n}$ , il termine  $\mathbf{I}_{i2,i2}$  può essere riscritto come  $I_{i2,i2} = \oint_S \phi_{i2}(x) \phi_{i2}(x) \hat{n} = \int_{B_{i2}} \phi_{i2}(x) \phi_{i2}(x) \hat{n} = \int_{S_{e1} \cup S_{e2}} \phi_{i2}(x) \phi_{i2}(x) \hat{n}$ , mentre il termine  $\mathbf{I}_{i2,i4}$  è nullo. Gli integrali sugli elementi  $\in [-1, 1]$ . La trasformazione di coordinate che porta l'elemento di riferimento  $\hat{\mathbf{S}}$  nell'elemento fisico  $\mathbf{S}_k$  delimitato da  $\mathbf{x}_{k2} + \mathbf{x}_{k1} + \frac{\mathbf{x}_{k2} - \mathbf{x}_{k1}}{2} \xi$  è il suo "determinante"  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \frac{\mathbf{x}_{k2} - \mathbf{x}_{k1}}{2} = \frac{\ell_k}{2}$ . Se si considera costante il versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$  =  $\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{S}_{e1}}$  sull'elemento finito  $\mathbf{S}_{e1}$  e si utilizza la connettività dei nodi  $\mathbf{S}_{e1}$  e  $\mathbf{S}_{e2}$  della griglia dell'esempio di finitain (eqn : conn : ex) (eqn:conn:ex)  $reference-type="ref" reference="eqn:conn:ex"$ ,

$$I_{i2,i1} = \int_{S_{e1}} \phi_{i2}(x) \phi_{i1}(x) \hat{n} dx = \int_S \varphi_2(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi = \int_{\xi=-1}^1 \varphi_2(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi$$

l'integrale  $\mathbf{I}_{i2,i1}$  può essere trasformato nell'integrale sull'elemento di riferimento

$\varphi_i(\xi) = \varphi_i(\mathbf{x}(\xi)) = \varphi_i(\mathbf{x}(\xi))$ , dove  $\mathbf{x}$  è l'indice locale del nodo globale con indice  $i$  dalla connettività dell'elemento  $\mathbf{S}_{e1}$  risultato  $i_{e1} = 1, 2$ . Il "determinante" della trasformazione è costante,  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \frac{\mathbf{x}_{k2} - \mathbf{x}_{k1}}{2} = \frac{\ell_k}{2}$ . L'espressione delle funzioni sull'elemento locale facilmente ricavabile. Le funzioni di base  $\varphi_1, \varphi_2$  come primo e secondo nodo dell'elemento di riferimento  $\hat{\mathbf{S}}$ , le funzioni di finitain sull'elemento di riferimento  $\mathbf{S}_k$  sono  $\varphi_1, \varphi_2$ .

$$\frac{1}{2}(1-\xi) \quad , \quad \varphi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \text{ .immediato calcolare il valore degli integrali sull'elemento di riferimento, } \int_{-1}^1 \varphi_1(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi = \frac{2}{3} \\ \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi = \frac{1}{3}$$

#### 4.16.13 Exercise 4.10

Viene dato l'irrigatore rappresentato in figura, del quale sono note le sue dimensioni geometriche,  $R_0, R_1, \ell, h$ . L'irrigatore è libero di ruotare attorno all'asse  $z$ . Si conosce la densità del fluido  $\rho$  e la velocità «di ingresso»  $U_0$  uniforme sulla sezione  $S_0$ . Supponendo la pressione uniforme sulle sezioni  $S_0, S_1, S_2$  e uguale alla pressione atmosferica dell'aria attorno all'irrigatore - la **velocità relativa** rispetto al moto dell'irrigatore uniforme sulle sezioni  $S_1, S_2$  - gli effetti gravitazionali trascurabili viene chiesto di calcolare la velocità  $V$  e la velocità di rotazione dell'irrigatore  $\Omega$ , a regime.

Si scrivono i bilanci integrali di massa e momento della quantità di moto per il volume fluido  $V_t$  contenuto all'interno dell'irrigatore, delimitato dalla parete interna dell'irrigatore  $S_{f,s}$ , dalla sezione di ingresso  $S_0$  e dalle due di uscita  $S_1, S_2$ . Si introducono due sistemi di riferimento cartesiani, uno inerziale,  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ , l'altro solidale con l'irrigatore,  $\{\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}\}$ ,

con l'asse  $Z$  coincidente con l'asse  $z$ . Il bilancio di massa per un volume  $V_t$ ,  $\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho + \oint_{\partial V_t} \rho (u - b) \cdot \hat{n} = 0$ , viene semplificato

- utilizzando l'ipotesi di stazionarietà<sup>1</sup> del problema
- riconoscendo che la superficie  $S_{s,f}$  non dà contributo al bilancio, poiché la velocità del fluido sul contorno solido deve essere uguale alla velocità del corpo, per la condizione al contorno di **adesione**:  $u = b$  in ogni punto di  $S_{s,f}$ . Anche se fosse stato utilizzato un modello non viscoso per rappresentare il problema, sarebbe valida la condizione al contorno di **non penetrazione**:  $u \cdot \hat{n} = b \cdot \hat{n}$  su tutti i punti di  $S_{s,f}$ ;
- la velocità della superficie  $S_0$  è nulla,  $b = 0$  su  $S_0$  e quindi la velocità relativa coincide con la velocità assoluta  $U_0 = U_0 \hat{z}$ , dato del problema;
- per i dati del problema, la velocità relativa del fluido sulle sezioni  $S_1, S_2$  è uniforme:  $u - b = V \hat{X}$  su  $S_1$ ,  $u - b = -V \hat{X}$  su  $S_2$

Dal bilancio di massa si trova quindi il modulo della velocità relativa della corrente sulle sezioni  $S_1, S_2$ ,  $0 = -\rho U_0 \pi R_0^2 + 2\rho V \pi R_1^2 \rightarrow V = \frac{1}{2} \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 U_0$ .

Il bilancio del momento della quantità di moto per il volume fluido  $V_t$ ,  $\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \oint_{\partial V_t} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} (u - b) \cdot \hat{n} = \int_{V_t} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{g} + \oint_{\partial V_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n$ . *Senzariportareidettagli(TODO : riportareidettagli)usandol'ipotesichegliefettigravitazionalitrascurabilechelapressionesiauniformesullesuperficiS\_0,S\_1,S\_2,avendomessoinevidenzalarisultantedeimomentibm{M}^sagentisulsolido,rispettoall'origine,ilcontributodellasuperficieS\_0nullopersimmetria.Sipudimostrare(TODO :*

*riportareidettagli)cheiltermineconladerivatatemporalenongeneraunmomentoattornoall'assezdirotazionedell'irrigatore,e*

- $\frac{M_z^s}{h^2 + \ell^2 + \frac{R_1^2}{4}} \hat{z} = \rho \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_1} \left[ \Omega \left( h^2 + (\ell + r \cos \theta)^2 \right) - V \left( \ell + r \cos \theta \right) \right] V, r, dr, d\theta = \rho \left[ \Omega \left( h^2 + \ell^2 \right) - V \ell \right] 2\pi \frac{R_1^2}{2} + \Omega, V, \frac{R_1^4}{4}, \pi = \pi R_1^2 \rho, V \left[ \Omega \left( h^2 + \ell^2 + \frac{R_1^2}{4} \right) - V \ell \right] \pi$ .  
 $\frac{\ell}{h^2 + \ell^2 + \frac{R_1^2}{4}} V \rightarrow \Omega = \frac{1}{2} \frac{\ell}{h^2 + \ell^2 + \frac{R_1^2}{4}} \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 U_0$ .

<sup>1</sup> Dovrebbe essere chiaro che il concetto di «stazionarietà» dipende dal tipo di descrizione adottata per rappresentare il problema, euleriana, lagrangiana o arbitraria. Come esempio, in questo esercizio utilizziamo una descrizione arbitraria, utilizzando un volume di controllo che ruota insieme all'irrigatore. Per un osservatore inerziale il problema a regime non è stazionario, ma periodico. Per un osservatore non inerziale solidale con l'irrigatore, le quantità del problema non variano con il tempo e quindi a lui il problema a regime risulta stazionario;

## 4.16.14 Exercise 4.11

Viene chiesto di determinare la potenza dei motori della galleria a circuito aperto rappresentata in figura, sapendo che la velocità massima desiderata nella sezione di prova è  $V_{test} = 30 \text{ m/s}$ , l'area della sezione di prova è  $A_{test} = 1.0 \text{ m}^2$  e l'area della sezione in cui è alloggiato il ventilatore che mette in moto l'aria è  $A_{fan} = 2.0 \text{ m}^2$ . Si supponga che la corrente sia incompressibile e che la densità dell'aria sia  $\rho = 1.1 \text{ kg/m}^3$ . In una prima fase, si trascuri la caduta di pressione attraverso il nido d'ape e gli schermi presenti tra la sezione 1 e la sezione 2 del condotto. Successivamente si ripeta il calcolo con una caduta di pressione  $P_1 - P_2 = k\rho U^2$ , con  $k = \dots$

{width=»90%»}

Si studia la galleria a circuito aperto rappresentata in figura utilizzando i bilanci integrali scritti per alcuni volumi di controllo fissi, per ricavare l'andamento della velocità e della pressione all'interno della galleria e infine ricavare la potenza dei motori, necessaria per garantire le condizioni di progetto nella sezione di prova. Si ipotizza un funzionamento stazionario, si trascurano gli effetti viscosi nel volume e sulle pareti della galleria e le forze di volume. In particolare, grazie alle ipotesi fatte, si possono semplificare il bilancio di massa,  $\frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rightarrow \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ , e il bilancio dell'energia cinetica,  $\frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \oint_S \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \oint_S \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \oint_S \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$

- $\oint_S \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  (se  $\mu = 0$ ) +  $\oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$
- $\oint_S \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$

Viene svolta la prima parte dell'esercizio, trascurando le perdite di pressione che avvengono tra la sezione 1 e la sezione 2, a causa della presenza dei nidi d'ape e delle reti. Si scrive il bilancio di massa per un volume di fluido che ha come superficie di contorno la superficie  $S_0$ , la superficie laterale del tubo di flusso e una superficie  $S_i$  all'interno della galleria. Assumendo grandezze uniformi sulla sezione, si può scrivere  $\rho A_0 U_0 = \rho A_i U_i$ , cioè che il flusso di massa è costante. Se non si nota la condizione di progetto in camera di prova,  $\rho A_{test} V_{test} = \dots$ . Poiché la velocità è finita,  $U_0 \rightarrow 0$ , l'area della sezione all'infinito deve tendere all'infinito,  $A_0 \rightarrow \infty$ . Si scrive poi il bilancio di energia cinetica per un volume di controllo che ha come contorno la superficie  $S_0$  all'infinito e la superficie  $S_i$  nella sezione di prova,  $\rho A_0 U_0 \left( \frac{U_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} \right) = \rho A_i U_i \left( \frac{U_i^2}{2} + \frac{P_i}{\rho} \right)$ . Poiché il flusso di massa è costante, il bilancio di energia cinetica si riduce a  $\frac{1}{2} \rho U_0^2 = P_4 + \frac{1}{2} \rho U_4^2 \rightarrow B_4 = B_0 = P_{atm}$ , avendo introdotto la definizione del "binomio di Bernoulli",  $B_i = P_i + \rho U_i^2 / 2$ . Si scrive poi il bilancio di energia cinetica per il volume fluido  $V(t)$  che contiene il ventilatore, delimitato dalle

superfici  $S_4$  e  $S_5$ ,  $\oint_{S_4} \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_5} \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_{fan}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , essendo il termine a destra dell'uguale la potenza delle forze esercitate dal ventilatore su

il fluido,  $\oint_{S_4} \left( \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P \right) (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + \oint_{S_5} \left( \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P \right) (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}})$ , e facendoli ipotesi di grandezze fisiche costanti sulle sezioni,  $W_{mot} =$

$\rho A_5 U_5 \left( \frac{U_5^2}{2} + \frac{P_5}{\rho} \right) - \rho A_4 U_4 \left( \frac{U_4^2}{2} + \frac{P_4}{\rho} \right) = \dot{m} (B_5 - B_4)$ . Ricordando che il "binomio di Bernoulli" nelle sezioni 1 e 4 è uguale al "binomio di Bernoulli" nella sezione  $S_0$ , equindi uguale alla pressione ambiente  $P_{atm}$ , nell'ipotesi che la pressione è

costante,  $B_4 = B_0 = P_{atm}$ ,  $B_5 = P_5 + \rho U_5^2 / 2$ . Si scrive poi il bilancio di energia cinetica per il volume fluido  $V(t)$  che contiene il ventilatore, delimitato dalle

superfici  $S_4$  e  $S_5$ ,  $\oint_{S_4} \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_5} \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_{fan}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , essendo il termine a destra dell'uguale la potenza delle forze esercitate dal ventilatore su

il fluido,  $\oint_{S_4} \left( \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P \right) (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + \oint_{S_5} \left( \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P \right) (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}})$ , e facendoli ipotesi di grandezze fisiche costanti sulle sezioni,  $W_{mot} =$

$\rho A_5 U_5 \left( \frac{U_5^2}{2} + \frac{P_5}{\rho} \right) - \rho A_4 U_4 \left( \frac{U_4^2}{2} + \frac{P_4}{\rho} \right) = \dot{m} (B_5 - B_4)$ . Ricordando che il "binomio di Bernoulli" nelle sezioni 1 e 4 è uguale al "binomio di Bernoulli" nella sezione  $S_0$ , equindi uguale alla pressione ambiente  $P_{atm}$ , nell'ipotesi che la pressione è

costante,  $B_4 = B_0 = P_{atm}$ ,  $B_5 = P_5 + \rho U_5^2 / 2$ . Si scrive poi il bilancio di energia cinetica per il volume fluido  $V(t)$  che contiene il ventilatore, delimitato dalle



$$\dot{m} \frac{U_5^2}{2}, e, \text{ riferendosi alle grandezze fisiche in camera di prova, può essere scritta come } W_{mot} = \dot{m} \left( \frac{A_{test}}{A_{fan}} \right)^2 \frac{V_{test}^2}{2}$$

$$\rightarrow W_{mot} = \frac{1}{2} \rho A_{te}$$

rallentare la corrente dopo la sezione di prova, per poter ridurre la potenza del motore e installare e per garantire il funzionamento.

**\*Osservazione.\*** Potrebbe suscitare qualche perplessità il fatto che la corrente in uscita dall'impianto con velocità  $U_5$

si equivalga a  $V_{fan}$  abbia una pressione uguale alla pressione ambiente,  $P_{atm}$ , come il fluido in quiete all'esterno del tubo di flusso. Per

$$\frac{1}{2} \rho V_{fan}^2 = P_5^{out} \rightarrow P_{atm} + \frac{1}{2} \rho V_{fan}^2 = P_{atm}, \text{ si giungerebbe alla conclusione che } V_{fan} =$$

0. L'errore risiede nell'applicazione del teorema di Bernoulli nella formula vista alla scuola superiore (o in altri corsi universitari).

La presenza di questo strato di mescolamento, nel quale la corrente non è rotazionale ( $\omega \neq 0$ ), fa cadere le ipotesi del teorema di Bernoulli e lo rende quindi inapplicabile. Tutte le parti evidenziate in rosso devono quindi essere considerate errate.

#### 4.16.15 Exercise 4.12

Il funzionamento di un motore alternativo a benzina (a quattro tempi) può essere rappresentato in prima approssimazione con un ciclo termodinamico Otto ideale, rappresentato da una compressione adiabatica, una fase veloce di combustione a volume costante (nel punto morto superiore del moto del pistone, PMS) e un'espansione adiabatica. Le fasi di aspirazione e scarico dei gas combusti sono anch'essi ideali. L'aspirazione avviene a pressione costante durante il movimento del pistone dal PMS al punto morto inferiore (PMI). La fase di scarico avviene in due fasi: durante la prima fase la pressione diminuisce molto velocemente (approssimata da una trasformazione a volume costante) a causa dell'apertura della valvola di scarico quando il pistone si trova al PMI; durante la seconda fase i gas combusti sono spinti fuori dalla camera di combustione dal movimento ascendente del pistone che si riporta al PMS, per l'inizio del ciclo termodinamico successivo. Del motore sono noti: - il rapporto di compressione, definito come il rapporto tra il volume massimo (pistone al PMI) e minimo (pistone al PMS) della camera di combustione,  $r = V_1/V_2 = 10$ ; - la cilindrata, definita come la corsa del pistone per l'area della sezione del cilindro, e uguale alla differenza  $C = N(V_2 - V_1) = 1000 \text{ cm}^3$ , essendo  $N$  il numero di cilindri del motore; - le condizioni termodinamiche dell'aria all'aspirazione  $P_0 = 85570 \text{ Pa}$ ,  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ ; - il rapporto in massa tra benzina e aria,  $f = m_f/m_a = 0.06$ ; - il potere calorifico della benzina usata  $\Delta h = 43 \text{ MJ}$ ; - la pressione nel basamento del motore,  $p_b = 150000 \text{ Pa}$  uniforme e costante. Si calcoli la potenza media erogata dal motore a un regime di rotazione di  $\Omega = 3000 \text{ RPM}$ , assumendo un rendimento meccanico  $\eta = 0.8$ . Si rappresenti l'aria come un gas bi-atomico perfetto ( $\gamma = c_p/c_v = 1.4$ ) con costante dei gas  $R = 287 \text{ J/(kg K)}$ , e si trascuri l'effetto del carburante sul valore dei calori specifici e sulla massa presente all'interno della camera di combustione. Si trascurino inoltre gli scambi di calore per conduzione con l'esterno del cilindro durante la compressione e l'espansione (trasformazioni adiabatiche). Si trascurino i termini cinetici nell'energia totale in camera di combustione, facendo coincidere l'energia totale con l'energia interna  $e^t = e = c_v T$ , e si assuma che le variabili termodinamiche siano uniformi (costanti in spazio, non in tempo) in camera di combustione.

{width=»45%»}

Ogni fase del ciclo termodinamico viene analizzata con i bilanci integrali, per il volume corrispondente alla camera di combustione di un cilindro. Questo volume è un sistema aperto durante la fase di aspirazione e scarico (scambia massa con l'esterno), mentre è un sistema chiuso durante la compressione, la combustione e l'espansione (valvole chiuse, nessuno scambio di massa con l'esterno). Si calcola il lavoro svolto dal sistema durante un ciclo e si divide per il periodo per ricavare la potenza media.

Conoscendo il numero dei cilindri  $N = 3$ , il rapporto di compressione  $r$  e la cilindrata  $C$  è possibile ricavare il valore del volume massimo  $V_1$  e minimo  $V_2$  della camera di combustione. 
$$\begin{cases} N(V_2 - V_1) = C \\ V_1/V_2 = r \end{cases} \rightarrow$$



$$\begin{cases} V_1 = \frac{r}{r-1} \frac{C}{N} \\ V_2 = \frac{1}{r-1} \frac{C}{N} \end{cases} \quad \text{\$ Si analizzano ora le fasi del ciclo termodinamico, fornendo una breve descrizione e ponendo}$$

attenzione allo scambio di massa (sistema chiuso/aperto), lavoro e calore con l'esterno.

- **Aspirazione**,  $0 \rightarrow 1$ : la prima fase del ciclo Otto è l'aspirazione. Durante la fase di aspirazione (ideale), la valvola di aspirazione è aperta e il sistema scambia massa con l'esterno: il pistone si sposta dal PMS al PMI e la camera di combustione si riempie d'aria a pressione e temperatura costante,  $p_1 = p_0$ ,  $T_1 = T_0$ ,  $\rho_1 = \rho_0 = \frac{p_0}{RT_0}$ . La massa contenuta nella camera di combustione all'apertura della valvola, in coincidenza del PMI,  $m = \rho_1 V_1 = \dots$ . Durante la fase di aspirazione, il pistone deve vincere la sovrappressione del basamento (disolito la pressione nel basamento è  $-(p_b - p_0)$ ,  $c$  (negativo poichè assorbito), essendo  $c$  la corsa del pistone e la differenza di pressione costante durante l'aspirazione. Questo lavoro assorbito durante l'aspirazione sarà uguale e contrario a quello fornito durante lo scarico ideale dei gas, che avviene alla stessa differenza di pressione con un moto opposto.

- **Compressione**,  $1 \rightarrow 2$ : la seconda fase del ciclo termodinamico è la compressione del fluido che avviene a causa del movimento verso l'alto del pistone. Il sistema è chiuso: le valvole sono chiuse e si ipotizza che non ci sia trafileamento (*blow-by*) tra il pistone e la superficie laterale del cilindro. Il bilancio di energia totale per il fluido contenuto all'interno del volume  $V(t)$  (variabile nel tempo, a causa del moto del pistone) della camera di combustione,  $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e^t + \oint_{S(t)} \rho e^t (u - v) \cdot \hat{n} = \int_{V(t)} f \cdot u + \oint_{S(t)} t_n \cdot u - \oint_{S(t)} q \cdot \hat{n} + \int_{V(t)} p r$ . *puessere semplificato, trascurando l'effetto delle forze di volume,  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , trascurando la trasmissione del calore con l'esterno (trasformazione adiabatica),  $\mathbf{q} \cdot \hat{n} = 0$ , e non essendo sorgente di calore,  $r = 0$ . Inoltrenon c'è flusso di massa attraverso il contorno  $S(t)$  del volume,  $\oint_{S(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \hat{n} = 0$ , e l'unica superficie in movimento della camera di combustione corrisponde al cielo (la faccia superiore),  $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e = \int_{S_c(t)} t_n \cdot u$ .*

$u$ , *legando la derivata temporale dell'energia del fluido nella camera di combustione alla potenza delle forze esercitate dal pistone*

$= -\oint_{S_c(t)} t_n \cdot u$  *per il principio di azione e reazione. Inoltre, le condizioni al contorno impongono che il fluido e il solido abbiano la stessa velocità,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c$  sulla superficie di contatto. Si può quindi riscrivere il bilancio di energia del fluido in funzione della potenza  $W_{12}$  tra i punti 1 e 2 del ciclo:*

$$-W_{12} - p_b S_c v(t) = -W_{12} - p_b \frac{dV}{dt}, \text{essendo } v(t) \text{ la velocità del pistone, per ottenere la potenza trasmessa al pistone dal fluido (sistema chiuso):}$$

$= \rho V \dot{m}$  *manca costante, essendo un sistema chiuso, se si trascurano l'effetto di trafileamento tra le pareti del cilindro e il pistone (pressione nel basamento). Integrando in tempo la potenza istantanea  $W_{12}(t)$ , tra il punto 1 e il punto 2 del ciclo, si ottiene il lavoro  $W_{12}$  per unità di massa:*

$$-m(e_2 - e_1) - p_b(V_2 - V_1) \quad \text{Utilizzando la legge di stato dei gas perfetti } p = \rho R T \quad \text{Teileggametrale variabile termodinamica durante una trasformazione adiabatica } p/\rho^\gamma = \text{costante, si ottiene } e_2 - e_1 = c_v(T_2 - T_1) = c_v T_1 \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = c_v T_1 (r^{\gamma-1} - 1) \quad \text{\$}$$

- **Combustione**,  $2 \rightarrow 3$ : la terza fase del ciclo termodinamico è la combustione. Viene iniettato il combustibile all'interno della camera di combustione, innescata dall'accensione di una candela in un motore a benzina classico. Durante l'iniezione del combustibile il sistema è aperto. In prima approssimazione si può trascurare la variazione di massa,  $m + m_f = m(1 + f) \simeq m$ . In prima approssimazione, si può rappresentare questa fase con una

trasformazione isocora (volume costante) associata a un aumento di pressione e temperatura, a causa di una combustione (completa) veloce in corrispondenza del PMS. Il bilancio di energia che descrive questa fase diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e = \int_{V(t)} \rho r$$

*Utilizzando l'espressione dell'energia interna*

$$m \frac{de}{dt} = \dot{m}_f \Delta h \rightarrow e_3 - e_2 = \frac{m_f}{m} \Delta h = f \Delta h.$$

$$= c_v T_3 = c_v T_2 + f \Delta h.$$

- **Espansione**, 3 → 4: la quarta fase del ciclo è l'espansione. Trascurando gli scambi di calore con l'esterno, la trasformazione è adiabatica. Facendo le stesse ipotesi fatte per la fase di compressione, si ottiene un lavoro di espansione (fornito al pistone, > 0)  $L_{34} = -m(e_4 - e_3) - p_b(V_4 - V_3)$ . Utilizzando la legge di stato dei gas perfetti  $p = \rho R T$  e la relazione tra le variabili termodinamiche durante una trasformazione adiabatica  $p \rho^\gamma = \text{cost}$ , si ottiene

$$e_4 - e_3 = c_v(T_4 - T_3) =$$

$$= c_v T_3 \left[ \left( \frac{p_4}{p_3} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] =$$

$$= c_v T_3 (r^{-\gamma+1} - 1) =$$

$$= c_v T_2 (r^{-\gamma+1} - 1) + f \Delta h (r^{-\gamma+1} - 1) =$$

$$= c_v T_1 (1 - r^{\gamma-1}) + f \Delta h (r^{-\gamma+1} - 1) =$$

- **Scarico**, 4 → 5, 5 → 6: la fase di scarico (libera) è considerata istantanea e quindi non viene compiuto lavoro da parte del fluido sul sistema meccanico. Durante la fase di scarico forzata, mentre si muove dal PMI al PMS, il pistone compie un lavoro  $L_{46} = (p_b - p_0)c$ , uguale e contrario a quello compiuto durante la fase di aspirazione se la pressione di aspirazione e di scarico sono uguali ( $p_0 = p_1 = p_5$ ).

Il lavoro complessivo fornito dal fluido al sistema meccanico durante un ciclo è quindi uguale a

$$L = L_{12} + L_{34} = \dots = f m \Delta h (1 - r^{-\gamma+1}).$$

*Il risultato ottenuto può essere facilmente interpretato in termini termodinamici, essendo*

$$\eta_Q = \frac{L}{Q_{in}} = \frac{f m \Delta h (1 - r^{-\gamma+1})}{\dot{m}_f \Delta h} = 1 - r^{-(\gamma-1)}.$$

*il rendimento del ciclo Otto espresso in funzione del rapporto di compressione,  $L = \eta_Q Q_{in}$ . Nonostante il risultato ottenuto non sia nuovo, lo svolgimento dovrebbe fornire uno svolgimento più dettagliato che parta da*

$$L = \frac{2 \pi}{\Omega} \frac{N L}{T} = \frac{\Omega}{n \pi} f \Delta h \rho_1 N V_1 (1 - r^{1-\gamma}),$$

*introducendo la definizione di cilindrata,  $W =$*

$$\frac{N L}{T} = \frac{\Omega}{n \pi} f \Delta h \rho_1 C \frac{r}{r-1} (1 - r^{1-\gamma}) = 43.14 \text{ kW} = 58.6 \text{ CV}.$$

#### 4.16.16 Exercise 4.13

Un aereo vola alla velocità  $V = 250 \text{ m/s}$  alla quota  $z = 10000 \text{ m}$ , dove la pressione  $P_0 = 26500 \text{ Pa}$  e la temperatura atmosferica sono  $T_0 = 223.25 \text{ K}$ , spinto dal motore a getto rappresentato in figura. Sapendo che: 0 → 1: la presa d'aria è progettata per ottenere una compressione adiabatica ideale (isentropica), con  $P_1/P_0 = 1.5$ ; 1 → 2: il compressore ideale ha una sezione di ingresso  $A_1 = \dots$  e produce un rapporto di pressione totale  $P_2^t/P_1^t = 40.0$ , tramite una trasformazione adiabatica ideale; 2 → 3: il combustore garantisce una perfetta combustione mantenendo costante la pressione totale al suo interno  $P_2^t = P_3^t$ ; il flusso di calore prodotto dalla combustione è uguale a  $\dot{Q}_c = \dot{m}_f \Delta h_c$ , dove  $\dot{m}_f$  è il flusso di massa di combustibile e  $\Delta h_c = 46 \text{ MJ/kg}$  il suo potere calorifico; la temperatura totale all'ingresso della turbina è  $T_4^t = 1600 \text{ K}$ ; 3 → 4: nella turbina avviene un'espansione adiabatica ideale, in modo tale da garantire la potenza necessaria a mantenere in moto il compressore; 4 → 5: nell'ugello avviene un'espansione adiabatica ideale, che porta il gas a espandersi fino alla pressione ambiente  $P_5 = P_0$ . Si considerino tutti i componenti meccanici ideali, si trascurino gli effetti viscosi dove possibile e si consideri l'aria e la miscela di gas combusti come un gas biatomico ideale, con costante dei gas  $R = 287 \text{ J/(kg K)}$  e calori specifici costanti. Viene chiesto

di calcolare: ||||| - il rapporto in massa tra ||| flusso di combustibile e ||| flusso di aria, |||  $f = \dot{m}_f / \dot{m}_a$ ; ||||| - la spinta  $T$  fornita dal ||| motore. || +-----+-----+-----+

{width=»95%»}

Durante lo svolgimento dell'esercizio vengono utilizzati i bilanci integrali di massa,  $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho + \oint_{S(t)} \rho(u-v) \cdot \hat{n} = 0$ , quantità di moto,  $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho u + \oint_{S(t)} \rho u(u-v) \cdot \hat{n} = \int_{V(t)} f + \oint_{S(t)} t_n$ , ed energia totale,  $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e^t + \oint_{S(t)} \rho e^t(u-v) \cdot \hat{n} = \int_{V(t)} f \cdot u + \oint_{S(t)} t_n \cdot u - \oint_{S(t)} q \cdot \hat{n} + \int_{V(t)} \rho r$ . In particolare, il bilancio di quantità di moto permette di ricavare la formula della spinta del motore in funzione del flusso di quantità di moto attraverso un volume di controllo opportunamente scelto. Il bilancio di energia totale permette di analizzare i singoli componenti del motore.

Per risolvere il problema, è necessario ricavare la spinta del motore in funzione della portata massica trattata e della differenza di velocità del fluido in ingresso e in uscita dal motore. Successivamente viene analizzato il sistema motore per calcolare la velocità di efflusso dei gas. Si considera il problema stazionario, con forze di volume  $f$  trascurabili. Si svolge uno studio «quasi-1D» considerando variabili uniformi sulle varie sezioni del motore.

### Formula della spinta.

Nell'ipotesi che la pressione dei gas in uscita dall'ugello sia uguale alla pressione ambiente, il bilancio di quantità di moto del fluido trattato dal motore permette di ottenere la stima della trazione generata dal motore,  $T = \dot{m}_5 V_5 - \dot{m}_0 V_0 = \dot{m}_0(V_5 - V_0) + \dot{m}_f V_5$ . Per ricavare la trazione  $T$  è necessario ricavare i valori del flusso di massa d'aria ingerito dal motore, il flusso di combustibile e la velocità di efflusso dei gas combusti, studiando in dettaglio il fluido all'interno del motore.

### Analisi del motore.

Si studia l'evoluzione della corrente che attraversa il motore.

- 0  $\rightarrow$  1, presa d'aria: l'aria che approccia l'ingresso del compressore  $S_1$  subisce una compressione libera adiabatica ideale. Dato lo stato termodinamico TD(0), con  $\rho_0 = P_0 / (RT_0) = 0.414 \text{ kg/m}^3$ , e il rapporto di pressione  $P_1/P_0$ , è possibile calcolare lo stato termodinamico TD(1):  $P_1 = \left(\frac{P_1}{P_0}\right) P_0 = 39750 \text{ Pa}$ ,  $\rho_1 = \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \rho_0 = 0.553 \text{ kg/m}^3$ . Una volta nota la pressione e la densità, è possibile calcolare la temperatura e l'entalpia del fluido,  $T_1 = \frac{P_1}{R\rho_1} = 250.67 \text{ K}$ ,  $h_1 = c_p T_1 = 2.52 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ . Si calcola ora il flusso di massa che entra nel volume,  $\dot{m}_0 = \rho_0 V_0 A_0 = \rho_1 V_1 A_1$ . Si calcola il flusso di massa utilizzando la sezione 1. Poiché non ci sono organi meccanici che lavorano,  $\dot{m}_1 h_1^t \rightarrow h_0^t = h_1^t = h_1 + \frac{V_1^2}{2} = 2.56 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ .  $V_1 = \sqrt{2(h_0^t - h_1)} = 86.09 \text{ m/s}$ ,  $\dot{m}_1 = \rho_1 A_1 V_1 = 47.57 \text{ kg/s}$ .
- 1  $\rightarrow$  2, compressore: lo stato termodinamico totale in uscita del compressore è legato allo stato totale in ingresso da una trasformazione isentropica,  $P_2^t = \left(\frac{P_2^t}{P_1^t}\right) P_1^t = 1.67 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ ,  $T_2^t = \left(\frac{P_2^t}{P_1^t}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_1^t = 729.76 \text{ K}$ . Trascurando gli effetti viscosi sulla superficie di ingresso e di uscita del compressore, in assenza di scambi di calore,  $\dot{m}_1(h_2^t - h_1^t) = 22.72 \text{ MW}$ .
- 2  $\rightarrow$  3, combustore: la temperatura totale  $T_3^t = \dots$  in ingresso alla turbina è un dato del problema determinato dai limiti tecnologici legati alla realizzazione delle palette del rotore della turbina e al fenomeno di creeping. Nel combustore non ci sono organi meccanici in movimento che forniscano o assorbano potenza dal fluido. Si trascurano gli effetti viscosi e le forze di volume. Se si ipotizza la combustione completa

del combustibile iniettato come origine del calore generato e si trascura il flusso di entalpia totale attraverso l'iniettore, il bilancio di energia totale in regime stazionario diventa  $\dot{m}_3 h_3^t - \dot{m}_2 h_2^t - \underbrace{\dot{m}_f h_f^t}_{\approx 0} = \dot{Q}_c =$

$\dot{m}_f \Delta h_c$ . Poiché il flusso di massa del gas combusto è uguale alla somma del flusso d'aria e del combustibile,

$$\dot{m}_2 + \dot{m}_f, \text{ il rapporto tra il flusso di massa del combustibile e dell'aria diventa, } f := \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_2} = \frac{h_3^t - h_2^t}{\Delta h_c - h_3^t} =$$

$$\frac{T_3^t - T_2^t}{\Delta h_c / c_p - T_3^t} = 0.0197. \text{ Se si ipotizza che la pressione totale rimanga costante all'interno del combustore, lo stato termodinamico a 3 è dato da}$$

$$\frac{P_3^t}{RT_3^t} = 3.64 \text{ kg/m}^3, \quad h_3^t = c_p T_3^t = 1.61 \cdot 10^6 \text{ J/kg}.$$

- 3 → 4, turbina: la turbina deve generare la potenza  $W_{34}$  necessaria a muovere il compressore,  $\dot{W}_{12} + \dot{W}_{34} = 0$ . Se si trascurano gli effetti viscosi e si ipotizza un processo adiabatico, la potenza della turbina è uguale alla differenza del flusso di entalpia tra 3 e 4.

$$\dot{m}_3 (h_4^t - h_3^t) = \dot{W}_{34} = \dot{m}_2 (h_2^t - h_1^t) = 1.13 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \rightarrow T_4^t = 1124.6 \text{ K}.$$

La trasformazione è isentropica e lo stato termodinamico totale a 4 è dato da

- 4 → 5, ugello: se si considera un'espansione libera nell'ugello ideale, trascurando gli effetti viscosi e gli scambi di calore, il bilancio dell'energia totale in assenza di organi meccanici che generino o assorbano potenza dal fluido equivale alla conservazione del flusso dell'entropia totale,  $\dot{m}_4 h_4^t = \dot{m}_5 h_5^t \rightarrow h_4^t = h_5 + \frac{V_5^2}{2} \rightarrow$

$$V_5 = \sqrt{2(h_4^t - h_5)} \quad \text{Se l'ugello non è bloccato la pressione di uscita è uguale alla pressione atmosferica, } P_5 = P_0.$$

$$\text{La trasformazione è isentropica tra 4 e 5, per cui si può ricavare lo stato termodinamico a 5 da} \quad \rho_5 = \left( \frac{P_5}{P_4^t} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \rho_4^t = 0.189 \text{ kg/m}^3$$

$$T_5 = 489.5 \text{ K} \rightarrow V_5 = 1129.6 \text{ m/s}.$$

$$\sqrt{2(h_4^t - h_5)} = 1129.6 \text{ m/s}.$$

La spinta fornita dal motore in questa condizione di volo vale  $\dot{T} = \dot{m}_5 V_5 - \dot{m}_0 V_0 = 42.90 \text{ kN}$ .

## Bernoulli theorems and vorticity dynamics

Per fluidi incompressibili o barotropici (per i quali la pressione è funzione solo della densità), il teorema di Bernoulli si ottiene dal bilancio della quantità di moto. Si elencano qui tre forme del teorema di Bernoulli, ognuna caratterizzata da diverse ipotesi. Tramite l'identità vettoriale

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}),$$

applicata al termine convettivo  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ , è possibile ottenere la forma del Crocco dell'equazione della quantità di moto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla P &= \mathbf{g} \\ \left( (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} \right) \\ \rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \times \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla P &= \mathbf{g}, \end{aligned}$$

avendo indicato con  $P$  il potenziale termodinamico,  $P =$  che si riduce al rapporto  $p/\rho$  nel caso di densità costante e con  $\mathbf{g}$  le forze per unità di massa.

### 5.1 Prima forma del teorema di Bernoulli

Nel caso di fluido non viscoso, incompressibile o barotropico, in regime stazionario ( $\partial/\partial t \equiv 0$ ), con forze di massa conservative  $\mathbf{g} = -\nabla\chi$ , il trinomio di Bernoulli  $|\mathbf{u}|^2/2 + P + \chi$  è costante lungo le linee di corrente e le linee vorticosi, cioè

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P + \chi \right) = 0,$$

con  $\hat{\mathbf{t}}$  versore tangente alle linee di corrente o alle linee vorticosi. Infatti, il termine  $\nabla \times \mathbf{u}$  nell'equazione della quantità di moto nella forma di Crocco ([eqn:bilanci:crocco]{reference-type=»ref» reference=»eqn:bilanci:crocco«}) è perpendicolare in ogni punto del dominio alle linee di corrente ( $\hat{\mathbf{t}}$  parallelo al campo di velocità  $\mathbf{u}$ ) e alle linee vorticosi ( $\hat{\mathbf{t}}$  parallelo al campo di vorticità  $\nabla \times \mathbf{u}$ ): moltiplicando scalarmente l'equazione ([eqn:bilanci:crocco]{reference-type=»ref» reference=»eqn:bilanci:crocco«}) scritta per un fluido non viscoso ( $\nu = 0$ ) per il versore  $\hat{\mathbf{t}}$ , il prodotto scalare  $\hat{\mathbf{t}} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$  è identicamente nullo.

## 5.2 Seconda forma del teorema di Bernoulli

Nella corrente irrotazionale ( $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$ ) di un fluido non viscoso, incompressibile o barotropico, in regime stazionario, con forze di massa conservative  $\mathbf{g} = -\nabla\chi$ , il trinomio di Bernoulli  $|\mathbf{u}|^2/2 + P + \chi$  è costante in tutto il dominio, cioè

$$\nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P + \chi \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + P + \chi = C.$$

## 5.3 Terza forma del teorema di Bernoulli

Nella corrente irrotazionale ( $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$ ) di un fluido non viscoso, incompressibile o barotropico, in un dominio semplicemente connesso (nel quale è quindi possibile definire il potenziale cinetico  $\phi$ , t.c.  $\mathbf{u} = \nabla\phi$ , con forze di massa conservative  $\mathbf{g} = -\nabla\chi$ , il quadriminomio di Bernoulli  $\partial\phi/\partial t + |\mathbf{u}|^2/2 + P + \chi$  è uniforme (costante in spazio, in generale **non** in tempo) in tutto il dominio, cioè

$$\left( \nabla \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + P + \chi \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + P + \chi = C(t).$$

## 5.4 Teoremi di Bernoulli per fluidi viscosi incompressibili

Mentre la prima forma del teorema di Bernoulli non è valida se non viene fatta l'ipotesi di fluido non viscoso<sup>1</sup>, la seconda e la terza forma sono ancora valide per fluidi viscosi incompressibili. Infatti, usando l'identità vettoriale

$$\Delta\mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}),$$

si scopre che il laplaciano del campo di velocità per correnti irrotazionali ( $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ) di fluidi incompressibili ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) è nullo.

L'ipotesi di fluido non viscoso non è direttamente necessaria per la seconda e la terza forma del teorema di Bernoulli, ma lo diventa tramite l'ipotesi di corrente irrotazionale. Sotto opportune ipotesi sulla corrente asintotica, verificate in molti casi di interesse aeronautico, si dimostra che (quasi) tutto il campo di moto è irrotazionale solo se viene fatta l'ipotesi di fluido non viscoso. Questo modello viene utilizzato per studiare correnti di interesse aeronautico, nelle quali gli effetti della viscosità sono (quasi ovunque) trascurabili: un esempio è la corrente, uniforme a monte, che investe un corpo aerodinamico a bassi angoli di incidenza (corpo affusolato, attorno al quale non si verificano separazioni) per alti numeri di Reynolds: in queste correnti, le zone vorticosi sono confinate in regioni di spessore sottile (strato limite sulla superficie dei corpi solidi e scie libere).

<sup>1</sup> Moltiplicando scalarmente l'equazione ([eqn:bilanci:crocco]{reference-type=»ref» reference=»eqn:bilanci:crocco«}) per il versore  $\hat{\mathbf{t}}$ , il termine  $\hat{\mathbf{t}} \cdot \nu \Delta\mathbf{u}$  non si annulla. Rimane quindi

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P + \chi \right) - \nu \hat{\mathbf{t}} \cdot \Delta\mathbf{u} = 0$$