Matematica per le scuole superiori

basics

24 mar 2025

Introduzione

Questo libro fa parte del materiale pensato per le scuole superiori, nell'ambito del progetto **basics-books**. E" disponibile in versione in .pdf.

Come usare questo materiale.

Parte I

Introduzione

CAPITOLO 1

Programma

1.1 Obiettivi

1.2 Come usare questo materiale

A cominciare dalla *prima pagina* di questo materiale, è bene chiarire quali sono gli obiettivi principali. Gli obiettivi principali sono quelli di raggiungere la familiarità e la dimestichezza necessaria per essere operativi - anche se con qualche aiuto non si nega a nessuno - con gli strumenti di:

- **algebra**, e in particolare gli strumenti dell"**algebra lineare** e **vettoriale in spazi Euclidei**, fondamentali in molti ambiti contemporanei: giusto per citarne alcuni, l'algebra vettoriale in spazi euclidei è un utile strumento degli oggetti geometrici (geometria analitica) e del loro moto (meccanica classica) nello spazio; l'algebra lineare è alla base di alcune discipline della fisica (come la meccanica quantistica, formulabile a partire da particolari spazi lineari), e dei molti metodi utilizzati attualmente in calcolo scientifico, in statistica (e in data analysis), e nelle applicazioni di intelligenza artificiale; l'algebra lineare è poi fondamentale in moltissimi algoritmi numerici, che riconducono la soluzione di problemi non lineari alla soluzione di una successione di problemi lineari
- **geometria analitica**, come legame tra algebra e geometria: figure geometriche possono essere parametrizzate e rappresentate come equazioni che legano questi parametri; le incognite di un'equazione possono essere interpretati come **coordinate** utilizzate per descrivere figure geometriche; la geometria analitica in spazi di piccola dimensione - raffigurabili dalla mente umana - può risultare utile a dare un'interpretazione geometrica di risultati più astratti dell'algebra; l'algebra vettoriale in spazie Euclidei risulta uno strumento utile per un approccio maturo alla geomteria analitica - e spesso per evitare una manica di conti
- **calcolo**: il calcolo è uno degli strumenti più potenti della matematica per lo studio di fenomeni che variano con continuità. Alcuni argomenti utili e propedeutici nello sviluppo del calcolo vengono presentati nel capitolo riservato al precalcolo e nelle prime sezioni dell'introduzione all'analisi. Al costo di rinunciare a qualche dettaglio e a un severo rigore, l'obiettivo è quello di introdurre l'analisi per funzioni a una variabile reale, utilizzando il concetto di limite per introdurre l'operazione di derivata e la sua operazione inversa di integrale, e prendere dimestichezza con questi grazie allo svolgimento di esercizi. Successivamente, si sente la necessità di introdurre le equazioni differenziali ordinarie (data la loro rilevanza in molti ambiti delle scienze), e il calcolo per funzioni multi-variabile e spazi euclidei (considerata la loro rilevanza nelle scienze, come in fisica, e in tutti gli ambiti in cui i fenomeni

di interesse dipendono da più di una variabile - cioè quasi tutti, inclusi l'ottimizzazione, argomento che risulta fondamentale per le moderne applicazioni di approssimazione di dati, di controllo e di intelligenza artificiale).

- **statistica** todo

Argomenti secondari, che non possono essere considerati obiettivi finali dello studio della matematica ma al massimo utili strumenti per raggiungere obiettivi superiori - per non esagerare dicendo che costituiscono un livello minimo di decenza - sono:

- algebra sui numeri reali e la soluzioni di problemi algebrici di una o più variabili, che coinvolgono equazioni e/o disequazioni
- gli argomenti raccolti nel precalcolo che includono:
  - le funzioni trigonometriche, presentate a partire dalla geometria della circonferenza
  - la funzione esponenziale, protagonista fondamentale del calcolo - uno dei nostri obiettivi principali, forse il principale -, e la sua funzione inversa, il logaritmo; l'esponenziale viene introdotto come serie di funzioni;
  - considerando un bilancio difficoltà/utilità pratica per i nostri obiettivi, l'argomento serie non verrà trattato in dettaglio - o se verrà trattato potrebbe essere un argomento di cui prendere le briciole necessarie
  - l'algebra sui numeri complessi, che risulta utile nella trattazione delle equazioni differenziali ordinarie e che fornisce un legame tra la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche.

Parte II

Insiemistica e logica

CAPITOLO 2

Insiemistica

2.1

2.2 Funzioni

Definition 1.2.1 (Funzione)

Una funzione $f : A \to B$ tra due insiemi A, B è una relazione che associa a ogni elemento dell'insieme A uno e un solo elemento dell'insieme B, cioè

$$\forall a \in A \quad \exists! b = f(a) \in B \ .$$

L'insieme A è definito **dominio**; l'insieme B è definito **codominio**; il sottoinsieme degli elementi $b \in B$ per i quali esiste un $a \in A$ t.c. $b = f(a)$ è definito **immagine** della funzione.

Funzione suriettiva. Una funzione è suriettiva se $B = \text{Im}(A)$, cioè per ogni elemento $b \in B$ esiste almeno un elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Funzione iniettiva. Una funzione è iniettiva se per ogni coppia $a_1, a_2 \in A$, con $a_1 \neq a_2$, segue che $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Funzione biunivoca. Una funzione sia suriettiva sia iniettiva è una funzione biunivoca. Una funzione biunivoca associa a ogni elemento $a \in A$ uno e un solo elemento $b \in B$ e *viceversa*(!).

Una funzione **biunivoca** è anche **invertibile**. Data la funzione biunivoca $f(a) = b$, la funzione inversa è $a = f^{-1}(b)$.

2.3 Algebra di insiemi

todo Qui o in un capitolo su *algebra di insiemi* nella parte di *algebra*?

2.3.1 Immagine di una funzione

2.3.2 Nucleo di una funzione

2.4 Insiemi numerici

2.4.1 Numeri naturali, $\mathbb{N}$

- **Somma**
- **Moltiplicazione.**
- **Potenza.**

2.4.2 Numeri interi, $\mathbb{Z}$

- **Somma**
- **Sottrazione**
- **Moltiplicazione.**
- **Potenza.**
- **Radice.**

2.4.3 Numeri razionali, $\mathbb{Q}$

- **Somma**
- **Sottrazione**
- **Moltiplicazione.**
- **Divisione.**
- **Potenza.**

$$a^b = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p}{q}}$$

2.4.4 Numeri reali, $\mathbb{R}$

- **Somma**
- **Sottrazione**
- **Moltiplicazione.**
- **Divisione.**
- **Potenza.**
- **Radice.**
- **Logaritmo.**

2.4.5 Numeri complessi, $\mathbb{C}$

2.5 Insiemi numerici

Partendo dai *numeri naturali*, si introducono gli insiemi numerici *interi* e *razionali* come chiusura dei numeri naturali rispetto alle operazioni inverse di addizione e moltiplicazione. L'insieme dei *numeri reali* costituisce un insieme continuo che «chiude i buchi» ancora presenti nell'insieme dei numeri razionali. Infine si introduce la necessità dei *numeri complessi* come chiusura algebrica dei numeri reali… **todo** *controllare definizione di chiusura, che non ha questo significato*

2.5.1 Numeri naturali $\mathbb{N}$

L'insieme dei numeri naturali,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\} \ ,$$

contiene i numeri che intuitivamente vengono usati per contare (o ordinare), risultato del processo di astrazione che associa a un gruppo di oggetti la sua quantità. Dal punto di vista storico, il processo di astrazione che ha condotto al concetto di unità - il numero 1 - e i suoi multipli - i numeri naturali maggiori di 1 - viene fatto risalire all'epoca presitorica, ed esistono diversi reperti storici che testimoniano il loro uso in Mesopotamia e in Egitto nel III millennio a.C. L'introduzione del **numero** 0 avviene inizialmente nelle civiltà mediterranee come segnaposto, e successivamente in India tra il VI se il VII secolo d.C. come numero nel **sistema decimale posizionale** formulato in India e diffusosi tra le popolazioni persiane e arabe, prima di arrivare in Europa.

Sull'insieme dei numeri naturali si possono definire alcune *operazioni chiuse*[^closed-operation] sull'insieme dei numeri naturali:

- addizione, $+$
- moltiplicazione, $\times$ o $\cdot$

che hanno le seguenti proprietà:

- commutatività

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \times b &= b \times a \end{aligned}$$

- associatività

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= a + (b + c) \\ (a \times b) \times c &= a \times (b \times c) \end{aligned}$$

e quindi si può evitare l'uso di parentesi inutili nella somma o nella moltiplicazione di tre numeri $a + b + c+$ o $a \times b \times c$

- esistenza dell'elemento identità, il numero 0 per l'addizione, il numero 1 per la moltiplicazione

$$a + 0 = a$$
$$a \times 1 = a$$

- distribuitività della moltiplicazione sull'addizione
- *fattorizzazione dello zero: se $a \times b = 0$ allora almeno uno dei due fattori è uguale a zero*

Mentre le operazioni di addizione e moltiplicazione sono chiuse, le operazioni di sottrazione e divisione non sono chiuse sui numeri naturali. In generale, la sottrazione di due numeri naturali, $a, b \in \mathbb{N}$ è un *numero intero*, $a - b \in \mathbb{Z}$; la divisione tra due numeri naturali $a, b \in \mathbb{N}$ è un *numero razionale* $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ positivo.

Altre operazioni

Sottrazione

Divisione

Potenza

La potenza n-esima, $n \in \mathbb{N}^+$ è definita come

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}} .$$

Prodotto delle potenze, $a^n\, a^m = a^{m+n}$.

$$a^n\, a^m = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}} \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ volte}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ volte}} = a^{m+n} .$$

Potenza a^0. La potenza a^0 viene definita osservando che $\frac{a^n}{a} = a^{n-1}$,

$$\begin{aligned} &\dots \\ &a^3 = a \cdot a \cdot a \\ &a^2 = a \cdot a \\ &a^1 = a \\ &a^0 = 1 \end{aligned}$$

2.5.2 Numeri interi $\mathbb{Z}$

L'insieme dei numeri interi,

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

…**todo** Sull'insieme dei numeri interi si possono definire alcune operazioni chiuse:

- addizione,
- sottrazione,
- prodotto,

Altre operazioni

Divisione

Potenza

Regola dei segni - I - moltiplicazione.

$$\begin{aligned}
&\dots \\
2 \cdot a &= a + a \\
1 \cdot a &= a \\
0 \cdot a &= 0 \\
(-1) \cdot a &= -a \\
(-2) \cdot a &= -a - a \\
&\dots
\end{aligned}$$

Se $a > 0$ è positivo, il suo prodotto per un numero positivo $b > 0$ è un numero positivo, $a \cdot b > 0$; il suo prodotto per un numero negativo $b < 0$, $b = -1 \cdot |b|$ è il numero negativo $a \cdot b = -1 \cdot a \cdot |b|$. Se $a < 0$ è un numero negativo, vale il viceversa. La regola può essere riassunta scrivendo i due numeri

$$a = \text{sign}(a) \cdot |a| \qquad , \qquad b = \text{sign}(b) \cdot |b|$$

interpretando $\text{sign}(a) = -1$ se $a < 0$ e $\text{sign}(a) = 1$ se $a > 0$, come

$$a \cdot b = \text{sign}(a) \cdot \text{sign}(b) \cdot |a| \, |b| \ .$$

Regola dei segni - II - potenze naturali. Scrivendo il numero a come prodotto del suo segno e del suo valore assoluto, $a = \text{sign}(a)|a|$, la sua potenza p-esima, con $p \in \mathbb{N}$ è il numero

$$a^p = (\text{sign}(a))^p \, |a|^p \ ,$$

positivo se a è positivo per qualsiasi esponente naturale p, o se a è negativo per esponenti p pari, negativo solo se a negativo e p dispari.

Potenze con esponenti negativi, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ La potenza di un numero reale con esponente negativo è un numero razionale,

$$a^0 = a^{n-n} = a^n \, a^{-n} \qquad \rightarrow \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

2.5.3 Numeri razionali $\mathbb{Q}$

I numeri razionali sono i numeri che possono essere scritti come frazione (divisione) di due numeri interi,

$$\mathbb{Q} = \left\{ q \;\middle|\; q = \frac{m}{n}, \ m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\} \ ,$$

Rappresentazione decimale

I numeri razionali sono i numeri e solo quelli che hanno una rappresentazione decimale con una parte decimale finita o periodica.

todo *vedi il pdf open_school_book*

Operazioni

Potenza

Potenza con base razionale ed esponente intero.

Potenza con esponente razionale. Una potenza $a^{\frac{p}{q}}$ con esponente razionale non intero, $p, q \in \mathbb{Z}$, $\frac{p}{q} \notin \mathbb{Z}$, è ben definita solo se la base è non-negativa.

In questo caso, per $a > 0$, le seguenti interpretazioni sono equivalenti

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a}^{\,p} = \sqrt[q]{a^p} \ .$$

In caso $a < 0$, l'operazione non è ben definita nell'ambito dei numeri razionali e nemmeno nell'ambito dei numeri reali,

$$a^{\frac{p}{q}} = ? = \begin{cases} \sqrt[q]{a}^{\,p} & \text{radice non definita se } a < 0 \text{ e } q \text{ pari} \\ \sqrt[q]{a^p} & \text{radice non definita se } a < 0,\ p \text{ dispari e } q \text{ pari} \\ a^{\frac{2p}{2q}} = \sqrt[2q]{a^{2p}} = \sqrt[2q]{a}^{\,2p} & \text{operazione definita, ma è lecita?} \\ \dots \end{cases}$$

L'operazione risulta ben definita nell'ambito dei numeri complessi, **todo** *link*

2.5.4 Numeri reali $\mathbb{R}$

In maniera non formale, e per quello che ci serve basta e avanza, l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri che possono essere scritti nel sistema decimale posizionale - quello che usiamo correntemente oggi - come numeri con una parte decimale finita o infinita.

I numeri reali possono essere banalmente definiti come unione dei numeri razionali e irrazionali: i *numeri razionali possono essere definiti* come i numeri che hanno una rappresentazione decimale con parte decimale finita o periodica; i numeri irrazionali possono quindi essere definiti come i numeri che non hanno una tale definizione. Date le definizioni mutuamente esclusive, i due insiemi hanno intersezione nulla e la loro unione è l'insieme di tutti i numeri che possono avere rappresentazione decimale, cioè i numeri reali.

Operazioni

Le operazioni per i numeri reali sono già state definite per quanto riguarda i numeri reali razionali; queste operazioni possono essere estese ai numeri reali irrazionali considerando un loro limite razionale, cioè applicandole a numeri razionali che approssimano (con accuratezza qualsiasi) i numeri irrazionali.

todo *esempi*

2.5.5 Numeri complessi $\mathbb{C}$

Per la discussione dei numeri complessi si rimanda al capitolo di *algebra sui numeri complessi* nella parte di *precalcolo*.

CAPITOLO 3

Logica

3.1 Argomenti ...

Per ora, elenco di concetti linkati

3.1.1 Identità

3.1.2 Contraddizione

3.1.3 Sillogismo

Parte III

Algebra

CAPITOLO 4

Introduzione all'algebra

L'algebra si occupa dello studio di:

- **quantità**/oggetti matematici
- **operazioni**, espressioni e relazioni tra questi quantità/oggetti matematici,
- **strutture** algebriche, definite come insiemi di quantità matematiche dotati di operazioni che soddisfano delle proprietà fondamentali, dette assiomi.

Argomenti del capitolo

Algebra sui numeri reali, $\mathbb{R}$. Vengono richiamate le proprietà e le operazioni elementari sui numeri reali. Viene

Algebra sulle n***-uple di numeri reali,*** $\mathbb{R}^n$. Vengono affrontati sistemi di equazioni e disequazioni a più incognite.

Algebra lineare. Il capitolo si concentra sui sistemi di equazioni **lineari** a più incognite. Viene introdotto il formalismo matriciale, e discusse le operazioni e alcune proprietà delle matrici; le matrici vengono poi interpretate come funzioni lineari, come mostrato con esempi ed esercizi. Vengono mostrati diversi approcci alla soluzione di sistemi lineari e presentato il teorema di Rouché-Capelli che descrive le condizioni per l'esistenza e l'unicità di tali soluzioni.

Algebra vettoriale. Viene definita la struttura algebrica dello spazio vettoriale, elencandone proprietà e presentandone alcuni esempi. Tra questi esempi, viene discusso in dettaglio uno spazio vettoriale euclideo, modello dello della «concezione quotidiana» dello spazio: vengono presentate le operazioni che permettono di

Algebra sui numeri complessi, $\mathbb{C}$.

Algebra di insiemi.

Approccio

Non vengono approfonditi gli aspetti più astratti della teoria, concentrandosi su un approccio più applicativo. In particolare, ci si concentra:

- gli **oggetti matematici** appartenenti a insiemi numerici ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$,…) o non numerici, come insiemi, matrici; l'introduzione all'algebra vettoriale richiederà la definizione di una struttura algebrica fondamentale, lo *spazio vettoriale*
- le **operazioni** e le relazioni su questi oggetti matematici e le loro proprietà
- il **calcolo letterale** che permette di impostare i problemi nella forma di **equazioni**, **disequazioni**, **sistemi**, senza dover fare affidamento a particolari valori numerici
- i metodi di **soluzione** di questi probelmi algebrici.

CAPITOLO 5

Algebra sui numeri reali

L'algebra sui numeri reali si occupa delle operazioni fondamentali e delle proprietà dei numeri reali, il cui insieme viene indicato con la lettera $\mathbb{R}$, come anche della risoluzione di equazioni e disequazioni. Dopo la logica e l'insiemistica, l'algebra sui numeri reali è il primo passo in un corso di matematica **todo** *di quale livello?*

Questo capitolo ricorda velocmente le operazioni elementari sui numeri reali introdotte nel capitolo sugli insiemi numerici, per poi introdurre con queste le operazioni di potenza, radice e logaritmo. Si fa affidamento sul calcolo letterale, per introdurre i polinomi e alcune loro proprietà che verranno utilizzate per risolvere i problemi algebrici che coinvolgono gli oggetti matematici introdotti: equazioni e disequazioni di un'incognita.

5.1 Operazioni

Le operazioni elementari sui numeri reali e le loro proprietà sono state introdotte nel capitolo sugli insiemi numerici. Si ricordano le proprietà dell'elevamento a potenza,

$$a^b = c$$

e le condizioni di esistenza di questa operazione sui numeri reali. Dall'operazione di potenza si introducono le operazioni di radice e di logaritmo chei, **sotto le necessarie condizioni**, consentono di scrivere

$$a = \sqrt[b]{c} \qquad , \qquad b = \log_a c \ .$$

5.1.1 Potenze

Nel campo dei numeri reali, l'operazione di potenza, $a^b = c$, è ben definita:

- per $a \geq 0$ per ogni $b \in \mathbb{R}$
- per $a < 0$ solo per $b \in \mathbb{N}$

todo *controllare, rimandare al capitolo sugli insiemi numerici; spostare nel capitolo sugli insiemi numerici?*

5.1.2 Radice

Definizione e condizioni.

La radice quadrata di un numero reale a è ben definita solo per i numeri reali non negativi, come la soluzione positiva dell'equazione

$$x^2 = a^2 \ ,$$

che in generale ha due soluzioni, $\mp|a|$, come è immediato verificare con le proprietà delle potenze (o della moltiplicazione),

$$(-|a|) \cdot (-|a|) = a^2 \qquad , \qquad |a| \cdot |a| = a^2$$

Proprietà.

5.1.3 Logaritmo

Definizione e condizioni.

Proprietà.

5.2 Polinomi

Scomposizioni elementari.

$$\begin{aligned}
&(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 && \text{Quadrato di binomio} \\
&(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 && \text{Cubo di binomio} \\
&(a+b)^N = \sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} a^{N-n} b^n && \text{Potenza di binomio} \\
&a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) && \text{Differenza di quadrati} \\
&a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) && \text{Differenza di cubi} \\
&a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) && \text{Somma di cubi} \\
&a^N - b^N = (a-b)(a^{N-1} + a^{N-2}b + \dots + b^{N-1}) && \text{Differenza di potenze} \\
&a^N + b^N = (a+b)(a^{N-1} - a^{N-2}b + \dots + b^{N-1}) && \text{Somma di potenze dispari}
\end{aligned}$$

todo *altre regole? Ruffini?...*

5.2.1 Frazioni algebriche

Una frazione algebrica è il quoziente di due polinomi,

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots b_0} \ .$$

Per il *teorema fondamentale dell'algebra*, ogni polinomio può essere scritto come prodotto di polinomi di primo o secondo ordine. Se i polinomi al numeratore e al denominatore della frazione algebrica non hanno fattori in comune, la frazione algebrica viene definita **in forma semplice**.

Example 4.2.1 (Frazioni algebriche semplici e non semplici)

La frazione $\frac{x^2-3x+2}{x^2+1} = \frac{(x-2)(x-1)}{x^2+1}$ è in forma ridotta, mentre la frazione $\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$ non è in forma ridotta e, **per** $x \ne 1$ **(!)**, è uguale a $\frac{x-2}{x+1}$.

Una **frazione propria** ha il grado n del numeratore inferiore al grado m del denominatore. Una frazione non propria può essere scritta come un polinomio di grado $n-m$ e una frazione propria

Example 4.2.2 (Frazioni non proprie)

La frazione $\frac{x^2+2x+1}{x-2}$ può essere scritta «completando il quadrato» come

$$\frac{x^2+2x+1}{x-2} = \frac{x^2-4x+4+4x-4+2x+1}{x-2} = \frac{(x-2)^2+6x-3}{x-2} = x-2+3\frac{2x-1}{x-2} \ ,$$

con la semplificazione possibile per $x \ne 2$.

Se il denominatore è scomponibile come prodotto di polinomi, allora la frazione algebrica può essere scritta come **somma di frazioni parziali**. In alcune applicazioni, come il calcolo degli integrali, può essere conveniente scrivere una frazione come somma di frazioni parziali, poiché risulta più semplice trattare somme di frazioni con numeratore di grado 1 o 2, di frazioni con numeratore di grado qualsiasi.

Example 4.2.3 (Somma di frazioni parziali)

La frazione $\frac{3x}{x^2-1}$ può essere scritta come somma di frazioni parziali $\frac{3x}{x^2-1} = \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x+1}$, poiché

$$\frac{3x}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+b(x+1)}{x^2-1} = \frac{x(a+b)+b-a}{x^2-1}$$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ b-a=0 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad a=b=\frac{3}{2} \ .$$

5.3 Problemi con un'incognita

5.3.1 Equazioni

Un'equazione è una relazione di uguaglianza che contiene una o più incognite. L'obiettivo è trovare i valori delle incognite che rendono vera l'uguaglianza.

Equazioni di primo grado

La forma generale di un'equazione di primo grado in un'incognita reale $x \in \mathbb{R}$ è

$$ax+b=0 \qquad a \ne 0$$

dove la condizione sul coefficiente $a \ne 0$ esclude i casi in cui l'equazione degenera a un'uguaglianza tra parametri. Dopo aver escluso i casi in cui l'equazione degenera in un'uguaglianza tra paramteri, con la condizione $a \ne 0$, la soluzione generale dell'equazione lineare esiste, è **unica** ed è

$$x = -\frac{b}{a} \ .$$

Nel caso degenere in cui $a=0$, si possono distinguere due casi:

- se $b \neq 0$ **non esiste** nessuna soluzione, poiché l'equazione si riduce alla *contraddizione* $0 = b \neq 0$ per $\forall x \in \mathbb{R}$
- se $b = 0$ **esistono infinite** soluzioni, poiché l'equazione si riduce all'"*identità* $0 = b \neq 0$ per $\forall x \in \mathbb{R}$

Equazioni di secondo grado

La forma generale di un'equazione di secondo grado in un'incognita reale $x \in \mathbb{R}$ è

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0 \, ,$$

dove la condizione sul coefficiente $a \neq 0$ esclude i casi in cui l'equazione degenera a un'equazione di *primo grado*. Le soluzioni dell'equazione vengono cercate completando il quadrato,

$$0 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) .$$

L'equazione viene riscritta come

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \, ,$$

per mettere in evidenza che l'esistenza delle soluzioni dipende dal valore del **discriminante**, $\frac{\Delta}{(2a)^2} := \frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$:

- se $\Delta > 0$ esistono **due soluzioni reali distinte**, $x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \in \mathbb{R}$
- se $\Delta = 0$ esistono **due soluzioni reali coincidenti**, $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{R}$
- se $\Delta < 0$ **non esistono soluzioni reali**, poiché la radice quadra di un numero negativo non è definita nel campo dei numeri reali, $\nexists x \in \mathbb{R}$

Equazioni non lineari generali

Mentre esiste una formula generale per le equazioni di terzo grado e di quarto grado, queste risultano spesso di scarsa e scarsissima (nulla?) utilità. Per le equazioni polinomiali, a volte è possibile utilizzare i risultati del *teorema fondamentale dell'algebra* per scrivere il polinomio come prodotto di polinomi di primo e secondo ordine, per i quali è possibile calcolare gli zeri con le formule mostrate nelle sezioni sulle equazioni di primo e secondo grado.

Per equazioni algebriche non lineari che coinvolgono potenze, logaritmi, esponenziali, a parte alcuni casi particolari risolvibili in forma chiusa utilizzando le proprietà di queste operazioni e le soluzioni delle equazioni polinomiali, è necessario affidarsi a metodi di soluzione grafici e/o numerici: **todo**

- m.grafici: soluzione a mano, per guess iniziale di m.numerici
- m.numerici: …

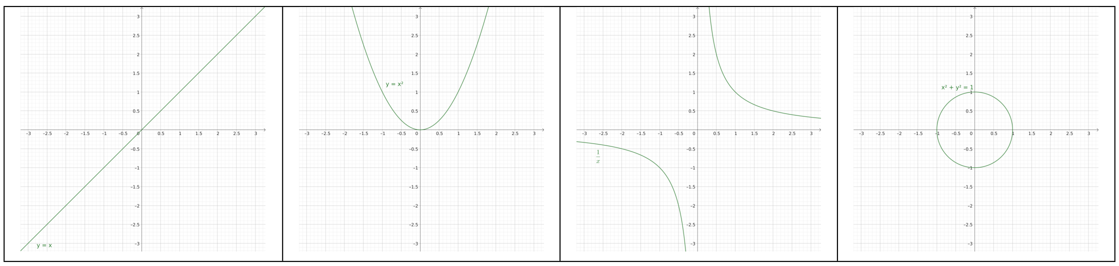
5.3.2 Disequazioni

Un'equazione è una relazione di disuguaglianza che contiene una o più incognite. L'obiettivo è trovare i valori delle incognite che rendono vera la disuguaglianza.

5.4 Rappresentazione grafica di un'equazione con due incognite

Un'equazione con due incognite x, y è una relazione di uguaglianza che può essere scritta nella forma generale $f(x, y) = 0$. In generale, a ogni equazione di questa forma può essere associata una curva nel piano, qui descritto dalle coordinate cartesiane x, y. Senza nessuna pretesa di completezza - rimandando per quella alla sezione sulla *geometria analitica* - qui ci si limita a discutere la rappresentazione grafica nel piano di alcune equazioni elementari

- $y = x$, dipendenza lineare (o proporzionale)
- $y = x^2$, dipendenza quadratica
- $y = \frac{1}{x}$, dipendenza inversamente proporzionale
- $\dots\ y = a^x$, $y = \log_a x\ \dots$



e delle equazioni ricavabili da queste con una trasformazione *affine* di incognite, nella forma

$$u = \frac{x - x_0}{a_x} \quad , \quad v = \frac{y - y_0}{a_y} \ ,$$

$$x = \alpha_x u + x_0 \quad , \quad y = \alpha_y v + y_0 \ ,$$

corrispondenti alla compsizione di due trasformazioni, in questo ordine:

1. la scalatura di un fattore a_x in direzione x e di un fattore a_y in direzione y
2. una traslazione x_0 in direzione x e di y_0 in direzione y

todo

- *Aggiungere un'imamgine con il procedimento di trasformazione di variabili/incognite (e coordinate)*
- *Aggiungere un'immagine su alcune famiglie di curve, al variare dei parametri*

Example 4.4.1 (…)

5.5 Problemi con due o più incognite - sistemi di equazioni e disequazioni

Un sistema di equazioni è un insieme di equazioni da risolvere simultaneamente. I sistemi di equazioni (e di disequazioni) consentono di introdurre l'"*algebra su* $\mathbb{R}^n$, descritta nel capitolo successivo.

CAPITOLO 6

Algebra su $\mathbb{R}^n$

L'algebra in $\mathbb{R}^n$ si occupa delle n-uple $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ di n numeri reali e dei problemi che hanno più di un'incongita, come i sistemi di equazioni e di disequazioni. Alle operazioni sui numeri reali che possono essere compiute sulle singole componenti delle n-uple, si aggiungono le operazioni di:

- **Addizione di n-uple** che produce una n-upla le cui componenti sono le somme delle componenti,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \ ,$$

- **Moltiplicazione di una n-upla per uno scalare** che produce una n-upla le cui componenti sono il prodotto delle componenti per lo scalare

$$c\,\mathbf{a} = c\,(a_1, \dots, a_n) = (c\,a_1, \dots, c\,a_n) \ .$$

6.1 Problemi

6.1.1 Forma generale

Sistemi di equazioni. Un sistema di m equazioni in n incognite è un insieme di m equazioni che devono essere soddisfatte simultaneamente,

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad , \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \ .$$

Le n-uple che soddisfano simultaneamente le m condizioni sono le soluzioni del problema. In generale, non si può dire nulla sull'esistenza e l'eventuale unicità delle soluzioni del problema. Risultati di esistenza e unicità esistono per i problemi lineari, come descritto nella sezione sull"*algebra lineare* **todo** *collegamento. Serve un capitolo sull'algebra lineare? Rinominare quello sull'algebra matriciale in algebra lineare?*.

Sistemi di disequazioni. Un sistema di m disequazioni in n incognite è un insieme di m disequazioni che devono essere soddisfatte simultaneamente,

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) > 0 \\ \dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) > 0 \end{cases} \qquad , \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \; .$$

Le n-uple che soddisfano simultaneamente le m condizioni sono le soluzioni del problema. In generale, non si può dire nulla sull'esistenza e l'eventuale unicità delle soluzioni del problema.

Sistemi di equazioni e disequazioni. Un sistema di m_1 equazioni e m_2 disequazioni in n incognite è un insieme di m_1 equazioni e m_2 disequazioni che devono essere soddisfatte simultaneamente,

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_{m_1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g_1(x_1, \dots, x_n) > 0 \\ \dots \\ g_{m_2}(x_1, \dots, x_n) > 0 \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \end{cases}$$

Le n-uple che soddisfano simultaneamente le m condizioni sono le soluzioni del problema. In generale, non si può dire nulla sull'esistenza e l'eventuale unicità delle soluzioni del problema.

6.2 Problemi

6.2.1 Sistemi lineari di equazioni

1. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

2. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

3. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} 5x - y = 10 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$$

4. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

5. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$$

6. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

7. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 5 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

8. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + 2y + 2z = 10 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

9. Verifica che il sistema non abbia soluzioni:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y + z = 6 \\ 2x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

10. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x - y + 2z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

6.2.2 Sistemi lineari di disequazioni

1. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y > 3 \end{cases}$$

2. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x - 2y \geq 1 \\ 3x + y < 7 \end{cases}$$

3. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - y \leq 3 \end{cases}$$

4. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} 2x - y < 5 \\ x + 3y \geq -4 \end{cases}$$

5. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x - y \leq 2 \\ x + y > 6 \end{cases}$$

6. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} 4x + y \geq 8 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$$

6.2.3 Sistemi di equazioni e disequazioni

1. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y \geq 1 \end{cases}$$

2. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x - y > 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

3. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

6.2.4 Equazioni Quadratiche

1. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

2. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

3. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

4. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 4y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

5. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

6.2.5 Disequazioni Quadratiche

1. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y > 4 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$$

2. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} y > x^2 + 2x \\ y \leq -x + 3 \end{cases}$$

3. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x + y > 7 \end{cases}$$

4. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 4y > 3 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$$

5. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} y \leq x^2 - 3x + 2 \\ y \geq 2x - 1 \end{cases}$$

6.2.6 Problemi vari

0. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + 2 = 3 \\ x - \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

1. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} \log(x) + y = 2 \\ x^y = 4 \end{cases}$$

2. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x^3 + y^2 = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

3. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = 9 \\ x + \sqrt{y} = 3 \end{cases}$$

4. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$$

5. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

6. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} e^x + y = 5 \\ x + \ln(y) = 2 \end{cases}$$

7. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x^3 - y = 8 \\ y + \sqrt{x} = 10 \end{cases}$$

8. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} \log(x) + y^2 = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

9. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y = 3 \\ \frac{x+y}{x-y} = 2 \end{cases}$$

10. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} 2^x + y = 10 \\ x + \log_2(y) = 3 \end{cases}$$

11. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^3 - y = 15 \end{cases}$$

12. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{x}{y} + 2 = 5 \end{cases}$$

13. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x^4 - y^2 = 16 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

14. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y^3 = 10 \\ x + \frac{1}{y} = 4 \end{cases}$$

15. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} e^x - y = 2 \\ x + \ln(y) = 1 \end{cases}$$

16. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + y^2 = 5 \\ x^2 + y = 6 \end{cases}$$

17. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^3 = 12 \\ \ln(x) + y = 2 \end{cases}$$

18. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 49 \end{cases}$$

19. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} = 3 \\ x^2 + y = 18 \end{cases}$$

20. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} 3^x + y = 10 \\ x + \log_3(y) = 2 \end{cases}$$

21. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x^3 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

22. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 3 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

23. Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y = 4 \\ x + y^2 = 10 \end{cases}$$

CAPITOLO 7

Algebra lineare

In questa sezione vengono presentati gli argomenti dell'algebra lineare che riguardano la soluzione di sistemi di equazioni lineari, per i quali si discutono le condizioni di esistenza e unicità della soluzione e dei quali viene fornita una rappresentazione grafica. Viene introdotto il formalismo matriciale, e le operazioni algebriche elementari sulle matrici; vengono date le definizioni le matrici vengono interpretate come funzioni lineari (applicazioni lineari), e utilizzate per formulare le condizioni di esistenza e unicità delle soluzioni di sistemi lineari (teorema di Rouché-Capelli).

7.1 Introduzione

L'algebra lineare è fondamentale per studiare matrici, sistemi lineari e trasformazioni geometriche. Questo capitolo esplora le matrici, i determinanti e la risoluzione dei sistemi.

7.2 Sistemi lineari e formalismo matriciale

Un sistema di m equazioni lineari in n incognite $\{x_1\}$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

può essere riscritto usando il formalismo matriciale come

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad , \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \ ,$$

avendo raccolto i coefficienti a_{ij} nella matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, una tabela di m righe e n colonne, le incognite x_j nella n-upla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e i coefficienti b_i nella m-upla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, organizzate in un *vettore colonna*. Il prodotto matrice-vettore colonna $\mathbf{Ax}$ rimane definito dall'equivalenza delle diverse espressioni dello stesso sistema lineare.

7.3 Matrici

Definizione. Una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ è una tabella 2-dimensionale di numeri reali con m righe e n colonne,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

7.3.1 Inteprepretazione del contenuto di una matrice

Spesso risulta utile intepretare una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ come una tabella di n colonne di m-tuple o *vettori colonna*, o come una tabella di m righe di n-tuple o *vettori riga*,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_{col,1} & \mathbf{a}_{col,2} & \dots & \mathbf{a}_{col,n} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}^T_{row,1} \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{a}^T_{row,m} \end{array} \right] .$$

In seguito si faranno cadere i pedici col e row per motivi di sintesi, usando il simbolo ^{T} per intendere un *vettore riga*, come vettore **trasposto** di un vettore colonna. Nel formalismo matriciale, un vettore colonna con m elementi viene quindi intepretato come una matrice $\in \mathbb{R}^{m,1}$ di m righe e una colonna; viceversa un vettore riga con n elementi una matrice $\in \mathbb{R}^{1,n}$ di una riga e n colonne.

7.3.2 Operazioni

- **Somma.** La somma è possibile tra due matrici con le stesse dimensioni $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$. La somma di due matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ è la matrice $\mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$ con componenti

  $$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ ,$$

  o più esplicitamente,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

- **Moltiplicazione per uno scalare.** La moltiplicazione di una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ per un numero reale $c \in \mathbf{R}$ è la matrice $c\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ con componenti

  $$(c\mathbf{A})_{ij} = c\, a_{ij} \ ,$$

  o più esplicitamente,

  $$cA = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & \dots & c \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c \cdot a_{m1} & \dots & c \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

- **Prodotto di matrici.** Il prodotto $\mathbf{AB}$ tra matrici è possibile tra due matrici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,p}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p,n}$, ed è la matrice $\mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m,n}$ con le componenti

  $$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{in} b_{nj} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_j \ .$$

  avendo usanto l'"*intepretazione dei componenti di una matrice in vettori riga e colonna*, per esprimere l'elemento ij della matrice $\mathbf{AB}$ come prodotto matriciale della i-esima riga di $\mathbf{A}$ con la j-esima colonna di $\mathbf{B}$.

  Osservazione. Non vale la **proprietà commutativa** per il prodotto di matrici. Per di più, in generale non è possibile formare il prodotto $\mathbf{BA}$, se $m \neq n$.

Example 6.3.1 (Non-commutatività del prodotto matriciale)

Date le matrici $\in \mathbf{R}^{2,2}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad , \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

i prodotti **AB** e **BA** valgono

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

7.3.3 Matrice come funzione lineare

Tramite il prodotto matrice vettore (colonna), una matrice $\mathbf{R}^{m,n}$ rappresenta la funzione lineare più generale $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, che prende un vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ come argomento e restituisce un vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \mathbb{A}\mathbf{x} \ .$$

Si lasciano dimostrare le proprietà di linearità di questa funzione come esercizio (*consiglio: utilizzare le* operazioni matriciali)

7.3.4 Immagine e nucleo

Immagine e nucleo sono due insiemi[1] sono due insiemi che caratterizzano le funzioni e quindi possono essere definiti anche per una matrice che rappresenta una funzione lineare.

Il **nucleo** di una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ è l'insieme dei vettori colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tali che $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}_m$,

$$\mathrm{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \, | \, \mathbf{Ax} = \mathbf{0}_m\} \ .$$

L'"**immagine** di una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ è l'insieme dei vettori colonna $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ per i quali esiste un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$,

$$\mathrm{I}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \, | \, \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \, | \, \mathbf{Ax} = \mathbf{y}\} \ .$$

todo fare riferimento alle definizioni per le funzioni, *immagine di una funzione*, *nucleo di una funzione*.

7.3.5 Determinante

Per una matrice quadrata $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ è possibile definire una grandezza scalare, definita **determinante**, il cui nome dovrebbe farne intuire la rilevanza: essa infatti riassume alcune caratteristiche della matrice e, tra le altre, determina un criterio di esistenza della matrice inversa e un criterio di esistenza e di unicità della soluzione di un sistema lineare, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

La definizione e una discussione completa del determinante di una matrice vanno ben oltre (**todo** *probabilmente*) lo scopo di questo materiale.

todo *Rapporto con immagine e nucleo*

todo *Espressione del determinante per matrici 2x2, 3x3; mettere in evidenza la comparsa del determinante nei metodi di soluzione sotto*

[1] Rango e nucleo non sono semplici insiemi, ma hanno qualche proprietà in più che li rende *spazi vettoriali*. Per quello che ci serve qui, possiamo considerarli insiemi.

7.4 Risoluzione di Sistemi

La soluzione dei sistemi lineari è una delle attività più frequenti nelle applicazioni di matematica, soprattutto negli algoritmi di calcolo numerico; non ci occuperemo qui dei metodi numerici di soluzione dei sistemi lineari, ma si discutono diversi approcci alla soluzione analitica «a manina» di sistemi lineari, utili per il calcolo analitico della soluzione esatta di sistemi lineari di dimensioni sufficientemente ridotte (3, salvo casi eccezionali…).

Come descritto dal *teorema di Rouché-Capelli*, esistono 3 possibili situazioni: il sistema lineare ha 1. una sola soluzione; 2. un numero infinito di soluzioni; 3. nessuna soluzione.

I metodi presentati sono tra di loro equivalenti, intendendo che portano alla stessa soluzione. **todo** *Equivalenti nel caso esista una soluzione unica. Danno le stesse informazioni anche nel caso esistano infinite soluzioni o non esistano soluzioni? Riguardo il rango e/o il nucleo…*

todo Collegamento a soluzione numerica di sistemi lineari, nel `$bbook$` sull"introduzione alla programmazione e al calcolo numerico

7.4.1 Metodo di sostituzione

Il metodo di sostituzione consiste nell'usare in successione un'equazione per ricavare un'incognita in funzione delle altre incognite, e sostituire l'espressione ricavata nelle altre successioni, per ottenere un sistema lineare con al dimensione ridotta di 1. Si continua così fino a ottenere un'equazione in un'incognita, immediata da risolvere. Successivamente si trovano i valori delle altre incognite in funzione delle incognite già calcolate. Se esiste una soluzione del problema, l'algoritmo descritto permette di calcolare la soluzione. **todo** *Altrimenti, in caso di esistenza di infinite soluzioni si arriva a un'identità* $0 = 0$*; in caso di nessuna soluzione si arriva a una contraddizione* $1 = 0$*.* **todo** *vedi esempi sotto*

Example 6.4.1 (Metodo di sostituzione per sistema quadrato determinato)

Si vuole risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di sostituzione, usando la prima equazione per esprimere x_1 in funzione delle altre incognite,

$$\begin{cases} E1: \ x_1 - x_3 = 1 & \quad \rightarrow \quad & x_1 = x_3 + 1 \\ E2: \ 2x_2 + x_3 = -1 \\ E3: \ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

si può sostituire l'espressione trovata nelle altre due equazioni per ottenere un sistema di 2 equazioni nelle due incognite $x_2.x_3$, e usare l'equazione $E2$ per esprimere x_3 in funzione di x_2

$$\begin{cases} E2: \ 2x_2 + x_3 = -1 \\ E3: \ 3(x_3 + 1) + x_2 - x_3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} E2: \ 2x_2 + x_3 = -1 & \quad \rightarrow \quad & x_3 = -1 - 2x_2 \\ E3: \ x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

e ottenere un'unica equazione lineare $E3$ per l'unica incognita x_2, della quale è possibile calcolare il valore,

$$E3: \ x_2 + 2(-1 - 2x_2) = 1 \quad \rightarrow \quad x_2 = -1 \ .$$

Una volta trovato il valore $x_2 = -1$, si «torna indietro» per calcolare $x_3 = -1 - 2x_2 = 1$ e $x_1 = x_3 + 1 = 2$. La soluzione del sistema quindi esiste, è unica ed è $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 1)$.

7.4.2 Metodo di eliminazione di Gauss

Il metodo di eliminazione di Gauss consiste nella combinazione lineare delle equazioni del sistema per ottenere una forma del sistema facilmente risolvibile, tipicamente una matrice dei coefficienti con forma triangolare.

Example 6.4.2 (Metodo di eliminazione di Gauss per sistema quadrato)

Si vuole risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

con il metodo di eliminazione di Gauss. E" comune (ma non obbligatorio, ognuno è libero di fare quello che gli pare, purché vengano seguiti procedimenti logici) applicare il metodo dopo aver riscritto il sistema con il fomralismo matriciale,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \ ,$$

e, sottintendendo il vettore delle incognite,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \ .$$

Vogliamo ottenere una forma triangolare della matrice **A**. La prima e la seconda riga soddisfano già questa struttura, mentre è necessario combinare le righe per annullare i primi 2 elementi della tera riga. Sottraendo la prima riga moltiplicata per 3, viene annullato il primo elemento

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \ ,$$

e successivamente sottraendo la seconda riga moltiplicata per $\frac{1}{2}$, viene annullato il secondo elemento,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right] \ .$$

Ottenuta la forma triangolare desiderata, si fa ricomparire il vettore delle incognite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \ ,$$

e si risolve il sistema triangolare partendo dall'ultima equazione

$$\frac{3}{2} x_3 = \frac{3}{2} \qquad \rightarrow \qquad x_3 = 1$$

a ritroso: questo ordine di soluzione permette di risolvere n equazioni che contengono una sola incognita per volta, dopo aver sostituito il valore delle incognite già trovate,

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 = -1 \qquad &\rightarrow \qquad x_2 = -1 \\ x_1 - x_3 = 1 \qquad &\rightarrow \qquad x_1 = 2 \end{aligned}$$

7.4.3 Metodo di Cramer

todo *Per quale motivo discuterlo? E" scomodo, non dà grandi informazioni in caso di assenza o numero infinito di soluzioni…*

7.5 Teorema di Rouché-Capelli

7.5.1 Interpretazione geometrica

Example 6.5.1 (Sistema quadrato determinato)

Example 6.5.2 (Sistema quadrato indeterminato)

Example 6.5.3 (Sistema quadrato sovradeterminato)

Example 6.5.4 (Sistema indeterminato)

7.6 Problemi

7.6.1 Matrici come funzione lineare

Exercise 6.6.1 (Matrici e scalatura)

Interpretando gli elementi di un vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ come le componenti cartesiane del vettore $\vec{x}$ in un piano, la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} ,$$

rappresenta una scalatura non isotropa (diversa lungo le diverse direzioni) delle componenti dei vettori di un fattore a in direzione x e di un fattore b in direzione y.

- Dimostrare questa frase, calcolando il prodotto $\mathbf{Ar}$ per il vettore colonna generico $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ contenente le componenti cartesiane del vettore $\vec{r}$ nel piano
- Dare una rappresentazione grafica nel piano
- Dimostrare che il determinante della matrice è uguale a ab, $|\mathbf{A}| = ab$
- Dimostrare che la trasformazione inversa $\mathbf{A}^{-1}$ esiste per $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, e vale $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$
- Discutere il caso in cui $a = b$, dove la scalatura è isotropa.
- Dimostrare che questa trasformazione rappresenta la riflessione rispetto all'origine nel caso in cui $a = b = -1$

Exercise 6.6.2 (Matrici e riflessioni)

Interpretando gli elementi di un vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ come le componenti cartesiane del vettore $\vec{x}$ in un piano, la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-2n_x^2 & -2n_x n_y \\ -2n_x n_y & 1-2n_y^2 \end{bmatrix} ,$$

rappresenta una riflessione di vettori del piano rispetto a una retta passante per l'origine e perpendicolare al vettore $\vec{n}$ con componenti n_x, n_y, $n_x^2 + n_y^2 = 1$.

- Dimostrare questa frase, calcolando il prodotto **Ar** per il vettore colonna generico $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ contenente le componenti cartesiane del vettore $\vec{r}$ nel piano
- Dare una rappresentazione grafica nel piano
- Dimostrare che il determinante della matrice è uguale a -1, $|\mathbf{A}| = -1$
- Dimostrare che la trasformazione inversa $\mathbf{A}^{-1}$ esiste ed è uguale alla trasformazione originale, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$

Exercise 6.6.3 (Matrici e rotazioni)

Interpretando gli elementi di un vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ come le componenti cartesiane del vettore $\vec{x}$ in un piano, la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} ,$$

rappresenta una rotazione dei vettori attorno all'origine di un angolo θ.

- Dimostrare questa frase, calcolando il prodotto **Ar** per il vettore colonna generico $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ contenente le componenti cartesiane del vettore $\vec{r}$ nel piano
- Dare una rappresentazione grafica nel piano
- Dimostrare che il determinante della matrice è uguale a 1, $|\mathbf{A}| = 1$
- Dimostrare che la trasformazione inversa $\mathbf{A}^{-1}$ esiste ed è uguale alla trasposta della trasformazione, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

todo Si può sostituire $\cos\theta = a$, $\sin\theta = b$ con $a^2 + b^2 = 1$

todo Dipendenza logica di questo esercizio dalle basi di *trigonometria*. Stabilire un ordine consigliato di accesso a questo `bbook`

Exercise 6.6.4 (Proiezione ortogonale lungo una direzione data)

Interpretando gli elementi di un vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ come le componenti cartesiane del vettore $\vec{x}$ in un piano, la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{n}^T\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y \\ n_x n_y & n_y^2 \end{bmatrix} ,$$

rappresenta una proiezione ortogonale dei punti del piano sulla retta passante per l'origine con direzione determinata dal vettore $\vec{n}$ con componenti n_x, n_y, $n_x^2 + n_y^2 = 1$.

- Dimostrare questa frase, calcolando il prodotto $\mathbf{A}\mathbf{r}$ per il vettore colonna generico $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ contenente le componenti cartesiane del vettore $\vec{r}$ nel piano
- Dare una rappresentazione grafica nel piano
- Dimostrare che il determinante della matrice è uguale a 0, $|\mathbf{A}| = 0$
- Dimostrare che l'immagine della trasformazione è formato dai vettori colonna $a\mathbf{n}$
- Dimostrare che il nucleo della trasformazione è formato dai vettori colonna $\mathbf{x}$ per i quali vale $\mathbf{x}^T\mathbf{a} = 0$

Exercise 6.6.5 (Proiezione ortogonale nella direzione perpendicolare a una direzione data)

Interpretando gli elementi di un vettore colonna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ come le componenti cartesiane del vettore $\vec{x}$ in un piano, la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{n}^T\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 - n_x^2 & -n_x n_y \\ -n_x n_y & 1 - n_y^2 \end{bmatrix} ,$$

rappresenta una proiezione ortogonale dei punti del piano sulla retta passante per l'origine e perpendicolare al vettore $\vec{n}$ con componenti n_x, n_y, $n_x^2 + n_y^2 = 1$.

- Dimostrare questa frase, calcolando il prodotto $\mathbf{A}\mathbf{r}$ per il vettore colonna generico $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ contenente le componenti cartesiane del vettore $\vec{r}$ nel piano
- Dare una rappresentazione grafica nel piano
- Dimostrare che il determinante della matrice è uguale a 0, $|\mathbf{A}| = 0$
- Dimostrare che l'immagine della trasformazione è formato dai vettori colonna $\mathbf{x}$ per i quali vale $\mathbf{x}^T\mathbf{a} = 0$
- Dimostrare che il nucleo della trasformazione è formato dai vettori colonna $a\mathbf{n}$

Exercise 6.6.6 (Scomposizione di una matrice - somma di parte simmetrica e antisimmetrica)

Ogni matrice può essere scritta come la somma di una parte simmetrica e una parte antisimmetrica.

Exercise 6.6.7 (Scomposizione di una matrice - ...)

7.6.2 Soluzione di sistemi lineari

Viene chiesto di stabilire se i seguenti problemi hanno soluzione, di calcolare le eventuali soluzioni, fornire una rappresentazione grafica del problema algebrico, e - per sistemi con uguale numero di equazioni ed incognite - calcolare il determinante delle matrici del sistema lineare.

1.
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{3}{2}x + y = 5 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 2y = 11 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 3y + z = 3 \end{cases}$$

12.
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

13.
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x - 2y + 2z = 10 \\ 3x - y + 3z = -5 \end{cases}$$

15.

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$$

16.

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x-4y=-2 \end{cases}$$

17.

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \\ x+3y=4 \end{cases}$$

18.

$$\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ -x+y+2z=4 \end{cases}$$

19.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+z=4 \\ 2x+y-z=7 \end{cases}$$

20.

$$\begin{cases} x+y+3z=6 \\ 2x+4y+6z=12 \\ -x-2y-3z=-6 \end{cases}$$

Viene chiesto di ripetere la discussione degli esercizi precedenti, al variare dei parametri nel sistemi.

1.

$$\begin{cases} x+ky=2 \\ x-2y=1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x+y=b \\ ax+y=2 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x-y+mz=3 \\ mx+2y+z=4 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} kx+y=4 \\ 2x+ky=3p \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} px + y = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ y + qz = p \end{cases}$$

todo *Qualche esercizio con disequazioni*

---

basics

24 mar 2025

0 min read

CAPITOLO 8

Algebra vettoriale

- Definizione di spazio vettoriale: struttura algebrica e proprietà delle operazioni
- Definizione di combinazione lineare, vettori linearmente indipendenti
- Definizione di base di uno spazio vettoriale
- Spazio vettoriale euclideo:
  - prodotto scalare e norma
  - base ortonormale
  - definizione del prodotto vettoriale

basics

24 mar 2025

2 min read

8.1 Prime definizioni

8.1.1 Definizione di spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale è una struttura algebrica formata da:

- un insieme V, i cui elementi sono chiamati **vettori**
- un campo K (di solito quello dei numeri reali $\mathbb{R}$ o complessi $\mathbb{C}$), i cui elementi sono chiamati **scalari**
- due operazioni chiuse rispetto all'insieme V chiamate:
  - somma vettoriale
  - moltiplicazione per uno scalare, che soddisfano determinate proprietà che verranno elencate in seguito.

Un"**operazione** è **chiusa** rispetto a un'insieme, se il risultato delle operazioni è un elemento dell'insieme.

Nel seguito del capitolo verranno considerati solo campi vettoriali definiti sui numeri reali, per i quali $K = \mathbb{R}$.

Operazioni sui vettori: definizione di spazio vettoriale

- La **somma** tra due vettori **v**, **w** $\in V$ è il vettore

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$$

- La **moltiplicazione per uno scalare** di un vettore $\mathbf{v} \in V$ per uno scalare $\alpha \in K$ è il vettore

$$\alpha\mathbf{v} \in V$$

Proprietà delle operazioni

- proprietà commutativa della somma

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

- proprietà associativa della somma

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$$

- esistenza dell'elemento neutro della somma

$$\exists \mathbf{0}_V \in V \qquad s.t. \qquad \mathbf{u} + \mathbf{0}_V = \mathbf{u} \qquad \forall \mathbf{u} \in V$$

- esistenza dell'elemento inverso della somma

$$\forall \mathbf{u} \in V \ \exists \mathbf{u}' \in V \qquad s.t. \qquad \mathbf{u} + \mathbf{u}' = \mathbf{0}$$

- proprietà associativa del prodotto scalare

$$(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}) \qquad \forall \alpha, \beta \in K, \ \mathbf{u} \in V$$

- esistenza dell'elemento neutro della moltiplicazione per uno scalare

$$\exists 1 \in K \qquad s.t. \qquad 1\,\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in V$$

- proprietà distributiva della moltiplicazione per uno scalare

$$(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$$

Esempi

Esempio 1 - n-upla di numeri reali ordinati. Gli elementi $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ formano uno spazio vettoriale sui numeri reali, con le operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare con la seguenti definizioni:

- somma:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, \dots, u_N) + (v_1, v_2, \dots, v_N) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_N + v_N)$$

- moltiplicazione per uno scalare:

$$\alpha \mathbf{u} = \alpha(u_1, u_2, \dots, u_N) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_N)$$

Esempio 2 - vettori in uno spazio euclideo. Fissato un punto O in uno spazio euclideo (**todo** *riferimenti?*), si può associare a ogni punto P nello spazio il segmento orientato $\overrightarrow{OP}$. L'insieme dei segmenti orientati associati a ogni punto dello spazio forma uno spazio vettoriale con le operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare con le seguenti definizioni:

- somma: tramite il metodo del parallelogramma **todo**
- moltiplicazione per uno scalare: **todo**

Esempio 3 - spazio vettoriale delle traslazioni. In uno spazio euclideo, l'insieme delle traslazioni forma uno spazio vettoriale.

todo

Esempio 4 - polinomi di grado minore o uguale a n L'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a n,

$$\mathbf{u} = u_n x^n + u_{n-1} x^{n-1} + \dots u_1 x + u_0 \ ,$$

forma uno spazio vettoriale con le usuali definizioni di somma e moltiplicazione per uno scalare valide per i polinomi.

8.1.2 Base di uno spazio vettoriale

Combinazione lineare. Una combinazione lineare di D vettori $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1:D}$ è data dalla somma

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_D \mathbf{u}_D \ ,$$

dove i coefficienti scalari α_i vengono definiti coefficienti della combinazione lineare.

Vettori linearmente indipendenti. Un insieme di vettori $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1:D}$ è linearmente indipendente se non è possibile esprimere uno di questi vettori in funzione degli altri. Un'altra definizione equivalente definisce un insieme di vettori linearmente indipendente se vale

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_D \mathbf{u}_D = \mathbf{0} \qquad \rightarrow \qquad \alpha_1 = \dots = \alpha_D = 0 \ ,$$

cioè una combinazione lineare di questi vettori è uguale al vettore nullo solo se tutti i coefficienti della combinazione lineare sono nulli.

Base di uno spazio vettoriale. In uno spazio vettoriale, ogni vettore può essere rappresentato come una combinazione lineare di un insieme di vettori dello spazio, opportunamente scelti. Il numero minimo di questi vettori è definita come dimensione dello spazio vettoriale.

8.2 Spazio vettoriale euclideo

Definizione di uno spazio vettoriale euclideo.

todo

8.2.1 Prodotto interno e distanza

Uno spazio vettoriale euclideo può essere equipaggiato con un'operazione bilineare, simmetrica (su campi reali), e semi-definita positiva, definita **prodotto interno**,

$$\cdot : \ V \times V \to \mathbb{R} \ ,$$

che permette di definire la norma di un vettore e l'angolo tra due vettori

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &:= |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta_{\vec{u}\vec{v}} \\ |\vec{v}| &= \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \end{aligned}$$

E" semplice verificare che la definizione di un prodotto interno induce la definizione di una norma. Infatti, calcolando il prodotto interno tra un vettore $\vec{v}$ e se stesso, l'angolo compreso è l'angolo nullo, $\theta_{\vec{v}\vec{v}} = 0$, con $\cos \theta_{\vec{u}\vec{u}} = 0$.

Il prodotto scalare risulta utile anche nella definizione di operazioni di **proiezione**. Ad esempio, la proiezione ortogonale di un vettore $\vec{v}$ lungo la direzione identificata dal vettore unitario $\hat{u}$ è il vettore

$$\vec{v}_{\parallel \hat{u}} = \hat{u} \left(\hat{u} \cdot \vec{v} \right) \ ,$$

che ha la stessa direzione di $\hat{u}$ e modulo uguale alla proiezione ortogonale di $\vec{v}$ su di esso, $\hat{u} \cdot \vec{v}$. La proiezione del vettore $\vec{v}$ in direzione ortogonale a quella indicata da $\hat{u}$ si può ottenere per differenza e quindi

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\perp \hat{u}} &= \vec{v} - \vec{v}_{\parallel \hat{u}} = \\ &= \vec{v} - \hat{u} \left(\hat{u} \cdot \vec{v} \right) = \\ &= \left[\hat{I} - \hat{u} \otimes \hat{u} \right] \cdot \vec{v} \ . \end{aligned}$$

dove ci si è concessi la licenza poetica di introdurre nell'ultima riga il tensore di proiezione ortogonale in direzione perpendicolare a $\hat{u}$,

$$\mathbb{P}_{\perp \hat{u}} = \mathbb{I} - \hat{u} \otimes \hat{u} \ ,$$

rappresentazione astratta (vettoriale/tensoriale, che non dipende dalla scelta di una base vettoriale) della trasformazione già mostrata in algebra lineare **todo** *aggiungere riferimento agli esercizi di algebra lineare sulle proiezioni*

todo Discutere rappresentazione intrinseca/astratta/vettoriale e per coordinate.

8.2.2 Prodotto vettoriale

Per lo spazio euclideo E^3 è possibile definire anche un'operazione bilineare, antisimmetrica, definita **prodotto vettoriale**,

$$\times : \ V \times V \to V \ ,$$

in modo tale da avere

$$\vec{u} \times \vec{v} = \hat{k} |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta_{\vec{u}\vec{v}} \ ,$$

con il vettore $\hat{k}$ ortogonale a entrambi i vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ nella direzione definita dalla regola della mano destra **todo**

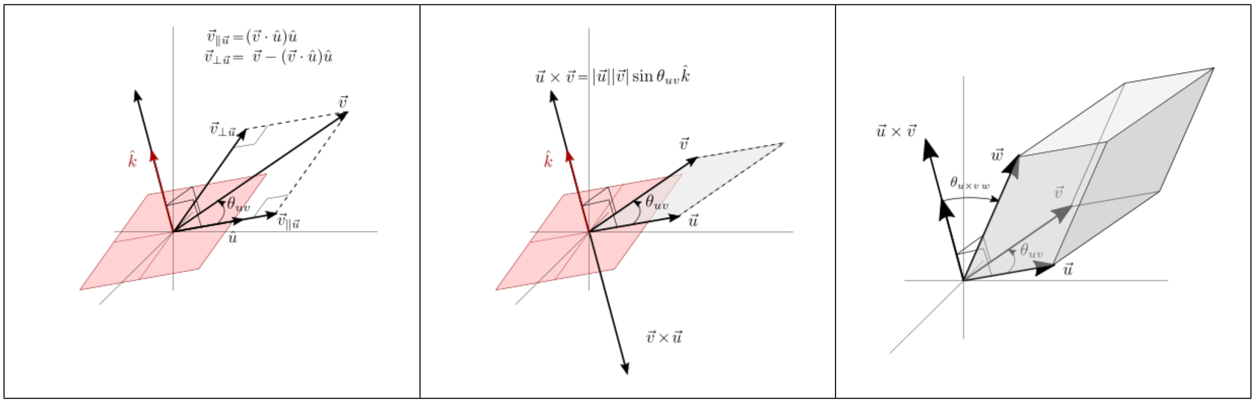
- **todo.** E in E^2? A volte è comodo assumere che esista una dimensione aggiuntiva, e che quindi ci si trovi in E^3. In questo caso, il prodotto vettore di due vettori di E^2 è sempre ortogonale ad esso.
- **todo.** Il prodotto vettoriale può essere visto come un caso particolare di un'operazione «strana» chiamata prodotto esterno

8.2.3 Prodotto misto

Nello spazio euclideo E^3 si può definire il prodotto misto tra 3 vettori, come il prodotto scalare di uno di questi e il prodotto vettore degli altri due

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} \ .$$

Il prodotto misto ha un significato geometrico evidente: il valore del proodotto misto di tre vettori è uguale al volume del parallelepipedo costruito con i tre vettori come spigolo.



8.2.4 Base cartesiana

In uno spazio vettoriale euclideo, E^3, è possibile definire una base carteisana, $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, come un'insieme di vettori di norma unitaria e reciprocamente ortogonali,

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$$
$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0$$

e usando il prodotto vettore per definire l'orientazione dei 3 vettori,

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$
$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$$
$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$

Un vettore di uno spazio vettoriale può essere sempre scritto come combinazione lineare degli elementi di una base vettoriale,

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \ .$$

Usando una base cartesiana, è immediato ricavare le coordinate cartesiane di un vettore $\vec{v}$ come il prodotto interno del vettore $\vec{v}$ per i vettori della base,

$$v_x = \hat{x} \cdot \vec{v}$$
$$v_y = \hat{y} \cdot \vec{v}$$
$$v_z = \hat{z} \cdot \vec{v}$$

Usando una base cartesiana, si possono scrivere:

- la **somma di vettori** e la **moltiplicazione per uno scalare** in componenti,

$$\begin{aligned}\vec{v}+\vec{w} &= (v_x\hat{x}+v_y\hat{y}+v_z\hat{z})+(w_x\hat{x}+w_y\hat{y}+w_z\hat{z}) = \\ &= (v_x+w_x)\hat{x}+(v_y+w_y)\hat{y}+(v_z+w_z)\hat{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a\vec{v} &= a(v_x\hat{x}+v_y\hat{y}+v_z\hat{z}) = \\ &= (av_x)\hat{x}+(av_y)\hat{y}+(av_z)\hat{z}\end{aligned}$$

- il **prodotto interno** in termini delle componenti cartesiane dei vettori

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\vec{w} &= (v_x\hat{x}+v_y\hat{y}+v_z\hat{z})\cdot(w_x\hat{x}+w_y\hat{y}+w_z\hat{z}) = \\ &= v_xw_x+v_yw_y+v_zw_z\end{aligned}$$

- il **prodotto vettoriale**, in termini del determinante formale

$$\begin{aligned}\vec{v}\times\vec{w} &= (v_x\hat{x}+v_y\hat{y}+v_z\hat{z})\times(w_x\hat{x}+w_y\hat{y}+w_z\hat{z}) = \\ &= (v_yw_z-v_zw_y)\hat{x}+(v_zw_x-v_xw_z)\hat{y}+(v_xw_y-v_yw_x)\hat{z} = \\ &= \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}\end{aligned}$$

CAPITOLO 9

Algebra complessa

La discussione dell'"*algebra complessa* viene rimandata alla sezione del *pre-calcolo*.

CAPITOLO 10

Algebra di insiemi

La discussione dell'"*algebra di insiemi* viene rimandata alla sezione dell'"*insiemistica*.

Parte IV

Geometria analitica

basics

24 mar 2025

1 min read

CAPITOLO 11

Introduzione alla geometria analitica

La geometria analitica…

Argomenti del capitolo

Spazi euclidei. Viene data una formalizzazione del concetto di spazio euclideo E^d, un modello dello spazio come percepito da noi nella nostra esperienza quotidiana. Negli spazi euclidei è possibile applicare senza troppe complicazioni - e non diremo altro - gli strumenti dell'"*algebra vettoriale*, usati qui per introdurre le coordinate cartesiane, e la misura di distanzee angoli in spazi euclidei.

Geometria nel piano - spazio euclideo 2D, E^2.

- *Sistemi di coordinate*
- *Curve nel piano*
  - *Rette*
  - *Coniche*

Geometria nello spazio euclideo 3D, E^3.

- *Sistemi di coordinate*
- *Piani nello spazio*
- *Curve nello spazio*
  - *Rette*
- *Coniche come sezione di un cono*

...

- Nel 1637 Cartesio formalizzò le basi della geometria analitica, o geometria cartesiana, nel libro *Geometria*, introdotto dal suo più famoso *Discorso sul metodo*.
- Il lavoro di Cartesio fornisce strumenti fondamentali usati nella seconda metà del XVII secolo da Newton e Leibniz per sviluppare il *calcolo infinitesimale*, e contemporaneamente la meccanica razionale di Newton.
- La geometria analitica si occupa dello studio delle figure geometriche nello spazio tramite l'uso di **sistemi di coordinate**: la scelta dei sistemi di coordinate può spesso essere arbitaria, spesso guidata da criteri di «comodità»; i risultati sono indipendenti dalla scelta.
- L'utilizzo di un sistema di coordinate per la descrizione dello spazio produce un legame tra la **geometria** e l'"**algebra**:
  - da un lato, le entità geometriche possono essere rappresentate con funzioni, equazioni e/o disequazioni che coinvolgono le coordinate;
  - dall'altro, ai problemi algebrici si può dare un'interpretazione geometrica;

CAPITOLO 12

Spazio euclideo

Approccio storico-applicativo

- *Elementi di Euclide*: formulazione assiomatica della geometria, partendo dalla definizione di concetti primitivi e postulati (5), viene sviluppata la teoria in teoremi e corollari, tramite un procedimento deduttivo.
- Qualitativamente, la geometria di Euclide corrisponde alla concezione quotidiana dello spazio nel quale viviamo. Lo spazio euclideo fornisce il modello di spazio per la meccanica di Newton, formulata nel XVII secolo, e che rimane un ottimo modello ampiamente usato tutt'oggi per l'evoluzione di sistemi con dimensioni caratteristiche sufficientemente maggiori della scala atomica, e velocità caratteristiche sufficientemente minori della velocità della luce.
- Una definizione più moderna di uno spazio euclideo si basa sulle traslazioni (**todo** citare Bowen, *Introduction to tensors and vectors*). Sia E un insieme di elementi, definiti **punti**, e V lo *spazio vettoriale delle traslazioni*, E viene definito uno spazio euclideo se esiste una funzione $f : E \times E \rightarrow V$ che associa a due punti dell'insieme E uno e un solo vettore traslazione $v \in V$ tale che
  1. $f(x, y) = f(x, z) + f(z, y)$ per ogni $x, y, z \in E$
  2. per $\forall x \in E$, $v \in V$, $\exists!\, y \in E$ tale che $f(x, y) = v$
- **todo** Dato uno spazio euclideo, si può usare un punto O chiamato **origine**, per definire uno spazio vettoriale associando ogni punto P dello spazio euclideo E al vettore traslazione $\vec{v} = P - O \in V$ **todo** differenza tra spazi vettoriali e spazi affini
- Seguendo l'approccio di *Cartesio*, i punti di uno spazio possono essere rappresentati da un **sistema di coordinate** (**todo** coordinate: funzioni scalari definite nello spazio). *A volte non si riesce a rappresentare tutto lo spazio con un solo insieme di coordinate, ma servono più carte di coordinate, che si sovrappongano in alcune regioni, per poter ricavare una transizione tra due mappe differenti*. Il numero di coordinate necessario e sufficiente a rappresentare tutti i punti dello spazio coincide con la **dimensione** dello spazio. In questa maniera, ogni punto x in uno spazio n-dimensionale, *o in un suo sottoinsieme*, può essere identificato dal valore di n funzioni scalari definite nello spazio, definite coordinate.

$$x(q^1, q^2, \ldots, q^n) \ .$$

- Tra le infinite scelte possibili di un sistema di coordinate, esistono alcuni sistemi particolari, i sistemi di **coordinate cartesiane todo** definire le coordinate cartesiane associandole alle traslazioni $\{\hat{e}_k\}_{k=1:n}$

- Tra i sistemi di coordinate cartesiane, i sistemi di **coordinate cartesiane ortonormali** sono associati a traslazioni unitarie in direzioni ortogonali tra di loro. Usando un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, è possibile definire uno spazio euclideo come uno spazio in cui sono valide le espressioni:
  - il prodotto interno:

    $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_k u^k v^k$$

  - la norma di un vettore (indotta dal prodotto interno), o della distanza tra due punti che definiscono il vettore $\vec{v}$

    $$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \sum_k u^k u^k \ ,$$

    ossia si può usare il **teorema di Pitagora** per il calcolo delle distanze.
- **todo** cenni a spazi/geometrie non euclidee: esempi, e criteri «avanzati» per la definizione (basati su curvatura, geodesiche,…), e conseguenze,…

basics

24 mar 2025

1 min read

CAPITOLO 13

Geometria analitica nel piano

La geometria analitica nel piano si occupa della descrizione dello spazio bidimensionale euclideo e delle entità geometriche in esso, grazie all'uso di sistemi di coordinate (q^1, q^2).

- **Sistemi di coordinate, e punti nello spazio.** Vengono presentati:
  - alcuni sistemi di coordinate che risulteranno utili nello studio della geometria analitica nel piano,
  - le regole di trasformazione tra sistemi di coordinate
  - le trasformazioni degli enti geometrici; ad esempio: traslazioni, rotazioni, riflessioni,…
- **Angoli e distanze.** Viene definita la struttura di uno spazio euclideo tramite la definizione degli angoli e delle distanze usando sistemi di coordinate cartesiane ortonormali, e le definizioni di prodotto interno (**todo** e prodotto vettoriale?).
- **Curve.** Vengono definite le curve nel piano, come relazioni tra le coordinate di un sistema di coordinate. **todo** *l'equazione di una curva rappresenta un tra la geometria e l'algebra tipico della geometria analitica.* Vengono poi studiate alcune curve particolari:
  - **Rette**:
    - equazione
    - posizione relativa punto-retta, distanza punto-retta, posizione relativa retta-retta
  - **Coniche**:
    - introduzione: …motivazione della loro importanza (gravitazione, ottica,…)
    - def, equazioni e caratteristiche con un'oppportuna scelta del sistema di coordinate; successivamente traslazione e rotazione
    - …

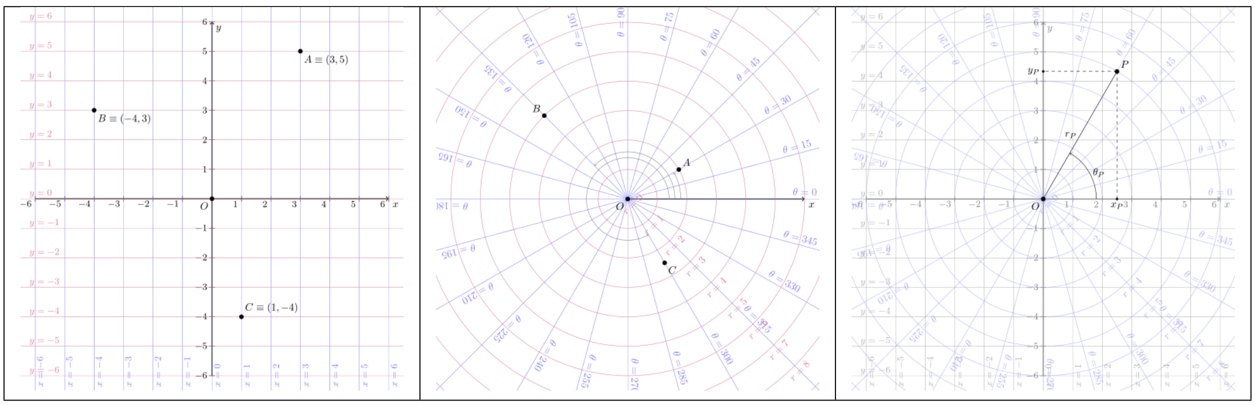
13.1 Sistemi di coordinate

13.1.1 Esempi

Sistema di coordinate cartesiane ortonormale. (x, y)

Sistema di coordinate polari. (r, θ). La legge di trasformazione delle coordinate tra un sistema di coordinate cartesiane ortonormale e un sistema di coordinate polari, con la stessa origine e l'asse x come direzione di riferimento per la misura dell'angolo θ è

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \ . \end{cases}$$



todo. Descrivere immagine

13.1.2 Trasformazione di coordinate

Vengono discusse alcune leggi di trasformazione tra le coordinate di diversi sistemi di coordinate.

Traslazione dell'origine di due sistemi cartesiani con assi allineati.

$$\begin{cases} x' = x - x_{O'} \\ y' = x - y_{O'} \end{cases}$$

$$\underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_{O'}$$

Rotazione degli assi di due sistemi cartesiani con stessa origine.

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$$\underline{x}' = R\underline{x}$$

Traslazione dell'origine e rotazione degli assi di due sistemi di coordinate cartesiane.

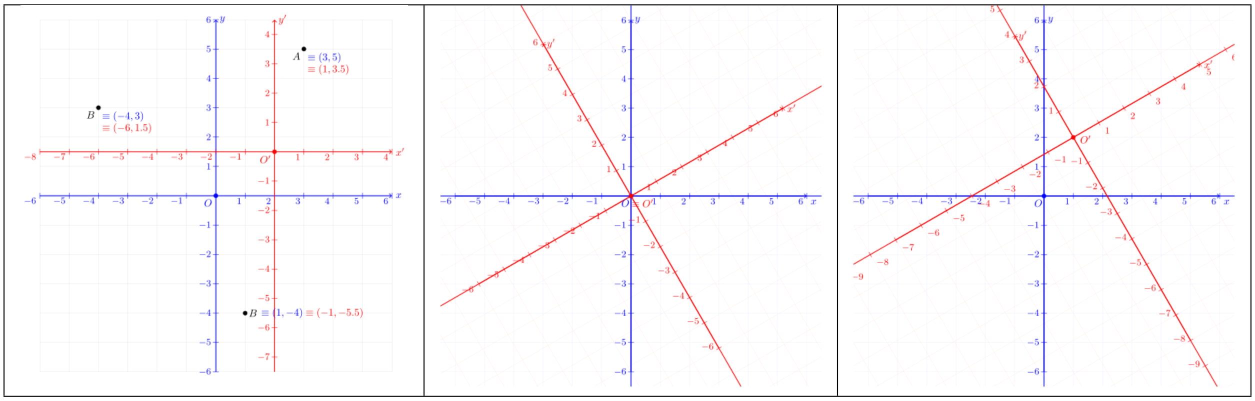
$$x \rightarrow T \rightarrow x' \rightarrow R \rightarrow x''$$

$$\begin{aligned} \underline{x}' &= \underline{x} - \underline{x}_{O'} \\ \underline{x}'' &= R\underline{x}' = R\left(\underline{x} - \underline{x}_{O'}\right) \end{aligned}$$

$$x \to R \to x' \to T \to x''$$

$$\underline{x}' = R\,\underline{x}$$

$$\underline{x}'' = \underline{x}' - \underline{x}'_{O''} = R\,\underline{x} - \underline{x}'_{O''}$$



todo. Descrivere immagine **Altri esempi di coordinate e trasformazioni di coordinate.** **todo.** come esercizio?

13.2 Distanze e angoli

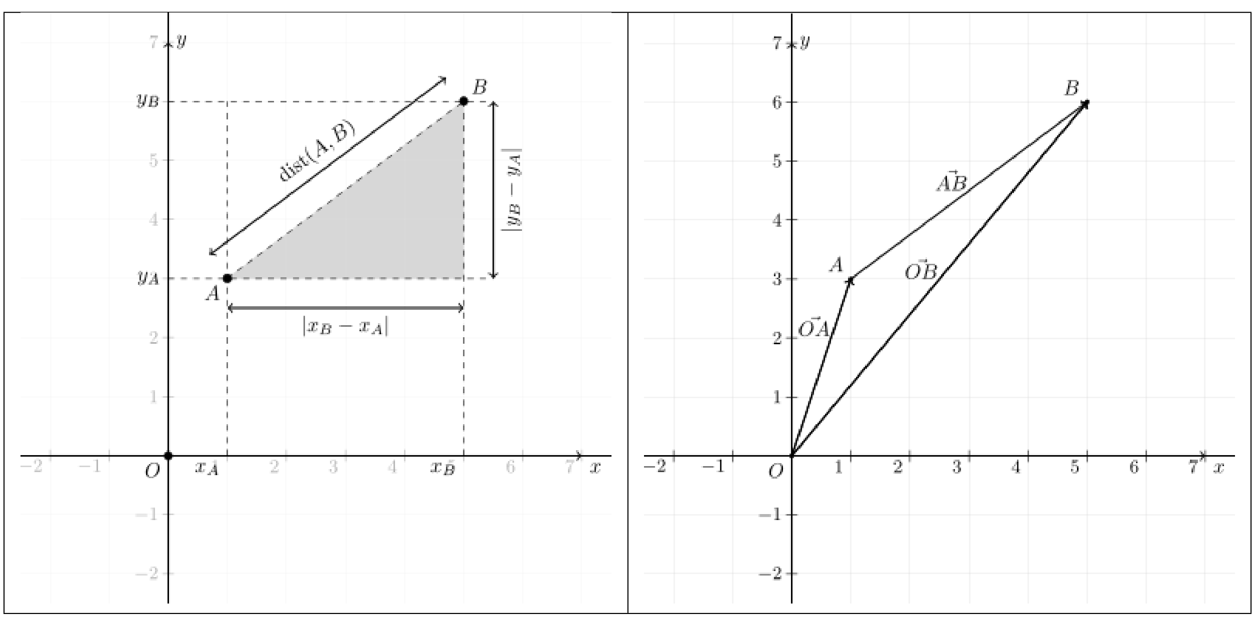
13.2.1 Distanza tra punti

Usando un sistema di coordinate cartesiane, la distanza tra due punti nel piano viene calcolata usando il teorema di Pitagora ,

$$d_{12} = |P_2 - P_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

In maniera equivalente viene il modulo (o lunghezza) di un vettore $\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}$,

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,.$$



13.3 Curve nel piano

Una curva nello spazio euclideo E^2, nel piano, è un luogo dei punti del piano che possono essere identificati da una relazione tra le coordinate di un sistema di coordinate.

Esempi. todo. grafici

13.3.1 Rappresentazioni di una curva

Dato un sistema di coordinate (q^1, q^2) che descrive il piano, una curva γ può essere rappresentata in diverse maniere:

Rappresentazione esplicita.

$$\gamma : \ q^2 = f(q^1)$$

todo. limiti di questa rappresentazione

Rappresentazione implicita.

$$\gamma : \ F(q^1, q^2) = 0$$

todo. limiti di questa rappresentazione

Rappresentazione parametrica.

$$\gamma(s) : \ \begin{cases} q^1 = f^1(s) \\ q^2 = f^2(s) \end{cases}$$

todo *figura*

13.3.2 Appartenenza di un punto a una curva

Dato un sistema di coordinate (q^1, q^2), un punto P identificato dalle coordinate (q^1_P, q^2_P) appartiene a una curva γ se le sue coordinate soddisfano l'equazione della curva:

- se la curva è definita in forma esplicita, allora $q^2_P = f(q^1_P)$
- se la curva è definita in forma implicita, allora $F(q^1_P, q^2_P) = 0$
- se la curva è definita in forma parametrica, allora esiste un valore del parametro $s = s_P$ tale che $q^1_P = f^1(s_P)$ e $q^2_P = f^2(s_P)$

13.3.3 Interesezione di curve

Dato un sistema di coordinate (q^1, q^2), un punto P è un punto di intersezione di due curve γ_1, γ_2 se le sue coordinate soddisfano sia l'equazione della curva γ_1, sia l'equazione della curva γ_2

13.3.4 Interpretazione grafica di equazioni, sistemi di equazioni e disequazioni

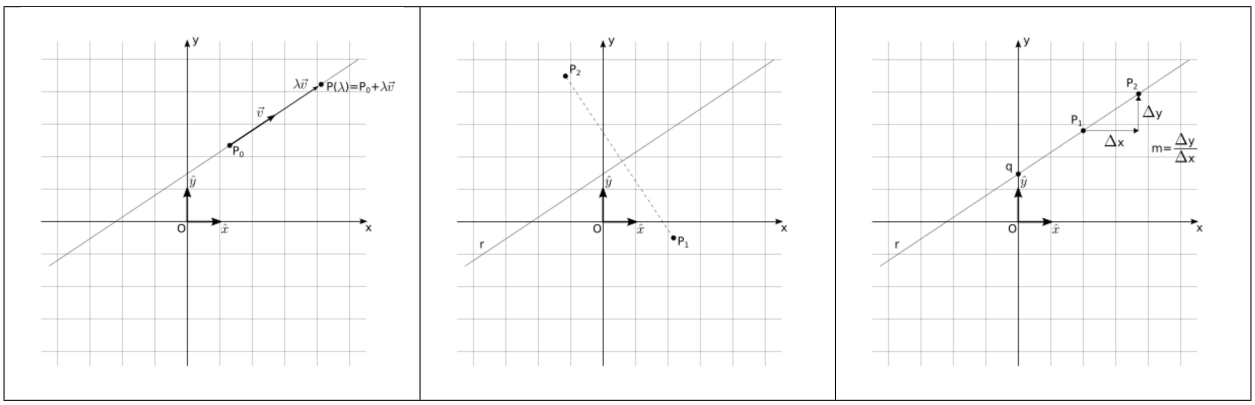
…

13.4 Rette nel piano

Per Euclide, il concetto di retta è un ente geometrico fondamentale della geometria, che rappresenta il percorso «più diretto» tra due punti distinti. Ad esempio, è l'idealizzazione di spessore nullo e di lunghezza infinita, prolungata oltre gli estremi, del segmento che si otterrebbe in un'esperienza comune tendendo un filo di lana tra due punti nello spazio senza ostacoli.

Per trovare l'equazione di una retta, si possono usare delle definizione equivalenti.

13.4.1 Definizioni ed equazione



Definizione. 1 - Passaggio per un punto e direzione. Usando gli strumenti dell'algebra vettoriale in uno spazio euclideo, i punti di una retta passante per un punto P_0 con direzione identificata dal vettore $\vec{v}$ possono essere rappresentati dall"**equazione parametrica**,

$$P = P_0 + \lambda \vec{v} \, .$$

Questa relazione può essere riscritta usando un sistema di coordinate cartesiane, con vettori della base $\{\hat{x}, \hat{y}\}$

$$r: \begin{cases} x_P(\lambda) = x_{P_0} + \lambda \, v_x \\ y_P(\lambda) = y_{P_0} + \lambda \, v_y \, , \end{cases}$$

avendo indicato con (x_P, y_P) le coordinate cartesiane di un punto generico P della retta, con (x_{P_0}, y_{P_0}) le coordinate del punto P_0 e con v_x, v_y le componenti cartesiane del vettore euclide $\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}$, riferite al sistema di coorinate cartesiano scelto.

Definizione 2 - Luogo dei punti equidistante da due punti distinti dati. Una retta è il luogo geometrico dei punti P equidistanti da due punti distinti nel piano, P_1, P_2,

$$|P - P_1| = |P - P_2|$$

Usando un sistema di coordinate cartesiane per identificare i punti, $P_1 \equiv (x_1, y_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2)$, $P \equiv (x, y)$ per calcolare (il quadrato del)le distanze,

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$
$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2$$

semplificando i termini x^2, y^2, e raccogliendo mettendo in evidenza le coordinate x, y, si ottiene una rappresentazione implicita della retta,

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y-x_1^2-y_1^2-x_2^2-y_2^2=0\ ,$$

che può essere riscritta in generale nella **forma esplicita**,

$$a\,x+b\,y+c=0\ ,$$

con ovvio significato dei coefficienti a, b, c, e a, b non contemporaneamente nulli (altrimenti rimarrebbe l'identità $0=0$, corrispondente alla condizione $a=x_2-x_1=0$, $b=y_2-y_1=0$, corrispondente ai due punti $P_1\equiv P_2$ coinvidenti).

Casi particolari: rette paralleli agli assi. Una retta parallela all'asse x ha l'espressione $b\,y+c=0$, con $a=0$; una retta parallela all'asse y ha l'espressione $a\,x+c=0$, con $b=0$.

Definizione 3 - intercetta con asse y **e pendenza.** Una retta può essere definita tramite il suo punto di intersezione con l'asse y e la sua pendenza, intesa come il rapporto tra le coordinate di due suoi punti, $m:=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, **se la retta non è parallela all'asse** y.

Se la retta **non è parallela all'asse** y rappresenta il grafico di una funzione (**todo** aggiungere riferimento), il coefficiente $b\neq 0$, e si può esplicitare la coordinata y partendo dall'equazione in forma implicita,

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}=m\,x+q\ ,$$

per ottenere l'equazione della retta in **forma esplicita**.

13.4.2 Posizioni reciproche

Posizione reciproca di punto e retta

Un punto P o appartiene o non appartiene a una retta r. Se appartiene alla curva, la distanza tra punto e retta è nulla; se non appartiene alla curva, la distanza tra punto e retta è positiva e può essere calcolata come mostrato nella sezione *Distanza punto-retta*.

Punto appartenente alla retta. Una retta r passa per un punto P assegnato se le coordinate del punto P soddisfano le equazioni che descrivono la retta.

Posizione reciproca di rette

Due rette nel piano possono essere:

- coincidenti: hanno tutti i punti in comune
- parallele: non hanno nessun punto in comune
- incidenti: si intersecano e la loro intersezione è un punto

Rette coincidenti

Due rette sono coincidenti se hanno un punto in comune e hanno la stessa direzione. In geometria analitica, due rette sono coincidenti se sono rappresentate dalla stessa equazione.

Usando la forma parametrica, due rette sono coincidenti se è possibile scrivere le loro equazioni

$$\begin{aligned} r_1:\ & P_1(\lambda_1)=P_{1,0}+\lambda_1\,\vec{v}_1 \\ r_2:\ & P_2(\lambda_2)=P_{2,0}+\lambda_2\,\vec{v}_2 \end{aligned}$$

con

$$\begin{cases} P_{1,0} = P_{2,0} & \text{(punto in comune)} \\ \vec{v}_1 \propto \vec{v}_2 & \text{(stessa direzione)} \end{cases}$$

Usando la forma esplicita, due rette coincidenti (non paralleli all'asse y) hanno la stessa intersezione con l'asse y e la stessa pendenza

$$\begin{cases} q_1 = q_2 & \text{(interesezione con asse } y \text{ in comune)} \\ m_1 = m_2 & \text{(stessa pendenza/direzione)} \end{cases}$$

Usando la forma implicita, due rette sono coincienti se i coefficienti di una retta sono multipli dei coefficienti dell'altra retta,

$$r_2 : 0 = \ a_2\, x + b_2\, y + c_2 = \alpha(a_1\, x + b_1\, y + c_1)\ ,$$

in modo tale da rappresentare la stessa equazione, per $\alpha = 0$.

Rette parallele nel piano

Due rette sono parallele se hanno la stessa direzione. Questa condizione può essere definita usando l'equazione parametrica delle rette,

$$\vec{v}_1 \propto \vec{v}_2\ ,$$

usando l'equazione in forma implicita,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}\ , \text{(con } b_i \neq 0\text{...)}$$

o usando l'equazione in forma esplicita,

$$m_1 = m_2\ .$$

Rette incidenti

Nel piano, se due rette non sono parallele allora sono incidenti, cioè hanno un punto in comune.

Rette incidenti perpendicolari

In geometria euclidea, due rette sono perpendicolari tra di loro se dividono il piano comune nel quale giacciono in 4 angoli retti. Questa condizione può essere definita usando l'equazione delle rette in forma parametrica,

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0\ ,$$

ricordandosi le proprietà del *prodotto interno in spazi euclidei*, e che cos $\frac{\pi}{2} = 0$. Usando l'equazione in forma implicita,

$$a_2\, b_1 = -a_1\, b_2\ ,$$

o usando l'equazione in forma esplicita (nel caso le due rette non siano parallele a un asse),

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

13.4.3 Distanza punto-retta

La distanza di un punto A da una retta $r: \ P(\lambda) = P_0 + \lambda \vec{v}$ può essere calcolato in diverse maniere:

- calcolando il valore minimo della distanza tra il punto A dato e i punti $P(\lambda)$ della retta

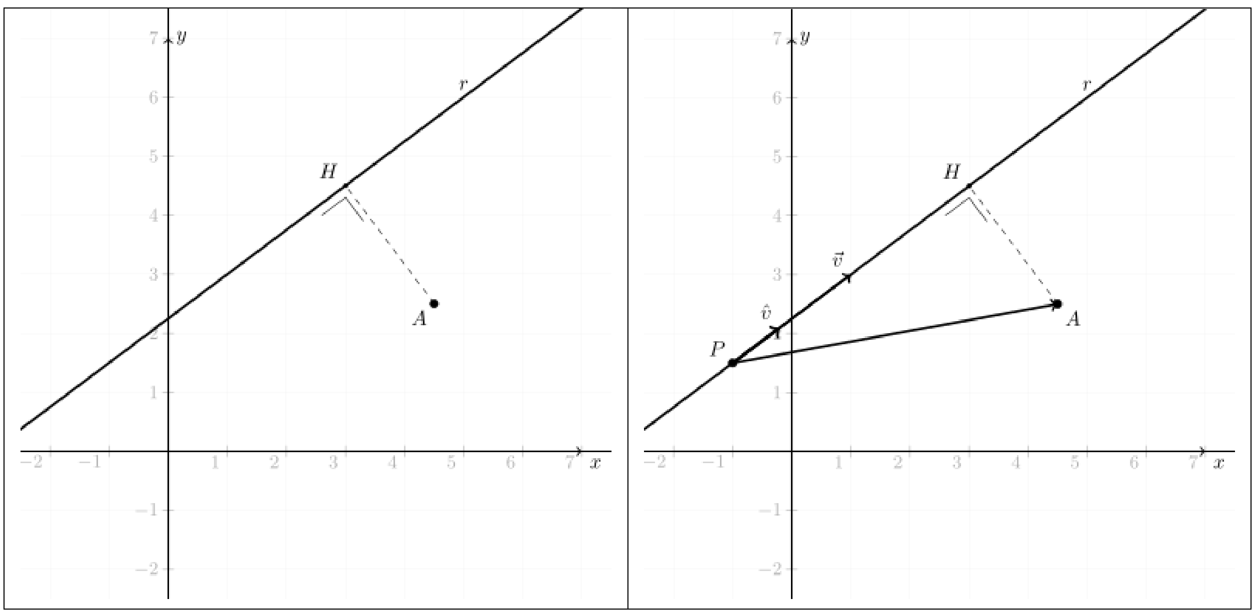
$$\min_{P \in r} |A - P|$$

- trovando la retta $r_{\perp}$ perpendicolare a r e passante per Q; trovando il punto P^* intersezione tra le due rette r, $r_{\perp}$, $P^* = r \cap r_{\perp}$; calcolando la distanza punto-punto tra A e P^*

  … **todo** *o lasciare come esercizio*

- usando il *prodotto vettoriale* tra il vettore $\vec{v}$ e il vettore $A - P_0$

$$d = \frac{|\vec{v} \times (A - P)|}{|\vec{v}|} = |\hat{v} \times (A - P)| = |A - P| \sin \theta \ .$$



13.5 Coniche

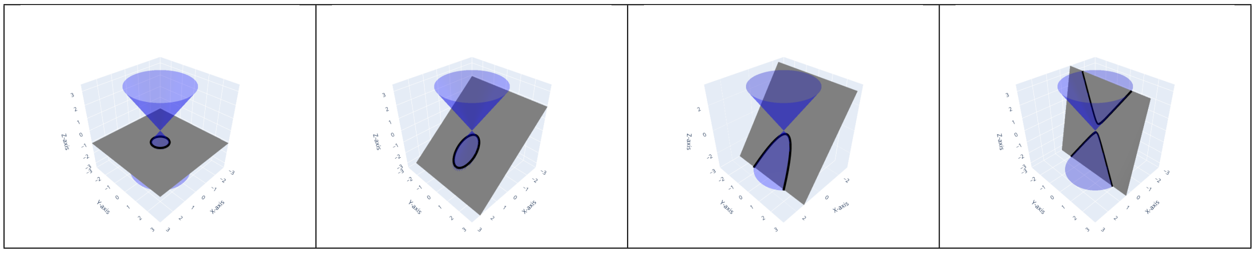
Le coniche sono curve che possono essere ottenute come intersezione tra un piano e un (doppio) cono circolare retto, come *dimostrabile con gli strumenti della geometria nello spazio*.

Queste curve compaiono in diversi ambiti della matematica e della fisica. Ad esempio,

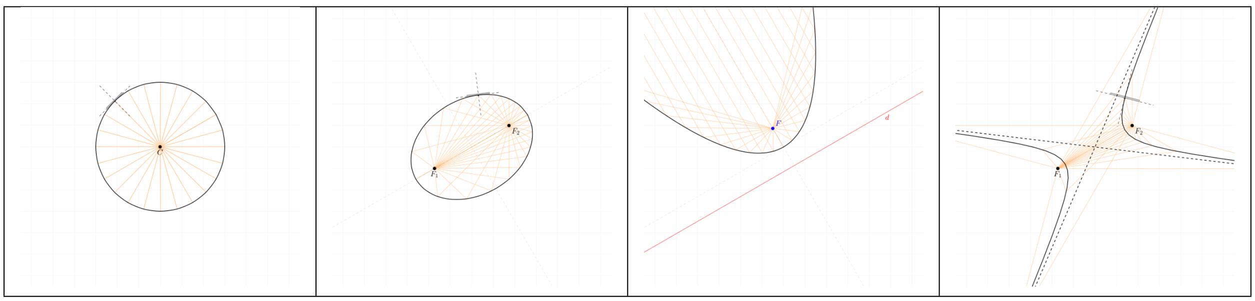
- in **geometria**: le coniche sono le intersezioni tra un piano e un doppio cono circolare retto; l'inclinazione del piano rispetto all'asse del cono determina il tipo di conica: cerchio, ellisse, parabola o iperbole.
- in **ottica**: le coniche hanno proprietà geometriche che risultano utili in **ottica**, e nella trasmissione delle informazioni (le antenne paraboliche si chiamano così, poiché hanno la forma di un paraboloide)
- in **meccanica**: le traiettorie di due corpi isolati soggetti alla mutua interazione con intensità inversamente proprozionale al quadrato della loro distanza sono coniche; sono coniche quindi le orbite
  - di due corpi soggetti a mutua gravitazione in astronomia

   – di due corpi soggetti a mutua interazione elettrica

Rappresentazione grafica delle coniche come intersezione tra cono e piano. (*Zoom in appendice*)



Rappresentazione grafica delle proprietà ottiche. (*Zoom in appendice*)



Le coniche possono essere definite in maniera implicita, senza fare uso di sistemi di coordinate. Partendo da definizioni implicite equivalenti, e sfruttando l'arbitrarietà nel definire il sistema di coordinate più comodo, vengono ricavate

- prima, le equazioni delle coniche in **forma canonica** con un'opportuna scelta di sistemi di coordinate
- poi, l'equazione in forma generale di una conica nel piano, ottenuta tramite una trasformazione rigida - roto-traslazione - della curva o, viceversa, delle coordinate.

Queste curve possono essere definite a partire da un punto F, detto **fuoco**, e una retta d, detta **direttrice** come verrà fatto per ricavare le *equazioni in coordinate polari* delle coniche.

Definizione in termini di eccentricità

Una conica può essere definita come il luogo dei punti P dello spazio per i quali il rapporto tra la distanza dal fuoco e dalla direttrice è costante,

$$e = \frac{\text{dist}(P, F)}{\text{dist}(P, d)} \ .$$

Questo rapporto viene definito **eccentricità** della conica e il suo valore determina la figura geometrica descritta:

- $e < 1$, ellisse; il caso particolare della circonferenza con eccentricità nulla, con $\text{dist}(P, d) \to \infty$
- $e = 1$, parabola;
- $e > 1$, iperbole;

Esistono due fuochi e due direttrici per ogni ellisse e ogni iperbole.

E" possibile definire le coniche anche grazie alla proprietà che caratterizza la distanza dei punti della conica dai fuochi, come verrà fatto per trovare le *equazioni in coordinate cartesiane* delle coniche.

Definizione in termini di distanza dai fuochi

- una circonferenza è il luogo dei punti del piano che hanno distanza costante da un punto C,

$$|P-C| = R \ ,$$

- un'ellisse è il luogo dei punti del piano che hanno la somma delle distanze da due punti dati, i fuochi F_1 e F_2, costante,

$$|P-F_1| + |P-F_2| = 2\,a \ ,$$

- una parabola è il luogo dei punti del piano equidistante da un punto F, il fuoco della parabola, e da una retta d, la direttrice

$$|P-C| = \text{dist}(P,d)$$

- un'iperbole è il luogo dei punti del piano che hanno la differenza delle distanze da due punti dati, i fuochi F_1 e F_2, costante,

$$|P-F_1| - |P-F_2| = 2\,a \ ,$$

  avendo considerato il modulo delle distanze per comprendere entrambi i rami dell'iperbole

13.5.1 Forma canonica in coordinate cartesiane

Circonferenza

Una circonferenza è il luogo dei punti equidistanti da un punto C dato, detto centro della circonferenza. La distanza tra i punti del circonferenza e il centro viene definito raggio della circonferenza.

$$|P-C| = R$$

Usando un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro della circonferenza, l'equazione in coordinate cartesiane della circonferenza è

$$x^2 + y^2 = R^2 \ .$$

Dimostrazione.

Per ricavare l'equazione di una circonferenza in coordinate cartesiane, si usa la formula per il calcolo della distanza tra punti. Se si sceglie un sistema di coordinate cartesiane con origine in C s.t. $(x_C, y_C) = (0,0)$, la condizione che identifica le coordinate cartesiane (x,y) dei punti di una circonferenza di raggio R centrata in C

$$R^2 = |P-C|^2 = x^2 + y^2 \ ,$$

cioè

$$x^2 + y^2 = R^2 \ .$$

Parabola

Una parabola è il luogo dei punti equidistanti da un punto F dato, detto fuoco della parabola, e da una retta d detta direttrice, non passante per F,

$$\text{dist}(P, d) = |P - F|$$

Usando un sistema di riferimento cartesiano con origine nel vertice di una parabola e asse y coincidente con il suo asse, l'equazione in coordinate cartesiane della parabola è

$$y = a\,x^2\ ,$$

con $a = \frac{1}{2d}$.

Dimostrazione.

Equazione in coordinate cartesiane. Sia d la distanza del fuoco F dalla retta direttrice d. Per la scelta del sistema di coordinate fatta, il vertice è nell'origine $V \equiv O$, il fuoco ha coordinate $F \equiv \left(0, \frac{d}{2}\right)$, e la retta direttrice ha equazione $r:\ y = -\frac{d}{2}$. Si usa la formula della distanza tra punti per calcolare la distanza $\overline{PF}$ tra i punti della parabola e il fuoco, mentre la formula della distanza punto-retta nel caso di retta direttrice parallela all'asse x si riduce alla differenza tra le coordinate y del punto e della direttrice,

$$\left(\text{dist}(P, d)\right)^2 = |P - F|^2$$

$$\left(y + \frac{d}{2}\right)^2 = x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2$$

$$y^2 + dy + \frac{d^2}{4} = x^2 + y^2 - dy + \frac{d^2}{4}$$

e semplificando i termini y^2, $\frac{d^2}{4}$, si ottiene l'equazione desiderata,

$$y = \frac{1}{2d}x^2 =: a\,x^2\ .$$

Ellisse

Una ellisse è il luogo dei punti P la cui somma delle distanze da due punti F_1, F_2 dati, detti fuochi, è costante (e uguale all'asse maggiore, $2a$),

$$|P - F_1| + |P - F_2| = 2a\ .$$

Usando un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro dell'ellisse (punto medio tra i due fuochi), e asse x passante per i due fuochi, l'equazione in coordinate cartesiane dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ .$$

avendo indicato con a, b il semiasse maggiore e minore rispettivamente.

Dimostrazione.

Definite le coordinate dei due fuochi, $F_1 \equiv (-c, 0)$, $F_2 \equiv (c, 0)$, si usa la formula della distanza tra punti per trovare l'equazione richiesta,

$$|P - F_1| = 2a - |P - F_2|$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

sviluppando i quadrati

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

semplificando i termini, tenendo il termine con la radice separato dagli altri termini per elevare nuovamente al quadrato,

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

si ottiene,

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Considerando i punti dell'ellisse sull'asse minore, $B_{\mp} \equiv (0, \mp b)$, è facile dimostrare usando il teorema di Pitagora che $a^2 = b^2 + c^2$. Si può quindi riconoscere il quadrato del semiasse minore nell'equazione dell'ellisse e, nel caso di ellissi non-degeneri, dividere per a^2b^2 per ottenere l'espressione desiderata,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; .$$

Iperbole

Una iperbole è il luogo dei punti P la cui differenza delle distanze da due punti F_1, F_2 dati, detti fuochi, presa in valore assoluto per comprendere entrambi i rami dell'iperbole, è costante (e uguale all'asse maggiore, $2a$),

$$\big||P - F_1| - |P - F_2|\big| = 2a \; .$$

Usando un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro dell'iperbole (punto medio tra i due fuochi), e asse x passante per i due fuochi, l'equazione in coordinate cartesiane dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \; .$$

avendo indicato con a, b il semiasse maggiore e minore rispettivamente.

Dimostrazione.

Definite le coordinate dei due fuochi, $F_1 \equiv (-c, 0)$, $F_2 \equiv (c, 0)$, si usa la formula della distanza tra punti per trovare l'equazione richiesta. Rimuovendo il modulo e considerando entrambe le possibilità di segno,

$$|P - F_1| = \mp 2a + |P - F_2|$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \mp 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

sviluppando i quadrati

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

semplificando i termini, tenendo il termine con la radice separato dagli altri termini per elevare nuovamente al quadrato,

$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx$$

si ottiene,

$$\begin{aligned} a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2) \end{aligned}$$

A differenza del caso dell'ellisse, per un'iperbole il termine $a^2 - c^2$ è negativo, e si può quindi scrivere

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)\ .$$

Considerando l'andamento asintotico, si trovano le equazioni dei due asintoti,

$$u = \mp\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a} = \mp\frac{b}{a}\ ,$$

avendo definito $b^2 = c^2 - a^2$ il semiasse maggiore. Nel caso di iperboli non-degeneri, si può dividere per a^2b^2 per ottenere l'espressione desiderata,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ .$$

13.5.2 Forma canonica in coordinate polari

Le coniche possono essere anche caratterizzate dal valore dell'eccentricità,

$$e = \frac{\text{dist(punto, fuoco)}}{\text{dist(punto, direttrice)}} = \frac{\text{dist}(P,F)}{\text{dst}(P,d)}\ .$$

Questa definizione permette di ricavare facilmente l'equazione delle coniche usando un sistema di coordinate polari, centrato nel fuoco F, e con la direzione di riferimento per la misura dell'angolo θ che punta verso la direttrice. Con questo sistema di coordinate polari,

$$\begin{aligned} \text{dist}(P,F) &= r \\ \text{dist}(P,d) &= |D - r\cos\theta| \end{aligned}$$

l'equazione generale delle coniche diventa

$$e\big|D - r\cos\theta\big| = r\ .$$

Questa equazione descrive tutte le coniche con eccentricità non nulla, cioè tutte le coniche tranne la circonferenza. La circonferenza si ottiene come limite dell" eccentricità $e \to 0$ e distanza $D \to \infty$, in modo tale da avere $eD = R$ finito.

13.5.3 Equazione generale delle coniche

L'equazione di una conica disposta nel piano in maniera arbitraria rispetto a un sistema di coordinate cartesiane ha l'epsressione

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\ .$$

E" possibile dimostrare questa affermazione tramite una trasformazione rigida generica di roto-traslazione. In particolare, si applicherà prima una rotazione di un angolo $theta$ e poi una traslazione $\vec{v} = x_{1,P}\hat{x}_1 + y_{1,P}\hat{y}_1$.

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y_1 = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 - x_{1,P} \\ y_2 = y_1 - y_{1,P} \end{cases}$$

Diversi tipi di coniche sono caratterizzati da diverse relazioni tra i coefficienti del polinomio di secondo grado, in particolare, dal valore del coefficiente $\Delta := B^2 - 4AC$,

- ellisse: $\Delta < 0$
- parabola: $\Delta = 0$
- iperbole: $\Delta > 0$

Dimostrazione, ellisse e iperbole

Le equazioni in forma canonica di un'ellisse e un'iperbole possono essere scritte come

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \gamma \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \rightarrow \qquad 0 = b^2 x_2^2 + \gamma a^2 y_2^2 - a^2 b^2 \ ,$$

con $\gamma = 1$ per l'ellisse e $\gamma = -1$ per l'iperbole. Introducendo le trasformazioni di coordinate, si può manipolare l'espressione delle coniche

$$\begin{aligned}
0 &= b^2(x_1 - x_{1,P})^2 + \gamma a^2 (y_1 - y_{1,P})^2 - a^2 b^2 = \\
&= b^2(x\cos\theta + y\sin\theta - x_{1,P})^2 + \gamma a^2(-x\sin\theta + y\cos\theta - y_{1,P})^2 - a^2b^2 = \\
&= x^2\left(b^2\cos^2\theta + \gamma a^2\sin^2\theta\right) + 2xy\left(b^2 - \gamma a^2\right)\sin\theta\cos\theta + y^2\left(b^2\sin^2\theta + \gamma a^2\cos^2\theta\right) \\
&+ x\left(-2b^2 x_{1,P}\cos\theta + 2\gamma a^2 y_{1,P}\sin\theta\right) + y\left(-2b^2 x_{1,P}\sin\theta - 2\gamma a^2 y_{1,P}\cos\theta\right) \\
&+ b^2 x_{1,P}^2 + \gamma a^2 y_{1,P}^2 - a^2 b^2
\end{aligned}$$

per calcolare il discriminante, usando la relazione $\gamma^2 = 1$, come

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta}{4} &= \frac{B^2}{4} - AC = \\
&= \left[\left(b^2 - \gamma a^2\right)\sin\theta\cos\theta\right]^2 - \left(b^2\cos^2\theta + \gamma a^2\sin^2\theta\right)\left(b^2\sin^2\theta + \gamma a^2\cos^2\theta\right) = \\
&= b^4\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\gamma a^2 b^2\sin^2\theta\cos^2\theta + a^4\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&- b^4\sin^2\theta\cos^2\theta - \gamma a^2 b^2\left(\sin^4\theta + \cos^4\theta\right) - a^4\sin^2\theta\cos^2\theta = \\
&= -\gamma a^2 b^2 \left(\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{=1}\right)^2 = -\gamma a^2 b^2
\end{aligned}$$

E quindi

- per un'ellisse, $\gamma = 1$ e $\Delta < 0$
- per un'iperbole, $\gamma = -1$ e $\Delta > 0$

Dimostrazione, parabola

Introducendo le trasformazioni di coordinate, si può manipolare l'espressione dell'equazione in forma canonica delle parabole

$$\begin{aligned}
0 &= a x_2^2 - y_2 = \\
&= a(x_1 - x_{1,P})^2 - y_1 + y_{1,P} = \\
&= a(x\cos\theta + y\sin\theta - x_{1,P})^2 - (-x\sin\theta + y\cos\theta) + y_{1,P} = \\
&= x^2\left(a\cos^2\theta\right) + 2xy\left(a\cos\theta\sin\theta\right) + y^2\left(a\sin^2\theta\right) \\
&+ x\left(-2a x_{1,P}\cos\theta + 2\sin\theta\right) + y\left(-2a x_{1,P}\sin\theta - 2\cos\theta\right) \\
&+ x_{1,P}^2 + y_{1,P}
\end{aligned}$$

per poi calcolare il discrimminante,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{4} &= \frac{B^2}{4} - AC = \\ &= a^2\cos^2\theta\sin^2\theta - a^2\cos^2\theta\sin^2\theta = 0\end{aligned}$$

todo significato

Esercizi

13.6 Problemi

13.6.1 Punti e Distanze

Exercise 12.6.1

1. Calcola la distanza tra i punti $A(2, 3)$ e $B(-1, 7)$.

Exercise 12.6.2

2. Determina le coordinate del punto che divide il segmento che unisce $A(4, -2)$ e $B(-6, 8)$ nel rapporto $3 : 2$.

Exercise 12.6.3

3. Mostra che i punti $P(1, 2)$, $Q(3, 6)$ e $R(-1, -4)$ sono allineati.

Exercise 12.6.4

4. Trova il baricentro del triangolo con vertici $A(2, -1)$, $B(4, 3)$, e $C(-2, 5)$.

Exercise 12.6.5

5. Determina la distanza minima tra il punto $P(5, -2)$ e la retta $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

13.6.2 Retta

Exercise 12.6.6

6. Trova l'equazione della retta passante per i punti $A(1, -1)$ e $B(4, 5)$.

Exercise 12.6.7

7. Determina il punto di intersezione tra le rette $y = 2x - 3$ e $y = -x + 1$.

Exercise 12.6.8

8. Scrivi l'equazione della retta parallela a $y = 3x + 2$ che passa per il punto $(1, -4)$.

Exercise 12.6.9

9. Scrivi l'equazione della retta perpendicolare a $2x - y + 5 = 0$ che passa per $(2, 3)$.

Exercise 12.6.10

10. Determina l'area del triangolo formato dalle rette $y = x + 1$, $y = -x + 5$ e $x = 2$.

13.6.3 Coniche

Exercise 12.6.11

11. Trova il centro e i semiassi dell'ellisse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Exercise 12.6.12

12. Determina il fuoco e la direttrice della parabola $y^2 = 8x$.

Exercise 12.6.13

13. Calcola i vertici e il centro dell'iperbole $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Exercise 12.6.14

14. Verifica se il punto $(3, 4)$ appartiene all'ellisse $9x^2 + 16y^2 = 144$.

Exercise 12.6.15

15. Determina l'equazione della parabola con vertice in $(0, 0)$ e fuoco in $(2, 0)$.

13.6.4 Posizioni Relative

Exercise 12.6.16

16. Determina la posizione reciproca tra le rette $2x - 3y + 4 = 0$ e $4x - 6y - 5 = 0$.

Exercise 12.6.17

17. Trova la distanza tra i punti $P(1, 3)$ e $Q(-2, 7)$, e verifica se sono equidistanti dalla retta $x - y + 1 = 0$.

Exercise 12.6.18

18. Determina se la retta $y = -\frac{1}{3}x + 4$ è tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 = 16$.

Exercise 12.6.19

19. Trova il punto di intersezione delle coniche $x^2 + y^2 = 25$ e $x^2 - y^2 = 9$.

Exercise 12.6.20

20. Calcola la posizione reciproca tra l'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ e la retta $y = 2x + 1$.

13.6.5 Problemi Parametrici

Exercise 12.6.21

21. Determina i valori di k per cui la retta $y = kx + 3$ è tangente alla parabola $y^2 = 4x$.

Exercise 12.6.22

22. Trova i valori di a e b per cui la retta $ax + by + c = 0$ passa per i punti $(1, 2)$ e $(3, -4)$.

Exercise 12.6.23

23. Scrivi l'equazione della famiglia di rette parallele a $y = 2x + 1$ e determina quale retta passa per $(0, -3)$.

Exercise 12.6.24

24. Determina l'equazione della famiglia di circonferenze con centro sull'asse x e passanti per il punto $(2, 3)$.

Exercise 12.6.25

25. Trova il punto comune a tutte le rette della famiglia $y = mx + 2m - 1$.

13.6.6 Altri Problemi

Exercise 12.6.26

26. Trova le coordinate dei vertici del triangolo formato dalla retta $y = 2x - 3$ e dai due assi coordinati.

Exercise 12.6.27

27. Determina l'equazione della tangente alla parabola $y^2 = 8x$ nel punto $(2, 4)$.

Exercise 12.6.28

28. Scrivi l'equazione della circonferenza con centro in $(1, -2)$ e raggio 5.

Exercise 12.6.29

29. Verifica se la retta $y = -x + 6$ è tangente all'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Exercise 12.6.30

30. Trova il punto di massimo o minimo della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 25$.

`

13.7 Soluzioni

13.7.1 Punti e Distanze

Exercise 12.7.1

1. Calcola la distanza tra i punti $A(2, 3)$ e $B(-1, 7)$.

Exercise 12.7.2

2. Determina le coordinate del punto che divide il segmento che unisce $A(4, -2)$ e $B(-6, 8)$ nel rapporto $3 : 2$.

Exercise 12.7.3

3. Mostra che i punti $P(1, 2)$, $Q(3, 6)$ e $R(-1, -4)$ sono allineati.

Exercise 12.7.4

4. Trova il baricentro del triangolo con vertici $A(2, -1)$, $B(4, 3)$, e $C(-2, 5)$.

Exercise 12.7.5

5. Determina la distanza minima tra il punto $P(5, -2)$ e la retta $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

13.7.2 Retta

Exercise 12.7.6

6. Trova l'equazione della retta passante per i punti $A(1, -1)$ e $B(4, 5)$.

Exercise 12.7.7

7. Determina il punto di intersezione tra le rette $y = 2x - 3$ e $y = -x + 1$.

Exercise 12.7.8

8. Scrivi l'equazione della retta parallela a $y = 3x + 2$ che passa per il punto $(1, -4)$.

Exercise 12.7.9

9. Scrivi l'equazione della retta perpendicolare a $2x - y + 5 = 0$ che passa per $(2, 3)$.

Exercise 12.7.10

10. Determina l'area del triangolo formato dalle rette $y = x + 1$, $y = -x + 5$ e $x = 2$.

13.7.3 Coniche

Exercise 12.7.11

11. Trova il centro e i semiassi dell'ellisse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Exercise 12.7.12

12. Determina il fuoco e la direttrice della parabola $y^2 = 8x$.

Exercise 12.7.13

13. Calcola i vertici e il centro dell'iperbole $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Exercise 12.7.14

14. Verifica se il punto $(3, 4)$ appartiene all'ellisse $9x^2 + 16y^2 = 144$.

Exercise 12.7.15

15. Determina l'equazione della parabola con vertice in $(0, 0)$ e fuoco in $(2, 0)$.

13.7.4 Posizioni Relative

Exercise 12.7.16

16. Determina la posizione reciproca tra le rette $2x - 3y + 4 = 0$ e $4x - 6y - 5 = 0$.

Exercise 12.7.17

17. Trova la distanza tra i punti $P(1, 3)$ e $Q(-2, 7)$, e verifica se sono equidistanti dalla retta $x - y + 1 = 0$.

Exercise 12.7.18

18. Determina se la retta $y = -\frac{1}{3}x + 4$ è tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 = 16$.

Exercise 12.7.19

19. Trova il punto di intersezione delle coniche $x^2 + y^2 = 25$ e $x^2 - y^2 = 9$.

Exercise 12.7.20

20. Calcola la posizione reciproca tra l'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ e la retta $y = 2x + 1$.

13.7.5 Problemi Parametrici

Exercise 12.7.21

21. Determina i valori di k per cui la retta $y = kx + 3$ è tangente alla parabola $y^2 = 4x$.

Exercise 12.7.22

22. Trova i valori di a e b per cui la retta $ax + by + c = 0$ passa per i punti $(1, 2)$ e $(3, -4)$.

Exercise 12.7.23

23. Scrivi l'equazione della famiglia di rette parallele a $y = 2x + 1$ e determina quale retta passa per $(0, -3)$.

Exercise 12.7.24

24. Determina l'equazione della famiglia di circonferenze con centro sull'asse x e passanti per il punto $(2, 3)$.

Exercise 12.7.25

25. Trova il punto comune a tutte le rette della famiglia $y = mx + 2m - 1$.

13.7.6 Altri Problemi

Exercise 12.7.26

26. Trova le coordinate dei vertici del triangolo formato dalla retta $y = 2x - 3$ e dai due assi coordinati.

Exercise 12.7.27

27. Determina l'equazione della tangente alla parabola $y^2 = 8x$ nel punto $(2, 4)$.

Exercise 12.7.28

28. Scrivi l'equazione della circonferenza con centro in $(1, -2)$ e raggio 5.

Exercise 12.7.29

29. Verifica se la retta $y = -x + 6$ è tangente all'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Exercise 12.7.30

30. Trova il punto di massimo o minimo della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 25$.

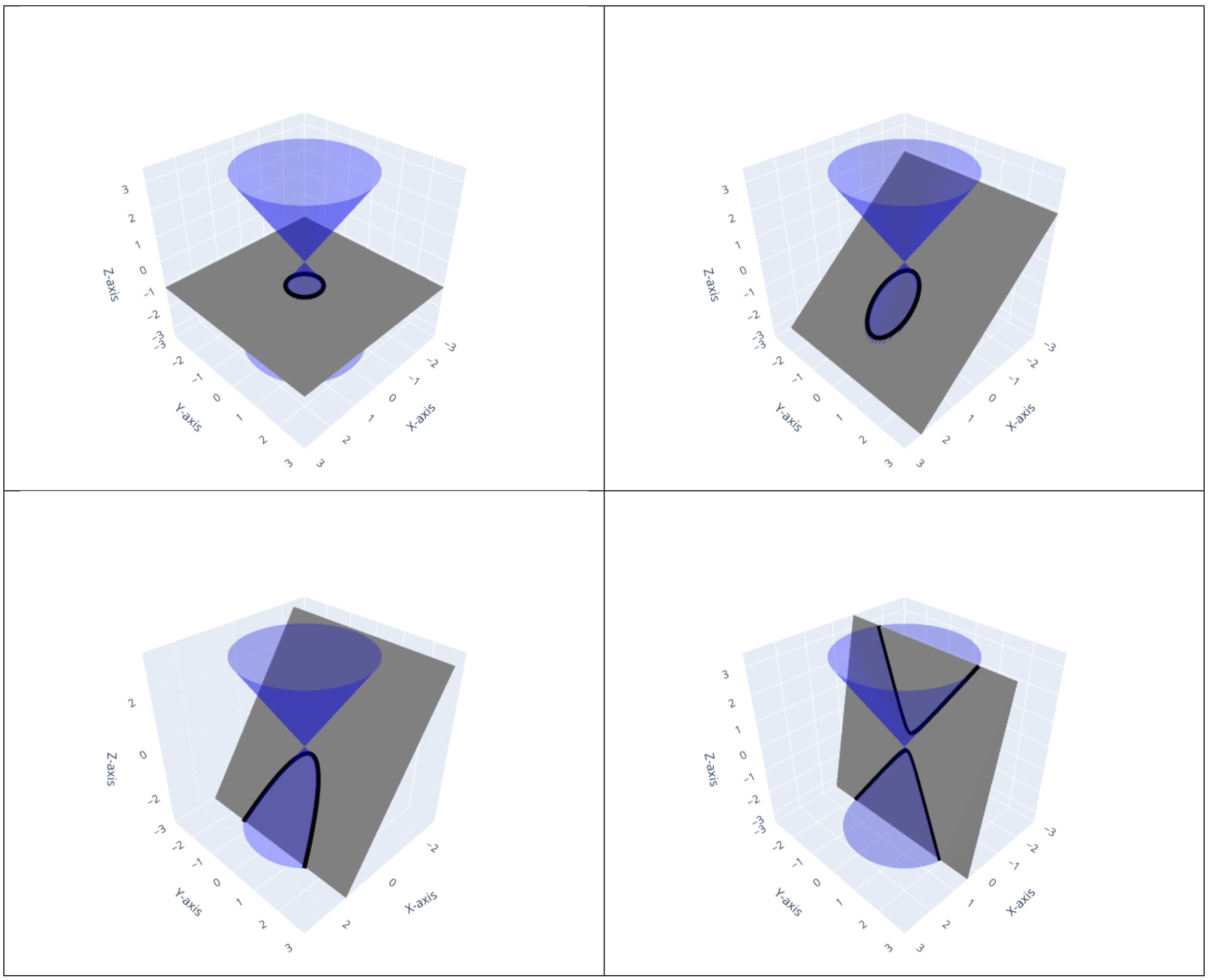
`

13.8 Note e dimostrazioni

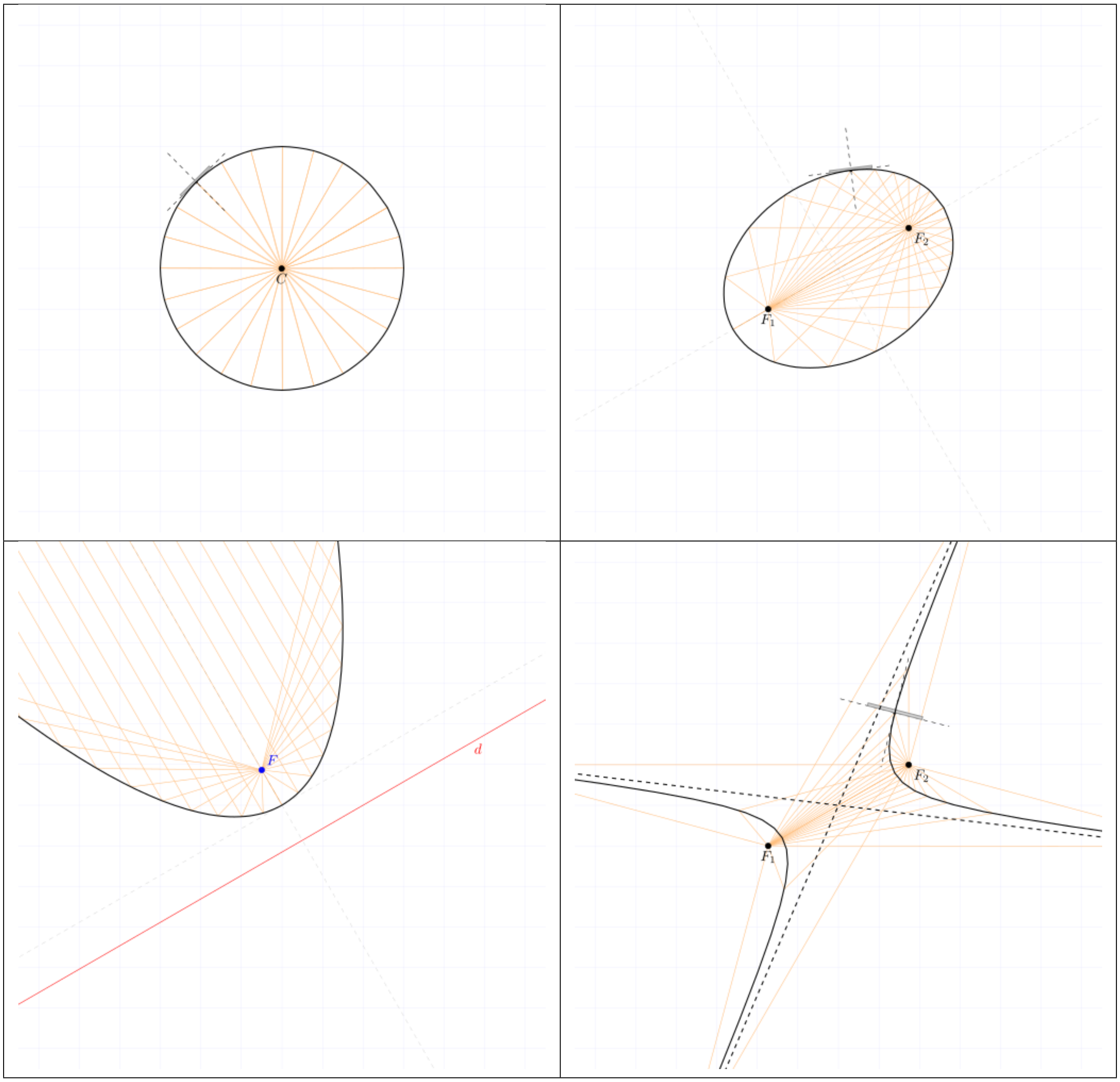
13.8.1 Coniche

Vengono qui mostrate alcune proprietà delle *coniche*.

Sezioni di cono



Proprietà ottiche



CAPITOLO 14

Geometria analitica nello spazio

14.1 Sistemi di coordinate per lo spazio euclideo E^3

14.1.1 Coordinate cartesiane

Le coordinate cartesiane (x, y, z) di un punto P dello spazio euclideo E^3 permettono di definire il vettore euclideo tra l'origine $O \equiv (0, 0, 0)$ e il punto P

$$(P - O) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}\ ,$$

usando i vettori della base cartesiana $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$

Distanza punto-punto

Usando le coordinate cartesiane, la distanza tra due punti $P \equiv (x_P, y_P, z_P)$, $Q \equiv (x_Q, y_Q, z_Q)$ si può calcolare usando il teorema di Pitagora come

$$|P - Q|^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2\ .$$

14.1.2 Coordinate cilindriche

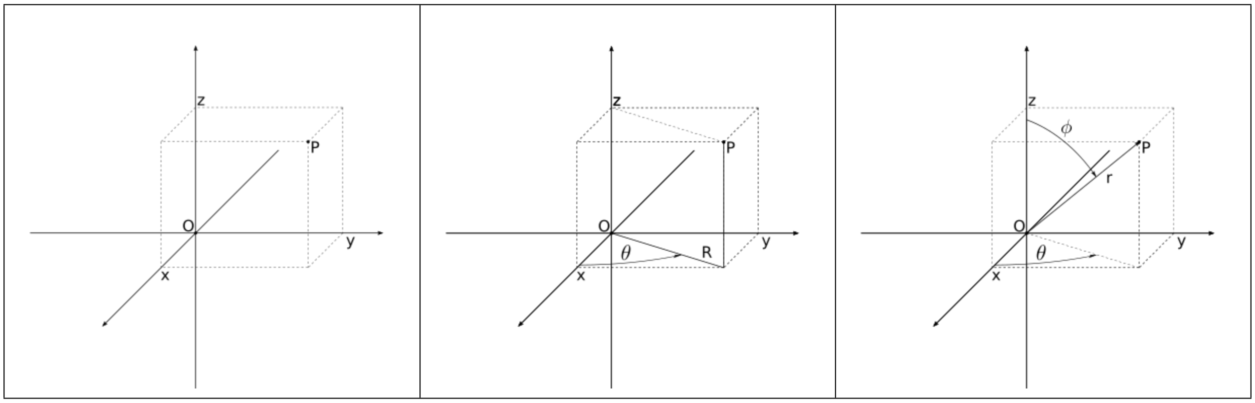
Dato un sistema di coordinate cartesiane, si può definire un sistema di coordinate cilindriche (R, θ, z) con la stessa origine, asse z coincidente e usando il piano x-y come origine per misurare l'angolo θ attorno all'asse z, tramite la legge di trasformazione delle coordinate

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

14.1.3 Coordinate sferiche

Dato un sistema cartesiano e scelto un sistema di coordinate cilindriche come appena descritto, si può definire un sistema di coordinate sferiche (r, θ, ϕ) tramite le leggi di trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} x = r \sin\phi \, \cos\theta \\ y = r \sin\phi \, \sin\theta \\ z = r \cos\phi \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} R = r \sin\phi \\ \theta = \theta \\ z = r \cos\phi \end{cases}$$



14.2 Piani nello spazio

Per Euclide, il concetto di piano è un ente geometrico fondamentale della geometria. In geometria analitica, per trovare l'equazione di un piano si possono usare diverse definizioni equivalenti.

14.2.1 Definizioni ed equazione

Definizione 1 - Passaggio per un punto e direzione normale. Un piano π può essere definito come il luogo dei punti P dello spazio che formano un vettore $(P - Q)$ con un punto dato Q ortogonali a un vettore $\vec{n}$ che indica la direzione normale al piano π. Usando le proprietà del prodotto scalare,

$$(P - Q) \cdot \vec{n} = 0 \ .$$

Usando un sistema di coordinate cartesiane, si può trovare l'equazione implicita del piano π,

$$\pi : \ (x - x_Q)n_x + (y - y_Q)n_y + (z - z_Q)n_z = 0 \ . \tag{14.1}$$

Osservazione. L'equazione implicita del piano è independente dal modulo del vettore $\vec{n}$, poiché rappresenterebbe un ininfluente fattore moltiplicativo (diverso da zero) nel termine di sinistra quando uguagliato a zero.

Definizione 2. - Passaggio per un punto e direzioni tangenti. Partendo dalla prima definizione, si possono ricavare le equazioni parametriche del piano. Dato il vettore $\vec{n}$, si possono trovare due vettori $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$ a esso ortogonali,

$$\vec{t}_1 \cdot \vec{n} = \vec{t}_2 \cdot \vec{n} = 0 \ .$$

Se i due vettori non sono tra di loro allineati, o meglio proporzionali, è possibile descrivere tutti i punti del piano come una loro combinazione lineare

$$\pi : \ P = Q + \lambda_1 \vec{t}_1 + \lambda_2 \vec{t}_2 \ .$$

Definizione 3. - Luogo dei punti equidistante da due punti distinti dati. Il luogo dei punti P dello spazio equidistanti da due punti P_1, P_2 dati è il piano identificato dalla condizione

$$|P - P_1| = |P - P_2| \ .$$

Usando un sistema di coordinate cartesiane per identificare i due punti $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$, per calcolare (il quadrato del)le distanze,

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2$$
$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 + z^2 - 2zz_1 + z_1^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 + z^2 - 2zz_2 + z_2^2$$

semplificando i termini x^2, y^2, z^2 e raccogliendo mettendo in evidenza le coordinate x, y, z, si ottiene una rappresentazione implicita della retta,

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 = 0 \ , \tag{14.2}$$

che può essere riscritta in generale nella **forma esplicita**,

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \ , \tag{14.3}$$

con ovvio significato dei coefficienti a, b, c, d, e a, b, c non contemporaneamente nulli (altrimenti rimarrebbe l'identità $0 = 0$, corrispondente alla condizione $a = x_2 - x_1 = 0$, $b = y_2 - y_1 = 0$, $c = z_2 - z_1 = 0$ corrispondente ai due punti $P_1 \equiv P_2$ coinvidenti).

Osservazione. Confrontando le espressioni (14.2), (14.3) con l'espressione (14.1) della prima definizione, si può riconoscere che il vettore che congiunge i due punti $P_2 - P_1 = (x_2 - x_1)\hat{x} + (y_2 - y_1)\hat{y} + (z_2 - z_1)$ \hat{z} è allineato al vettore $\vec{n}$ e ortogonale al piano π, e al vettore $a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z}$.

14.2.2 Posizioni reciproche

Posizione reciproca di punto e piano

Un punto P o appartiene o non appartiene a un piano $\pi : \ \hat{n} \cdot (P - Q) = 0$. Se appartiene al piano, la distanza tra punto e retta è nulla; se non appartiene al piano, la distanza tra punto e piano può essere calcolata usando le proprietà del *prodotto interno in spazi euclidei*,

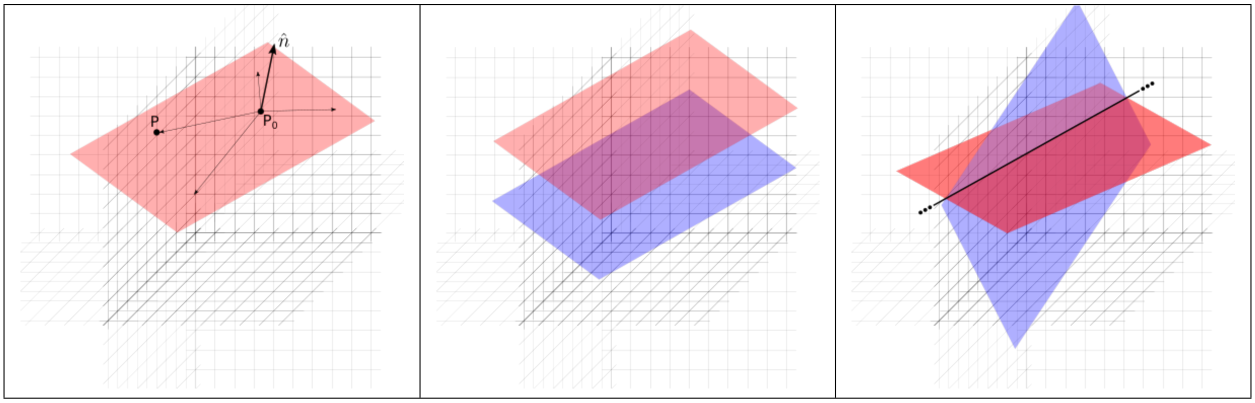
$$\text{dist}(A, \pi) = |\hat{n} \cdot (A - Q)| = |A - Q| \cos\theta \ .$$

todo *figura*

Posizione reciproca di piani

Due piani nello spazio euclideo tridimensionale possono essere:

- coincidenti: hanno tutti i punti in comune
- paralleli: non hanno nessun punto in comune
- incidenti: si intersecano e la loro intersezione definisce una retta



14.3 Curve nello spazio

Dato un sistema di coordinate (q^1, q^2, q^3) curva γ nello spazio può essere descritta in **forma parametrica**, fornendo l'espressione delle coordinate in funzione di un parametro λ,

$$q^k(\lambda) \ .$$

Usando le coordinate cartesiane, i punti della curva sono identificati dalla famiglia di vettori euclidei

$$\gamma: \ \vec{r}(\lambda) = x(\lambda)\hat{x} + y(\lambda)\hat{y} + z(\lambda)\hat{z} \ ,$$

al variare del parametro λ.

Una curva può essere anche definita in forma implicita o esplicita, con un sistema di due equazioni che hanno come incognite le tre coordinate,

$$\begin{cases} F(q^1, q^2, q^3) = 0 \\ G(q^1, q^2, q^3) = 0 \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} q^1 = f^1(q_3) \\ q^2 = f^2(q^3) \end{cases}$$

14.4 Rette nello spazio

14.4.1 Definizione ed equazione

Definizione 1 - Passaggio per un punto e direzione tangente. I punti P della retta r passante per il punto P_0 e con direzione $\vec{v}$ possono essere rappresentati dall"**equazione parametrica**,

$$r: P = P_0 + \lambda \, \vec{v} \ .$$

Questa relazione può essere scritta usando un sistema di coordidnate carteisane, con base $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$,

$$\begin{cases} x_P(\lambda) = x_{P_0} + \lambda \, v_x \\ y_P(\lambda) = y_{P_0} + \lambda \, v_y \\ z_P(\lambda) = z_{P_0} + \lambda \, v_z \end{cases}$$

Definizione 2 - Interesezione di due piani incidenti. todo

14.4.2 Posizioni reciproche

Posizione reciproca di punto e retta

Un punto P o appartiene o non appartiene a una retta r.

Distanza punto-retta

Dato un punto A e una retta r, di cui sono noti un punto Q e il vettore $\vec{v}$, la distanza di A da r può essere calcolata come il valore assoluto della proiezione del vettore $A - Q$ in direzione ortogonale alla direzione della retta, individuata da $\vec{v}$,

$$\begin{aligned} \text{dist}(A, r) &= |(A - Q) - \hat{v}\,\hat{v} \cdot (A - Q)| = \\ &= |\hat{v} \times (A - Q)| \end{aligned}$$

avendo usato il vettore unitario $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ per la proiezione.

Posizione reciproca retta e piano

Una retta r può essere:

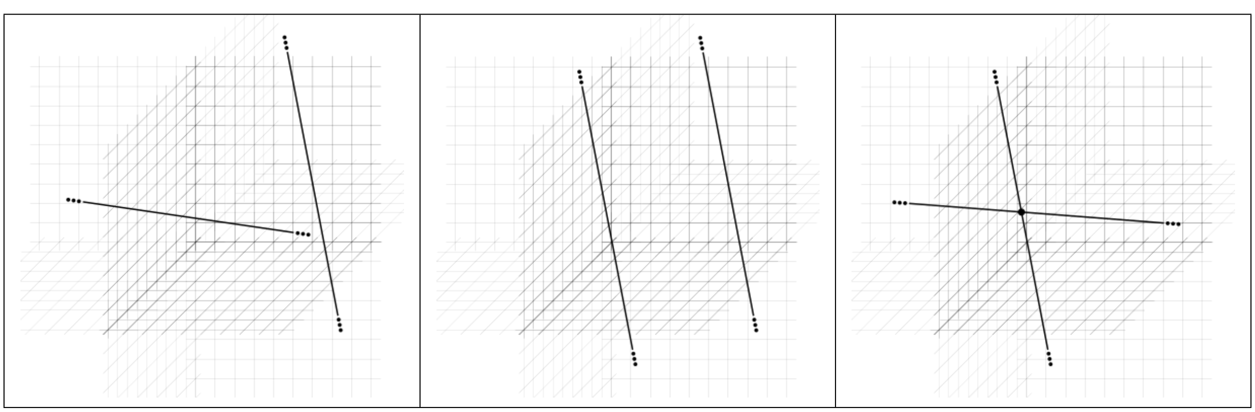
- contenuta in un piano π: ha tutti i punti appartenenti al piano
- parallela a un piano π: non ha nessun punto appartenente al piano
- incidente a un piano π: interseca il piano in un solo punto

Posizione reciproca tra rette

Due rette possono essere:

- coincidenti: hanno tutti i punti in comune
- incidenti: si intersecano in un solo punto
- parallele: non hanno nessun punto in comune e hanno la stessa direzione; esiste un piano che contiene entrambe le rette
- sghembe: non hanno nessun punto in comune e hanno direzioni diverse; non esiste nessun piano che contiene entrambe le rette

todo *verificare queste condizioni*



14.5 Cono circolare retto e coniche

14.5.1 Equazione del cono

Equazioni del (doppio) cono circolare retto, usando un sistema di coordinate cilindriche,

$$r = a\,z\ ,$$

per $z \in (-\infty, +\infty)$, $\theta \in (0, 2\pi)$.

14.5.2 Coniche: intersezione tra cono e piano

Parte V

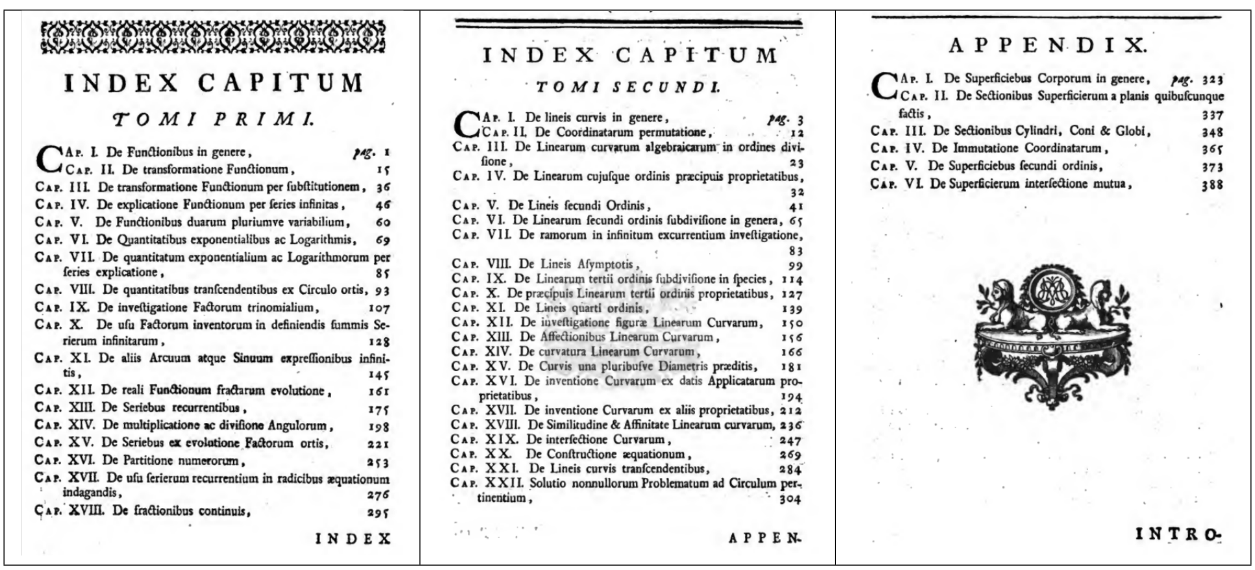
Precalcolo

CAPITOLO 15

Introduzione al pre-calcolo

Nel gran calderone del pre-calcolo finiscono qui tutti gli argomenti propedeutici allo studio del *calcolo*, seguendo quanto fatto da **Eulero** - ovviamente come Eulero, ma peggio - nel 1748 nel suo **«Introductio in analysin infinitorum»**, pensato come una raccolta di concetti e metodi di analisi e geometria analitica in preparazione al calcolo differenziale e integrale.

Senza fare uso di nessun concetto di calcolo differenziale o integrale, nel primo volume dell'opera Eulero fornisce alcuni **fondamenti dell'analisi** e delle **serie infinite**; nel secondo volume Eulero applica i risultati del primo volume allo studio delle **curve** e delle **superfici** nel piano e nello spazio.



INDEX CAPITUM

TOMI PRIMI.

INDEX

INDEX CAPITUM

TOMI SECUNDI.

APPEN-

APPENDIX.

INTRO-

Argomenti del capitolo

***Funzioni reali a variabile reale**, $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$* (Introductio vol.1 cap.1-3)*. Riprendendo la *definizione di funzione*, vengono definite le funzioni reali a valore reale $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che saranno oggetto di studio del calcolo. Il *grafico* di una funzione in un piano cartesiano viene usato per mostrare alcune *caratteristiche* che può avere una funzione (crescente/decrescente, pari/dispari,…). Infine viene discussa l"*invertibilità di funzioni*.

***Successioni e serie infinite** (Introductio vol.1 cap.4)*. Vengono presentati alcuni risultati di convergenza sulle successioni e le serie infinite. Questi risultati sono utili nella formulazione dei fondamenti dell'analisi (*saranno trattati qui? Probabilmente no*), nella *definizione della funzione esponenziale*, e in matematica discreta (come ad esempio nei metodi numerici).

***Funzioni esponenziale con base e e logaritmo naturale** (Introductio vol.1 cap.6-7)*. Viene introdotta la funzione esponenziale e^x. che ricopre un ruolo **fondamentale** nel calcolo, come apprezzabile nei capitoli su derivate, integrali e equazioni differenziali. Viene introdotta anche la sua funzione inversa $\ln x$, definita come il logaritmo con base e.

***Funzioni trigonometriche** (Introductio vol.1 cap.8)*. Vengono introdotte le funzioni trigonometriche, partendo dalla geometria di una circonferenza, dove l'argomento di tali funzioni sono angoli. Viene presentata la relazione fondamentale della trigonometria e le regole per la somma e la differenza, e regole ricavate da queste.

***Fattorizzazione di polinomi** (Introduction vol.* **XXX** *cap.* **todo** *)*. Vengono collezionati alcuni risultati utili sui polinomi che possono essere utili in seguito, come ad esempio il teorema fondamentale dell'algebra per la fattorizzazione dei polinomi, e il teorema binomiale per le potenze di binomi.

Funzioni a più variabili (*Introductio vol.1 cap.5*). **todo**

***Algebra sui numeri complessi** (Introduction vol.* **XXX** *cap.* **todo** *)*.

CAPITOLO 16

Funzioni reali a variabile reale, $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Le funzioni reali a variabile reale saranno oggetto di studio dettagliato del *calcolo infinitesimale*. Qui si specializza la definizione di *funzione* per funzioni $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reali a variabile reale, cioè con dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsieme dei numeri reali, e immagine $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsieme dei numeri reali.

Definition 15.1 (Funzione a valore reale di variabile reale)

Una funzione a valore reale di una variabile reale è una *funzione* $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione che ha come **dominio** un sottoinsieme D dei numeri reali e codominio $\mathbb{R}$, cioè una relazione che associa a ogni elemento $x \in D$ uno e un solo elemento

$$y = f(x) \in \mathbb{R} \ .$$

E" comune chiamare x **argomento** della funzione, o **variabile indipendente**, e y **valore** della funzione o **variabile dipendente**, poiché il suo valore dipende dal valore della funzione con argomento y.

16.1 Grafico di una funzione

A una funzione $y = f(x)$ può essere associata una rappresentazione grafica, interpretando le variabili x, y come coordinate che descrivono il piano. La rappresentazione comune le interpreta come *coordinate cartesiane*. Una funzione impone una relazione tra le due coordinate e in generale può essere rappresentato come una curva nel piano.

Ricordando che una funzione associa a ogni elemento del dominio uno e un solo elemento del codominio, il grafico di una funzione non può interesecare una retta parallela all'asse y in due punti, cioè non possono esistere due valori y_1, y_2 della funzione per lo stesso valore della variabile indipendente x.

todo esempi

16.2 Classificazione di funzioni

Appoggiandoci alla rappresentazione grafica (**todo**), vengono definite alcune caratteristiche che può avere una funzione. Una funzione $f : A \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è definita e ha valori su **insiemi ordinabili**, cioè sui quali si possono stabilire delle relazioni di ordine tra gli elementi, ad esempio tramite le relazioni $<$, $>$, $\le$, ge. Grazie a questa caratteristica, si possono definire funzioni crescenti/decrescenti, monotone, limitate/illimitate; poiché dominio e codominio sono insiemi numerici, allora si possono definire funzioni pari/dispari e periodiche. Infine si discutono le definizioni di funzione reali a valori reali suriettiva, iniettiva e biunivoca, definizioni già introdotte per *funzioni tra insiemi qualsiasi*.

- **Crescente, decrescente.** Una funzione è:
  - crescente se $f(x_2) > f(x_1)$ per $x_2 > x_1$
  - decrescente se $f(x_2) < f(x_1)$ per $x_2 > x_1$
- **Monotona.** Una funzione è monotona crescente/decrescente nell'intervallo I, se è crescente/decrescente per ogni coppia $x_1, x_2 \in I$
- **Limitata, illimitata** Una funzione è:
  - limitata superiormente se $\exists M$ t.c. $f(x) \le M \ \ \forall x \in A$
  - limitata inferiormente se $\exists M$ t.c. $f(x) \ge M \ \ \forall x \in A$
  - illimitata altrimenti
- **Pari, dispari** Una funzione è definita
  - pari se $f(x) = f(-x) \ \forall x \in A$, e il suo grafico in un piano x-y è simmetrico rispetto all'asse y
  - dispari se $f(x) = -f(-x) \ \forall x \in A$, e il suo grafico in un piano x-y è simmetrico rispetto all'origine
- **Periodica.** Una funzione è definita periodica di periodo T se $f(x) = f(x+T), \ \forall x \in A$.
- **Suriettiva, iniettiva, biunivoca.** Una funzione è:
  - suriettiva **todo**
  - iniettiva **todo**
  - biunivoca **todo**

16.3 Funzioni composte

…**todo** discutere dominio,…

$$f \circ g(x) := f\left(g(x)\right) \ .$$

…

Notazione

La composizione di una funzione con se stessa n volte può essere indicata come

$$\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n \text{ volte}}(x) = f^n(x) \ .$$

16.4 Funzioni invertibili e inverse

Una funzione $f : X \to Y$ è **invertibile** se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che

$$g\left(f(x)\right) = x,\ \forall x \in X$$
$$f\left(g(y)\right) = y,\ \forall y \in Y$$

- *Una funzione biunivoca è invertibile*
- *Una funzione monotona è biunivoca*
- *Una funzione monotona è invertibile* (Va" che *sillogismo*!)

16.5 Problemi

todo

CAPITOLO 17

Serie e successioni

Avvertimento: Questa sezione - per ora in costruzione - rischia di essere una sezione hard-core e nella sua completezza rischia di andare ben oltre gli scopi di un corso di matematica a livello di scuola superiore e di molti corsi universitari, ad eccezione delle sole facoltà di matematica e fisica probabilmente.

Per questi motivi, a questo capitolo viene per ora riservata una priorità relativamente bassa nello svolgimento del lavoro.

Note sull'uso, o cosa bisogna portare a casa da questa sezione

Da questa sezione è utile portare a casa:

- la definizione di serie numerica, il concetto di concergenza - e i criteri di convergenza, con semplici applicazioni a serie particolari. Esistono poi alcune serie particolari - come la **serie geometrica** - $\dots$; il numero e di Eulero può essere definito come valore di una serie convergente.
- la definizione di serie di funzioni. Alcuni esempi: definizione della funzione esponenziale e^x, serie polinomiali di Taylor, serie di Fourier <span «style=color:red»>I risultati di convergenza, seppur di importanza non trascurabile, hanno una priorità secondaria nello sviluppo di questo materiale - bilancio complessità-impescindibilità

17.1 Successioni di numeri reali

Definizione. Una successione di numeri reali è una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, che associa ai numeri interi $n \in \mathbb{N}$ un numero reale $a_n = f(n)$.

Limite di una successione. Una successione $\{a_n\}$ ha limite ℓ se per ogni intorno U_ℓ di ℓ esiste un numero naturale $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \in U_\ell \ , \qquad \forall n > N \ .$$

todo *fare associazione con il limite finito all'infinito per funzioni*

Se il limite esiste è unico (**todo** *se $\ell \in T$, con T spazio di Hasudorff. Come evitare questa complicazione?*). A seconda del limite della successione, una successione è:

- **convergente** se il limite ℓ esiste ed è finito
- **divergente** se il limite ℓ esiste ed è infinito
- **indeterminata** se il limite non esiste

17.1.1 Proprietà

Limitatezza. ...

Permanenza del segno. ...

Valori assoluti. ...

Succesioni monotone. Una successione monotona $\{a_n\}$ converge sempre a un limite. Il limite è l'estremo superiore se la successione è monotona crescente, o l'estremo inferiore se la successione è monotona decrescente.

Il limite è finito se e solo se la successione monotona è limitata.

Dimostrazione, qui o in fondo in una sezione di dimostrazioni/esercizi

17.1.2 Operazioni con successioni

elencare operazioni, mettere dimostrazione in una sezione di dimostrazioni/esercizi, nello stile Schaum

17.1.3 Confronto tra successioni

elencare operazioni, mettere dimostrazione in una sezione di dimostrazioni/esercizi, nello stile Schaum

17.1.4 Criteri di convergenza

elencare operazioni, mettere dimostrazione in una sezione di dimostrazioni/esercizi, nello stile Schaum

17.2 Serie di numeri reali

Definizione. Data una **successione** di elementi $\{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{R}$, la serie associata è la somma infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ .$$

Dato ogni indice k della successione $\{a_n\}$, si definisce la successione delle somme parziali $\{S_k\}$,

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n \ .$$

Carattere della serie. A seconda del limite della successione delle somme parziali $\lim_{k\to\infty} S_k$, una serie è

- **convergente** se il limite L esiste ed è finito
- **divergente** se il limite L esiste ed è infinito
- **indeterminata** se il limite non esiste

17.2.1 Criteri di convergenza

Una serie può essere:

- convergente
- divergente
- indeterminata

Serie a termini concordi

Si discutono qui le serie a termini non negativi. E" facile generalizzare i criteri alle serie a termini non positivi.

Criterio del confronto. Date A = $\sum_n a_n$, $B = \sum_n b_n$ serie a **termini non negativi** tali che $a_n \leq b_n$

- se B converge, A converge
- se A diverge, B diverge

Criterio del confronto asintotico. Date A = $\sum_n a_n$, $B = \sum_n b_n$ serie a **termini non negativi**

- se B è convergente e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in (0, +\infty)$, allora A è convergente
- se B è divergente e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, allora A è divergente

Criterio del confronto con serie geometrica.

Criterio della radice - Cauchy. Data una serie a termini non negativi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per la quale esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} {a_n}^{\frac{1}{n}} = k$, allora

- per $k < 1$ la serie converge
- per $k > 1$ la serie diverge
- per $k = 1$ non è possibile stabilire il carattere della serie

Criterio del rapporto - d'Alembert. Data una serie a termini non negativi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per la quale esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$, allora

- se B è convergente e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in (0, +\infty)$, allora A è convergente
- se B è divergente e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, allora A è divergente

Criterio di Raabe.

Criterio dell'integrale.

- …

Dimostrazioni

Serie a termini discordi

- **Criterio di convergenza assoluta.**
- …

17.2.2 Esempi

Serie armonica, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

La serie armonica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ ,$$

è una serie divergente. Non è difficile dimostrare che la serie è sempre crescente e non è limitata superiormente: infatti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \dots \ ,$$

la somma dei primi 2^N termini della serie è maggiore di $1 + \frac{N}{2}$, $\sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{n} > 1 + \frac{N}{2}$.

Serie geometrica, $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

La serie risulta convergente per $|a| < 1$. Infatti

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a^n = 1 + a \sum_{n=0}^{N} - a^{N+1} = 1 - a^{N+1} + a\, S_N$$

$$S_N = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a} \ .$$

- per $|a| < 1$, $S = \lim_{N \rightarrow \infty} = \frac{1}{1-a}$
- per $a \geq 1$, $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = +\infty$
- per $a < 1$, …

Serie telescopiche, $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1})$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1}) = A_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

Serie di Mengoli, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

La serie di Mengoli è un esempio di serie telescopica, con

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

e quindi la serie risulta convergente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 1 \ .$$

e di Eulero o di Nepero, $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

converge a un numero irrazionale e, che viene definito il **numero di Eulero o di Nepero**, e il cui valore approssimato è

$$e = 2.718281828\text{"e poi la magia finisce"} \ ,$$

cioè le cifre decimali successive non sono periodiche.

Si può dimostrare la convergenza della serie, ad esempio usando il criterio del rapporto di d'Alembert per le serie a termini concordi, dimostrando che il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \ ,$$

è finito e quindi la serie è convergente.

In particolare, usando la serie geometrica con $a = \frac{1}{2}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

e confrontandola termine a termine con la serie di e,

$$\begin{aligned} 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \\ e := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3!}}_{<\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{4!}}_{<\frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{5!}}_{<\frac{1}{16}} + \cdots < 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 \end{aligned}$$

si può trovare la relazione $e < 3$.

todo *come trovare stime di maggiorazione più restrittive? come trovare approssimazioni di e? Cenni al calcolo del valore numerico? Sì, ma anche no...*

17.3 Successioni di funzioni reali

Definizione. Una successione di funzioni tra l'insieme X e l'insieme Y, è una funzione che associa ai numeri interi $n \in \mathbb{N}$ una funzione $f_n : X \to Y$.

Limite di una successione di funzioni. Limite «punto per punto». L'esistenza di un limite (finito?) punto per punto definisice la *convergenza puntuale*.

17.3.1 Convergenza

Convergenza puntuale

Definition 16.3.1 (Convergenza puntuale)

Convergenza uniforme

Definition 16.3.2 (Convergenza uniforme)

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n : X \to \mathbb{R}$. La serie converge uniformemente alla funzione f se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ , \qquad \forall x \in X \ ,$$

per tutti gli $n > N$.

Proprietà. Sotto opportune ulteriori ipotesi (vedi W.Rudin Principles of Mathematial Analysis[1]), la convergenza uniforme permette di invertire l'ordine delle operazioni di limite, derivata e integrale con la sommatoria nelle serie di funzioni:

Convergenza uniforme e il limite

Data una successione di funzioni derivatbili $f_n(x)$, $\dots$

Convergenza uniforme e la derivata

Data una successione di funzioni derivatbili $f_n(x)$, $\dots$

$$f'(x) = g(x)$$

Convergenza uniforme e l'integrale

Data una successione di funzioni derivatbili $f_n(x)$, $\dots$

todo discutere differenze tra i due tipi di convergenza; discutere i limiti della convergenza puntuale; discutere le proprietà

[1] W.Rudin, *Principles of Mathematial Analysis*, Third Edition

17.4 Serie di funzioni reali

17.4.1 Serie polinomiali

todo *fare riferimento alle serie di Taylor e MacLaurin?*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

todo *valutare le proprietà di convergenza (e specificare gli intervalli di convergenza) di queste funzioni*

17.5 Successioni di numeri complessi

todo *Fare riferimento ad algebra complessa. La funzione e^z è necessaria a introdurre la rappresentazione polare dei numeri complessi.*

17.6 Serie di numeri complessi

todo *Fare riferimento ad algebra complessa. La funzione e^z è necessaria a introdurre la rappresentazione polare dei numeri complessi.*

17.7 Successioni di funzioni complesse

17.8 Serie di funzioni complesse

CAPITOLO 18

Trigonometria

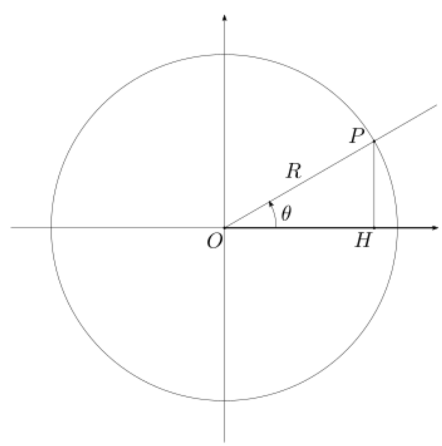
todo:list Analisi di Fourier=

18.1 Definizione delle funzioni trigonometriche e relazione fondamentale

18.1.1 Seno e coseno

Facendo riferimento a una circonferenza di raggio R, e scegliendo una semiretta di riferimento come origine per la misura degli angoli, positivi in senso orario, si possono definire le funzioni trigonometriche **seno** e **coseno**,

$$\begin{aligned} \sin\theta &:= \frac{\overline{PH}}{R} \\ \cos\theta &:= \frac{\overline{OH}}{R} \end{aligned} \tag{18.1}$$



18.1.2 Relazione fondamentale della trignometria

Usando il teorema di Pitagora è immediato dimostrare la **relazione fondamentale della trigonometria** tra le funzioni seno e coseno di un angolo,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \ . \tag{18.2}$$

Notazione.

Nell'uso delle funzioni trigonometriche, $\sin^2 x$ indica il quadrato della funzione e non la *composizione della funzione* con se stessa,

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(\sin x) \ .$$

18.1.3 Altre funzioni trigonometriche

Tangente. $\tan\theta := \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\overline{PH}}{\overline{OH}}$.

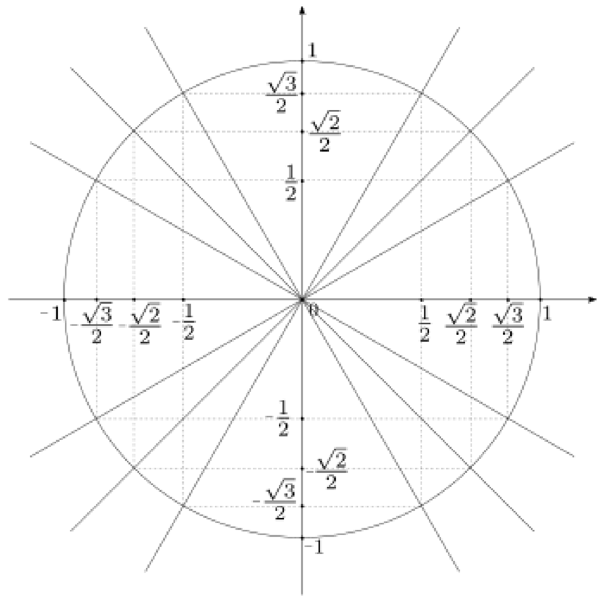
Cosecante, secante, cotangente. Definizioni al limite tra l'inutile e il dannoso,

$$\begin{aligned}
\text{cosec}\ \theta &:= \frac{1}{\sin\theta} \\
\sec\ \theta &:= \frac{1}{\cos\theta} \\
\text{cotan}\ \theta &:= \frac{1}{\tan\theta}
\end{aligned}$$

18.2 Angoli particolari e proprietà

Angoli particolari.

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\tan\theta$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	$\to\infty$



Proprietà.

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin x \\
\cos(-x) &= \cos x \\
\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \\
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x \\
\sin(x+\pi) &= -\sin x \\
\cos(x+\pi) &= -\cos x
\end{aligned}$$

18.3 Formule di somma e sottrazione

Valgono le seguenti formule per il coseno e il seno della somma e della differenza di angoli,

$$\begin{aligned}
\cos(x \mp y) &= \cos x\ \cos y \pm \sin x\ \sin y \quad (1) \\
\sin(x \mp y) &= \sin x\ \cos y \mp \cos x\ \sin y \quad (2)
\end{aligned} \tag{18.3}$$

Per completezza, come utile esercizio di geometria sulla similitudine dei triangoli, e per familiarizzare con le funzioni armoniche, si fornisce la dimostrazione della formula del coseno della somma.

Dimostrazione di $\cos(x+y) = \cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y$

Partendo dall'interpretazione geometrica del coseno di $\alpha+\beta$,

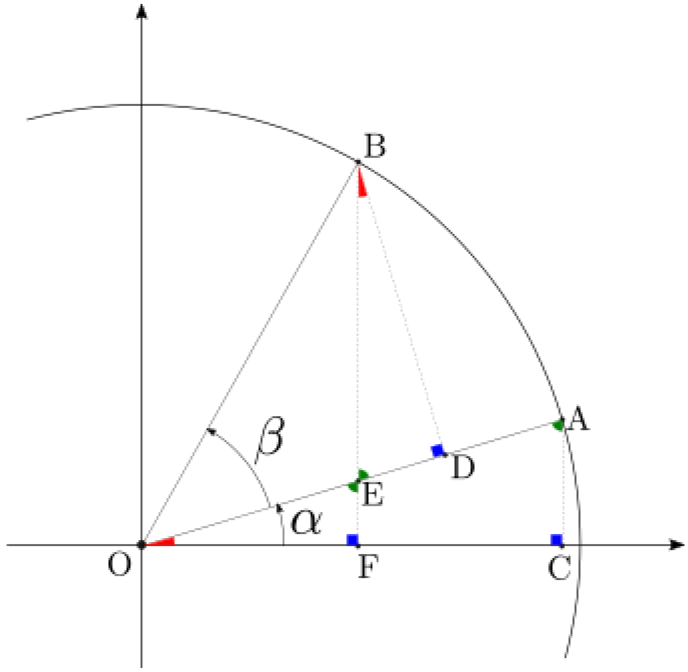
$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{OF}}{R}$$

è necessario esprimere la lunghezza del segmento OF come multiplo del raggio R.

Usando la similitudine dei triangoli OFE, OCA, e riconoscendo il coseno dell'angolo α,

$$\overline{OF} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}\overline{OE} = \cos\alpha\ \overline{OE}\ .$$

La lunghezza del segmento OE può essere scritta come differenza della lunghezza di OD e quella di ED; queste ultime due lunghezze possono essere espresse come frazioni del raggio della circonferenza $R = \overline{OB}$, grazie all'uso delle funzioni



trigonometriche e alla similitudine dei triangoli ($\overline{ED} = \sin\alpha\,\overline{BE} = \sin\alpha\,\frac{\overline{BD}}{\cos\alpha} = \sin\alpha\,\frac{\overline{OB}\sin\beta}{\cos\alpha}$),

$$\begin{aligned}\overline{OE} = \overline{OD} - \overline{ED} = \overline{OB}\cos\beta - \overline{OB}\sin\beta\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \\ = R\left(\cos\beta - \overline{OB}\sin\beta\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione di $\overline{OE}$ nell'espressione di $\overline{OF}$, si ottiene

$$\overline{OF} = \overline{OB}\left(\cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha\right)$$

dalla quale si ottiene la relazione desiderata,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha\ .$$

Example 17.3.1 ($\cos(2x)$ **e** $\sin(2x)$**)**

L'espressione di $\cos(2x)$ e $\sin(2x)$ possono essere calcolate con le formule (18.3) per le funzioni coseno e seno di unargomento che è somma di due elementi uguali, cioè ponendo $y = x$. L'espressione di $\cos(2x)$ può essere riscritta in diverse espressioni usando la relazione fondamentale della trigonometria (18.2),

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = \\ &= 2\cos^2 x - 1 = \\ &= 1 - 2\sin^2 x \sin(2x) \quad = 2\sin x\cos x\end{aligned} \tag{18.4}$$

dato che possono essere utili in parecchie circostanze per riconoscere

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right) \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)\end{aligned} \tag{18.5}$$

18.4 Werner

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right]$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y)+\sin(x+y)\right]$$

Dimostrazione di $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right]$

Usando le formule del coseno della somma e della sottrazione di una coppia di angoli,

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

sommando termine a termine si ottiene

$$\cos(x-y)+\cos(x+y) = 2\cos x \cos y\ ,$$

dalla quale risulta evidente la relazione desiderata.

18.5 Prostaferesi

Definendo $p = x - y$ e $q = x + y$ nelle formule di Werner, è immediato ricavare

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{q-p}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{q-p}{2}\right)$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{q-p}{2}\right)$$

Dimostrazione di $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{q-p}{2}\right)$

Usando la formula di Werner per il prodotto dei coseni,

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right]$$

e definendo

$$\begin{cases} x - y = p \\ x + y = q \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2x = p + q \\ 2y = q - p \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{p+q}{2} \\ y = \frac{q-p}{2} \end{cases}$$

si ottiene

$$\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{q-p}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos p + \cos q\right)\ ,$$

dalla quale è evidente la relazione desiderata.

18.6 Applicazioni utili e frequenti

18.6.1 Combinazione lineare di seno e coseno con stesso argomento

La combinazione lineare delle funzioni seno e coseno con lo stesso argomento,

$$f(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta \ ,$$

può essere riscritta in termini di una sola funzione armonica, rendendone esplicita l'ampiezza F e la differenza di fase ϕ rispetto all'argomento θ,

$$f(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta = F\cos(\theta - \varphi) \ ,$$

con ampiezza F e fase φ

$$\begin{aligned} & F = \sqrt{A^2 + B^2} \\ & \varphi \quad \text{t.c.} \quad \cos\varphi = \frac{A}{F} \ , \quad \sin\varphi = \frac{B}{F} \ . \end{aligned}$$

Dimostrazione

Per fare questo, ci si vuole riportare a una delle formule di somma o sottrazione di funzoni trigonometriche. Dai coefficienti A, B si desidera ricavare due coefficienti che possano essere rispettivamente il coseno e il seno di un angolo φ. La *relazione fondamentale della trigonometria* (18.2) richiede che la somma dei quadrati dei coseno e seno con lo stesso argomento sia uguale a 1. Serve quindi una normalizzazione dei coefficienti, dividendo i coefficienti (e moltiplicando per la stessa quantità diversa da zero per non alterare l'espressione) per la radice quadra della somma dei loro quadrati

$$f(\theta) = \sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\theta + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\theta\right] \ .$$

E" ora possibile definire un angolo φ, il cui coseno e seno sono uguali ai coefficienti,

$$\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad , \qquad \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \ ,$$

e usare la regola del coseno della differenza (18.3)(1) per poter scrivere

$$\begin{aligned} f(\theta) & = F\left[\cos\varphi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta\right] = \\ & = F\cos(\theta - \phi) \ , \end{aligned}$$

avendo definito l'ampiezza della funzione armonica $F = \sqrt{A^2+B^2}$.

18.6.2

CAPITOLO 19

Esponenziale e logaritmo

In questo capitolo si presentano le funzioni a variabile reale, $f(x) : D \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- esponenziale, $f(x) = a^x$
- logaritmo, $f(x) = \log_a x$

e successivamente le *funzioni iperboliche*

19.1 Funzione esponenziale e logaritmo di variabile reale

19.1.1 Funzione esponenziale, a^x

Nell'ambito dei numeri reali, l'elevamento alla potenza reale $x \in \mathbb{R}$ di un numero reale $a \in \mathbb{R}$,

$$a^x$$

è un'operazione ben definita per ogni valore dell'esponente x solo per base $a \geq 0$. Per ogni valore di $a \geq 0$ si può definire quindi la funzione esponenziale con base a

$$f(x) = a^x \ ,$$

che è definita per $x \in \mathbb{R}$ e ha immagine $(0, +\infty)$.

Proprietà.

- la *funzione è monotona*:
  - se $a > 1$, la funzione è monotona crescente
  - se $a = 1$, la funzione è costante e uguale a 1
  - se $a < 1$, la funzione è monotona decrescente
- la *funzione è continua*, come si vedrà nel capitolo sull'"*introduzione all'analisi*

Tra tutte le basi, la funzione esponenziale con base e di Eulero (o di Nepero) svolge un ruolo fondamentale in matematica e nelle scienze in generale, sia nell'ambito dei numeri reali sia nell'ambito dei numeri complessi, come ci sarà l'occasione di iniziare ad apprezzare nelle parti sul:

- *calcolo*: *limiti*, *derivate*, *integrali*, *equazioni differenziali*
- *numeri complessi*

Vale dunque la pena introdurre la funzione esponenziale e^x, e discuterne alcune definizioni equivalenti e proprietà fondamentali che permettono di comprendere l'origine della centralità di questa funzione in (quasi) tutti gli ambiti della matematica e delle scienze.

In questo capitolo ci si concentra sulla funzione esponenziale sul campo dei numeri reali, mentre si rimanda al capitolo sui *numeri complessi* per la definizione dell'esponenziale complesso, e al capitolo sulle *equazioni differenziali ordinarie* per le prime applicazioni fondamentali dell'esponenziale, con esponenti reali o complessi.

19.1.2 Funzione esponenziale, e^x

Definizione. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, è possibile dare diverse definizioni equivalenti della funzione esponenziale $f(x) = e^x$, che può:

1. essere intesa come l'elevamento a potenza della *e di Eulero* con la variabile indipendente x come esponente. Questa definizione «agnostica» considera e un numero con un determinato valore, approssimato 2.718281828e poi la magia finisce, tale da soddisfare le proprietà che si incontreranno nel percorso; queste proprietà sono diretta conseguenza e possono essere dimostrate grazie alle altre due definizioni equivalenti:
2. essere definita come limite della successione di funzioni $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
$$e^x := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$
3. essere definita come limite della serie di funzioni con elementi $\frac{x^n}{n!}$,
$$e^x := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!}$$

Si può dimostrare che (seguire i link per le dimostrazioni in appendice):

- la *serie è convergente* per ogni $x \in \mathbb{R}$ finito
- le due *definizioni sono equivalenti*
- le definizioni della funzione e^x giustificano la notazione e^x questa funznione poiché soddisfa le *proprietà delle potenze (*con stessa base, e*)*:
$$\begin{aligned} e^0 &= 1 \\ e^1 &= e \\ e^{x+y} &= e^x \, e^y \ . \end{aligned}$$
Una conseguenza indiretta è l'equivalenza della definizione «agnostica» 1. e delle altre due.

Tra le conseguenze principali di questa definizione

- la derivata della funzione e^x è e^x, ed è una delle *derivate fondamentali* del *calcolo differenziale*,
$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \ .$$
- l'integrale della funzione e^x è la stessa funzione
$$\int e^x \, dx = e^x + C \ ,$$

all'origine della battuta che non fa ridere **(!)** che spiega la tristezza della funzione e^x alla festa delle funzioni, con il fatto che la funzione e^x non si integra.

19.1.3 Funzione logaritmo naturale, ln x

Definizione. Poiché la base $e > 1$, la funzione e^x è monotona crescente, $e^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, e quindi esiste la sua *funzione inversa* con dominio $(0, +\infty)$ e immagine $\mathbb{R}$. La funzione inversa della funzione esponenziale con base e viene definita **logaritmo naturale**, $\ln x$. Cioè

$$x = e^y \qquad \leftrightarrow \qquad y = \ln x$$

o altrimenti, la definizione di logaritmo $\ln(e^x) = x$, può essere reinterpretata come, $f^{-1} \circ f(x) = x$, con

$$f(x) = e^x \qquad \rightarrow \qquad f^{-1}(x) = \ln x \ .$$

19.1.4 Funzioni iperboliche

Vengono definite le funzioni iperboliche

$$\begin{aligned} \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh y &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Proprietà. Simmetria:

$$\cosh(-x) = \cosh(x) \qquad , \qquad \sinh(-x) = -\sinh(x) \ .$$

Le funzioni iperboliche hanno regole analoghe - ma non identiche - alle funzioni trigonometriche, *dimostrabili* grazie alle proprietà delle potenze

- Relazione fondamentale

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

- Somma e sottrazione

$$\begin{aligned} \cosh(x \mp y) &= \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y \\ \sinh(x \mp y) &= \sinh x \cosh y \mp \cosh x \sinh y \end{aligned}$$

19.2 Problemi

19.3 Soluzioni

19.4 Note e dimostrazioni

19.4.1 Funzione esponenziale

Convergenza della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ in ogni intervallo limitato

Per dimostrare la convergenza uniforme di $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ a e^x in ogni intervallo limitato $|x| < M$, è richiesto di dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$|e^x - S_n(x)| < \varepsilon \ , \qquad \forall |x| < M$$

per tutti gli $n > N$. Bisogna quindi dimostrare che

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| < \varepsilon \ .$$

Definendo $\tilde{M} = \max\{1, M\}$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\tilde{M}^k}{k!}$$

e scegliendo $k > 2\tilde{M}$, in maniera da poter scrivere

$$\frac{\tilde{M}^k}{k!} = \frac{\tilde{M}^{2\tilde{M}}}{(2\tilde{M})!} \frac{\tilde{M}}{2\tilde{M}+1} \dots \frac{\tilde{M}}{k} < \frac{\tilde{M}^{2\tilde{M}}}{(2\tilde{M})!} 2^{-(k-\tilde{M})} = \frac{(2\tilde{M})^{2\tilde{M}}}{(2\tilde{M})!} 2^{-k}$$

e quindi

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\tilde{M}}{k!} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2\tilde{M})^{2\tilde{M}}}{(2\tilde{M})!} 2^{-k} = \frac{(2\tilde{M})^{2\tilde{M}}}{(2\tilde{M})!} 2^{-n}$$

avendo usato $\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n-1} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n-1} \cdot 2 = 2^{-n}$.

Scegliendo $N > \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{(2\tilde{M})^{2\tilde{M}}}{(2\tilde{M})!)} \right)$, per ogni $n > N$ si ha

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| < \frac{(2\tilde{M})^{2\tilde{M}}}{(2\tilde{M})!} 2^{-n} < \frac{(2\tilde{M})^{2\tilde{M}}}{(2\tilde{M})!} 2^{-N} < \varepsilon \ .$$

Equivalenza delle due definizioni

Giustificazione della notazione e^x

Per evitare la forma indeterminata nel termine 0^0, si calcola qui il limite per $x \to 0$ (**todo** *motivare la validità di questa operazione/interpretazione della funzione* e^x)

$$e^0 := \lim_{x\to 0} e^x = \lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 \ .$$

Ricordando la definizione della *e di Eulero*, è immediato verificare che il valore della serie di funzioni per $x = 1$ coincide con il valore di e

$$e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \bigg|_{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \ .$$

La serie che definisce la esponenziale soddisfa la proprietà delle potenze $e^x\, e^y = e^{x+y}$,

$$\begin{aligned}
e^x\, e^y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \frac{x^n}{n!} = && (m, n \ \rightarrow \ m, p = m+n) \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{p} \frac{y^m\, x^{p-m}}{m!(p-m!)} = \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \underbrace{\sum_{m=0}^{p} \frac{p!}{m!(p-m)!} y^m\, x^{p-m}}_{(x+y)^p} = \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x+y)^p}{p!} = \\
&= e^{x+y} \ ,
\end{aligned}$$

avendo usato il *teorema binomiale*.

19.4.2 Funzioni iperboliche

Relazione fondamentale

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

infatti

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \\
= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = 1
\end{aligned}$$

Prodotti

$$\begin{aligned}
\cosh x \cosh y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} \\
\sinh x \sinh y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} \\
\sinh x \cosh y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4}
\end{aligned}$$

Somma e differenza

$$\begin{aligned}\cosh(x+y) &= \frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2} = \\ &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh(x-y) &= \frac{e^{x-y}+e^{-x+y}}{2} = \\ &= \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2} = \\ &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sinh(x-y) &= \frac{e^{x-y}-e^{-x+y}}{2} = \\ &= \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y\end{aligned}$$

...

basics

24 mar 2025

1 min read

CAPITOLO 20

Polinomi

20.1 Fattorizzazione

todo *Fare esempi di applicazione del teorema fondamentale dell'algebra, come soluzione delle ODE lineari omogenee a coffficienti costanti*

20.1.1 Teorema fondamentale dell'algebra

Il teorema fondamentale dell'algebra afferma che ogni polinomio in una variabile complessa $z \in \mathbb{C}$ a coefficienti complessi,

$$p_n(z) = a_n z^n + \dots a_1 z + a_0 \ ,$$

ammette almeno una radice complessa, o zero. Di conseguenza, lo stesso polinomio di grado n ammette n zeri complessi e può essere fattorizzato come prodotto di monomi

$$p_n(z) = a_n (z - z_1) \dots (z - z_n) \ ,$$

essendo z_k, $k = 1 : n$, gli zeri del polinomio.

20.1.2 In campo reale

Ogni polinomio $p_n(x)$ a coefficienti reali può essere fattorizzato nel prodotto di binomi e trinomi a coefficienti reali,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0 = \\ &= a_n (x - z_1) \dots (x - z_p)(x^2 + b_1 x + c_1) \dots (x^2 + b_q x + c_q) \end{aligned}$$

con $p + 2q = n$.

20.1.3 In campo complesso

Ogni polinomio $p_n(x)$ **a coefficienti reali** può essere fattorizzato nel prodotto di n binomi coefficienti complessi,

$$\begin{aligned} p_n(x) & = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0 = \\ & = a_n (x - z_1) \dots (x - z_n) \ . \end{aligned}$$

Gli zeri di un polinomio a coefficienti costanti possono essere o reali o complessi coniugati, cioè o $z_k \in \mathbb{R}$ o se $z_k \notin \mathbb{R}$ allora anche z_k^* è uno zero del polinomio.

Esempio

Il polinomio di terzo grado $p(x) = x^3 + 1$ può essere fattorizzato come

$$\begin{aligned} p(x) = x^3 + 1 & = (x-1)\,(x^2 + x + 1) = \\ & = (x-1) \left(x - \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Il polinomio ha coefficienti reali. Gli zeri del polinomio sono o reali, come 1, o complessi coiungati come $\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^* = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

20.2 Teorema binomiale

Con esponente naturale $p \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k \, y^{p-k} \ ,$$

avendo indicato il coefficente binomiale

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

Con esponente non naturale $p \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \dots$ **todo**

basics

24 mar 2025

0 min read

CAPITOLO 21

Funzioni multi-variabile

Definition 20.1 (Funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

Una fanzione a valore reale di una variabile reale è una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che ha come dominio un sottoinsieme A delle n-uple di numeri reali e codominio $\mathbb{R}$, cioè una relazione che associa a ogni elemento $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ uno e un solo elemento

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \ .$$

CAPITOLO 22

Algebra complessa

Esistono collegamenti a questo capitolo da:

- la sezione sui *numeri complessi* nel capitolo sugli *insiemi numerici*
- la sezione sull"*algebra sui numeri complessi* nel capitolo sull"*algebra*

In questa sezione viene definito l'insieme dei numeri complessi e alcune operazioni su di essi che permettono di introdurre l'algebra complessa. L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è l'insieme di quei numeri che possono essere scritti come

$$z = x + iy \ ,$$

dove $x, y \in \mathbb{R}$ e i è l'unità immaginaria definita come $i = \sqrt{-1}$.

I numeri reali sono sottoinsieme dei numeri complessi, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, composto da quei numeri complessi con parte immaginaria nulla. La definizione di operazioni e funzioni - come l'esponenziale - sui numeri complessi viene costruita come **estensione ai numeri complessi** delle definizioni di tali operazioni e funzioni sui numeri reali. Quando le funzioni e le operazioni vengono definite per i numeri complessi vengono applicate a numeri reali, si ritrovano le definizioni e i risultati già noti sull'insieme dei numeri reali.

I numeri complessi risultano utili in molti ambiti della matematica e della scienza, dalla fisica all'ingegneria:

- teorema fondamentale dell'algebra
- rappresentazione efficace delle funzioni trigonometriche, grazie all'identità di Eulero
- soluzione di equazioni differenziali
- …

22.1 Definizioni

I numeri complessi estendono il campo dei numeri reali, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Viene inizialmente definita l'"**unità immaginaria**, i, come la radice quadra di -1,

$$i := \sqrt{-1}\ ,$$

todo *discutere la definizione, facendo riferimento alle* **potenze**

Definition 21.1.1 (Numeri complessi - rappresentazione cartesiana)

L'insieme dei numeri complessi, indicato con $\mathbb{C}$, è l'insieme di quei numeri che possono essere scritti come

$$z = x + iy\ ,$$

con $x,\ y \in \mathbb{R}$. Il numero x viene definito *parte reale*, il numero y *parte immaginaria*.

22.2 Operazioni con i numeri complessi - in forma cartesiana

- somma: $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- prodotto: $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
- potenza con esponente naturale, $n \in \mathbb{N}$: $z^n = (x + iy)^n = \underbrace{(x+iy)\dots(x+iy)}_{n\text{ volte}}$
- complesso coniugato: $z^* := (x + iy)^* = x - iy$
- modulo: $|z| := \sqrt{z^* z} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Example 21.2.1 (Prime operazioni con i numeri complessi)

Dati i due numeri complessi $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -1 + 3i$,

- la loro somma è

$$z_1 + z_2 = (3 - 2i) + (-1 + 3i) = (3 - 1) + (-2 + 3)i = 2 + i$$

- il loro prodotto è

$$\begin{aligned} z_1\, z_2 = (3-2i)(-1+3i) &= (3 \cdot (-1) + 3 \cdot (3i) - 2i \cdot (-1) - 2i \cdot (3i)) = \\ &= (-3 + i(9+2) - 2 \cdot 3\, \underbrace{i^2}_{-1}) = 3 + 11i \end{aligned}$$

- la potenza cubica di z_1 è

$$z_1^3 = z_1\, z_1\, z_1 = (3-2i)(3-2i)(3-2i) = (5 - 12i)(3 - 2i) = -9 - 46i$$

- il complesso coniugato di z_1 è

$$z_1^* = 3 + 2i$$

- il modulo di z_1 è

$$|z_1| = \sqrt{z_1^* z_1} = \sqrt{(3+2i)(3-2i)} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}\ .$$

22.3 Formula di de Moivre, esponenziale complesso e formula di Eulero

La formula di **de Moivre** è la relazione

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx) \ , \quad n \in \mathbb{Z} \ , \tag{22.1}$$

per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$. In appendice la *dimostrazione della formula di de Moivre*.

L"**esponenziale di un numero complesso**, $z \in \mathbb{C}$, è definito estendendo la definizione di esponenziale per i numeri reali ai numeri complessi

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n \tag{22.2}$$

Data questa definizione di esponenziale complesso, si può dimostrare la **formula di Eulero**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \ , \tag{22.3}$$

con $\theta \in \mathbb{R}$. Vengono riportate in appendice due *dimostrazioni della formula di Eulero*, una usando la definizione di esponenziale complesso e la formula di de Moivre, l'altra usando le serie di Taylor.

Grazie alla formula di Eulero e alle proprietà elementari delle funzioni trigonometriche, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, con $\theta \in \mathbb{R}$, segue

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned} \tag{22.4}$$

22.4 Rappresentazione dei numeri complessi nel piano complesso (Argand-Gauss)

Ogni numero complesso $z \subset \mathbb{C}$ può essere associato a un punto del piano complesso $\mathbb{C}$; l'uso di coordinate cartesiane o polari per la descrizione dei punti del piano $\mathbb{R}^2$ suggerisce due tipi di rappresentazioni per un numero complesso:

- la **rappresentazione cartesiana** associa l'asse delle ascisse alla parte reale x e l'asse delle ordinate alla parte immaginaria y,

  $$z = x + iy$$

- la **rappresentazione polare**; usando la legge di trasformazione tra coordinate polari (r, θ) e coordinate cartesiante (x, y)

  $$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

  e la *formula di Eulero*, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, è possibile scrivere un numero complesso in forma polare,

  $$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = re^{i\theta} \ .$$

Nota: Le due rappresentazioni non sono equivalenti. Mentre la rappresentazione cartesiana permette di creare una relazione biunivoca tra i numeri complessi $z = x + i\,y$ e i punti nel piano $(x,\ y)$, la rappresentazione polare assegna infiniti numeri complessi, seppur di uguale valore $r\,e^{i\theta} = r\,e^{i(\theta + n\,2\pi)}$, con $n \in \mathbb{Z}$ allo stesso punto nello spazio.

22.5 Operazioni con i numeri complessi

Si rivisitano ora le operazioni già presentate, mostrando la convenienza della rappresentazione polare per prodotti e potenze.

22.5.1 Somma e prodotto

Somma. La somma di due numeri complessi è il numero complesso

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Prodotto. Il prodotto tra due numeri complessi $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, è il numero complesso $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$ che può essere calcolato usando la proprietà distributiva tra somma e prodotto e la proprietà degli esponenti,

$$\begin{aligned} z_1\, z_2 = r_1\, r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \\ = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

22.5.2 Complesso coniugato e modulo

Complesso coniugato. Il complesso coniugato z^* di un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è il numero complesso con stessa parte reale e parte immaginaria opposta. Analogamente ha stesso modulo e argomento (definito tra $-\pi$ e π) opposto

$$z^* := x - iy = re^{-i\theta}$$

E" immediato *verificare* le seguenti identità

$$\begin{aligned} \text{re}\{z\} = x = \frac{z + z^*}{2} \\ \text{im}\{z\} = y = \frac{z - z^*}{2i} \end{aligned} \tag{22.5}$$

Valore assoluto. Il valore assoluto di un numero complesso è uguale a

$$\begin{aligned} |z| := \sqrt{z^* z} = \\ = \sqrt{(x - iy)(x + iy)} = \sqrt{x^2 + y^2} = \\ = \sqrt{re^{-i\theta} re^{i\theta}} = r \end{aligned}$$

22.5.3 Potenze e radici

Potenza. Si presenta l'elevamento a potenza di un numero complesso,

$$z = Ae^{i(\alpha + 2\pi n)} \ , \quad n \in \mathbb{Z} \ ,$$

ricordando l'arbitrarietà nella rappresentazione in forma polare. Si rimanda all'appendice per il caso generale, mentre qui si presentano i casi con:

Potenza intera, $p \in \mathbb{Z}$.

$$z^p = A^p e^{i(p\alpha + 2\pi n p)} = A^p e^{i(p\alpha+2\pi m)} \ , \quad m \in \mathbb{Z}$$

Radici o potenza $\frac{1}{p}, \ p \in \mathbb{Z}$

La radice p-esima intera, $p \in \mathbb{Z}$, di un numero complesso può essere interpretata come la potenza con esponente $\frac{1}{p}, \ p \in \mathbb{Z}$,

$$z^{\frac{1}{p}} = \left(r e^{i(\theta + n 2\pi)} \right)^{\frac{1}{p}} = r^{\frac{1}{p}} e^{i\left(\frac{\theta}{p} + 2\pi \frac{n}{p}\right)} \ , \quad n = \{0, 1, \dots, p-1\}$$

e quindi corrisponde ai p numeri complessi con modulo $r^{\frac{1}{p}}$ e argomenti $\frac{\theta}{p} + 2\pi \frac{n}{p}$.

Potenza razionale

La potenza con esponente razionale, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $\frac{p}{q} = r + \frac{p'}{q}$, con $p' < q$ e $\frac{p'}{q}$ irriducibile, è ben definita per ogni numero complesso a differenza di quanto accade sui numeri reali.

$$z^{\frac{p}{q}} = A^{\frac{p}{q}} e^{i \frac{p}{q}(\alpha + 2\pi n)} = A^{\frac{p}{q}} e^{i(\frac{p}{q}\alpha + \frac{p'}{q} 2\pi n)}$$

Esistono quindi q risultati distinti per $n \in \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$.

22.5.4 Altre operazioni

Potenza con esponente irrazionale. La potenza di un numero complesso z^p con esponente reale irrazionale $p \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ produce gli infiniti numeri complessi con modulo r^p e *argomento* $p\theta + 2\pi n p$ *qualsiasi, per* $n \in \mathbb{Z}$

Potenza qualsiasi. Per la discussione di una *potenza qualsiasi* di un numero complesso si rimanda alla sezione sulle funzioni di variabile complessa in appendice.

Esponenziale. Per la discussione dell'"*esponenziale complesso* si rimanda alla sezione sulle funzioni di variabile complessa in appendice.

Logaritmo. Per la discussione del *logaritmo complesso* si rimanda alla sezione sulle funzioni di variabile complessa in appendice.

22.6 Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni polinomio a coefficienti reali (**todo** o anche complessi) di grado n, $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$ può essere fattorizzato come prodotto di n binomi

$$p_n(x) = a_n (x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_n) \ ,$$

e i numeri $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1 : n$, sono chiamati **zeri** del polinomio.

Come diretta conseguenza, ogni equazione polinomiale di grado n, $p_n(x) = 0$, ammette n soluzioni complesse coincidenti con gli zeri z_k del polinomio $p_n(x)$.

22.7 Numeri complessi e geometria nel piano euclideo

La *rappresentazione cartesiana* dei numeri complessi $z = x + iy$ crea un legame biunivoco tra i numeri complessi e i punti di un piano. Quindi è possibile affrontare la geometria analitica nel piano usando i numeri complessi:

22.7.1 Posizione di un punto nel piano

Una volta scelto un sistema di coordinate regolari, la posizione di un punto P nel piano è identificata dai valori delle sue coordinate. Utilizzando un sistema di coordinate cartsiane o polari il punto P è identificato dalle coppie di valori x_P, y_P o r_P, θ_P rispettivamente. Associando l'asse x all'asse dei numeri reali e l'asse y all'asse dei numeri immaginari, si può associare il punto $P \equiv (x_P, y_P)$ in maniera biunivoca al numero complesso $z_P = x_P + iy_P$, mentre alle coordinate polari corrisponde la rappresentazione polare,

$$z_P = x_P + iy_P = re^{i\theta} \ .$$

22.7.2 Distanza tra punti

La distanza tra due punti nel piano può essere facilmente calcolata usando le coordiante cartesiane dei punti, tramite il teorema di Pitagora,

$$|P_2 - P_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \ ,$$

ed equivale al valore del numero complesso $z_2 - z_1$,

$$|z_2 - z_1|^2 = ((x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1))^*((x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

22.7.3 Curva nel piano

Una curva nel piano può essere rappresentata in forma esplicita, implicita o parametrica. Usando i numeri complessi,

- la forma implicita dell'equazione di una curva è una relazione della forma $F(z) = 0$, $F_c(x, y) = 0$ o $F_p(r, \theta) = 0$, ossia una funzione che lega i due parametri che definiscono un numero complesso, come per esempio parte reale e immaginaria o modulo e argomento; in alcuni casi, è possibile esprimere uno di questi parametri in funzione dell'altro nella forma esplicita
- la forma parametrica dell'equazione di una curva può essere espressa come un numero complesso funzione di un parametro, come ad esempio

  $$z(s) = x(s) + iy(s) = r(s)e^{i\theta(s)} \ .$$

  Questo equivale a fornire l'espressione parametrica della curva in termini delle coordinate cartesiane o polari.

22.7.4 Intersezioni di curve

Date due curve espresse in forma parametrica, $\gamma_1 : z_1(s)$, $\gamma_2 : z_2(r)$, gli eventuali punti di intersezione soddisfano la condizione $z_1(\bar{s}) = z_2(\bar{r})$, cioè si ricerca il valore dei parametri s, r per i quali i punti delle curve hanno le stesse coordinate.

Se le curve sono espresse in forma implicita, $\gamma_1 : F_1(z) = 0$, $\gamma_2 : F_2(z) = 0$, il problema della ricerca delle intersezioni si riduce alla soluzione del sistema di due equazioni in due incognite (due incognite poiché un numero complesso z è identificato da due parametri) per trovare il valore dei numeri complessi $\bar{z}$ tali che

$$\begin{cases} F_1(\bar{z}) & = 0 \\ F_2(\bar{z}) & = 0 \end{cases}$$

22.7.5 Retta nel piano

Definizione 1 - Passaggio per un punto e una direzione. E" facile definire la retta passante per un punto con una direzione data in forma parametrica,

$$z(s) = z_0 + sv \ ,$$

con $z_0 = x_0 + iy_0$ nummero complesso che identifica il punto P_0 e $v = v_x + iv_y$ numero complesso che identifica la direzione della retta $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$.

Definizione 2 - Luogo dei punti equidistante da due punti distinti. La definizione può essere tradotta nell'equazione in forma implicita,

$$|z - z_1| = |z - z_2| \ ,$$

l'uguaglianza della distanza dei punti della retta identificati dai numeri complessi z dai due punti scelti, identificati dai numeri complessi z_1, z_2.

22.7.6 Posizioni reciproche rette, distanza punto-retta, coniche ed altro

In questo capitolo non si continua lo studio in maniera sistematica della geometria nel piano usando i numeri complessi.

Ci si limita a:

- ricordare che le coordinate cartesiane e polari possono essere ricondotte a un numero complesso

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = \text{re}\{z\} \\ y = r\sin\theta = \text{im}\{z\} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} r = |z| \\ \theta = \arg\{z\} \end{cases}$$

- osservare che, dati i due numeri complessi $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, il prodotto $z_1^* z_2$ contiene sia l'espressione del prodotto interno sia del prodotto vettore dei due vettori $\vec{v}_1 = x_1\hat{x}_1 + y_1\hat{y}_1$, $\vec{v}_2$,

$$\begin{aligned} z_1^* z_2 &= (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) = \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1) = \\ &= \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + i\hat{z} \cdot \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \end{aligned}$$

- le equazioni delle coniche possono essere ricavate:
  - dalle definizioni in termini di distanza di punti dai fuochi
    - circonferenza: $|z - z_0| = R$
    - parabola: $|z - z_0| = |\text{im}\{z\} - y_d|$, con direttrice parallela ad asse x, $z_d = iy_d$
    - ellisse: $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$
    - iperbole: $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$
  - in termini di eccentricità, $\frac{\text{dist}(P,F)}{\text{dist}(P,d)} = e$

    $$\frac{|z - z_F|}{|\text{re}(z) - x_d|} = e \ ,$$

    con fuoco in F e direttrice parallela all'asse y, $d : x = x_d$.

todo *rimandare a esercizi*

22.8 Equazioni e disequazioni con i numeri complessi

Le equazioni e le disequazioni con i numeri complessi possono essere ricondotti a problemi che coinvolgono una coppia di variabili reali, tipicamente le componenti reale e immaginaria, o il modulo e l'argomento, che descrivono il piano dei numeri complessi.

todo

22.9 Problemi

22.9.1 Definizioni

todo

22.9.2 Rappresentazione dei numeri complessi nel piano complesso (Argand-Gauss)

Exercise 21.9.1

1. Rappresenta il numero complesso $z = 3 + 4i$ nel piano complesso e calcola il modulo e l'argomento.
2. Converti il numero complesso $z = 1 - i$ in forma polare.
3. Determina la forma cartesiana di $z = 4\text{cis}\frac{\pi}{3}$.
4. Calcola il prodotto di $z_1 = 2\text{cis}\frac{\pi}{4}$ e $z_2 = 3\text{cis}\frac{\pi}{6}$, e rappresenta il risultato in forma polare.
5. Trova le radici cubiche di $z = 8$ e rappresentale nel piano complesso.

22.9.3 Operazioni con i numeri complessi

Exercise 21.9.2 (Parte reale e parte immaginaria)

Dimostrare le relazioni (22.5)

$$\begin{aligned} \text{re}\{z\} &= \frac{z + z^*}{2} \\ \text{im}\{z\} &= \frac{z - z^*}{2i} \end{aligned}$$

Soluzione

Dato il numero $z = \mathrm{re}\{z\} + i\mathrm{im}\{z\} = x + iy$,

$$\frac{z+z^*}{2} = \frac{x+iy+x-iy}{2} = \frac{2x}{2} = x = \mathrm{re}\{z\}$$
$$\frac{z-z^*}{2i} = \frac{x+iy-x+iy}{2i} = \frac{i2y}{2i} = y = \mathrm{im}\{z\}$$

22.9.4 Teorema fondamentale dell'algebra

Exercise 21.9.3

1. Dimostra che $z^2 + 1 = 0$ ha due soluzioni complesse e determinane i valori.
2. Risolvi $z^3 - 8 = 0$ e rappresenta le radici nel piano complesso.
3. Determina tutte le radici quarte di $z = 16$ in forma polare.
4. Trova i valori di z tali che $z^4 = 81\mathrm{cis}\frac{\pi}{2}$.
5. Verifica che il prodotto delle radici di $z^3 + 27 = 0$ è uguale a -27.
6. Risolvi $z^5 + z^3 - z + 1 = 0$ per $z \in \mathbb{C}$.
7. Dimostra che $z = i$ è una radice di $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ e trova le altre radici.
8. Calcola le soluzioni di $z^6 - 64 = 0$ in forma esponenziale.
9. Trova le radici di $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ e verifica che soddisfano l'equazione.
10. Determina la radice principale di $z = \sqrt[3]{-8}$ in forma polare.

22.9.5 Numeri complessi e geometria nel piano euclideo

Exercise 21.9.4

1. Disegna il punto $z = 2 + 3i$ e calcola la distanza dall'origine.
2. Trova il punto medio del segmento che collega $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 3 + 4i$.
3. Verifica che i punti $z_1 = 0$, $z_2 = 3 + 4i$, e $z_3 = 6 + 0i$ formano un triangolo rettangolo.
4. Trova l'equazione del cerchio con centro $z = 2 + i$ e raggio 3.
5. Dimostra che la distanza tra $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = -1 + 2i$ è $\sqrt{10}$.
6. Rappresenta graficamente la regione definita da $|z - 1| < 2$.
7. Determina il luogo geometrico di z per cui $|z - 2i| = |z + 2i|$.
8. Disegna e descrivi il luogo geometrico definito da $\mathrm{Re}(z) = 2$.
9. Trova il punto z nel piano complesso che soddisfa $|z - 1| = 3$ e $\mathrm{Im}(z) > 0$.
10. Dimostra che i punti $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$, e $z_3 = 0$ sono collineari.

22.9.6 Equazioni e disequazioni con i numeri complessi

Equazioni

Soluzioni.

Exercise 21.9.5 (Equazioni)

Risolvere le seguenti equazioni

1. Risolvi $|z| = 2$ e rappresenta graficamente le soluzioni.
2. Trova i numeri complessi z che soddisfano $z + \overline{z} = 2$.
3. Risolvi $z^2 - 2z + 5 = 0$ e calcola il modulo delle soluzioni.
4. Risolvi $|z - 3 + 1| = 2$ e rappresenta graficamente le soluzioni.
5. Trova i valori di z per cui $z^3 = 27$.
6. Risolvi $(z - 1)^4 + 16 = 0$ e rappresenta graficamente le soluzioni nel piano complesso.
7. Risolvi $|z - 2| = |z + 1|$ e descrivi il luogo geometrico delle soluzioni.
8. Trova le soluzioni di $z^5 - 32 = 0$ e rappresentale in forma polare.
9. Determina i numeri complessi z per cui $|z|^2 + |z - 2|^2 = 8$.
10. Risolvi $|z + i| = 3$ per $z \in \mathbb{C}$.
11. $z^2 + 4 = 0$
12. $z^2 - 2z + 5 = 0$
13. $z^3 + 8 = 0$
14. $|z - 2 - i| = 2$
15. $|z - 2 - i| = |z - 1|$
16. $z + \bar{z} = 1$

Disequazioni

Soluzioni.

Exercise 21.9.6 (Disequazioni)

1. Trova i numeri complessi z che soddisfano $|z| < 3$.

2. Determina z per cui $|z - 2| \geq 4$.

3. Risolvi $|z + i| \leq 2$.

4. Trova z tali che $\text{Re}(z) > \text{Im}(z)$.

5. Risolvi $|z - 1| > |z + 1|$.

6. Determina il luogo geometrico di z per cui $|z| - |z - 2| \leq 1$.

7. Risolvi $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) \leq 2$.

8. Trova z tali che $|z| + |z - 1| \leq 5$.

9. Trova z tali che $|z+i|+|z-1| \leq 5$.

10. Risolvi $|z-i| \geq |z+2|$.

11. Determina il luogo geometrico di z per cui $|z|-|z-2| \leq 3$.

Sistemi di equazioni

Soluzioni.

Exercise 21.9.7 (Sistemi di equazioni)

1. Risolvi il sistema:
$$\begin{cases} z+\overline{z}=6 \\ |z|=5 \end{cases}$$
2. Trova z_1 e z_2 che soddisfano il sistema:
$$\begin{cases} |z_1|=3 \\ z_1 z_2=9 \end{cases}$$
3. Risolvi il sistema:
$$\begin{cases} z^2+w^2=5 \\ zw=4 \end{cases}$$
4. Determina le soluzioni del sistema:
$$\begin{cases} |z|=4 \\ z+\overline{z}=6 \end{cases}$$
5. Risolvi il sistema:
$$\begin{cases} z^3+w=1 \\ zw^3=-1 \end{cases}$$
6. Trova z e w per il sistema:
$$\begin{cases} z^2+w^2=7 \\ z+w=3 \end{cases}$$
7. Risolvi il sistema:
$$\begin{cases} |z|=2 \\ z+w=0 \end{cases}$$
8. Trova z e w che soddisfano il sistema:
$$\begin{cases} zw=1 \\ z-w=i \end{cases}$$
9. Determina le soluzioni del sistema:
$$\begin{cases} z^2+\overline{z}^2=8 \\ z\cdot\overline{z}=9 \end{cases}$$
10. Risolvi il sistema:
$$\begin{cases} z+w=5+i \\ z\cdot w=6-i \end{cases}$$

22.10 Problemi - soluzioni

22.10.1 Definizioni

22.10.2 Rappresentazione dei numeri complessi nel piano complesso (Argand-Gauss)

22.10.3 Operazioni con i numeri complessi

Soluzione degli *esercizi sulle operazioni con i numeri complessi*.

22.10.4 Teorema fondamentale dell'algebra

Soluzione degli *esercizi sul teorema fondmaentale dell'algebra*.

22.10.5 Numeri complessi e geometria nel piano euclideo

Soluzione degli *esercizi sui numeri complessi e la geometria nel piano euclideo*.

22.10.6 Equazioni e disequazioni con i numeri complessi

Equazioni

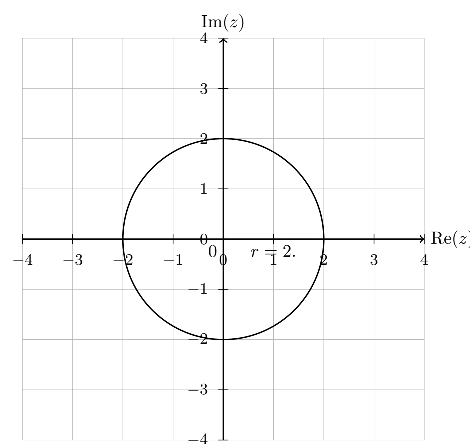
Soluzione degli *esercizi su equazioni con i numeri complessi*

1. Risolvere $|z| = 2$.

Esistono infinite soluzioni del problema, e sono tutti i numeri complessi con modulo 2 e argomento arbitrario,

$$z = 2e^{i\theta} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \ . \tag{22.6}$$

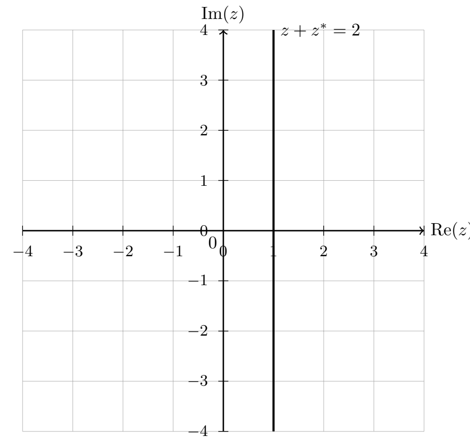
Interpretazione grafica. L'equazione corrisponde all'equazione di una circonferenza di raggio 2 centrata nell'origine.



2. Trova i numeri complessi z che soddisfano $z + \overline{z} = 2$.

$$2\mathrm{re}z = 2 \tag{22.7}$$

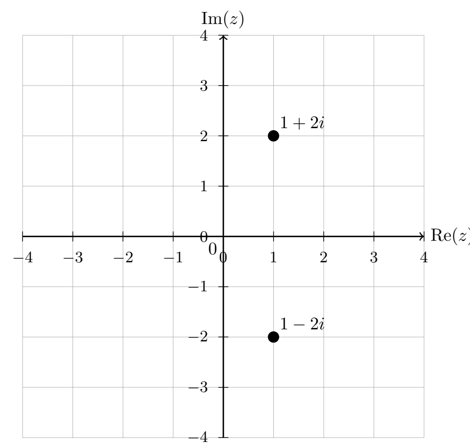
$$\mathrm{re}z = 1 \tag{22.8}$$



3. Risolvi $z^2 - 2z + 5 = 0$ e calcola il modulo delle soluzioni.

Usando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado,

$$z = 1 \mp \sqrt{1-5} = 1 \mp i2 \tag{22.9}$$



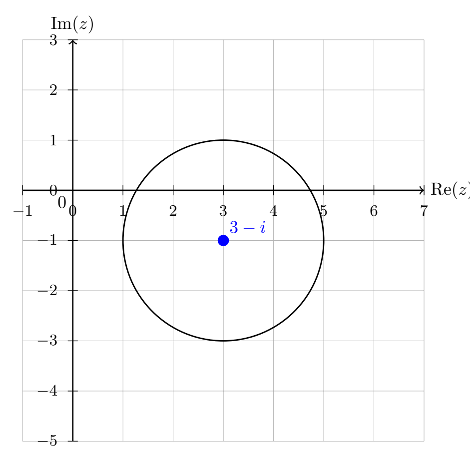
Verifica.

$$\begin{array}{r} z^2 = (1 \mp i2)^2 = -3 \mp i4 \\ -2z = -2(1 \mp i2) \\ +5 = 5 \\ \hline = (-3 - 2 + 5) + i(\mp 4 \pm 4) = 0 \end{array} \tag{22.10}$$

$$\mathrm{re}z = 1 \tag{22.11}$$

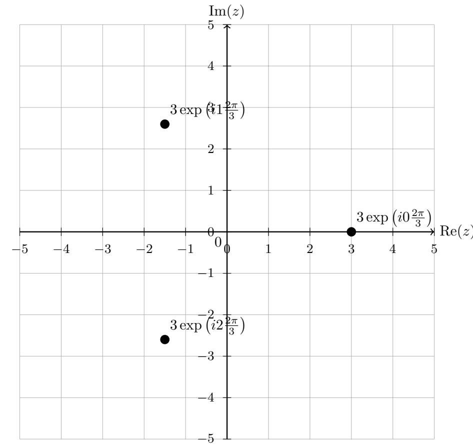
4. Risolvi $|z - 3 + i| = 2$ e rappresenta graficamente le soluzioni.

...



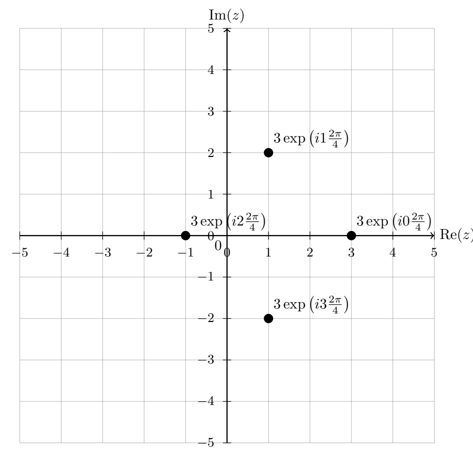
5. Trova i valori di z per cui $z^3 = 27$.

...



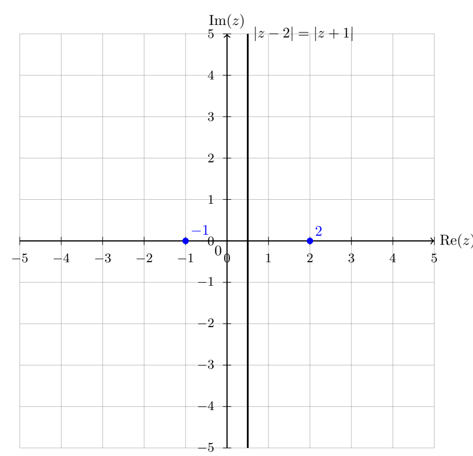
6. Risolvi $(z-1)^4 + 16 = 0$ e rappresenta graficamente le soluzioni nel piano complesso.

...



7. Risolvi $|z-2| = |z+1|$ e descrivi il luogo geometrico delle soluzioni.

...



8. Trova le soluzioni di $z^5 - 32 = 0$ e rappresentale in forma polare.

9. Determina i numeri complessi z per cui $|z|^2 + |z-2|^2 = 8$.

10. Risolvi $|z+i|=3$ per $z \in \mathbb{C}$.

11. $z^2+4=0$

12. $z^2-2z+5=0$

13. $z^3+8=0$

14. $|z-2-i|=2$

15. $|z-2-i|=|z-1|$

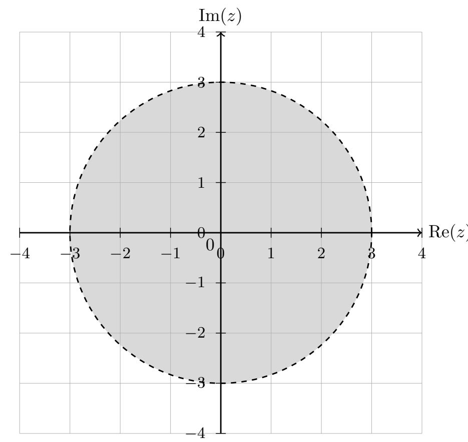
16. $z+\bar{z}=1$

Disequazioni

Soluzione degli *esercizi su disequazioni con i numeri complessi*

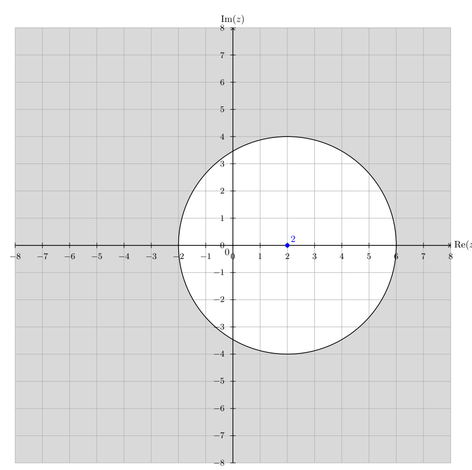
1. Trova i numeri complessi z che soddisfano $|z|<3$.

...



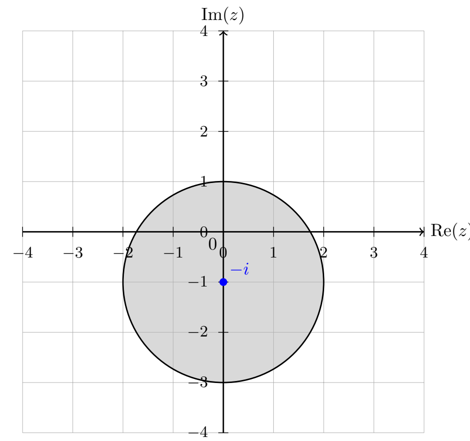
2. Determina z per cui $|z-2| \geq 4$.

...



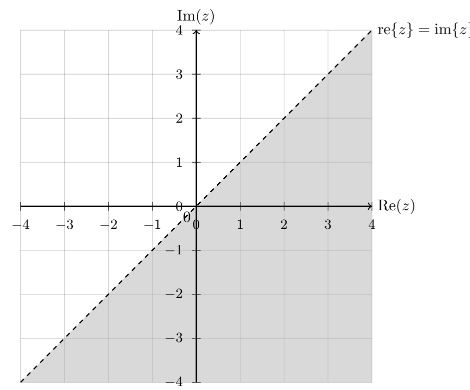
3. Risolvi $|z+i| \leq 2$.

...



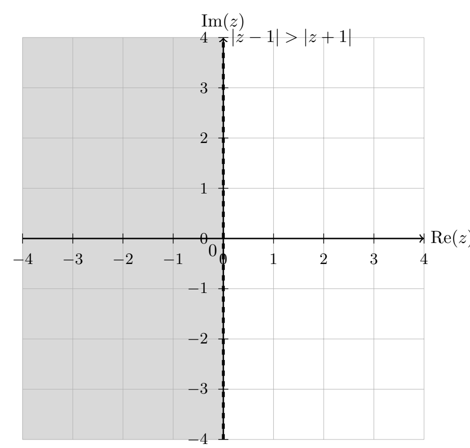
4. Trova z tali che $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z)$.

...



5. Risolvi $|z-1| > |z+1|$.

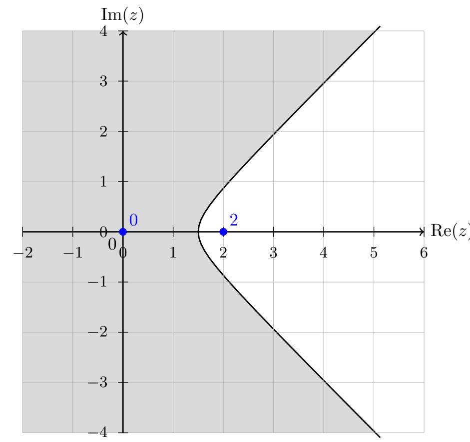
...



6. Determina il luogo geometrico di z per cui $|z| - |z-2| \leq 1$.

La condizione corrisponde alla ricerca dei punti del piano in una zona del piano delimitata da un ramo dell'iperbole con fuochi $F_1 \equiv (0,0)$, $F_2(2,0)$ e con differenza delle distanze $2a = 1$. La distanza dei due fuochi è $2c = 2$. I coefficienti che definiscono l'iperbole sono quindi

$$a = \frac{1}{2}\,, \quad c = 1\,, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \tag{22.12}$$



il centro è $C \equiv (1,0)$ e l'eccentricità $e = \frac{c}{a} = 2 > 1$. Le coordinate dei punti dell'iperbole possono essere scritte in forma parametrica come

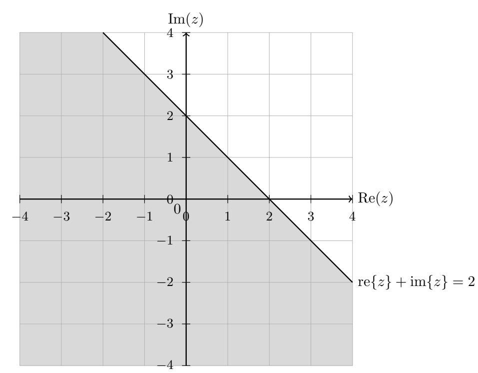
$$P - C = \hat{x} a \cosh\theta + \hat{y} b \sinh\theta \tag{22.13}$$

o usando i numeri complessi,

$$z(\theta) = 1 + a\cosh\theta + ib\sinh\theta \tag{22.14}$$

7. Risolvi $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) \leq 2$.

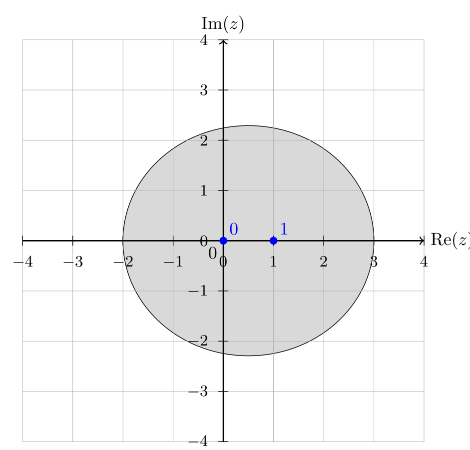
...



8. Trova z tali che $|z| + |z-1| \leq 5$.

La condizione corrisponde alla ricerca dei punti del piano contenuti nella regione delimitata dall'ellisse con fuochi $F_1 \equiv (0,0)$, $F_2(1,0)$ e con somma delle distanze $2a = 5$. La distanza dei due fuochi è $2c = 1$. I coefficienti che definiscono l'ellisse sono quindi

$$a = \frac{5}{2}\,, \quad c = \frac{1}{2}\,, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6} \tag{22.15}$$



il centro è $C \equiv \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e l'eccentricità $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{5}$. Le coordinate dei punti dell'ellisse possono essere scritte in forma parametrica come

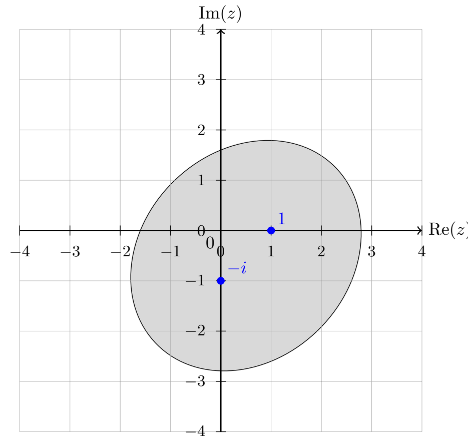
$$P - C = \hat{x} a \cos\theta + \hat{y} b \sin\theta \tag{22.16}$$

o usando i numeri complessi,

$$z(\theta) = \frac{1}{2} + a\cos\theta + ib\sin\theta \tag{22.17}$$

9. Trova z tali che $|z+i|+|z-1| \le 5$.

La condizione corrisponde alla ricerca dei punti del piano contenuti nella regione delimitata dall'ellisse con fuochi $F_1 \equiv (0,-1)$, $F_2(1,0)$ e con somma delle distanze $2a = 5$. La distanza dei due fuochi è $2c = \sqrt{2}$. I coefficienti che definiscono l'ellisse sono quindi



$$a = \frac{5}{2}\,, \qquad c = \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \qquad b = \sqrt{a^2-c^2} = \frac{\sqrt{23}}{2} \tag{22.18}$$

il centro è $C \equiv \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e l'eccentricità $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{5}$. Le coordinate dei punti dell'ellisse possono essere scritte in forma parametrica come

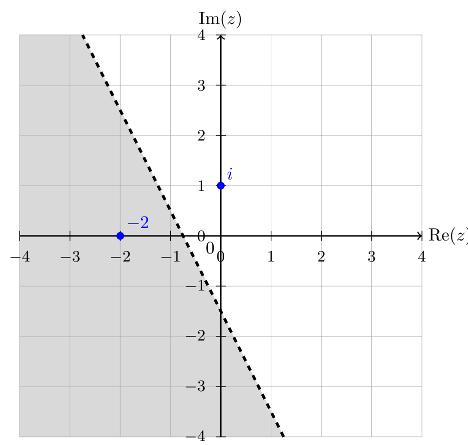
$$P - C = \hat{x} a \cos\theta + \hat{y} b \sin\theta \tag{22.19}$$

o usando i numeri complessi,

$$z(\theta) = \frac{1}{2} + a\cos\theta + i\left[-\frac{1}{2} + b\sin\theta\right] \tag{22.20}$$

10. Risolvi $|z-i| \ge |z+2|$.

...



11. Determina il luogo geometrico di z per cui $|z| - |z-2| \le 3$.

Si riorganizza l'equazione per confrontare due termini non-negativi,

$$|z| \le 3 + |z-2|\,.$$

Usando una rappresentazione cartesiana, $z = x + iy$,

$$\begin{aligned}
& x^2 + y^2 \le 9 + (x-2)^2 + y^2 + 6\sqrt{(x-2)^2+y^2} \\
& x^2 + y^2 \le 9 + x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6\sqrt{(x-2)^2+y^2} \\
& 4x - 13 \le 6\sqrt{(x-2)^2+y^2}
\end{aligned}$$

Ora, si osserva che il termine di destra è non-negativo per ogni valore di x, y. Il termine di sinistra può avere segno positivo o negativo. Si discutono quindi i due casi:

- $4x - 13 \le 0$: la disequazione è sempre soddisfatta poiché il termine di sinistra è non-positivo, il termine di destra è non-negativo e deve essere maggiore *o uguale* al termine di sinitra. Questo è quindi sempre vero, nel caso in cui $4x - 13 \le 0$

- $4x-13 > 0$: in questo caso entrambi i termini sono non negativi, e quindi si può elevare al quadrato per «eliminare» la radice quadrata.

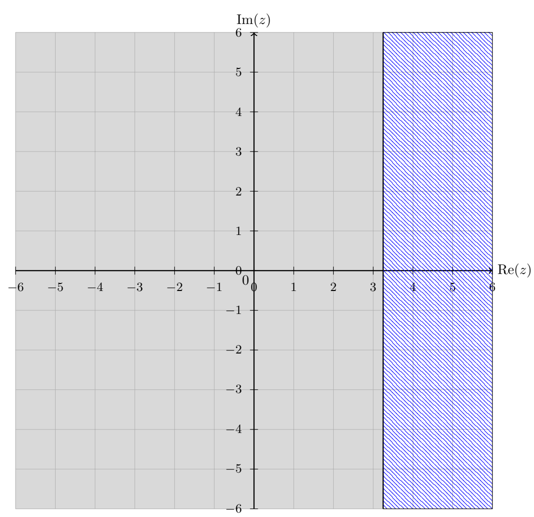
$$
\begin{aligned}
&16x^2 - 104x + 169 \leq 36x^2 - 144x + 144 + 36y^2 \\
&0 \leq 20x^2 - 40x - 25 + 36y^2 \\
&0 \leq 20(x^2 - 2x + 1) - 45 + 36y^2 \\
&\frac{(x-1)^2}{\frac{45}{20}} + \frac{y^2}{\frac{45}{36}} \geq 1 \, ,
\end{aligned}
$$

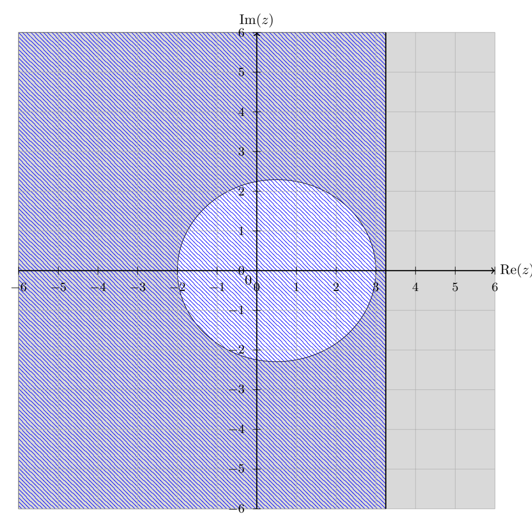
e questa disequazione è soddisfatta per tutti i punti esterni all'ellisse con centro $(1, 0)$ e semi-assi

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{\frac{45}{20}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \\
b &= \sqrt{\frac{45}{36}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

Il punto con parte reale minima per la quale la disequazione smette di essere soddisfatta è il punto estremo sul semiasse maggiore, $z = z_c + a = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$. Questo numero è minore di $\frac{13}{4}$, valore limite di x di questo secondo caso. Quindi la disequazione è sempre soddisfatta per tutti gli $x > \frac{13}{4}$.

La disequazione risulta quindi soddisfatta sempre in entrambi i casi, e quindi risulta sempre soddisfatta in tutto il piano complesso, cioè vale $\forall z \in \mathbb{C}$.





Sistemi

Soluzione degli *esercizi su sistemi di equazioni con i numeri complessi*

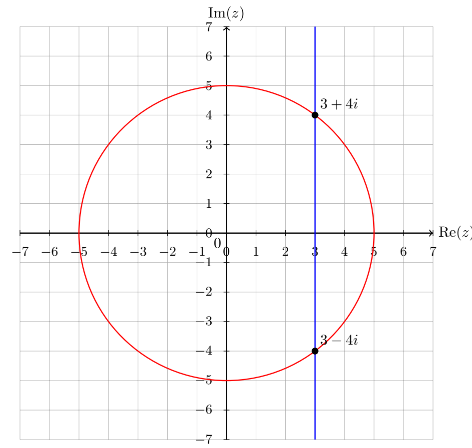
1. Risolvere $\begin{cases} z + z^* = 6 \\ |z| = 5 \end{cases}$

La prima equazione si riduce a $2\text{re}\{z\} = 6$. Usando la rappresentazione cartesiana, $z = x + iy$, il sistema può essere riscritto come

$$\begin{cases} x = 3 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \end{cases} \tag{22.21}$$

Sostituendo la prima nella seconda si trova $\sqrt{9 + y^2} = 5$; elevando al quadrato i due numeri positivi, $y^2 = 25 - 9 = 16$ e quindi $y = \mp 4$. Il problema ha quindi due soluzioni

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 - i4 \\ z_2 &= 3 + i4 \end{aligned} \tag{22.22}$$



Interpretazione grafica. Le due equazioni corrispondono all'equazione della retta di equazione $x = 3$ e della circonferenza centrata nell'origine di raggio 5. La soluzione del sistema coincide con la ricerca dei punti di intersezione di queste due curve.

2. Trova z_1 e z_2 che soddisfano il sistema:
$\begin{cases} |z_1| = 3 \\ z_1 z_2 = 9 \end{cases}$

3. Risolvi il sistema:
$\begin{cases} z^2 + w^2 = 5 \\ zw = 4 \end{cases}$

4. Determina le soluzioni del sistema:
$\begin{cases} |z| = 4 \\ z + \overline{z} = 6 \end{cases}$

5. Risolvi il sistema:
$\begin{cases} z^3 + w = 1 \\ zw^3 = -1 \end{cases}$

6. Trova z e w per il sistema:
$\begin{cases} z^2 + w^2 = 7 \\ z + w = 3 \end{cases}$

7. Risolvi il sistema:
$\begin{cases} |z| = 2 \\ z + w = 0 \end{cases}$

8. Trova z e w che soddisfano il sistema:
$\begin{cases} zw = 1 \\ z - w = i \end{cases}$

9. Determina le soluzioni del sistema:
$\begin{cases} z^2 + \overline{z}^2 = 8 \\ z \cdot \overline{z} = 9 \end{cases}$

10. Risolvi il sistema:
$$\begin{cases} z+w=5+i \\ z\cdot w=6-i \end{cases}$$

22.11 Note e dimostrazioni

22.11.1 Formula di de Moivre

Qui si dimostra la formula di de Moivre (22.1).

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)\ , \quad n\in\mathbb{Z}$$

Dimostrazione per induzione

Per $n\in\mathbb{N}$, si procede per induzione **todo** *aggiungere i capitoli sulla logica? E un riferimento ad essi?* Per $n=1$ la formula di de Moivre si riduce a un'identità. Supponiamo quindi che sia valida per un intero $n>1$ e verifichiamo se questo implica che sia valida anche per $n+1$

$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^{n+1} &= (\cos x + i\sin x)^n\,(\cos x + i\sin x) = \\ &= (\cos(nx) + i\sin(nx))\,(\cos x + i\sin x) = \\ &= \cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x + i\,(\cos(nx)\sin x + \sin(nx)\cos x) = \\ &= \cos((n+1)x) + i\sin((n+1)x)\ .\end{aligned}$$

Per $n=0$, la formula di de Moivre si riduce all'identità $1\equiv 1$.

Per $m := -n \in \mathbb{N}$, la formula di de Moivre può essere verificata usando la formula di de Moivre per $m>0$ e razionalizzando la frazione,

$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^n &= \frac{1}{(\cos x + i\sin x)^m} = \\ &= \frac{1}{(\cos(mx) + i\sin(mx))} = \\ &= \frac{\cos(mx) - i\sin(mx)}{\underbrace{\cos^2(mx) + \sin^2(mx)}_{=1}} = \cos(mx) - i\sin(mx) = \cos(nx) + i\sin(nx)\ .\end{aligned}$$

22.11.2 Esponenziale complesso

Estendendo la definizione di funzione esponenziale e^x ai numeri complessi, si può scrivere

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \tag{22.23}$$

22.11.3 Formula di Eulero

Per esponenti reali, vale

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Dimostrazione usando la definizione come limite della successione

L'esponenziale complesso può essere scritto come limite della successione con termini,

$$a_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}\right)^n$$

per $n \to +\infty$. Usando le trasformazioni tra la rappresentazione cartesiana e la rappresentazione polare

$$\begin{cases} \mathrm{re}\{a_n\} = 1 + \frac{x}{n} = r_n \cos\theta_n \\ \mathrm{im}\{a_n\} = \frac{y}{n} = r_n \sin\theta_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_n = \sqrt{\left(\mathrm{re}\{a_n\}\right)^2 + \left(\mathrm{im}\{a_n\}\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} \\ \tan\theta_n = \frac{\mathrm{im}\{a_n\}}{\mathrm{re}\{a_n\}} = \frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \frac{y}{x+n}{}_n \end{cases}$$

e la *formula di de Moivre*,

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

si può scrivere il termine a_n

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}\right)^n = \\ &= (r_n \cos\theta_n + i r_n \sin\theta)^n = \\ &= r_n^n \cdot [\cos(n\theta_n) + i \sin(n\theta_n)] \end{aligned}$$

Per $n \to \infty$, $\tan\theta_n \to 0$ e quindi vale l'approssimazione asintotica $\tan\theta_n \sim \theta_n$

$$\theta_n \sim \tan\theta_n = \frac{y}{x+n} \sim \frac{y}{n}$$

$$n\theta_n \sim y$$

mentre è possibile studiare il limite del modulo, riscrivendolo come

$$\begin{aligned} r_n^n &= \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} = \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left[1 + \left(\frac{y}{n+x}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} = \end{aligned}$$

Il primo fattore è asintotico a e^x,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \sim e^x \ .$$

Il secondo fattore, con il «completamento della definizione di esponenziale», può essere riscritto come

$$\left[1 + \left(\frac{y}{n+x}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} = \left\{\left[1 + \left(\frac{y}{n+x}\right)^2\right]^{\left(\frac{n+x}{y}\right)^2}\right\}^{\frac{ny^2}{2(n+x)^2}} \sim e^0 = 1 \ .$$

Il termine r_n^n tende quindi a e^x.

Il limite dei termini a_n della successione che definisce l'esponenziale complesso può quindi essere scritto come

$$\begin{aligned} e^z &= \lim_{n\to+\infty} a_n = \\ &= \lim_{n\to+\infty} r_n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = \quad (\lim_{n\to+\infty} r_n = e^x, \lim_{n\to+\infty} n\theta = y) \\ &= e^x\left(\cos y + i\sin y\right)\ . \end{aligned}$$

Usando la proprietà delle potenze estesa ai numeri complessi,

$$e^x\left(\cos y + i\sin y\right) = e^z = e^{x+iy} = e^x\, e^{iy}\ ,$$

dall'arbitrarietà del valore x, risulta dimostrata la formula di Eulero,

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y\ .$$

per esponenti reali $y \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione usando la definizione come serie

L'identità di Eulero può essere dimostrata (**todo** *bisogna verificare la convergenza (uniforme) delle serie?*) confrontando le *serie polinomiali di Taylor* delle funzioni $\cos x$, $\sin x$ definite sui numeri reali, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

con la serie che definisce l'esponenziale complesso,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

valutata in $z = ix \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + i\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right] = \\ &= \cos x + i\sin x\ . \end{aligned}$$

22.11.4 Altre operazioni e funzioni a variabile complessa

Potenza

Esponenziale

Logaritmo

Parte VI

Calcolo

CAPITOLO 23

Introduzione al calcolo

Il calcolo si occupa della variazione continua di grandezze matematiche che possono essere rappresentate come funzioni di variabili indipendenti.

Argomenti del capitolo

In questa sezione vengono inizialmente introdotti i concetti fondamentali dell'analisi per le funzioni reali di una variabile reale, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e successivamente vengono estesi al calcolo per funzioni reali di più variabili $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e al calcolo vettoriale su spazi euclidei per campi $f : E^n \to V$.

Introduzione all'analisi. Viene richiamato il concetto di **funzione** di variabile reale a valore reale, $f : D \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e la sua rappresentazione grafica in un piano cartesiano. Viene introdotto il concetto di **limite** per funzioni reali e viene usato per definire le **funzioni continue**. Vengono quindi presentati alcuni teoremi sulle funzioni continue e sui limiti che ne permettono il calcolo. Vengono presentate le forme indeterminate al finito e all'infinito, e calcolati i *limiti fondamentali*.

Calcolo differenziale. Usando i concetti di limite della sezione precedente, viene introdotto il concetto di **derivata** di una funzione reale, e viene data una sua interpretazione geometrica, legata alla retta tangente al grafico della funzione. Seguono alcune proprietà e teoremi sulle derivate che permettono di valutare le *derivate fondamentali* e combinare questi risultati per il calcolo della derivata di una funzione qualsiasi. Infine viene introdotto il concetto di derivate di ordine superiore, e vengono mostrate alcune applicazioni: ricerca di punti di estremo locale e di flesso nello studio di funzione, ottimizzazione, approssimazione locale tramite sviluppi in serie polinomiali

Calcolo integrale. Viene data la definizione di **integrale di Riemann** e una sua interpretazione geometrica, legata all'area sottesa dal grafico della funzione. Seguono alcune proprietà degli integrali che permettono di definire l'integrale definito e indefinito, e la primitiva di una funzione. Viene presentato il **teorema fondamentale del calcolo infinitesimale**, che permette di riconoscere l'operazione di integrazione come inversa dell'integrazione. Usando questo risultato, vengono valutati gli *integrali fondamentali*; poche regole di integrazione permettono poi di calcolare l'integrale di funzioni generiche. Infine vengono mostrate alcune applicazioni: … **todo**

Equazioni differenziali ordinarie. Vengono introdotte le equazioni differenziali ordinarie, e si cerca di trasmettere la rilevanza di queste in molti ambiti scientifici. Vengono definiti i principali problemi che coinvolgono le equazioni differenziali, e vengono presentati i metodi risolutivi di alcuni tipi particolari di ODE: le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti le equazioni differenziali separabili.

Introduzione al calcolo multi-variabile. Gli strumenti del calcolo introdotti nelle sezioni precedenti per funzioni di variabile reale a valore reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vengono qui estesi alle funzioni di più variabili reali a variabile reale, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Introduzione al calcolo vettoriale su spazi euclidei. Gli strumenti del calcolo sviluppati per le funzioni di più variabili vengono qui estesi per le funzioni scalari e vettoriali definite su spazi euclidei.

Breve storia dello sviluppo del calcolo

Gli strumenti matematici del calcolo vengono sviluppati e formalizzati tra la fine del XVII secolo e il XIX secolo, come strumenti necessari alla costruzione delle teorie fisiche della meccanica razionale di Newton prima, e della meccanica dei mezzi continui (fluidi e solidi) poi.

Newton introduce i concetti fondamentali calcolo differenziale e integrale delle funzioni di una variabile, qui chiamato *calcolo infinitesimale*, necessari allo sviluppo della meccanica: nella meccanica di Newton, il moto di un sistema meccanico è descritto dai suoi gradi di libertà in funzione della variabile tempo, e le equazioni che ne governano il moto sono equazioni differenziali ordinarie. Il lavoro di Newton, e il lavoro contemporaneo di Leibniz, parte dalla *geometria analitica*, che permette di associare una curva a una funzione, e sviluppa la risposta ad alcuni problemi riguardanti la geometria delle curve, come il calcolo della tangente a una curva, la ricerca dei minimi e dei massimi di una funzione o il calcolo delle aree.

I risultati del calcolo differenziale e integrale vengono connessi tra di loro dal **teorema fondamentale del calcolo** (**todo** aggiungere riferimento).

A Eulero si deve una prima raccolta degli strumenti utili a un'introduzione al calcolo, come discusso nel capitolo sul *precalcolo*.

Al lavoro di Johann e Jakob Bernoulli e ancora Eulero si deve l'ideazione del calcolo delle variazioni (**todo** *aggiungere una sezione?*), ampiamente sviluppato da **Lagrange** nella sua riformulazione geometrica della meccanica.

Nel corso del XVIII e del XIX secolo, il calcolo infinitesimale si sviluppo come lo strumento matematico indispensabile nei problemi di fisica: Lagrange introduce il concetto di potenziale in meccanica, mentre Green sviluppa gli strumenti del calcolo infinitesimale per funzioni di più variabili (teorema di Green, estensione del rotore allo spazio 3-dimensionale, metodo della funzione di Green) nel suo «Saggio sull'Applicazione della Analisi Matematica alle Teorie dell'Elettricità e del Magnetismo» del 1828, testo «in anticipo di 30 anni rispetto al suo tempo» secondo Einstein, ma rimasto a lungo trascurato.

Nel XIX secolo Gauss contribuì allo sviluppo del calcolo multivariabile applicato allo studio delle curve e delle superfici, e alla teoria matematica dell'elettromagnetismo.

Nel XIX secolo il calcolo infinitesimale si impose come strumento matematico fondamentale in diversi ambiti:

- meccanica dei solidi e dei fluidi:
- diffusione del calore per conduzione
- elettromagnetismo

Cauchy diede importanti contributi allo sviluppo del calcolo complesso, successivamente sviluppato da Riemann.

Cauchy contribuì inoltre alla definizione rigorosa dei fondamenti del calcolo, portata avanti da Weierstrass nella seconda metà del XIX secolo con la definizione di limite e continuità di una funzione.

CAPITOLO 24

Introduzione all'analisi

In questa sezione viene richiamato il concetto di funzione introdotto nella sezione *precalcolo*. Viene introdotto il concetto di *limite* e definito in termini topologici (intervalli, punti di accumulazione, insiemi aperti e chiusi,...). Il concetto di limite viene utilizzato per dare una definizione di *funzione continua*. Vengono poi presentati alcuni teoremi e proprietà di limiti e funzioni continue.

24.1 Funzioni reali a variabile reale, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Per un'introduzione alle funzioni reali fa variabili reali si rimanda al *capitolo dedicato* nella sezione *precalcolo*.

24.2 Limiti

24.2.1 Cenni di topologia per il calcolo

todo *Punto di accumulazione e punto isolato, intorno, insiemi aperti e chiusi, limsup/liminf, max/min,... E" necessario? Il minimo indispensabile*

Intervalli

Definition

Un intervallo I è un sottoinsieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ «senza buchi», cioè se due numeri $x, y > x$ appartengono a I, allora tutti i numeri reali u compresi tra x, y appartengno a I.

Example (Intervalli e sottoinsiemi che non sono intervalli)

Così ad esempio, l'insieme dei numeri reali compresi tra 2 e 3,

$$I = \{x | 2 \le x \le 3\} \ ,$$

è un sottoinsieme e intervallo di $\mathbb{R}$. L'unione degli insiemi di numeri reali compresi tra 0 e 1, e tra 2 e 3,

$$S = \{x | 0 \le x \le 1 \lor 2 \le x \le 3\} \ ,$$

è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ma non è un intervallo, poiché non è soddisfatta la definizione: ad esempio, il numero 1.3 è compreso tra due numeri appartenenti all'insieme S, ad esempio 0.1 e $2.\overline{7}$ ma non appartiene a S.

Definition (Intervallo limitato)

Un intervallo è **limitato superiormente** se esiste un numero $M \in \mathbb{R}$ tale che tutti gli elementi dell'intervallo sono minori di M; un intervallo è **limitato inferiormente** se esiste un numero $N \in \mathbb{R}$, tale che tutti gli elementi dell'intarvallo sono maggiori di N.

In caso contrario, gli intervalli vengono definiti **illimitati**

Definition (Intervalli aperti e chiusi)

Un intervallo chiuso è un intervallo che comprende gli **estremi** dell'insieme

$$I_c = \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\} =: [a, b] \ .$$

Un intervallo aperto è un intervallo che non comprende gli estremi dell'insieme,

$$I_a = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} =: (a, b) \ .$$

Pensando alla rappresentazione dei numeri reali sulla retta reale, orizzontale e orientata con verso positivo verso destra, ci si può riferire all'estremo inferiore come estremo sinistro e all'estremo superiore come estremo destro dell'intervallo.

I singoli estremi di un intervallo possono essere chiusi o aperti. Ad esempio, i possibili intervalli di numeri reali sono:

- (a, b) intervallo limitato aperto sia a sinistra sia a destra
- $[a, b)$ intervallo limitato chiuso a sinistra e aperto a destra
- $(a, b]$ intervallo limitato aperto a sinistra e chiuso a destra
- $[a, b]$ intervallo limitato chiuso sia a sinistra sia a destra
- $[a, +\infty)$ intervallo illimitato, chiuso a sinistra infinito a destra
- $(a, +\infty)$ intervallo illimitato, aperto a sinistra infinito a destra
- $(-\infty, b]$ intervallo illimitato, infinito a sinistra chiuso a destra
- $(-\infty, b)$ intervallo illimitato, infinito a sinistra aperto a destra
- $(-\infty, +\infty)$ intervallo illimitato, che coincide con la retta reale

todo *Argomenti «non strettamente necessari», da aggiungere come approfondimenti in appendice?

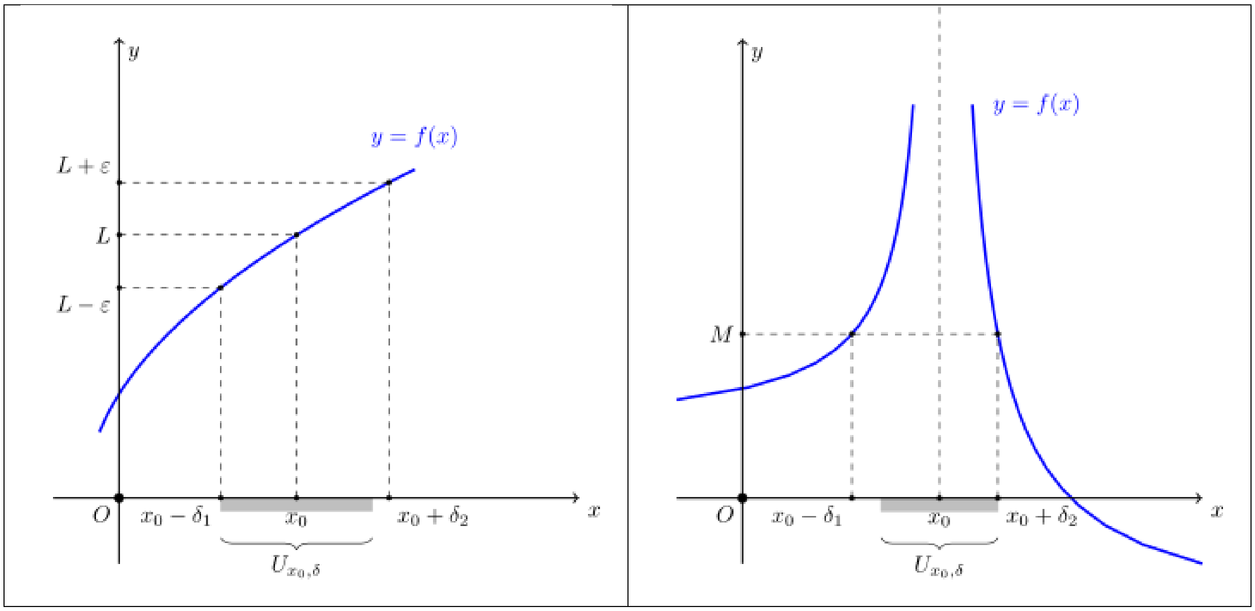
- *discutere estremi, maggiorante/minorante*
- *insiemi non limitati sono aperti o chiusi?*
- *discussione massimo/minimo, limsup/liminf*

24.2.2 Definizione di limite

Limite finito al finito

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U_{x_0,\delta} \quad t.c. \quad |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in U_{x_0,\delta} \backslash \{x_0\}$$

dove la condizione sull'intorno di un punto x_0 al finito per funzioni reali può essere riscritta come $0 < |x - x_0| < \delta$ per un intorno simmetrico del punto x_0.



Limite infinito al finito

$$\forall M > 0 \quad \exists U_{x_0,\delta} \quad t.c. \quad |f(x)| > M \quad \forall x \in U_{x_0,\delta} \backslash \{x_0\}$$

dove la condizione sull'intorno di un punto x_0 al finito per funzioni reali può essere riscritta come $0 < |x - x_0| < \delta$ per un intorno simmetrico del punto x_0. Se $f(x) > M$ allora il limite tende a $+\infty$, se $f(x) < -M$ allora il limite tende a $-\infty$.

Limite finito all'infinito

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U_{\mp\infty,R} \quad t.c. \quad |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in U_{\mp\infty,R}$$

dove la condizione sull'intorno di un punto all'infinito per funzioni reali può essere riscritta come $x < R$ per un intorno di $-\infty$ o $x > R$ per un intorno di $+\infty$.

Limite infinito all'infinito

$$\forall M > 0 \quad \exists U_{\mp\infty,R} \quad t.c. \quad |f(x)| > M \quad \forall x \in U_{\mp\infty,R}$$

dove la condizione sull'intorno di un punto all'infinito per funzioni reali può essere riscritta come $x < R$ per un intorno di $-\infty$ o $x > R$ per un intorno di $+\infty$. Se $f(x) > M$ allora il limite tende a $+\infty$, se $f(x) < -M$ allora il limite tende a $-\infty$.

24.3 Funzioni continue

24.3.1 Definizione

Definition (Funzione continua)

Una funzione reale $f : D \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in un punto $x_0 \in D$ se esiste il limite della funzione e coincide con il valore della funzione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ .$$

Una funzione reale è continua in un dominio **todo o insieme?** se è continua in ogni punto del dominio.

24.3.2 Punti di discontinuità

- Tipo 1 - salto: limite destro e sinistro esistono finiti, ma non sono uguali
- Tipo 2 - essenziale: limite destro o sinistro non esistono o sono infiniti
- Tipo 3 - eliminabile: limite destro e sinistro esistono finiti, sono uguali, ma non sono uguali all valore della funzione nel punto

todo *aggiungere immagini*

24.3.3 Teoremi

Teorema di Weierstrass

Theorem (Teorema di Weierstrass)

Data una funzione reale continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita sull'intervallo limitato chiuso $[a, b]$, la funzione $f(x)$ ammette un punto di massimo assoluto e un punto di minimo assoluto nell'intevallo $[a, b]$.

Necessità delle ipotesi

Mentre non viene fornita una dimostrazione del teorema, si discute la necessità delle ipotesi fornendo controesempi:

1. la funzione non continua definita in $I = [-1, 1]$

   $$f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq = 0 \\ 0.5 & x = 0 \end{cases} \ ,$$

   assume valori massimi in I, in corrispondenza degli estremi dell'intervallo, ma non ha minimo. Infatti il limite inferiore della funzione nell'intervallo è $\liminf f(x) = 0$, ma non esiste alcun valore $x \in I$ tale che $f(x) = 0$, proprio per come è stata costruita la funzione con una discontinuità di tipo 1 - salto in $x = 0$,

2. la funzione continua $f(x) = e^{-x^2}$ definita sull'intervallo non limitato superiormente $I = [-2, +\infty)$ ha massimo nell'intervallo in corrispondenza di $x = 0$, $\max_{x \in I} f(x) = 1$, ma non ha minimo poiché $\liminf f(x) = 0$ ma non esiste nessun valore $x \in I$ tale che $f(x) = 0$

3. la funzione continua $f(x) = x^2$ definita su $I = (1, 2)$ non ammette né massimo, né minimo, poiché il limite inferiore e superiore della funzione si verificano in corrispondenza degli estremi (non inclusi) dell'intervallo aperto. Più esplicitamente, $\limsup_{x\in I} f(x) = 4$ ma $\nexists x \in I,\ f(x) = 4$; $\liminf_{x\in I} f(x) = 1$ ma $\nexists x \in I,\ f(x) = 1$;

Teorema della permanenza del segno

Theorem (Teorema della permanenza del segno)

Data una funzione continua $f : D \to \mathbb{R}$ continua, e un punto $x_0 \in D$ (**todo** *o punto di accumulazione?*). Se $f(x_0) > 0$ allora $\exists U_{x_0}$ t.c. $f(x) > 0$ per $\forall x \in U_{x_0} \cap D$.

todo Non è necessario che la funzione sia continua in x_0, ma è sufficiente che esista il limite della funzione $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, con x_0 punto di accumulazione di X.

Dimostrazione

Sia $f(x)$ una funzione continua in x_0 con $f(x_0) = \ell > 0$. Poiché f è continua nel punto x_0, esiste il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell > 0$, e quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in U_{\delta_{x_0}} = [x_0 - \delta, x + \delta] \cap D.$$

Scegliendo $\varepsilon = \ell$, si ottiene $|f(x) - \ell| < \ell$ per i valori di $x \in U_{x_0}$ e quindi la dimostrazione della tesi,

$0 < f(x) < 2\ell$.

Teorema degli zeri

Theorem (Teorema degli zeri)

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, con $f(a)$ e $f(b)$ discordi, $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste un valore $x \in (a, b)$ tale che $f(x) = 0$.

Dimostrazione

todo

- per assurdo?
- con metodo di bisezione? *serve teorema di conservazione delle disuguaglianze per le successioni*

$$a_n < b_n \quad \to \quad \lim_{n\to+\infty} a_n \le \lim_{n\to+\infty} b_n$$

Teorema dei valori intermedi

Theorem (Teorema dei valori intermedi)

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora $f(x)$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$, cioè (assumendo $f(a) < f(b)$) per $\forall y \in (f(a), f(b))$ $x_0 \in (a, b)$ t.c.. $f(x_0) = y$.

Dimostrazione

Sia $f(a) < f(b)$ e y_0 un valore compreso $f(a) < y_0 < f(b)$. Si definisce la funzione $g(x) = f(x) - y_0$, che verifica le ipotesi del teorema degli zeri,

$$g(a) = f(a) - y_0 < 0$$
$$g(b) = f(b) - y_0 > 0\ ,$$

e che quindi $\exists x_0 \in (a, b)$ t.c $g(x_0) = 0$ o equivalentemente $f(x_0) = y_0$. Da qui dimostrata la tesi che per ogni $y_0 \in (a, b)$ esiste un x_0 che sia l'argomento della funzione f, che dia $f(x_0) = y_0$.

24.4 Operazioni e teoremi sui limiti

Vengono elencate alcune regole per compiere operazioni con i limiti. La *dimostrazione* delle regole è disponibile a fine capitolo.

24.4.1 Operazioni coi limiti

Dato un numero reale $c \in \mathbb{R}$ e i limiti **finiti** $\lim_{x\to x_0} f(x) = F$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = G$ allora valgono le seguenti regole

$$\lim_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c\,F$$
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \mp g(x)) = F \mp G$$
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \quad , \quad \text{se } G \neq 0$$

(**todo** *regole con esponenti*)

Alcune delle operazioni elencate qui sopra per limiti finiti possono essere *estese al caso di limiti infiniti*; in altri casi, nascono delle forme *indeterminate*.

Limiti infiniti e infinitesimi

Valgono le seguenti regole

$$
\begin{array}{ll}
f(x) \to \mp\infty \ , \ c > 0 & : \ \lim_{x\to x_0} c \cdot f(x) = \mp\infty \\
f(x) \to \mp\infty \ , \ c < 0 & : \ \lim_{x\to x_0} c \cdot f(x) = \pm\infty \\
f(x) \to \mp\infty \ , \ G \text{ finito} & : \ \lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \mp\infty \\
f(x) \to \mp\infty \ , \ G \text{ finito}, g(x) \neq 0 & : \ \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0^{\mp \text{sign}\{G\}} \\
f(x) \to 0^{\mp} \ , \ G \text{ finito}, g(x) \neq 0 & : \ \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \mp \text{sign}\{G\} \cdot \infty \\
f(x) \to \mp\infty \ , \ g(x) \neq 0 & : \ \lim_{x\to x_0} g(x) \cdot f(x) = \mp \text{sign}\{G\} \cdot \infty \\
\ldots &
\end{array}
$$

(**todo** *regole con esponenti*)

riassumibili con un po" di libertà nella notazione come

$$
\begin{aligned}
& c \cdot \mp\infty = \mp \text{sign}\{c\} \cdot \infty \ , \quad \text{se } c \neq 0 \\
& c \mp \infty = \mp\infty \\
& +\infty + \infty = +\infty \\
& -\infty - \infty = -\infty \\
& +\infty \cdot \mp\infty = \mp\infty \\
& \frac{c}{\mp\infty} = 0^{\mp \text{sign}\{c\}} \ , \quad \text{se } c \neq 0
\end{aligned}
$$

(**todo** *regole con esponenti*)

Nota: Si prega di notare come sono stati esclusi alcuni casi riguardanti valori o funzioni identicamente uguali a 0. Nel caso in cui $g(x) = 0$, ad esempio

$$g(x)f(x) \equiv 0 \qquad \to \qquad \lim g(x)f(x) = 0 \ ,$$

poiché la funzione $g(x)f(x)$ è identicamente uguale a zero: *non c'è nulla da variare per studiarne il limite: il valore è zero per ogni x e basta*.

Forme indeterminate

Risultano indeterminate le seguenti 7 forme,

$$+\infty - \infty \quad , \quad 0 \cdot \mp\infty \quad , \quad \frac{\mp\infty}{\mp\infty} \quad , \quad \frac{0}{0} \quad , \quad 1^{\infty} \quad , \quad 0^0 \quad , \quad \infty^0$$

avendo interpretato gli *infiniti*, gli *zeri* e gli *uni* come funzioni che tendono a quei valori,

$$0 \sim \lim f(x) = 0 \qquad , \qquad 1 \sim \lim f(x) = 1 \qquad , \qquad \infty \sim \lim f(x) = \infty \ ,$$

senza esserne identicamente uguali.

Example (Forme indeterminate 1^{∞} e forme determinate 1^{∞})

La funzione - o la famiglia di funzioni, al variare del parametro n -

$$\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{x^n}$$

è un esempio di forma indeterminata $1^{+\infty}$ per $x \to +\infty$ per $n > 0$, poiché

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad n > 0$$

La forma indeterminata è facile da risolvere grazie alle proprietà delle potenze

$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{x^n} = \lim_{x\to+\infty} e^{x^{n-1}} = \begin{cases} 1 & 0 < n < 1 \\ e & n = 1 \\ +\infty & n > 1 \end{cases}$$

L'espressione 1^x invece non è indeterminata per $x \to +\infty$, poiché 1 «è esattamente 1 e basta» e moltiplicando anche infinite volte 1 per se stesso si ottiene sempre 1

$$\lim_{x\to+\infty} 1^x = 1\ .$$

Oss. Invece non sono forme indeterminate $0^{+\infty} \to 0$ e $0^{-\infty} \to \infty$.

Vengono ora introdotti alcuni risultati necessari per manipolare le forme indeterminate, e poter confrontare infiniti e infinitesimi.

24.4.2 Teorema del confronto

Theorem (Teorema del confronto)

Siano $f, g, h: X \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e dato un punto di accumulazione x_0 per X. Se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell\ ,$$

ed esiste un intorno U di x_0 tale che

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \forall x \in U \cap X \backslash \{x_0\}\ ,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell\ .$$

Dimostrazione

Dalla definizione dei limiti di $f(x)$, $g(x)$

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon_f \qquad \to \qquad \ell - \varepsilon_f < f(x) < \ell + \varepsilon_f$$
$$|h(x) - \ell| < \varepsilon_h \qquad \to \qquad \ell - \varepsilon_h < h(x) < \ell + \varepsilon_h$$

todo *curare i particolari sull'intorno.*

Definendo $\varepsilon_g = \max\{\varepsilon_f, \varepsilon_h\}$ in U **todo** *curare i dettagli*, usando le ipotesi del problema si può scrivere

$$\ell - \varepsilon_g \le \ell - \varepsilon_f < f(x) \le g(x) \le h(x) < \ell + \varepsilon_h \le \ell + \varepsilon_g$$

e quindi per $\forall \varepsilon_g > 0$, $\exists U_{x_0,\delta}$ tale che $|g(x) - \ell| < \varepsilon_g$ per $\forall x \in U_{x_0,\delta} \backslash \{x_0\}$, cioè $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$

todo *Dimostrazione? Discussione più intuitiva? Figura?*

24.4.3 Teorema di de l'Hopital

Il teorema di de l'Hopital (o di Bernoulli, **todo** *dire due parole sulla storia? Bernoulli precettore di de l'Hopital, ricava il risultato...*) è un teorema utile per il calcolo dei limiti delle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Poiché il teorema coinvolge il concetto di derivata, si rimanda alla sezione del *teorema di de l'Hopital* nel capitolo sulle *derivate*.

24.5 Limiti fondamentali

Questa sezione contiene alcuni limiti fondamentali. Questi limiti possono essere considerati fondamentali come sinonimo di *«minimo da ricordare»* per poter calcolare limiti più generali utilizzando le *operazioni* e i *teoremi* sui limiti, e calcolare le *derivate fondamentali*. Un elenco minimo di limiti fondamentali è:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1 + x} = 1$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^a - 1}{x} = a$$

La *dimostrazione dei limiti fondamentali* è disponibilie a fine capitolo.

24.6 Confronto di infiniti e infinitesimi

Il confronto di funzioni che tendono a zero $f(x), g(x) \to 0$, o di funzioni che tendono all'infinito $f(x), g(x) \to \infty$ permette di definire degli *ordini di infinitesimi o di infiniti* **todo** *definire meglio*, a seconda del valore del limite $\frac{f(x)}{g(x)} = \ell$,

- se $\ell = 0$, si può dire che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore, o un infinito di ordine inferiore, rispetto a $g(x)$ e si può indicare con la notazione di *o piccolo* $f(x) = o\left(g(x)\right)$
- se ℓ finito diverso da zero, si può dire che $f(x)$ è un infinitesimo, o un infinito, dello stesso ordine di $g(x)$ e si può indicare con la notazione di *o grande* $f(x) = O\left(g(x)\right)$
- se ℓ è infinito, si può dire che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore, o un infinito di ordine superiore, rispetto a $g(x)$; viceversa $g(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore, o un infinito di ordine inferiore, rispetto a $f(x)$ e si può indicare con la notazione di *o piccolo* $g(x) = o\left(f(x)\right)$
- se $\ell = 1$, si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **asintoticamente equivalenti**, o in breve **asintotici**, $f(x) \sim g(x)$in un intorno del punto dove viene calcolato il limite.

24.6.1 Calcolo dei limiti con sostituzione degli infinitesimi o degli infiniti

Se $h(x) \sim af(x)$, $k(x) \sim bg(x)$ per $x \to x_0$, e il rapporto $\frac{a}{b}$ non è indeterminato, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{k(x)} = \frac{a}{b} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

- confronto di polinomi
  - per $x \to 0$, $\frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} = \frac{a_0}{b_0}$
  - per $x \to \infty$, $\frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} \sim \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$
- per $x \to 0$, $x \sim \sin x \sim \tan x$. Ad esempio, il limite $\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{3x}$ può essere calcolato moltiplicando e dividendo esplicitamente per il termine $\frac{x}{2}$ per far comparire un limite fondamentale,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{3x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{\to 1} \frac{\frac{x}{2}}{3x} = \frac{1}{6} \, ,$$

  oppure più velocemente, quando si ha acquisito un po" di dimestichezza in queste operazioni, sostituendo l'asintotico $\sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$ nel limite,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2} \frac{1}{3x} = \frac{1}{6} \, ,$$

- molto comodo, ma bisogna prestare attenzione che non avvengano **semplificazioni dei termini dominanti in occasione di addizioni e sottrazioni**), come ad esempio nel calcolo di

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^2} \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

  Come mostrato nel capitolo sulle derivate, nella sezione sulle espansioni in *serie polinomali di Taylor e MacLaurin*, la serie polinomiale (25.11) della funzione seno produce un'approssimazione $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$; quindi il numeratore delle due frazioni ha un termine dominante di terzo grado,

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{x}{3!} + O(x^5) \right) = \frac{x}{3!} + O(x^5) \sim \frac{1}{6} x^3 \, ,$$

  che viene utilizzato nel calcolo dei limiti desiderati

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{6} x^3 + O(x^5)}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{6} x^3 + O(x^5)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

todo esempi

24.7 Calcolo dei limiti

todo Riassumere alcune tecniche per il calcolo dei limiti…*niente di speciale; mettere insieme i metodi presentati nel capitolo e mostrare qualche esempio del calcolo di limiti*

24.8 Applicazioni

24.8.1 Studio di funzione

Uno studio di funzione completo può richiedere la padronanza di tutti gli strumenti del calcolo infinitesimale: ricerca del dominio, limiti, derivate e integrali.

- *studio di funzione - capitolo di introduzione all'analisi* - dominio, limiti ed eventuali asintoti
  - trovare il dominio di una funzione
  - valutare i limiti della funzione agli estremi del dominio, o in corrispondenza di punti di discontinuità
- *studio di funzione - capitolo sulle derivate* - punti di estremi locali, punti di flesso
- *studio di funzione - capitolo sugli integrali* - area sottesa al grafico di una funzione, e altre grandezze integrali

24.8.2 Metodo di bisezione per la soluzione di equazioni algebriche $f(x) = 0$

Due algoritmi iterativi classici usati per la soluzione di equazioni algebriche della forma $f(x) = 0$ - problema che può essere descritto come ricerca degli zeri della funzione $f(x)$ - sono il **metodo di bisezione** e il **metodo di Newton**. Il metodo di bisezione viene descritto qui, mentre si rimanda alla sezione sulle derivate per il *metodo di Newton*.

Il metodo di bisezione è un metodo iterativo che impiega i risultati del *teorema degli zeri* per la soluzione di equazioni algebriche nella forma

$$f(x) = 0 \ , \qquad x \in [a, b]$$

con funzioni $f(x)$ continue nell'intervallo $[a, b]$. Infatti, per il teorema degli zeri, se la funzione $f(x)$ è continua ed esistono due numeri $a_0,\ b_0 \in [a, b]$ tali che la funzione valutata nei due punti ha segno opposto,

$$f(a_0)\, f(b_0) < 0 \ ,$$

allora esiste un valore $x_0 \in [a_0, b_0]$ per il quale $f(x_0) = 0$.

Il metodo di bisezione consiste quindi nel seguente algoritmo: **todo**

Nota: In generale, un problema non-lineare può avere più di una soluzione. Un'applicazione base del metodo di bisezione non consente di determinare tutte le soluzioni di un problema, ma si rende necessaria una ricerca. L'applicazione del metodo di bisezione può essere guidata dalla soluzione grafica dell'equazione.

Il metodo di bisezione è discusso nel bbook sull'introduzione alla programmazione e al calcolo scientifico, nella sezione di introduzione al calcolo numerico. Nella sezione sui metodi numerici per la soluzione di equazioni algebriche non lineari, il metodo di bisezione viene descritto, implementato e applicato a semplici esempi.

24.9 Problemi

24.9.1 Limiti

Exercise 23.9.1 (Verifica/calcolo con definizione)

1. Usa la definizione di limite ε-δ per provare che $\lim_{x \to 1} (3x - 4) = -1$.

2. Usa la definizione di limite per provare che $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ non esiste.
3. Usa la definizione di limite per provare che $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$.
4. Usa la definizione di limite per provare che $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$.
5. Usa la definizione di limite per dimostrare che $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.
6. Usa la definizione di limite per provare che $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.
7. Prova che $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$ utilizzando la definizione di limite.
8. Usa la definizione di limite per provare che $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$.
9. Usa la definizione di limite per provare che $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$.
10. Usa la definizione di limite per dimostrare che $\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$.

Soluzione 1.

La definizione di limite finito al finito $\ell = \lim_{x\to x_0} f(x)$ è

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - \ell| < \varepsilon \text{ per } \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

Per l'esercizio, bisogna quindi verificare che

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |3x - 4 + 1| < \varepsilon \text{ per } \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$$\begin{aligned} |3x - 3| < \varepsilon \text{ per } \varepsilon x \in U_{x_0,\delta} \\ 3|x-1| < \varepsilon \\ |x-1| < \frac{\varepsilon}{3} \\ 1 - \frac{\varepsilon}{3} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Quindi, per ogni ε fissato, vale $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$ per ogni $x \in U_{x_0,\delta}$ con $x_0 = 1$ e $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3}$.

Soluzione 2.

Limite finito al finito. Non esiste **todo**

Limite infinito (qui con segno $+\infty$) al finito.

Per ogni M fissato

$$\forall M > 0\, \exists U_{x_0,\delta} \text{ s.t. } f(x) > M\ \forall x \in U_{x_0,\delta} \backslash \{x_0\}$$

Qui

$$\frac{1}{x^2} > M \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{|M|}}, \frac{1}{\sqrt{|M|}} \right] \backslash \{0\}\ .$$

…

Soluzione 5.

Risolvere usando il fatto che $F(x) = e^x - 1$ è crescente, con derivata crescente

Per $x = \delta > 0$, $F(\delta) = e^\delta - 1$, $0 < F(x) < \frac{e^\delta - 1}{\delta} x$ per $x \in (0, \delta)$

Per $x = -\delta < 0$, $F(-\delta) = e^{-\delta} - 1$, $0 < F(x) < \frac{-e^{-\delta}+1}{\delta} x$ per $x \in (-\delta, 0)$

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$
$$-\varepsilon + 1 < \frac{e^x - 1}{x} < \varepsilon + 1$$

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$
$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + o(x^2)$$
$$-\varepsilon < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} < \varepsilon$$

Exercise 23.9.2 (Primi limiti)

1. $\lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 4)$
2. $\lim_{x\to -2}(x^3 + 2x^2 - 1)$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{2x+3}$
4. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$
5. $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x}$
7. $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\sqrt{x}-1}$
8. $\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{x^2-9}$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin(x)}{x^2}$
10. $\lim_{x\to 0} e^x - 1$

Soluzioni

1. E" un limite di una funzione continua al finito. Quindi è sufficiente sostituire il valore al quale tende la variabile nella funzione da valutare

$$\lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 4) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 4 = 0\,.$$

2. E" un limite di una funzione continua al finito. Quindi è sufficiente sostituire il valore al quale tende la variabile nella funzione da valutare

$$\lim_{x\to 2}(x^3 + 2x^2 - 1) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 1 = 15\,.$$

3. E" il limite di una funzione razionale al finito. Il valore al quale tende la variabile x non è uno zero del denominatore, quindi la funzione razionale è continua in $x = 0$, e per calcolare il limite è sufficiente sostituire il valore $x = 0$ nella funzione
$$\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{2x+3} = \frac{0+1}{2\cdot 0+3} = \frac{1}{3} \ .$$
4. Il valore al quale tende la variabile x è uno zero sia per il numeratore sia per il denominatore. E" quindi una forma indeterminata nella forma $\frac{0}{0}$ che può essere risolta dopo aver fattorizzato il numeratore della frazione
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) \ ,$$
e, dopo la semplificazione, il limite può essere valutato semplicemente sostituendo il valore $x = 2$ nella funzione, per ottenere
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4 \ .$$
5. Come per il limite precedente, il valore al quale tende la variabile x è uno zero sia per il numeratore sia per il denominatore, e il limite può essere affrontato con la fattorizzazione dei polinomi,
$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} (x^2-x+1) = 3 \ .$$
6. Per $x \to 0$ il denominatore della funzione tende a 0, mentre il numeratore tende a -1. Di conseguenza il limite è una forma $\frac{c}{0}$. Aggiungendo il dettaglio di limite «da sinistra» $x \to 0^-$ e «da destra» $x \to 0^+$, allora il limite vale
$$\lim_{x\to 0^\mp} \frac{x^2-1}{x} = \pm\infty \ .$$
7. Fattorizzando il numeratore come $1-x = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$, si può risolvere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$,
$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}-1} = -lim_{x\to 1} - (1+\sqrt{x}) = -2 \ .$$
8. La fattorizzazione del numeratore e del denominatore della funzione razionale permette di risolvere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$,
$$\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{2}{x+3} = \frac{1}{3} \ .$$
9. Sostituendo $\sin x$ con l'asintotico x, facendo attenzione che non avvengano cancellazioni nell'ordine dell'infinitesimo,
$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x+x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x} = \infty \ .$$
Se viene specificato il lato del limite, è possibile anche determinare il segno dell'infinito, $\lim_{x\to 0^\mp} \frac{x+\sin x}{x^2} = \mp\infty$.
10. La funzione è continua, e quindi è sufficiente sostituire il valore $x = 0$ nella funzione
$$\lim_{x\to 0} e^x - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \ .$$

Exercise 23.9.3 (Limiti laterali)

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$
2. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$
3. $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1}$
4. $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1}$
5. $\lim_{x\to 0^+} \ln(x)$
6. $\lim_{x\to 0^-} |x| \cdot \ln(|x|)$
7. $\lim_{x\to 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
8. $\lim_{x\to 0^-} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
9. $\lim_{x\to \pi^+} \tan(x)$
10. $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$
11. (a) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos\theta}{\text{atan}\theta}$; (b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\theta}{\text{atan}\theta}$ R: (a) $: -\infty$; (b): $+\infty$

Soluzioni

11. I limiti

$$\lim_{x\to 0^{\mp}} \frac{\cos x}{\text{atan} x}\, dx$$

sono i limiti di un rapporto «$\frac{1}{0}$». La funzione arcotangente atan(x) è negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$. Quindi il limite sinistro vale «$\frac{1}{0^-} = -\infty$», mentre il limite destro vale «$\frac{1}{0^+} = +\infty$», o meno brutalemnte

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{\text{atan} x} = -\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\text{atan} x} = +\infty$$

Exercise 23.9.4 (Limiti all'infinito)

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{2x-4}$
2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+1}{2x^2+x}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+3}$
4. $\lim_{x\to-\infty} (x^3 - 2x + 5)$
5. $\lim_{x\to\infty} e^x$
6. $\lim_{x\to-\infty} e^x$
7. $\lim_{x\to\infty} \ln(x)$
8. $\lim_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
9. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}$
10. $\lim_{x\to\infty} e^{-x}$

Exercise 23.9.5 (Forme indeterminate)

Risolvere i seguenti limiti. Alcuni esercizi potrebbero non essere di immediata soluzione con gli strumenti introdotti in questo capitolo, ma saranno di soluzione immediata una volta introdotto il *teorema di de l'Hopital* nel capitolo sulle *derivate*.

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$
2. $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$
4. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1}$
6. $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$
7. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x}$
8. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$
9. $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x)$
10. $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$

Exercise 23.9.6 (Esercizi vari)

Risolvere i seguenti limiti, con le tecniche studiate nel capitolo. Inutile qui fare la divisione degli esercizi per tecniche (razionalizzazione, confronto, limiti notevoli,…) e «tipo di limite», quando sono possibili diversi approcci portano allo stesso risultato. Che ognuno scelga l'approccio più conveniente. In linea generale, la tecnica risolutiva si riassume nella semplificazione del limite per ricondursi a casi più semplici di cui è noto il limite o facilmente calcolabile.

1. $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x)$
2. $\lim_{x \to \infty} e^{-x}$
3. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2}$
4. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + x} - x$
5. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$
6. $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
7. $\lim_{x \to \pi^-} \tan(x)$
8. $\lim_{x \to \infty} \cos(x)$
9. $\lim_{x \to 0^+} \ln(1 + x)$
10. $\lim_{x \to \infty} e^{-x^2}$

Dimostrare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x^2} = \infty$
3. $\lim_{x \to 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
4. $\lim_{x \to 0} x^2 \ln(x) = 0$
5. …
6. …

7. …
8. …
9. …
10. $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)}{1+x^2} = 0$

Soluzioni

1. Usando il teorema di de l'Hopital dopo aver riscritto la funzione come frazione per confrontare due infiniti,
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = (H) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0^- \ .$$
2.
3.
4. Il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$,
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} x \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right) \ .$$
Si può affrontare questo limite in diversi modi: di seguito viene risolto sostituendo la radice con un suo asintotico, o con il teorema di de l'Hopital. La radice può essere scritta con l'espansione in serie di $\sqrt{1+y}$ per $y = \frac{1}{x} \to 0^+$,
$$f(y) = (1+y)^{\frac{1}{2}} \qquad f(0) = 1$$
$$f'(y) = \frac{1}{2}(1+y)^{-\frac{1}{2}} \quad f'(0) = \frac{1}{2}$$
$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + o(y) \ .$$
Sostituendo questa espansione al posto della radice nel limite,
$$\lim_{x\to+\infty} x \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} x \left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) = \frac{1}{2} \ .$$
Oppure usando il teorema di de l'Hopital usando la variabile $y = \frac{1}{x} \to 0^+$,
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{(1+y)^{\frac{1}{2}} - 1}{y} = (H) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}(1+y)^{-\frac{1}{2}}}{1} = \frac{1}{2} \ .$$
5. Il logaritmo cresce all'infinito in maniera più lenta della funzione x. E" possibile dimostrare questa affermazione e calcolare l'integrale con il teorema di de l'Hopital
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0^+ \ .$$
6.
7.
8.
9.
10. Il limite non è una forma indeterminata. La funzione è continua in $x = 0$ e quindi è sufficiente sostituire il valore $x = 0$ nella funzione,
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{1+x^2} = \frac{0\cdot 1}{1+0^2} = 0 \ .$$

Soluzioni

1. Il limite è dimostrato osservando che la funzione $\sin y$ è limitata tra -1 e 1 per qualsiasi valore dell'argomento, mentre il fattore x^2 tende a zero. Il limite è quindi nella forma $0 \cdot M$, con M finito e limitato, e quindi è uguale a 0.
2. Usando l'asintotico $\sin x \sim x$, il limite può essere riscritto come
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty \, .$$
3. Il limite è dimostrato osservando che la funzione $\cos y$ è limitata tra -1 e 1 per qualsiasi valore dell'argomento, mentre il fattore x^2 tende a zero. Il limite è quindi nella forma $0 \cdot M$, con M finito e limitato, e quindi è uguale a 0.
4. Usando il teorema di de l'Hopital,
$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = (H) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0^- \, .$$
5.
6.
7.
8.
9.
10.

24.9.2 Studio di funzione: dominio, continuità e limiti

Exercise 23.9.7 (Continuità e limiti)

1. Determina il valore di c per cui $f(x)$ è continua in $x = 1$, con
$f(x) = \begin{cases} x^2 + c, & x \leq 1, \\ 2x + 1, & x > 1. \end{cases}$
2. Determina il valore di c per cui $f(x)$ è continua in $x = 2$, con
$f(x) = \begin{cases} \sin(x) + c, & x \leq 2, \\ x^2 - 4, & x > 2. \end{cases}$
3. Trova il punto di discontinuità per la funzione
$f(x) = \frac{1}{x-1}$ per $x = 1$.
4. Determina se la funzione $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ è continua in $x = 2$.
5. Prova che la funzione $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ è continua in $x = 0$.
6. Verifica la continuità di $f(x) = \sqrt{x}$ in $x = 0$.
7. Determina il tipo di discontinuità della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ in $x = 0$.
8. Trova i valori di c e d che rendono continua la funzione
$f(x) = \begin{cases} x^2 + c, & x \leq 1, \\ d - x, & x > 1. \end{cases}$
9. Verifica se la funzione $f(x) = \cos(x)$ è continua in $x = 0$.

10. Determina se la funzione $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ è continua in $x = 1$.

Exercise 23.9.8 (Asintoti verticali e orizzontali)

1. Trova gli asintoti orizzontali della funzione $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$.
2. Trova gli asintoti verticali della funzione $f(x) = \frac{1}{x-2}$.
3. Determina gli asintoti orizzontali della funzione $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.
4. Trova gli asintoti verticali della funzione $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.
5. Trova gli asintoti orizzontali della funzione $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
6. Determina gli asintoti verticali della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
7. Trova gli asintoti orizzontali della funzione $f(x) = e^{-x}$.
8. Trova gli asintoti verticali della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$.
9. Determina gli asintoti orizzontali della funzione $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.
10. Trova gli asintoti verticali della funzione $f(x) = \frac{1}{x^3-x}$.

Exercise 23.9.9 (Studio funzione - dominio, continuità, grafico)

Delle seguenti funzioni viene chiesto di:

- determinare se sono definite e continue in tutti i punti dei domini indicati; dove non è indicato esplicitamente il dominio, determinare il dominio
- calcolare i limiti al finito in eventuali *punti di discontinuità*, e i limiti agli estremi del dominio
- fornire una stima asintotica dei limiti nel caso di infiniti o infinitesimi
- rappresentare il grafico $y = f(x)$ della funzione in un piano descritto dalle coordinate cartesiane x, y, tenendo in considerazione i risultati dei punti precedenti (prima rappresentare i punti di discontinuità e gli asintoti per aiutarsi nel disegno del grafico)
- stabilire se le funzioni sono pari, dispari, periodiche, o se esistono rette o punti di simmetria
- discutere l'esistenza degli zeri della funzione e darne una stima, facendo riferimento al *teorema degli zeri*

1. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3 \qquad , \qquad x \in \mathbb{R}$ (md.8)
2. $f(x) = \frac{x^2+12x+20}{x+1} \qquad , \qquad x \in \mathbb{R}$ (md)
3. $f(x) = \frac{x^2+2x-4}{x^2-4x+3} \qquad , \qquad x \in [0, 2]$ (md)
4. $f(x) = \ln[(x-1)(x-3)]$
5. $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$
6. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
7. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
8. $f(x) = \frac{x^2-2}{e^x-1}$
9. $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 1 + x & x \geq 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

Exercise 23.9.10 (Limiti e applicazioni)

24.9.3 Metodo di bisezione

Si chiede di risolvere le sequenti equazioni nonlineari con il metodo di bisezione (è quindi necessario riformulare il problema come la ricerca degli zeri di una funzione), dopo aver impostato la soluzione con un metodo grafico. Il metodo grafico è necessario a farsi un'idea sul numero di soluzioni da cercare, e sui valori con cui iniziare il metodo di bisezione. Si chiede di concludere il procedimento a mano dopo 3 iterazioni, o quando si ottiene una soluzione con errore minore della tolleranza, qui scelta come $\tau = 0.01$. Si chiede infine di implementare il metodo con un linguaggio di programmazione a piacimento, per cercare una soluzione con tolleranza $\tau = 10^{-5}$.

Le stesse equazioni vengono affrontate *con il metodo di Newton come esercizio* nel capitolo sulle derivate.

Exercise 23.9.11 (Soluzione iterativa di equazioni nonlineari - bisezione)

1. $x^2 - 4x + 1 = 0$
2. $x^3 - 2x = 1$
3. $\ln x = -2x$
4. $e^{-x} \cos x = \frac{1}{2}$

Soluzione 1.

Inizializzazione del metodo.

$$\begin{aligned} a_0 = 0 \quad &\rightarrow \quad f(0) = 0 + 0 + 1 = 1 > 0 \\ b_0 = 2 \quad &\rightarrow \quad f(2) = 4 - 8 + 1 = -3 < 0 \end{aligned}$$

Iterazione 0. Il punto medio dell'intervallo e la funzione valutata nel punto sono

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad f(1) = 1 - 4 + 1 = -2$$

Iterazione 1. Il nuovo intervallo diventa $[a_1, b_1] = [a_0, c_0] = [0, 1]$. Il punto medio e la funzione valutata nel punto sono

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 4\frac{1}{2} + 1 = -\frac{3}{4}$$

Il valore assoluto della funzione in c_1 è maggiore della tolleranza, $|f(c_1)| > \tau$; il numero di iterazioni fatte è inferiore al numero di iterazioni massimo; quindi l'algoritmo procede.

Iterazione 2. Il nuovo intervallo diventa $[a_2, b_2] = [a_1, c_1] = [0, \frac{1}{2}]$. Il punto medio e la funzione valutata nel punto sono

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} - 4\frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{16}$$

Il valore assoluto della funzione in c_2 è maggiore della tolleranza, $|f(c_2)| > \tau$; il numero di iterazioni fatte è inferiore al numero di iterazioni massimo; quindi l'algoritmo procede.

Iterazione 3. Il nuovo intervallo diventa $[a_3, b_3] = [c_2, b_2] = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Il punto medio e la funzione valutata nel punto sono

$$c_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{3}{8} \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{9}{64} - 4\frac{3}{8} + 1 = \frac{9}{64} - \frac{1}{2} = \frac{9-32}{64} = -\frac{23}{64}$$

Il valore assoluto della funzione in c_1 è maggiore della tolleranza, $|f(c_1)| > \tau$; il numero di iterazioni ha raggiunto il numero massimo di iterazioni impostato. Quindi l'esecuzione dell'algoritmo si interrompe, senza aver trovato una soluzione con la tolleranza richiesta.

24.10 Note e dimostrazioni

24.10.1 Funzioni reali a variabile reale, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

24.10.2 Limiti

24.10.3 Funzioni continue, $f \in C^0$

24.10.4 Operazioni e teoremi sui limiti

$\lim_{x\rightarrow x_0} cf(x)$

$$L = \lim_{x\rightarrow x_0} f(x)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U_{x_0,\delta} \quad t.c. \quad |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall U_{x_0,\delta} \backslash \{x_0\}$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \rightarrow \qquad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$\begin{aligned} c \geq 0: &\quad cL - c\varepsilon \leq cf(x) \leq cL + c\varepsilon \\ c < 0: &\quad cL - c\varepsilon > cf(x) > cL + c\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c \geq 0: &\quad \forall \tilde{\varepsilon} = c\varepsilon > 0 &\quad \exists U_{x_0,\delta} \quad t.c. \quad |cf(x) - cL| < \tilde{\varepsilon} \quad \forall U_{x_0,\delta} \backslash \{x_0\} \\ c < 0: &\quad \forall \tilde{\varepsilon} = -c\varepsilon > 0 &\quad \exists U_{x_0,\delta} \quad t.c. \quad |cf(x) - cL| < \tilde{\varepsilon} \quad \forall U_{x_0,\delta} \backslash \{x_0\} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\rightarrow x_0} cf(x) = cL$$

$\lim_{x\rightarrow x_0} f(x) \pm g(x)$

$$\begin{aligned} |f(x) - F| < \varepsilon &\qquad \rightarrow \qquad F - \varepsilon_f < f(x) < F + \varepsilon_f \\ |g(x) - G| < \varepsilon &\qquad \rightarrow \qquad G - \varepsilon_g < g(x) < G + \varepsilon_g \end{aligned}$$

$$F + G - \varepsilon_f - \varepsilon_g < f(x) + g(x) < F + G + \varepsilon_f + \varepsilon_g$$

Con il segno meno, giocare con i moduli per avere $\tilde{\varepsilon} > 0$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned}
|f(x) - F| < \varepsilon_f \qquad & \rightarrow \qquad F - \varepsilon_f < f(x) < F + \varepsilon_f \\
|g(x) - G| < \varepsilon_g \qquad & \rightarrow \qquad G - \varepsilon_g < g(x) < G + \varepsilon_g
\end{aligned}$$

Nell'ipotesi che $f(x) \cdot g(x) > 0$ (concordi, serve teorema permanenza segno?)

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - FG| & = |f(x)g(x) - f(x)G + f(x)G - FG| = \\
& = |f(x)(g(x) - G) + (f(x) - F)G| = \\
& \leq |f(x)||g(x) - G| + |f(x) - F||G| = \\
& \leq (|F| + \varepsilon_f)\varepsilon_g + \varepsilon_f |G| = \\
& = \underbrace{|F|\varepsilon_g + |G|\varepsilon_f + \varepsilon_f\varepsilon_g}_{\tilde{\varepsilon}}
\end{aligned}$$

avendo usato $|g(x) - G| < \varepsilon$, e la disuguaglianza triangolare

$$|f(x)| = |f(x) - F + F| \leq |f(x) - F| + |F| \leq \varepsilon_f + |F|$$

$|g(x)| > \frac{|\lim_{x \to x_0} g(x)|}{2} = \frac{|G|}{2}$ **for** $x \in U_{x_0, \delta}$

Si vuole dimostrare che esiste un intorno per il quale $|g| > \frac{|G|}{2}$

$$|g - G| < \varepsilon$$

Se esiste il limite G, allora per $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |g(x) - G| < \varepsilon$ .... Tra tutti i valori di ε, si sceglie $\frac{|G|}{2} > 0$

$$-\frac{|G|}{2} < g - G < \frac{|G|}{2}$$

Si distinguono i due casi:

- $0 \leq G = |G|$ implica $\frac{|G|}{2} < g < \frac{3}{2}|G|$; prendendo il modulo di quantità positive $\frac{|G|}{2} < |g| < \frac{3}{2}|G|$
- $0 > G = -|G|$ implica $-\frac{3}{2}|G| < g < -\frac{1}{2}|G|$; prendendo il modulo di quantità positive $\frac{|G|}{2} < |g| < \frac{3}{2}|G|$

Si è quindi dimostrato che se esiste il limite G, scegliendo $\varepsilon = \frac{|G|}{2}$, allora esiste un intorno di x_0 nel quale il valore assoluto della funzione è limitato,

$$\frac{|G|}{2} < |g(x)| < \frac{3}{2}|G| \ ,$$

per tutti i valori di $x \in U_{x_0, \delta}$.

$\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x)$

$$\begin{aligned}
|f(x) - F| < \varepsilon_f \qquad & \rightarrow \qquad F - \varepsilon_f < f(x) < F + \varepsilon_f \\
|g(x) - G| < \varepsilon_g \qquad & \rightarrow \qquad G - \varepsilon_g < g(x) < G + \varepsilon_g
\end{aligned}$$

Nell'ipotesi che $f(x) \cdot g(x) > 0$ (concordi, serve teorema permanenza segno?)

$$\begin{aligned}
|f(x)/g(x) - F/G| &= \left|\frac{f}{g} - \frac{F}{g} + \frac{F}{g} - \frac{F}{G}\right| = \\
&= \left|\frac{f}{g} - \frac{F}{g} + \frac{F}{G}\frac{g}{G} - \frac{F}{G}\right| = \\
&= \left|\frac{f}{g} - \frac{F}{g} + \frac{F}{G}\left(\frac{g}{G} - 1\right)\right| = \\
&\leq \left|\frac{1}{g}\right| |f - F| + \left|\frac{1}{G}\right| \left|\frac{F}{G}\right| |g - G| = \\
&\leq \left|\frac{1}{g}\right| \varepsilon_f + \left|\frac{1}{G}\right| \left|\frac{F}{G}\right| \varepsilon_g = \\
&\leq \underbrace{2\left|\frac{1}{G}\right| \varepsilon_f + \left|\frac{1}{G}\right| \left|\frac{F}{G}\right| \varepsilon_g}_{\tilde{\varepsilon}}
\end{aligned}$$

24.10.5 Contronto di infiniti e infinitesimi

24.10.6 Limiti fondamentali

Vengono qui dimostrati i *limiti fondamentali*.

Dimostrazione di $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Usando il *teorema del confronto* per le funzioni $\sin x \leq x \leq \tan x$ (**todo** *dimostrare con l'area delle figure geometriche $\frac{1}{2}\sin x \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\tan x$), si può scrivere per $x \neq 0$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Il limite per $x \to 0$ delle due funzioni estreme vale 1, quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \ .$$

Dimostrazione di $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Usando la formula $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$, si può scrivere $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$. Si può quindi riscrivere il limite cercato come

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}_{=1} = \frac{1}{2} \ .$$

Dimostrazione di $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Usando le notazioni di «o piccolo» e «o grande» per *il confronto tra infinitesimi*, si dimostra il limite desiderato,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + o(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + O(x)) = 1 \ .$$

Dimostrazione di $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1+x} = 1$

Usando le notazioni di «o piccolo» e «o grande» per *il confronto tra infinitesimi*, si dimostra il limite desiderato,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + o(x)}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{o(x)}{1+x} \right) = 1 \ .$$

Dimostrazione di $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Dimostrazione 1. Usando i risultati sui limiti che coinvolgono l'esponenziale, e definendo una nuova variabile $y = e^x - 1$, così da avere $x = \ln(y+1)$, con $y \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$, segue la dimostrazione,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1 \ .$$

Dimostrazione 2. Usando il *teorema del confronto* con la relazione (**todo** *dimostrare!*)

$$\frac{x-1}{x} \le \ln x \le x - 1 \ ,$$

che può essere riscritta, usando il cambio di variabile $x \rightarrow x + 1$ e dividendo per x (ipotizzata positiva; se negativa cambia il verso delle disuguaglianze, ma non il risultato) tutti e 3 i termini, come

$$\frac{1}{x+1} \le \frac{\ln(x+1)}{x} \le 1 \ .$$

Per $x \rightarrow 0$ le due funzioni estremanti tendono a 1 e di conseguenza $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

Dimostrazione di $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$

Usando i risultati che coinvolgono l'esponenziale, dopo aver riscritto $(1+x)^a = e^{a \ln(1+x)}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a \ln(1+x)} - 1}{a \ln(1+x)} \frac{a \ln(1+x)}{x} = a \ \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}}_{=1} \ \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}}_{=1} = a \ ,$$

avendo definito la variabile $y = a \ln(1+x)$, che tende a zero quando $x \rightarrow 0$. **todo** *prestare attenzione alle operazioni fatte, e fare riferimento alle operazioni con i limiti, e successivamente all'uso di infinitesimi e asintotici nel calcolo dei limiti.*

CAPITOLO 25

Derivate

25.1 Definizione

Definition 24.1.1 (Rapporto incrementale)

Il rapporto incrementale di una funzione reale nel punto x viene definito come il rapporto tra la differenza dei valori della funzione e la differenza del valore della variabile indipendente

$$R[f(\cdot), x, h] := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ . \tag{25.1}$$

Definition 24.1.2 (Derivata)

La derivata di una funzione reale in un punto x viene definita come il limite del rapporto incrementale, per l'incremento della variabile indipendente che tende a zero,

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ . \tag{25.2}$$

todo *In generale, la derivata di una funzione reale è un'altra funzione reale.*

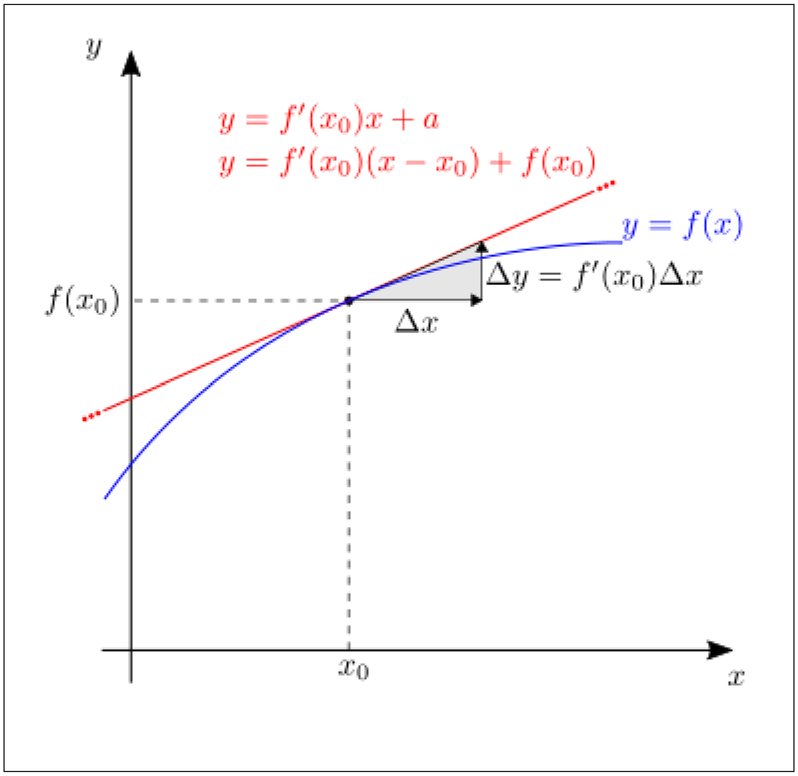
Il limite nella definizione (25.2) della derivata ha la diretta conseguenza di poter scrivere

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + o(h) \ , \tag{25.3}$$

cioè un'approssimazione al primo grado in h di $f(x+h)$ centrata in x. Per una trattazione più completa delle approssimazioni polinomiali di funzioni, e al ruolo delle derivate in queste, si rimanda alla sezione sulle *serie di Taylor e MacLaurin*.

25.2 Interpretazione geometrica

Il valore della derivata di una funzione $f(x)$ in un punto x corrisponde al coefficiente angolare della retta tangente alla curva che rappresenta piano cartesiano il grafico della funzione $y = f(x)$ nel punto di coordinate $(x, f(x))$.



25.3 Incremento di una funzione e differenziale

Definition 24.3.1 (Incremento di una funzione)

L'incremento di una funzione f in seguito all'incremento h della variabile indipendente x è

$$\Delta f(x, h) := f(x + h) - f(x) \ .$$

Definition 24.3.2 (Differenziale di una funzione)

Il differenziale di una funzione f può essere definito come il termine di primo ordine in h dell'incremento $\Delta f(x, h)$,

$$\Delta f(x, h) = df(x, h) + o(h) \ ,$$

e risulta uguale a

$$df(x, h) = f'(x)\, h \, . \tag{25.4}$$

Il confronto con la relazione (25.3) permette di scrivere

$$\Delta f(x,h) = f(x+h) - f(x) = hf'(x) + o(h) \ ,$$

e quindi dimostrare la relazione (25.4) usata per introdurre il concetto di differenziale.

Nota: il differenziale della funzione $f(x) = x$ è uguale a

$$dx(x,h) = \frac{d}{dx}x\, h = h \ ,$$

e quindi si può scrivere nella definizione di differenziale

$$h = dx$$

e quindi

$$df = f'(x)\, dx \ .$$

25.4 Regole di derivazione

Usando la definizione (25.2) di derivata e le proprietà dei limiti, è possibile dimostrare le seguenti proprietà

- linearità

$$\left(a\, f(x) + b\, g(x)\right)' = a\, f'(x) + b\, g'(x) \tag{25.5}$$

- derivata del prodotto di funzioni

$$\Big(f(x)g(x)\Big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{25.6}$$

- derivata del rapporto di funzioni

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \tag{25.7}$$

- derivata della *funzione composta*, $f \circ g(x)$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \left.\frac{df}{dy}\right|_{y=g(x)} \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x} \tag{25.8}$$

- derivata della *funzione inversa*, $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$

$$\left.\frac{df^{-1}}{dy}\right|_{y=f(x)} = \frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x}} \ . \tag{25.9}$$

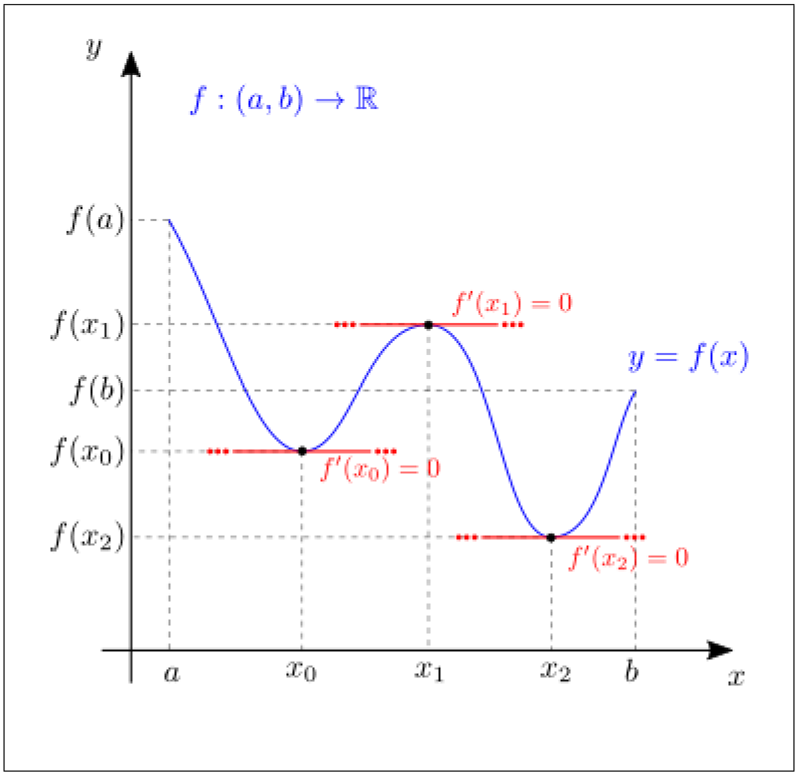
La *dimostrazione delle regole di derivazione* è disponibilie a fine capitolo.

25.5 Teoremi

25.5.1 Teorema di Fermat

Theorem 24.5.1 (Teorema di Fermat)

Data la funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile nel punto di estremo locale $x_0 \in (a, b)$, allora $f'(x_0) = 0$.

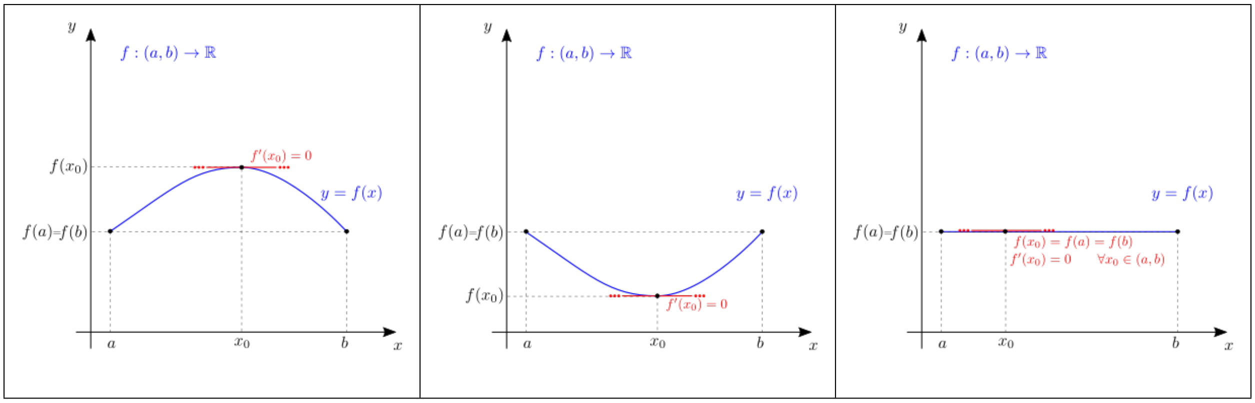


Dimostrazione a fine capitolo.

25.5.2 Teorema di Rolle

Theorem 24.5.2 (Teorema di Rolle)

Data la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in ogni punto dell'intervallo (a, b) con $f(a) = f(b)$, allora esiste un valore $c \in (a, b)$ in cui $f'(c) = 0$.



Dimostrazione a fine capitolo.

25.5.3 Teorema di Cauchy

Theorem 24.5.3 (Teorema di Cauchy)

Date le funzioni $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b), allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che

$$[g(b) - g(a)]\ f'(c) = [f(b) - f(a)]\ g'(c)\ .$$

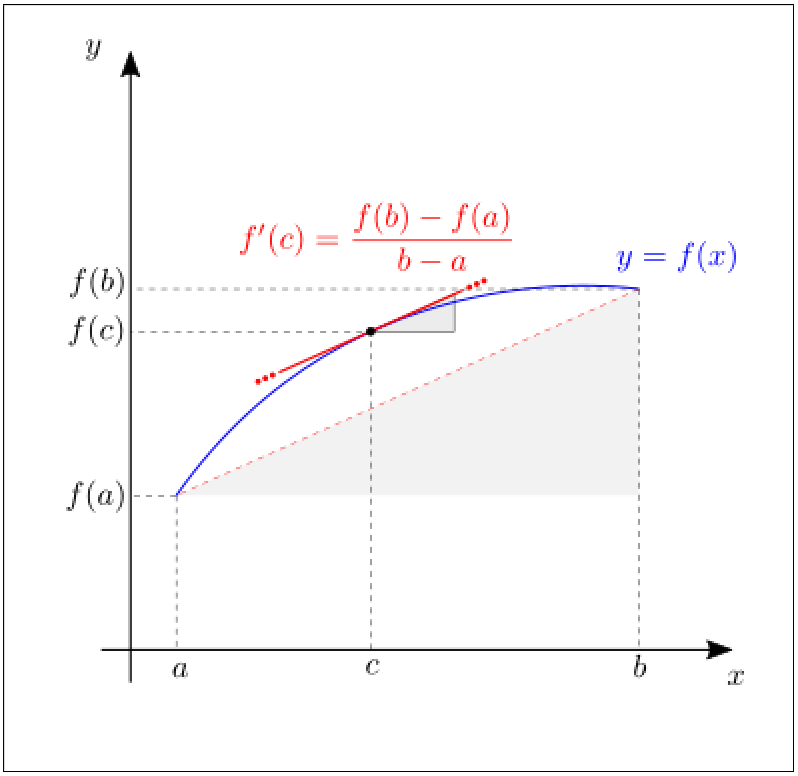
Dimostrazione a fine capitolo.

25.5.4 Teorema di Lagrange

Theorem 24.5.4 (Teorema di Lagrange)

Data la funzione $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), allora esiste un valore $c \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)\ .$$



Dimostrazione

Si applica il *teorema di Cauhcy* scegliendo la funzione $g(x) = x$.

25.5.5 Teorema di de l'Hopital

Theorem 24.5.5 (Teorema di de l'Hopital)

Siano $f(x), g(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni reali di variabile reale continue in $[a, b]$ e derivabili in $(a, b) \backslash \{x_0\}$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \qquad \text{oppure} \quad \lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$$

Se esiste

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \text{finito}$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell\ .$$

todo Controllare l'enunciato

Dimostrazione a fine capitolo.

Oss. Il teorema di de l'Hopital può essere applicato anche in successione, più di una volta, fermandosi al primo rapporto di derivate dello stesso ordine che non produce una forma indeterminata.

Example 24.5.1 (Limite $\lim_{x \to +\infty} x^n \, e^{-x}$)

Il calcolo del limite $\lim_{x \to +\infty} x^n \, e^{-x}$ è una forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$ se $n > 0$, mentre vale 0 se $n < 0$ poiché prodotto di due funzioni che tendono a zero. Nel caso in cui $n > 0$, la forma indeterminata può essere ricondotta a un *confronto di infiniti*,

$$\lim_{x \to +\infty} x^n \, e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} \ ,$$

e calcolato applicando ripetutamente il *teorema di de l'Hopital*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} x^n \, e^{-x} & = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = & \text{(Hopital)} \\
& = \lim_{x \to +\infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = & \text{(Hopital)} \\
& = \lim_{x \to +\infty} \frac{n(n-1) x^{n-2}}{e^x} = & \text{(Hopital)} \\
& = \dots
\end{aligned}$$

Se $n \in \mathbb{N}$ intero, dopo aver applicato n volte il teorema di de l'Hopital si arriva alla forma

$$\lim_{x \to +\infty} x^n \, e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0 \ ,$$

poichè $n!$, pur quanto grande sia, è una costante di valore finito, mentre $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, o brutalmente «$\frac{C}{+\infty} = 0$».

Se $n \in \mathbb{R}$, $n \notin \mathbb{R}$, reale non intero, dopo aver applicato $\lceil n \rceil$ volte il teorema di de l'Hopital si arriva alla forma

$$\lim_{x \to +\infty} x^n \, e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots \{n\} x^{\{n\}-1}}{e^x} = 0 \ ,$$

poiché il numeratore è una potenza negativa di x, e quindi tende a zero per $x \to +\infty$, e il denominatore tende all'infinito, o brutalmente «$\frac{0}{+\infty} = 0$».

25.6 Derivate fondamentali

Usando i *limiti fondamentali*, vengono calcolate le derivate fondamentali, che a loro volta permettono il calcolo degli *integrali fondamentali*. Le derivate fondamentali e la loro combinazione con le *regole di derivazione* permettono la derivazione di funzioni generiche. Le derivate fondamentali sono:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^n & f'(x) &= n x^{n-1} \\
f(x) &= e^x & f'(x) &= e^x \\
f(x) &= \ln x & f'(x) &= \frac{1}{x} \\
f(x) &= \sin x & f'(x) &= \cos x \\
f(x) &= \cos x & f'(x) &= -\sin x
\end{aligned} \tag{25.10}$$

Le *dimostrazioni* sono raccolte alla fine del capitolo.

25.7 Derivate di ordine superiore

Nel calcolo delle derivate di ordine superiore non c'è nulla di speciale: una volta che si è in grado di calcolare la derivata di una funzione reale, la derivata di ordine n viene calcolata applicando n volte l'operatore derivata alla funzione.

25.8 Serie di Taylor e MacLaurin

Le espansioni in serie di Taylor e di MacLaurin sono serie polinomiali che forniscono un"**approssimazione locale** di una funzione, *valida nell'intorno* (**todo** valutare questa espressione) di un punto.

La **serie di Taylor** della funzione $f(x)$ in un intervallo centrato in x_0 è la serie

$$\begin{aligned}T[f(x);x_0] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)^2}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \ .\end{aligned}$$

La serie di MacLaurin è la serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$. La serie di Taylor troncata al grado N è il polinomio di grado N formato dalla sommatoria dei primi $N+1$ termini della serie di Taylor,

$$T_N[f(x);x_0] = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ .$$

La serie di Taylor troncata al N-esimo termine fornisce un'approssimazione locale della funzione $f(x)$ di ordine n, nel senso definito dal seguente teorema.

Theorem 24.8.1 (Approssimazione locale)

todo *Ipotesi del teorema*.

Valgono i seguenti risultati di approssimazione locale

- La serie di Taylor di ordine N è un'approssimazione locale di ordine N della funzione

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_N[f(x);x_0]}{(x-x_0)^N} = 0 \ ,$$

  o usando la notazione di «o piccolo» per il *confronto di infinitesimi*,

  $$f(x) = T_N[f(x);x_0] + o\left((x-x_0)^N\right) \qquad \text{per} \qquad x \to x_0 \ .$$

- L'errore di approssimazione di ordine $N+1$ è asintotico a

  $$f(x) - T_N[f(x);x_0] \sim \frac{f^{(N+1)}}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1} \quad x \to x_0$$

Dimostrazione a fine capitolo.

25.8.1 Esempi

La serie di MacLaurin per le funzioni interessate nei *limiti notevoli* forniscono approssimazioni locali di ordine maggiore per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + a(a-1)\frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)
\end{aligned} \tag{25.11}$$

todo *Dimostrare la convergenza delle serie. Convergenza puntuale, convergenza uniforme (in un insieme di convergenza, di solito centrato in un punto e le cui dimensioni sono definite da un raggio di convergenza)*

Rivisitazione limiti notevoli Per $x \to 0$

$$\begin{aligned}
\sin x &= x + o(x) \\
1 - \cos x &= \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \\
e^x - 1 &= x + o(x) \\
\ln(1+x) &= x + o(x) \\
(1+x)^a - 1 &= a\,x + o(x)
\end{aligned}$$

Identità di Eulero. Usando l'espansione in serie di Taylor per l'esponenziale complesso e^{ix}, si ottiene

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) = \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + o(x^5) = \\
&= \cos x + i \sin x \ .
\end{aligned}$$

25.9 Applicazioni

25.9.1 Approssimazioni locali

Le *serie di Taylor e di MacLaurin* e le proprietà di approssimazione riassunte nel *Theorem 24.8.1* permettono di ricavare un'approssimazione locale di una funzione $f(x)$ nella forma di **serie polinomiali**.

…

25.9.2 Studio di funzione

Uno studio di funzione completo può richiedere la padronanza di tutti gli strumenti del calcolo infinitesimale: ricerca del dominio, limiti, derivate e integrali.

- *studio di funzione - capitolo di introduzione all'analisi* - dominio, limiti ed eventuali asintoti
  - trovare il dominio di una funzione
  - valutare i limiti della funzione agli estremi del dominio, o in corrispondenza di punti di discontinuità
- *studio di funzione - capitolo sulle derivate* - punti di estremi locali, punti di flesso
- *studio di funzione - capitolo sugli integrali* - area sottesa al grafico di una funzione, e altre grandezze integrali

25.9.3 Ottimizzazione

25.9.4 Metodo di Netwon per la soluzione di equazioni algebriche $f(x) = 0$

Due algoritmi iterativi classici usati per la soluzione di equazioni algebriche della forma $f(x) = 0$ - problema che può essere descritto come ricerca degli zeri della funzione $f(x)$ - sono il **metodo di bisezione** e il **metodo di Newton**. Il *metodo di bisezione* viene discusso nella sezione sull'introduzione all'analisi, mentre qui viene presentato il meetodo di Newton.

…

Il metodo di Newton è discusso nel bbook sull'introduzione alla programmazione e al calcolo scientifico, nella sezione di introduzione al calcolo numerico. Nella sezione sui metodi numerici per la soluzione di equazioni algebriche non lineari, il metodo di Newton viene descritto, implementato e applicato a semplici esempi.

25.10 Problemi

25.10.1 Calcolo derivate

- derivate fondamentali, regole di derivazione

Exercise 24.10.1 (Calcolo derivate con definizione)

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni usando la definizione

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = \sqrt{x}$
3. $f(x) = e^x$
4. $f(x) = \ln(x)$
5. $f(x) = \sin(x)$

Essendo la derivata definita come limite di un rapporto incrementale, questi esercizi possono essere visti come ulteriori esercizi sui limiti.

Exercise 24.10.2 (Verifica della derivabilità di funzioni)

Verificare che le seguenti funzioni siano derivabili. Dove non indicato esplicitamente, si consideri $\mathbb{R}$ come dominio.

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$
3. $f(x) = e^x$
4. $f(x) = \ln(x)$, $x > 0$
5. $f(x) = \sin(x)$
6. $f(x) = \cos(x)$
7. $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$, $x > 0$
8. $f(x) = e^{-x^2}$

Essendo la derivata definita come limite di un rapporto incrementale, e venendo richiesto di controllare che questo limite esista, anche questi esercizi possono essere visti come ulteriori esercizi sui limiti.

Exercise 24.10.3 (Calcolo delle derivate)

1. $\frac{d}{dx}\left(x^3\right)$
2. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)$
3. $\frac{d}{dx}\left(e^x\right)$
4. $\frac{d}{dx}\left(\ln(x)\right)$
5. $\frac{d}{dx}\left(\sin(x)\right)$
6. $\frac{d}{dx}\left(\cos(x)\right)$
7. $\frac{d}{dx}\left(\tan(x)\right)$
8. $\frac{d}{dx}\left(x^4 + 2x^2\right)$
9. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\right)$
10. $\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)$
11. $\frac{d}{dx}\left(\ln(x^2)\right)$
12. $\frac{d}{dx}\left(\sin^2(x)\right)$
13. $\frac{d}{dx}\left(\cos(x^2)\right)$
14. $\frac{d}{dx}\left(\tan(\sqrt{x})\right)$
15. $\frac{d}{dx}\left(\sinh(x)\right)$
16. $\frac{d}{dx}\left(\cosh(x)\right)$
17. $\frac{d}{dx}\left(\tanh(x)\right)$
18. $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right)$
19. $\frac{d}{dx}\left(\ln(x + \sqrt{x^2+1})\right)$
20. $\frac{d}{dx}\left(\sin(e^x)\right)$
21. $\frac{d}{dx}\left(\cos(\ln(x))\right)$
22. $\frac{d}{dx}\left(\tan(x^3)\right)$

23. $\frac{d}{dx}\left(xe^x\right)$
24. $\frac{d}{dx}\left(x^2\ln(x)\right)$
25. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$
26. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x^3-1}\right)$
27. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)$
28. $\frac{d}{dx}\left(\sinh(x^2)\right)$
29. $\frac{d}{dx}\left(\cosh(\sqrt{x})\right)$
30. $\frac{d}{dx}\left(\tanh(x+1)\right)$

Exercise 24.10.4 (Calcolo di limiti con la regola di de l'Hopital)

forme indeterminate $\frac{f(x)}{g(x)}$

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$
3. $\lim_{x\to \infty}\frac{\ln(x)}{x}$
4. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
7. $\lim_{x\to \infty}\frac{x}{e^x}$
8. $\lim_{x\to \infty}\frac{\ln(x^2)}{\ln(x)}$
9. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
10. $\lim_{x\to \infty}\frac{\sinh(x)}{e^x}$

25.10.2 Serie di Taylor

Exercise 24.10.5

1. Espandere la funzione $f(x) = e^x$ in serie di Taylor attorno a $x = 0$ fino al termine di ordine 4.
2. Espandere la funzione $f(x) = \sin(x)$ in serie di Taylor attorno a $x = 0$ fino al termine di ordine 5.
3. Espandere la funzione $f(x) = \ln(1 + x)$ in serie di Taylor attorno a $x = 0$ fino al termine di ordine 3.
4. Calcolare l'errore di approssimazione della serie di Taylor di ordine 4 per $f(x) = \sqrt{x}$ attorno a $x = 1$.
5. Determinare l'ordine di accuratezza del metodo numerico basato su una formula di differenze finite centrata di ordine 2, e calcolare il primo errore per il calcolo della derivata prima.
6. Determinare se il punto $x = 1$ è un massimo, un minimo o un punto di flesso per la funzione $f(x) = x^4-4x^3+6x^2$ usando la serie di Taylor attorno a $x = 1$.

7. Determinare se il punto $x = 0$ è un massimo, un minimo o un punto di flesso per la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ utilizzando la serie di Taylor attorno a $x = 0$.
8. Verificare se il punto $x = 0$ è un punto di flesso per la funzione $f(x) = x^3 - 3x + 2$ utilizzando la serie di Taylor e analizzando il comportamento di $f'(x)$, $f''(x)$ e $f'''(x)$.
9. Determinare se il punto $x = 1$ è un massimo, un minimo o un punto di flesso per la funzione $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ utilizzando la serie di Taylor attorno a $x = 1$.
10. Analizzare la funzione $f(x) = x^4 - 2x^2 + x$ per determinare la natura del punto critico $x = 0$ in base alla serie di Taylor di ordine 3, determinando se è un massimo, un minimo o un punto di flesso.

25.10.3 Problemi di geometria

Exercise 24.10.6 (Problemi di geometria)

todo

- *rette tangenti a curve*
- *curve tangenti a curve: famiglie parametriche di curve*

25.10.4 Studio di funzione: massimi, minimi e flessi; concavità

Le derivate permettono di aggiungere dettagli allo studio di funzione, iniziato nel capitolo precedente. Grazie alle derivate, è possibile e studiarne la tendenza e la concavità, identificabili rispettivalemnte con $f'(x)$ e $f''(x)$); le condizioni di derivata prima e/o seconda nulla definiscono poi i punti di minimo e di massimo locali di una funzione (derivabile), i punti di flesso.

Exercise 24.10.7

Si completi lo studio di funzione delle funzioni elencate nell'"*esercizio* nel capitolo precedente, con:

- lo studio del segno, della tendenza e della concavità della funzione
- i punti di minimo e massimo locale
- i punti di flesso

25.10.5 Problemi di ottimizzazione

Exercise 24.10.8

Si chiede di trovare i punti di minimo e massimo, locali e assoluti, e disegnare il grafico delle funzioni delle seguenti funzioni all'interno del dominio indicato

$$\begin{array}{lll} \mathbf{0}.\ f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 \quad , & x \in [-1, 2] & \text{R:} \\ \mathbf{1}.\ f(x) = \dfrac{x}{\cos x + 1} \quad , & x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] & \text{R:} \\ \mathbf{2}.\ f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \quad , & x \in \mathbb{R} & \text{R:} \\ \dots & & \end{array}$$

todo *Aggiungere problemi*

Exercise 24.10.9 (Problemi di geometria)

Si chiede di determinare il dominio e la quantità richiesta in funzione della quantità indipendente; si trovino poi i punti di minimo e massimo, locali e assoluti, e disegnare il grafico delle funzioni delle seguenti funzioni all'interno del loro dominio. In particolare

1. Data la famiglia di rettangoli di perimetro noto p, si chiede di studiare l'area A in funzione della lunghezza di un lato x, $A(x)$.
2. Data la famiglia di triangoli rettangoli di area data A, si chiede di studiare il perimetro p in funzione della lunghezza di un suo cateto
3. Data la regione di piano chiusa delimitata tra la parabola $y = -x^2 + 1$ e l'asse x, si chiede di studiare l'area del rettangolo inscritto in fuzione della semi-lunghezza del lato parallelo all'asse x
4. Data la regione di piano chiusa delimitata tra la parabola $y = -x^2 + 1$ e l'asse x, si chiede di studiare l'area triangolo isoscele con vertice nell'origine degli assi e la base parallela all'asse x
5. Data una sfera di raggio R, si chiede di studiare il volume e la superficie di un cilindro retto iscritto nella sfera.

Exercise 24.10.10 (Problemi di economia)

todo

25.10.6 Metodo di Newton

Si chiede di risolvere le sequenti equazioni nonlineari con il *metodo di Newton* (è quindi necessario riformulare il problema come la ricerca degli zeri di una funzione), dopo aver impostato la soluzione con un metodo grafico. Il metodo grafico è necessario a farsi un'idea sul numero di soluzioni da cercare, e sui valori con cui iniziare il metodo di Newton. Si chiede di concludere il procedimento a mano dopo 3 iterazioni, o quando si ottiene una soluzione con errore minore della tolleranza, qui scelta come $\tau = 0.01$. Si chiede infine di implementare il metodo con un linguaggio di programmazione a piacimento, per cercare una soluzione con tolleranza $\tau = 10^{-5}$

Le stesse equazioni vengono affrontate *con il metodo di bisezione come esercizio* nel capitolo sull'introduzione all'analisi.

Exercise 24.10.11 (Soluzione iterativa di equazioni nonlineari - Newton)

1. $x^2 - 4x + 1 = 0$
2. $x^3 - 2x = 1$
3. $\ln x = -2x$

4. $e^{-x} \cos x = \frac{1}{2}$

Soluzione 1.

Si cerca uno zero della funzione $f(x) = x^2 - 4x + 1$ con il metodo di Newton. La derivata della funzione è

$$f'(x) = 2x - 4 \ .$$

Inizializzazione del metodo.

$$x_0 = 0$$

Iterazione 0.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 1 \\ f'(x_0) &= -4 \end{aligned}$$

Il valore assoluto della funzione in x_0 è maggiore della tolleranza, $|f(x_0)| > \tau$; il numero di iterazioni fatte è inferiore al numero di iterazioni massimo; quindi l'algoritmo procede.

$$\Delta x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Iterazione 1.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{1}{16} - 4\frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{16} \\ f'(x_1) &= 2\frac{1}{4} - 4 = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Il valore assoluto della funzione in x_1 è maggiore della tolleranza, $|f(x_1)| > \tau$; il numero di iterazioni fatte è inferiore al numero di iterazioni massimo; quindi l'algoritmo procede.

$$\Delta x_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{\frac{1}{16}}{-\frac{7}{2}} = \frac{1}{56}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{56} = \frac{15}{56}$$

Iterazione 2.

$$\begin{aligned} f(x_2) &= \left(\frac{15}{56}\right)^2 - 4\frac{15}{56} + 1 = \\ &= \frac{15^2}{56^2} - \frac{15}{14} + 1 = \\ &= \frac{15^2}{56^2} - \frac{1}{14} = \frac{15^2 - 14 \cdot 16}{14 \cdot 14 \cdot 16} = \frac{1}{3136} = 3.1\overline{8} \cdot 10^{-4} \ . \end{aligned}$$

Il valore assoluto della funzione in x_2 è minore della tolleranza, $|f(x_2)| < \tau$; l'algoritmo ha raggiunto la convergenza in 2 iterazioni con la tolleranza impostata a $\tau = 0.01$, trovando un valore approssimato di uno zero della funzione in

$$x_2 = \frac{15}{56} \ .$$

25.11 Note e dimostrazioni

25.11.1 Definizione

25.11.2 Regole di derivazione

Linearità

La derivata in x della funzione $af(x) + bg(x)$ viene calcolata con la definizione di limite di rapporto incrementale, a x costante per $h \to 0$

$$\begin{aligned}(af(x) + bg(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{(af(x+h) + bg(x+h)) - (af(x) + bg(x))}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(f(x+h) + f(x)) + b(g(x+h) - bg(x))}{h} = \\ &= a \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x)}{h} + b \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - bg(x)}{h} = \\ &= af'(x) + bg'(x)\ .\end{aligned}$$

Prodotto

La derivata in x della funzione $f(x)g(x)$ viene calcolata con la definizione di limite di rapporto incrementale, a x costante per $h \to 0$

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\to f'(x)} \underbrace{g(x+h)}_{\to g(x)} + f(x) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\to g'(x)} = \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\ .\end{aligned}$$

Quoziente

La derivata in x della funzione $\frac{f(x)}{g(x)}$ viene calcolata con la definizione di limite di rapporto incrementale, a x costante per $h \to 0$

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)}}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} = \\ &= \ldots \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\ .\end{aligned}$$

Funzione composta

La derivata in x della funzione $f(g(x))$ viene calcolata con la definizione di limite di rapporto incrementale, a x costante per $h \to 0$

$$\begin{aligned}
(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \\
&= \dots = \\
&= f'\left(g(x)\right) g'(x) \ .
\end{aligned}$$

- **todo** *discutere la validità dell'operazione di moltiplicare per* $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)}$
- **todo** $g(x+h) - g(x)) \to 0$ per $h \to 0$ poiché $g(x)$ è continua se derivabile

Derivata della funzione inversa

Si usa la regola (25.8) di derivazione della funzione composta applicata alla relazione

$$x = f^{-1}\left(f(x)\right)$$

che caratterizza la funzione inversa f^{-1}. Derivando entrambi i termini della relazione rispetto alla variabile indipendente x si ottiene

$$1 = \left.\frac{df^{-1}}{dy}\right|_{y=f(x)} \frac{df(x)}{dx} \ ,$$

dalla quale segue immediatamente la regola di derivazione della funzione inversa

$$\left.\frac{df^{-1}}{dy}\right|_{y=f(x)} = \frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_x} \ .$$

25.11.3 Teoremi

Dimostrazione del teorema di Fermat

Sia x_0 un punto di minimo locale della funzione $f(x)$ derivabile in x_0. La definizione di minimo locale permette di scrivere

$$\exists \delta > 0 : \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b) \quad \rightarrow \quad f(x_0) \le f(x) \ .$$

Quindi si possono scrivere le seguenti relazioni

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \ge 0 \qquad \forall h \in (0, \delta)$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \le 0 \qquad \forall h \in (-\delta, 0)$$

Il limite per $h \to 0$ di queste due relazioni esiste ed è $f'(x_0)$ in entrambi i casi, essendo la derivata il limite del rapporto incrementale. Le due espressioni a sinistra dei segni di disuguaglianza possono essere considerate funzioni continue della variabile h, il cui limite esiste per $h \to 0$. Usando il *teorema della permanenza del segno*, si può concludere che

$$\begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{cases}$$

e da queste la dimostrazione della tesi del problema, $f'(x_0)$.

Dimostrazione del teorema di Rolle

Per il *teorema di Weierstrass*, la funzione f ha un massimo M e un minimo m assoluti nell'intervallo $[a, b]$. Si distinguono due casi:

- massimo e minimo sono nei punti estremi dell'intervallo. Allora la funzione è costante, e la derivata è nulla in ogni punto $c \in (a, b)$
- i punti di massimo e di minimo sono interni all'intervallo. In questo caso, per il *teorema di Fermat* i punti c di minimo o massimo verificano la condizione $f'(c) = 0$.

Dimostrazione del teorema di Cauchy

Si applica il *teorema di Rolle* alla funzione

$$h(x) = [g(b) - g(a)]\ f(x) - [f(b) - f(a)]\ g(x)$$

continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e con $h(a) = g(b)\, f(a) - f(b)\, g(a) = h(b)$.

Dimostrazione del teorema di de l'Hopital

Forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Usando il *teorema di Cauchy* e il *teorema di Rolle* **todo**

Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Usando il *teorema di Cauchy* e il *teorema di Lagrange* **todo**

25.11.4 Derivate fondamentali

Dimostrazione di $(x^n)'$

Usando la *formula binomiale* $(x + \varepsilon)^n = x^n + nx^{n-1}\varepsilon + f(\varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^n &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(x+\varepsilon)^n - x^n}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\varepsilon + o(\varepsilon) - x^n}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(nx^{n-1} + O(\varepsilon)\right) = \\ &= nx^{n-1}\ . \end{aligned}$$

Dimostrazione di $(e^x)'$

Usando le proprietà della funzione esponenziale e il limite $e^\varepsilon - 1 \sim \varepsilon$ per $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^x &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{x+\varepsilon}-e^x}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^x\left(e^\varepsilon - 1\right)}{\varepsilon} = \\ &= e^x \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon + o(\varepsilon)}{\varepsilon} = \\ &= e^x \lim_{\varepsilon\to 0}\left(1 + O(\varepsilon)\right) = \\ &= e^x \,.\end{aligned}$$

Dimostrazione di $(\ln x)'$

Usando le proprietà della funzione logaritmo naturale e il limite $\ln(1+\varepsilon) \sim \varepsilon$ per $\varepsilon \to 0$, per $x > 0$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln x &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(x+\varepsilon)-\ln x}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{\varepsilon}{x} + o(\varepsilon)}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{x} + O(\varepsilon)\right) = \\ &= \frac{1}{x} \,.\end{aligned}$$

Dimostrazione di $(\sin x)'$

Usando le formule di somma delle funzioni armoniche, **todo** ref, e gli infinitesimi delle funzioni $\sin\varepsilon \sim \varepsilon$, $\cos\varepsilon \sim 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$ per $\varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin(x+\varepsilon)-\sin x}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin x\cos\varepsilon + \cos x\sin\varepsilon - \sin x}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin x\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right) + \varepsilon\,\cos x - \sin x}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\cos x + O(\varepsilon)\right) = \\ &= \cos x \,.\end{aligned}$$

Dimostrazione di $(\cos x)'$

Usando le formule di somma delle funzioni armoniche, **todo** ref, e gli infinitesimi delle funzioni $\sin\varepsilon \sim \varepsilon$, $\cos\varepsilon \sim 1-\frac{\varepsilon^2}{2}$ per $\varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos(x) & = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos(x+\varepsilon)-\cos x}{\varepsilon} = \\
& = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos x\cos\varepsilon - \sin x\sin\varepsilon - \sin x}{\varepsilon} = \\
& = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos x\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right) - \varepsilon\,\sin x - \cos x}{\varepsilon} = \\
& = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\sin x + O(\varepsilon)\right) = \\
& = -\sin x\ .
\end{aligned}$$

25.11.5 Derivate di ordine superiore

25.11.6 Serie di Taylor e MacLaurin

Dimostrazione delle proprietà di approssimazione locale della serie di Taylor

Usando il teorema di de l'Hopital, fino a quando il rapporto non è una forma indeterminata

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_N[f(x);x_0]}{(x-x_0)^N} & = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots\frac{f^{(N)}(x_0)}{N!}(x-x_0)^N}{(x-x_0)^N} = (\mathrm{H}) = \\
& = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots\frac{f^{(N)}(x_0)}{(N-1)!}(x-x_0)^{N-1}}{N\,(x-x_0)^{N-1}} = (\mathrm{H}) = \\
& = \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)+\dots\frac{f^{(N)}(x_0)}{(N-2)!}(x-x_0)^{N-2}}{N\,(N-1)\,(x-x_0)^{n-1}} = (\mathrm{H}) = \\
& = \dots \\
& = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(N)}(x)-f^{(N)}(x_0)}{N!} = 0\ ,
\end{aligned}$$

si dimostra che il numeratore è un infinitesimo dello stesso ordine del denominatore. Usando la notazione dell'*»o piccolo»* per gli infinitesimi si può quindi scrivere l'approssimazione locale come:

$$f(x) - T_N[f(x),x_0] = o\left((x-x_0)^N\right)\ ,$$

o in maniera equivalente

$$f(x) = T_N[f(x),x_0] + o\left((x-x_0)^N\right)\ .$$

Ripetendo lo stesso procedimento, confrontando la differenza $f(x)-T_N[f(x);x_0]$ con il termine $(x-x_0)^{N+1}$ si ottiene

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_N[f(x);x_0]}{(x-x_0)^N} = \dots = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(N+1)}(x)}{(N+1)!} = \frac{f^{(N+1)}(x_0)}{(N+1)!}\ .$$

CAPITOLO 26

Integrali

26.1 Definizioni

Definition 25.1.1 (Somma di Riemann)

Data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e una partizione P dell'intervallo $[a, b]$,

$$P = \{x_0, x_1, ... x_n | a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} ,$$

una somma di Riemann σ della funzione f sulla partizione P viene definita come

$$\sigma_P = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) , \tag{26.1}$$

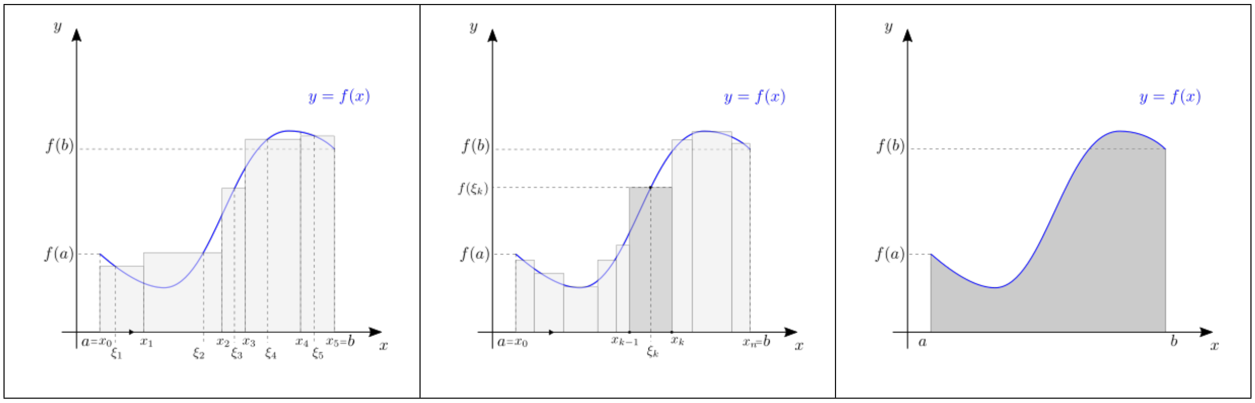
con $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Definition 25.1.2 (Integrale di Riemann)

Sia $\Delta x = \max_k (x_k - x_{k-1})$, l'integrale definito di Riemann è il limite per $\Delta x \to 0$ della somma di Riemann σ

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sigma_P . \tag{26.2}$$

Osservazione. Dato l'intervallo $[a, b]$, per $\Delta x \to 0$ il numero di intervalli della partizione tende all'infinito, $n \to \infty$.



Definition 25.1.3 (Funzione integrabile (secondo Riemann))

Una funzione $f(x) : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile sull'intervallo $[a, b] \subseteq D$ se esiste (finito?) l'integrale di Riemann

$$\int_a^b f(x)\, dx \, .$$

26.1.1 Interpretazione geometrica

L'integrale definito

$$\int_a^b f(x)\, dx \, ,$$

corrisponde al valore dell''**area con segno** tra il grafico della funzione $y = f(x)$ e l'asse x, per valori di $x \in [a, b]$. Se la funzione è positiva in un intervallo, il contributo dell'integrale sull'intervallo è positivo; se la funzione è negativa in un intervallo, il contributo dell'integrale sull'intervallo è negativo.

26.1.2 Integrale definito

Proprietà dell'integrale definito

Dalla definizione (26.2) dell'integrale di Riemann seguono immediatamente le seguenti proprietà:

- linearità dell'integrale definito

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx \, , \tag{26.3}$$

- additività sull'intervallo

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx \, , \tag{26.4}$$

- valore assoluto dell'integrale è minore dell'integrale del valore assoluto

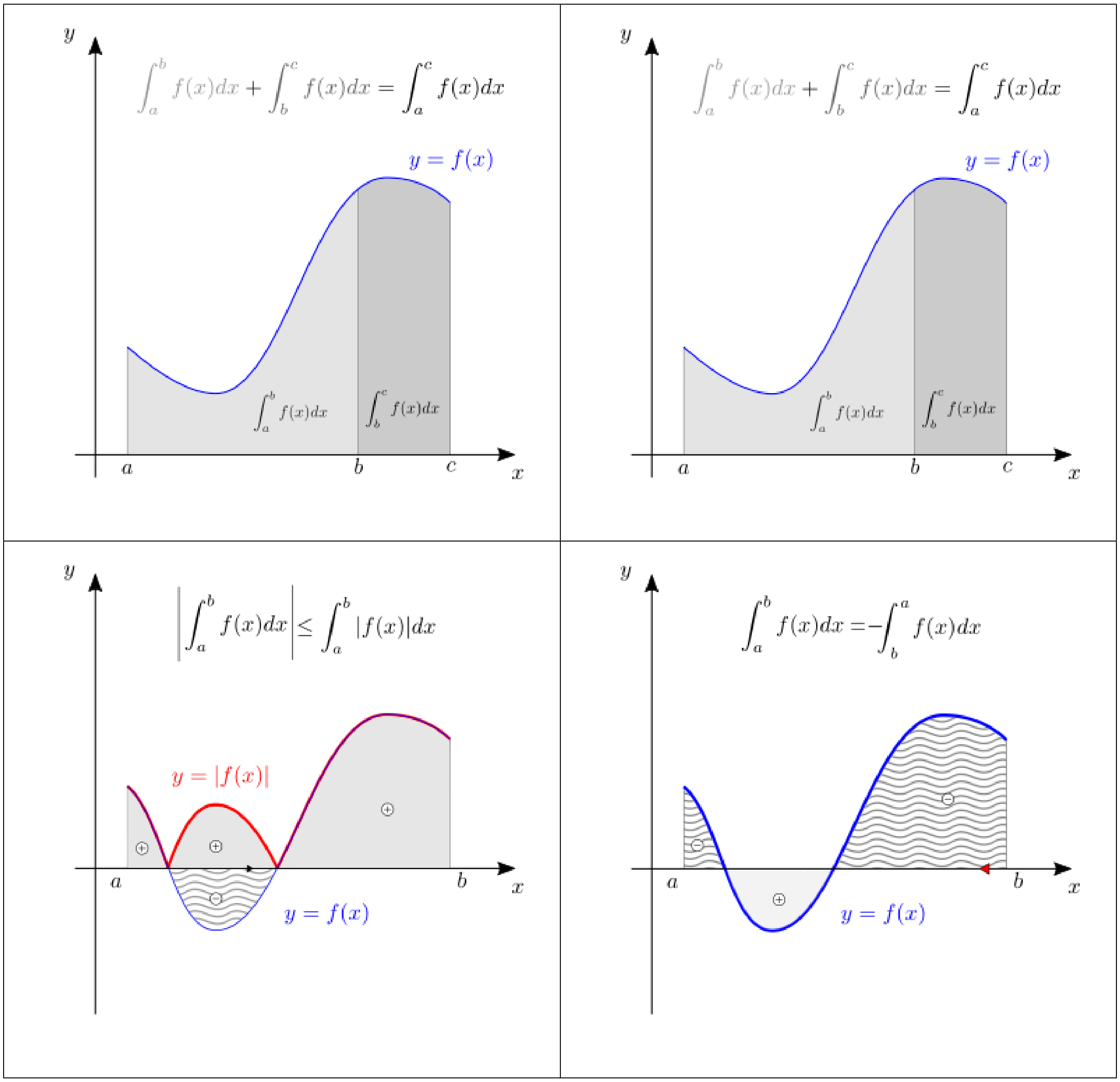
$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \, , \tag{26.5}$$

- scambio degli estremi di integrazione

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = -\int_{x=b}^{a} f(x)\, dx \tag{26.6}$$

- integrale di una funzione costante

$$\int_{x=a}^{b} m dx = (b-a)\, m \tag{26.7}$$



26.1.3 Integrale indefinito

Usando la proprietà (26.4) di additività sull'intervallo dell'integrale definito,

$$\int_a^x f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_b^x f(t)\, dt \ ,$$

si osserva che i due integrali con estremo superiore x e diverso estremo inferiore differiscono solo per una quantità indipendente da x, $\int_a^b f(t)\, dt$. Data la funzione $f(x)$ e il valore a come paramtetro, si definisce una funzione di x

$$F(x; a) := \int_a^x f(t)\, dt \ . \tag{26.8}$$

Usando questa definizione, è immediato dimostrare che l'integrale definito $\int_a^b f(t)\, dt$ è uguale alla differenza della funzione $F(\cdot; b)$ calcolata nei due estremi,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\, dt &= \int_c^b f(t)dt + \int_a^c f(t)dt = \\ &= \int_c^b f(t)dt - \int_c^a f(t)dt = \\ &= F(b; c) - F(a; c) \ ,\end{aligned}$$

e che questo risultato è indipendente dal valore c, usato come parametro nella definizione della funzione F.

Data una funzione $f(x)$, le due funzioni $F(x; a_1)$, $F(x; a_2)$ differiscono solo di un termine che dipende dai parametri a_1, a_2 ma non dalla variabile indipendente x. La famiglia di funzioni $F(x; a)$ ottenuta per ogni valore di a definisce quindi una funzione $F(x)$ a meno di una costante additiva, la **funzione primitiva** della funzione $f(x)$.

L'"**integrale indefinito** di una funzione $f(x)$ viene definito come,

$$\int^x f(t)\, dt = F(x) + C \ ,$$

dove la costante additiva C tiene conto dell'arbitrarietà appena discussa.

L'"**integrale definito** di una funzione continua $f(x) : D \to \mathbf{R}$ su un'intervallo $[a, b] \subseteq D$ può quindi essere valutato come la differenza della funzione primitiva $F(x)$ valutata nell'estremo superiore e nell'estremo inferiore,

$$\int_{x=a}^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \ .$$

26.2 Teoremi

26.2.1 Teorema della media

Theorem 25.2.1 (Teorema della media)

Sia $f : [a, b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato, allora esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c)$$

Dimostrazione

Poiché $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato, allora per il *teorema di Weierstrass* la funzione ammette minimo m e massimo M per valori di $x \in [a, b]$,

$$m \le f(x) \le M \ .$$

Integrando questa relazione sull'intervallo $[a, b]$,

$$\int_a^b m \, dx \le \int_a^b f(x) \, dx \le \int_a^b M, \ dx \ .$$

La regola di integrazione per una funzione costante (26.7) permette di calcolare gli integrali estremi

$$(b-a)m \le \int_a^b f(x) \, dx \le (b-a)M \ ,$$

e dividendo per $(b-a) \ne 0$, si ottiene la relazione

$$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \le M \ .$$

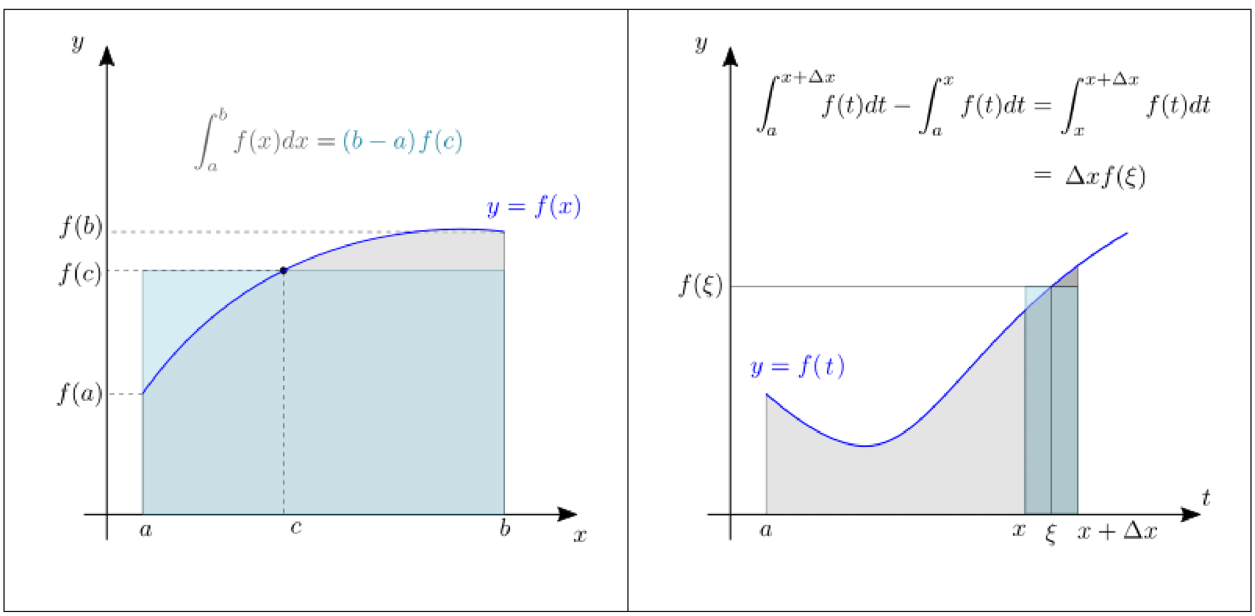
Siano x_m e $x_M \in [a, b]$ i punti - i numeri reali - in cui la funzione assume i valori minimo e massimo. Se $x_m < x_M$, si applica il teorema dei valori medi sull'intervallo $I_m = [x_m, x_M]$, in caso contrario sull'intervallo $I_m = [x_M, x_m]$.

Per il *teorema dei valori intermedi*, la funzione continua $f(x)$ definita sull'intervallo chiuso e limitato $I_m \subseteq [a, b]$, assume tutti i valori compresi tra i valori nei due estremi, cioè esiste un numero $c \in I_m$ tale che

$$m = f(x_m) \le f(c) \le f(x_M) = M \ ,$$

e tra tutti i valori compresi tra m e M esiste un punto c in cui la funzione assume il valore particolare definito dalla media $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$, cioè

$$\exists c \in I_m \subseteq [a, b] \ , \ \text{t.c. } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \ .$$



26.2.2 Teorema fondamentale del calcolo infinitesimale

Theorem 25.2.2 (Teorema fondamentale del calcolo infinitesimale)

Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ integrabile sull'intervallo $[a,b] \subseteq D$, *Definition 25.1.3*, si definisce la funzione

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt\ .$$

Oss. Qui la variabile di integrazione t è una variabile **dummy**, non ha un significato particolare che resista all'operazione di integrazione. La funzione F ha come argomento x l'estremo di integrazione superiore dell'integrale.

1. Se f è limitata la funzione $F(x)$ è continua se f limitata
2. Se f è continua in (a,b), allora $F(x)$ è differenziabile in (a,b) e la sua derivata vale $F'(x) = f(x)$, o più esplicitamente

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)\ .$$

Dimostrazione

Continuità. Si dimostra la continuità di $F(x)$, usando la definizione di *funzione continua*, valutando $\lim_{x\to x_0} F(x)$, e verificando che vale $\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} F(x) &= \lim_{x\to x_0}\int_a^x f(t)\,dt = && (1)\\
&= \lim_{x\to x_0}\left[\int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^x f(t)\,dt\right] = && (2)\\
&= \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \lim_{x\to x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt = && (3)\\
&= \int_a^{x_0} f(t)\,dt = F(x_0)\ ,
\end{aligned}$$

avendo usato (1) l'additività dell'integrale sull'intervallo (26.4), (2) le *operazioni con i limiti* per scrivere il limite della somma di funzione come la somma dei limiti - almeno, quando i limiti esistono finiti, come in questo caso per l'intergabilità della funzione -, e (3) riconoscendo che l'integrale di una funzione limitata su un intervallo di dimensione nulla è nullo esso stesso.

Derivata di $F(x)$. L'espressione della derivata di $F(x)$ si ottiene dal calcolo diretto, partendo dalla *definizione di derivata di una funzione reale a variabile reale*

$$\begin{aligned}
F'(x) := \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = &\\
= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big[\int_a^{x+\varepsilon} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\Big] = & && (1)\\
= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big[\int_x^{x+\varepsilon} f(y)dy\Big] = & && (2)\\
= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon f(\xi_{[x,x+\varepsilon]}) = & \qquad \xi_{[x,x+\varepsilon]} \in [x, x+\varepsilon] && (3)\\
= \lim_{\varepsilon\to 0} f(\xi_{[x,x+\varepsilon]}) = f(x). &
\end{aligned}$$

avendo usato (1) l'additività dell'integrale sull'intervallo (26.4), (2) il *teorema della media*, e (3) la *continuità di f*, che permette di scrivere

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(\xi_{[x,x+\varepsilon]}) = \lim_{\xi_{[x,x+\varepsilon]}\to x} f(\xi_{[x,x+\varepsilon]}) = f(x) \ ,$$

quando $\xi_{[x,x+\varepsilon]} \to x$ quando le dimensioni dell'intervallo vengono fatte tendere a zero, e di concludere la dimostrazione del teorema.

Oss. Per evitare questioni sull'appartenenza di $x+\varepsilon \in [a,b]$ si può usare la definizione «all'indietro» della derivata,

$$F'(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon} \ .$$

26.2.3 Derivata su dominio dipendente dalla variabile indipendente

Theorem 25.2.3 (Derivata su dominio dipendente dalla variabile indipendente - Reynolds)

Sia $x \in D$, e gli estremi di integrazione $a(x)$, $b(x)$ **todo** *Caratteristiche?*

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = -a'(x)\,f(a(x)) + b'(x) f(b(x))$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(y)dy &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big[\int_{a(x+\varepsilon)}^{b(x+\varepsilon)} f(y)dy - \int_{a(x)}^{b(x)} f(y)dy\Big] = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big[\int_{a(x)}^{b(x)} f(y)dy - \int_{a(x)}^{a(x+\varepsilon)} f(y)dy + \int_{b(x)}^{b(x+\varepsilon)} f(y)dy - \int_{a(x)}^{b(x)} f(y)dy\Big] = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big[-\int_{a(x)}^{a(x+\varepsilon)} f(y)dy + \int_{b(x)}^{b(x+\varepsilon)} f(y)dy\Big] = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big[-(a(x+\varepsilon)-a(x))f(\alpha) + (b(x+\varepsilon)-b(x))f(\beta)\Big] = \qquad \alpha \in [a(x), a(x+\varepsilon)] \ , \quad \beta \in [b(x), b(x+\varepsilon)] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big[-(\varepsilon a'(x) + o(\varepsilon))f(\alpha) + (\varepsilon b'(x) + o(\varepsilon))f(\beta)\Big] = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big[-\varepsilon a'(x)\,f(\alpha) + \varepsilon b'(x)\,f(\beta)\Big] = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[-a'(x)\,f(\alpha) + b'(x)\,f(\beta)\Big] = \\
&= -a'(x)\,f(a(x)) + b'(x)\,f(b(x)) \ .
\end{aligned}$$

26.3 Integrali fondamentali

Una volta dimostrato il *teorema fondamentale del calcolo infinitesimale*, questo risultato può essere usato per valutare gli integrali fondamentali come l'operazione inversa alla derivazione applicata alle *derivate fondamentali*

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad (\text{if } n \neq -1)$$
$$\int e^x \, dx = e^x + C$$
$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C$$
$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$
$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

Per un'ulteriore lista si rimanda alla *tabella a fine sezione*.

26.4 Integrali impropri

Vengono definiti integrali impropri alcune famiglie di integrali definiti, come ad esempio:

- gli integrali di funzioni continue definite su domini con almeno un estremo aperto (finito o infinito), $f : D_{a,b} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow$, che hanno come estremo di integrazione un estremo dell'intervallo. Questo caso comprende sia i limiti al finito

Example 25.4.1 ($\int_0^b \frac{1}{x} \, dx$)

$$\int_{x=0^+}^b \frac{1}{x} \, dx = \lim_{a \to 0^+} \int_{x=a}^b \frac{1}{x} \, dx = \lim_{a \to 0^+} \left[\ln x \Big|_{x=a}^b \right] = \lim_{a \to 0^+} [\ln b - \ln a] = +\infty \ .$$

poiché $\lim_{a \to 0^+} \ln a = -\infty$.

Example 25.4.2 ($\int_0^b \frac{1}{x^n} \, dx$)

Se $n > 0$ e $n \neq 1$,

$$\begin{aligned} \int_{x=0^+}^b \frac{1}{x^n} \, dx &= \lim_{a \to 0^+} \int_{x=a}^b x^{-n} \, dx = \\ &= \lim_{a \to 0^+} \left[\frac{1}{-n+1} \, x^{-n+1} \Big|_{x=a}^b \right] = \\ &= \frac{1}{-n+1} \lim_{a \to 0^+} \left[b^{-n+1} - a^{-n+1} \right] = \begin{cases} \frac{1}{1-n} b^{1-n} & n < 1 \\ +\infty & n > 1 \end{cases} \quad , \end{aligned}$$

Example 25.4.3 ($\int_a^{+\infty} \frac{1}{n^n}$)

…

26.4.1 Condizioni di integrabilità

…

26.4.2 Valore principale di Cauchy

In alcuni casi è possibile «risolvere» una forma indeterminata della forma $+\infty - \infty$ nel calcolo di un integrale improprio che dà come risultato un valore finito. Questo valore finito viene definito valore principale di Cauchy. E" questo l'esempio dell'integrale della funzione $\frac{1}{x}$ su un intervallo che contiene il punto $x = 0$. Questo punto è un punto di discontinuità della funzione, dove questa non è definita. Dati due valori a, b tali che $a < 0 < b$, l'integrale $\int_{x=a}^{b} \frac{1}{x}\,dx$ viene quindi interpretato come

$$\int_{x=a}^{b} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \left[\int_{a}^{-c} \frac{1}{x} + \int_{c}^{b} \frac{1}{x}\,dx \right] ,$$

e il suo calcolo produce il risultato

$$\begin{aligned} \int_{x=a}^{b} \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{c \to 0^+} \left[\int_{a}^{-c} \frac{1}{x} + \int_{c}^{b} \frac{1}{x}\,dx \right] = \\ &= \lim_{c \to 0^+} \left[\ln|-c| - \ln|a| + \ln|b| - \ln|c| \right] = \\ &= \ln|b| - \ln|a| \ . \end{aligned}$$

26.5 Regole di integrazione

26.5.1 Integrazione per parti

La regola di integrazione per parti viene ottenuta integrando la regola di derivazione del prodotto (25.6). Siano $F(x)$, $G(x)$ le primitive delle funzioni $f(x)$, $g(x)$, e quindi vale $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. La regola di derivazione del prodotto $F(x)G(x)$ viene scritta come

$$\begin{aligned} (F(x)G(x))' &= F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = \\ &= f(x)G(x) + F(x)g(x) \end{aligned}$$

Isolando il termine $f(x)G(x)$ e integrando il primo termine grazie al *teorema fondamentale del calcolo infinitesimale*, si ottiene

$$\begin{aligned} \int f(x)G(x)dx &= \int (F(x)G(x))'\,dx - \int F(x)g(x)dx = \\ &= F(x)G(x) - \int F(x)g(x)dx \ . \end{aligned}$$

Nota: Consigli:

- $f(x)$ facile da integrare,…
- Derivazione che riporti a integrali più semplici: esempio, può ridurre di 1 la potenza della funzione $G(x) = x^n$ a ogni applicazione dell'integrazione per parti
- …

Example 25.5.1 (Esempio di integrazione per parti)

Si vuole calcolare l'integrale

$$\int x\, e^x \, dx \ ,$$

usando la regola di integrazione per parti. Utilizzando il fato che la funzione e^x ha primitiva e^x, si sceglie come funzione da integrare, mentre la funzione x viene derivata,

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \quad & F(x) &= e^x \\ G(x) &= x \quad & g(x) &= 1 \end{aligned}$$

Con questa scelta, si risolve l'integrale,

$$\int x\, e^x \, dx = x\, e^x - \int e^x \, dx = x\, e^x - e^x + C = e^x (x-1) + C \ .$$

26.5.2 Integrazione con sostituzione

La regola di integrazione con sostituzione viene ottenuta dalla regola di derivazione della funzione composta (25.8). Sia $\widetilde{F}(x)$ la funzione composta $\widetilde{F}(x) = F(y(x))$ e siano definite le derivate

$$\tilde{f}(x) = \frac{d}{dx}\widetilde{F}(x) \qquad , \qquad f(y) = \frac{d}{dy} F(y)$$

per la regola di derivazione della funzione composta,

$$\tilde{f}(x) := \frac{d}{dx}\widetilde{F}(x) = \frac{d}{dx} F(y(x)) = \frac{dF}{dy}(y(x))\frac{dy}{dx}(x) =: f(y(x)) y'(x) \ .$$

Usando il *teorema del calcolo infinitesimale*, **todo**

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(x) &= \int \tilde{f}(x)\, dx + C = \\ &= \int f(y(x)) \underbrace{y'(x)\, dx}_{=dy} + C = \\ &= \int f(y)\, dy + C = F(y) \ . \end{aligned}$$

Sostituzioni utili

Funzioni trigonometriche e iperboliche.

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - x^2} \quad &\rightarrow \quad x = a \sin\theta \quad \text{or} \quad x = a\cos\theta \\ \sqrt{a^2 + x^2} \quad &\rightarrow \quad x = a \sinh\theta \\ \sqrt{x^2 - a^2} \quad &\rightarrow \quad x = a \cosh\theta \end{aligned}$$

Example 25.5.2 ($\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$)

L'integrale

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

ha senso per intervalli di integrazioni tali che $|x| \leq |a|$. In questi casi, usando la sostituzione $x = a\, \sin\theta$, e il suo differenziale $dx = a\, \cos\theta\, d\theta$, si può riscrivere l'integrale come

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2\theta} \cos\theta\, d\theta = \\
&= a^2 \int \cos^2\theta\, d\theta = \\
&= a^2 \int \frac{1}{2} \left[1 + \cos(2\theta)\right]\, d\theta = \\
&= \frac{a^2}{2} \left[\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right] + C\ ,
\end{aligned}$$

e riportandosi alla variabile originale x con la trasformazione inversa

$$\theta = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

e usando la formula $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = 2\frac{x}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right] + C.$$

Example 25.5.3 ($\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$)

L'integrale

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$$

ha senso per ogni intervallo di numeri reali. Si può usare la sostituzione

$$\begin{aligned}
x &= a\, \sinh\theta \\
dx &= a\, \cosh\theta\, d\theta \\
\sqrt{a^2 + x^2} &= a\sqrt{1 + \sinh^2\theta} = a\cosh\theta
\end{aligned}$$

per utilizzare le proprietà delle funzioni iperboliche e scrivere

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx &= a^2 \int \cosh^2\theta\, d\theta = \\
&= a^2 \int \left(\frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}\right)^2\, d\theta = \\
&= a^2 \int \frac{1}{4}\left(e^{2\theta} + 2 + e^{-2\theta}\right)\, d\theta = \\
&= \frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2\theta} + 2\theta - \frac{1}{2}e^{-2\theta}\right) + C = \\
&= \frac{a^2}{4}\left(2\theta + \frac{e^{2\theta} - e^{-2\theta}}{2}\right) + C = \\
&= \frac{a^2}{4}\left[2\theta + \sinh(2\theta)\right] + C\ .
\end{aligned}$$

Si può tornare alla variabile indipendente di partenza x con la trasformazione inversa

$$\frac{x}{a} = \sinh\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$$

$$e^{2\theta} - \frac{x}{a}e^\theta - 1 = 0$$

$$e^\theta = \frac{x}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}$$

$$\theta = \ln\left[\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right]$$

$$\sinh(2\theta) = 2\sinh\theta\cosh\theta = 2\frac{x}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx &= \frac{a^2}{4}\left[2\theta + \sinh(2\theta)\right] + C \\ &= \frac{a^2}{2}\left\{\ln\left[\frac{x}{a} + \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right] + \frac{x}{a}\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right\} + C\end{aligned}$$

Example 25.5.4 ($\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$)

L'integrale

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

ha senso per intervalli di integrazioni tali che $|x| \geq |a|$. In questi casi, si può usare la sostituzione

$$\begin{aligned} x &= a\,\cosh\theta \\ dx &= a\,\sinh\theta\,d\theta \\ \sqrt{x^2-a^2} &= a\sqrt{\cosh^2\theta - 1} = a\sinh\theta \end{aligned}$$

per utilizzare le proprietà delle funzioni iperboliche e scrivere

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx &= a^2\int \sinh^2\theta\,d\theta = \\ &= a^2\int\left(\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}\right)^2 d\theta = \\ &= a^2\int \frac{1}{4}\left(e^{2\theta} - 2 + e^{-2\theta}\right)d\theta = \\ &= \frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2\theta} - 2\theta - \frac{1}{2}e^{-2\theta}\right) + C = \\ &= \frac{a^2}{4}\left[-2\theta + \sinh(2\theta)\right] + C\,.\end{aligned}$$

Si può tornare alla variabile indipendente di partenza x con la trasformazione inversa

$$\frac{x}{a} = \cosh\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

$$e^{2\theta} - \frac{x}{a}e^\theta + 1 = 0$$

$$e^{\theta}=\frac{x}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}$$

Osservazione. Quale segno? Discussione… **todo**

$$\theta=\ln\left[\frac{x}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right]$$

$$\sinh(2\theta)=2\sinh\theta\cosh\theta=2\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\,\frac{x}{a}$$

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx&=\frac{a^2}{4}\left[-2\theta+\sinh\left(2\theta\right)\right]+C\\&=\frac{a^2}{2}\left\{-\ln\left[\frac{x}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right]+\frac{x}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right\}+C\end{aligned}$$

Example 25.5.5 ($\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$)

L'integrale

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

ha senso per intervalli di integrazioni tali che $|x|\le|a|$. In questi casi, usando la sostituzione $x=a\,\sin\theta$, e il suo differenziale $dx=a\,\cos\theta\,d\theta$, si può riscrivere l'integrale come

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx&=\int\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\,d\theta=\\&=\int d\theta=\\&=\theta+C\qquad\qquad=\text{arcsin}x+C\;.\end{aligned}$$

Example 25.5.6 ($\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$)

L'integrale

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$$

ha senso per ogni intervallo di numeri reali. Si può usare la sostituzione

$$\begin{aligned}x&=a\,\sinh\theta\\dx&=a\,\cosh\theta\,d\theta\\\sqrt{a^2+x^2}&=a\sqrt{1+\sinh^2\theta}=a\cosh\theta\end{aligned}$$

per utilizzare le proprietà delle funzioni iperboliche e scrivere

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx&=\int\frac{1}{a\cosh\theta}\,a\cosh\theta\,d\theta=\\&=\int\theta\,d\theta=\\&=\theta+C=\\&=\ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right]\;.\end{aligned}$$

Example 25.5.7 ($\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$)

L'integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

ha senso per intervalli di integrazioni tali che $|x| \geq |a|$. In questi casi, si può usare la sostituzione

$$\begin{aligned}
x &= a\,\cosh\theta \\
dx &= a\,\sinh\theta\,d\theta \\
\sqrt{x^2-a^2} &= a\sqrt{\cosh^2\theta - 1} = a\sinh\theta
\end{aligned}$$

per utilizzare le proprietà delle funzioni iperboliche e scrivere

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx &= \int \frac{1}{a\sinh\theta} a\sinh\theta\,d\theta = \\
&= \int d\theta = \\
&= \theta + C = \\
&= \ln\left[\frac{x}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right] + C
\end{aligned}$$

Osservazione. Quale segno? Discussione… **todo**

Radici.

$$\begin{aligned}
&\sqrt[n]{ax+b} && \rightarrow \quad ax+b = z^n \\
&\sqrt{a+bx+x^2} && \rightarrow \quad a+bx+x^2 = (z-x)^2 \\
&\sqrt{a+bx-x^2} = \sqrt{(\alpha+x)(\beta-x)} && \rightarrow \quad a+bx-x^2 = (\alpha+x)^2 z^2
\end{aligned}$$

Example 25.5.8 ($\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx$)

Metodo 0.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx &= \int (ax+b)^{\frac{1}{n}}\,dx = \\
&= \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}(ax+b)^{\frac{1}{n}+1} + C\ .
\end{aligned}$$

Metodo 1. Con sostituzione

$$ax + b = z^n$$

$$adx = nz^{n-1}dz$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx &= \int z\,\frac{n}{a}z^{n-1}\,dz = \\ &= \frac{1}{a}z^n + C = \\ &= \frac{1}{a}\frac{n}{n+1}z^{n+1} + C = \\ &= \frac{1}{a}\frac{n}{n+1}(ax+b)^{\frac{n+1}{n}} + C\,.\end{aligned}$$

Example 25.5.9 ($\int \sqrt{a+bx+x^2}\,dx$)

Metodo 0. Con completamento del quadrato

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a+bx+x^2}\,dx &= \int \sqrt{\left(x^2+bx+\frac{b^2}{4}\right)+a-\frac{b^2}{4}}\,dx = \\ &= \int \sqrt{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+a-\frac{b^2}{4}}\,dx\,.\end{aligned}$$

ci si può riportare agli integrali della forma $\int \sqrt{y^2-A^2}\,dy$ o $\int \sqrt{y^2+A^2}\,dy$ a seconda del valore di $a-\frac{b^2}{4}$, con $y=x+\frac{b}{2}$.

Metodo 1. Con cambio di variabili

Example 25.5.10 ($\int \sqrt{a+bx-x^2}\,dx$)

Metodo 0. Con completamento del quadrato

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a+bx-x^2}\,dx &= \int \sqrt{\left(-x^2+bx-\frac{b^2}{4}\right)+a+\frac{b^2}{4}}\,dx = \\ &= \int \sqrt{-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+a+\frac{b^2}{4}}\,dx\,.\end{aligned}$$

ci si può riportare agli integrali della forma $\int \sqrt{-y^2+A^2}\,dy$ con $y=x+\frac{b}{2}$.

Osservazione. Nel caso in cui $a+\frac{b^2}{4}$ sia negativo, allora non esiste alcun intervallo reale nel quale l'integranda sia definita, e di conseguenza l'integrale non ha senso.

Metodo 1. Con cambio di variabili

Tangente $\frac{x}{2}$ La trasformazione di coordinate

$$z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)\ ,$$

risulta utile a trasformare un'integranda dove compaiono funzioni trigonometriche in un'integranda razionale.

Example 25.5.11 (Razionalizzazione con cambio di variabili $z=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.)

Usando la definizione della tangente

$$z = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

si può riscrivere la relazione fondamentale della trigonometria

$$1 = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = (1+z^2)\cos^2\frac{x}{2} \ .$$

Usando le regole per valutare le funzioni trigonometriche di una somma, si può riscrivere $\cos x$ in termini di z

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 2\frac{1}{1+z^2} - 1 = \frac{1-z^2}{1+z^2} \ ,$$

e (usando la relazione fondamentale della trignometria $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, e la definizione di tangente),

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$\tan x = \frac{2z}{1-z^2}$$

26.5.3 Frazioni parziali

todo E" una regola valida per funzioni integrande che possono essere scritte come il rapporto di due polinomi, $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, e segue direttamente dalla possibilità di scomporre il polinomio a denominatore in polinomi di primo e secondo grado, grazie al *teorema fondamentale dell'algebra*, e scrivere il rapporto come somma di frazioni.

todo *descrivere meglio il metodo*

Example 25.5.12 (Integrazione con frazioni parziali)

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+1}{x+2}\,dx &= \int \frac{3x^2+6x-6x+1}{x+2}\,dx = \\ &= \int \left[3x + \frac{-6x-12+12+1}{x+2}\right]\,dx = \\ &= \int \left[3x - 6 + 13\,\frac{1}{x+2}\right]\,dx = \\ &= \frac{3}{2}x^2 - 6x + 13\ln|x+2| + C \ .\end{aligned}$$

Example 25.5.13 (Integrazione con frazioni parziali)

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2+4x+3}\,dx &= \int \frac{2x+1}{(x+1)(x+3)}\,dx = \\ &= \int \left[\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}\right]\,dx \ .\end{aligned}$$

I valori dei coefficienti A e B vengono calcolati imponendo che la somma di frazioni sia uguale alla frazione di partenza. RIportando a fattore comune la somma delle due frazioni, e uguagliando il numeratore della frazione ottenuta con il numeratore della frazione di partenza si ottiene

$$A(x+3) + B(x+1) = 2x + 1 \ ,$$

che, dovendo essere vera per ogni valore di x, eqivale al sistema di due equazioni in due incognite (una per ogni potenza di x che compare nella condizione),

$$\begin{cases} 3A + B = 1 \\ A + B = 2 \end{cases}$$

la cui soluzione è $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{5}{2}$. L'integrale quindi diventa

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+3}\, dx = -\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{5}{2} \ln|x+3| + C \ .$$

26.6 Applicazioni

26.6.1 Studio di funzione

Uno studio di funzione completo può richiedere la padronanza di tutti gli strumenti del calcolo infinitesimale: ricerca del dominio, limiti, derivate e integrali.

- *studio di funzione - capitolo di introduzione all'analisi* - dominio, limiti ed eventuali asintoti
  - trovare il dominio di una funzione
  - valutare i limiti della funzione agli estremi del dominio, o in corrispondenza di punti di discontinuità
- *studio di funzione - capitolo sulle derivate* - punti di estremi locali, punti di flesso
- *studio di funzione - capitolo sugli integrali* - area sottesa al grafico di una funzione, e altre grandezze integrali

26.7 Tavola degli integrali indefiniti più comuni

In questa sezione vengono elencati alcuni tra gli integrali più comuni, la cui valutazione viene lasciata come esercizio, a volte svolto

$$
\begin{aligned}
\int dx &= x + C \\
\int x^a dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \qquad \text{per } a \neq -1 \\
\int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C \\
\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \text{atan} x + C \\
\int \ln x \, dx &= x \, \ln x - x + C \\
\int \log_b x \, dx &= x \, \log_b x - x \log_b e + C \\
\int e^{ax} \, dx &= \frac{e^{ax}}{a} + C \\
\int a^x \, dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \\
\int \cos x \, dx &= \sin x + C \\
\int \sin x \, dx &= -\cos x + C \\
\int \cosh x \, dx &= \sinh x + C \\
\int \sinh x \, dx &= \cosh x + C
\end{aligned}
$$

26.8 Problemi

26.8.1 Calcolo integrali indefiniti

Exercise 25.8.1

Si chiede di calcolare i seguenti integrali indefiniti

0. $\int x^2 e^x \, dx$ R:

1. $\int x^3 e^{x^3} \, dx$ R:

2. $\int x \ln x \, dx$ R:

3. $\int x \cos x \, dx$ R:

4. $\int x^3 \cos 2x \, dx$ R:

5. $\int x^2 \ln x \, dx$ R:

6. $\int x^2 \sin x \, dx$ R:

7. $\int x \text{atan} x \, dx$ R:

8. $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ R:

9. $\int \sin 3x \, dx$ R:

10. $\int \sin 3x \sin 2x \, dx$ R:

11. $\int \cos x \sin 2x \, dx$ R:

12. $\int \sqrt{1 - \sin x} \, dx$ R:

13. $\int \sqrt{x^2 + 1} \, dx$ R:

14. $\int \sqrt{x^2 - 3} \, dx$ R:

15. $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{9 + x^2}} \, dx$ R:

16. $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{9 - x^2}} \, dx$ R:

17. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \, dx$ R:

18. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - \cos 2x}} \, dx$ R:

19. $\int \sqrt{4 - 9x^2} \, dx$ R:

21. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\, dx$ R:
22. $\displaystyle\int \frac{1}{(4+x^2)^3}\, dx$ R:
23. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\, dx$ R:
24. $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx$ R: $\dfrac{1}{2}e^x\left(\sin x - \cos x\right) + C$
25. $\displaystyle\int e^x \cos x\, dx$ R: $\dfrac{1}{2}e^x\left(\sin x + \cos x\right) + C$

Soluzione

24. Usando il metodo di integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x\, dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx = \\ &= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx \right) = \end{aligned}$$

Riconoscendo che l'integrale desiderato compare da entrambe le parti dell'uguale, si può «portarne» uno dall'altra parte e scrivere

$$\int e^x \sin\, dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x - \cos x\right) + C\ .$$

25. Usando il metodo di integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x\, dx &= e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx = \\ &= e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx \right) = \end{aligned}$$

Riconoscendo che l'integrale desiderato compare da entrambe le parti dell'uguale, si può «portarne» uno dall'altra parte e scrivere

$$\int e^x \sin\, dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x - \cos x\right) + C\ .$$

26.8.2 Integrali definiti

Exercise 25.8.2

Risolvere i seguenti integrali. Nell'esercizio Exercise 25.8.3 vengono riportati altri esercizi, nei quali si sottolinea l'importanza di prestare attenzione a quello che si fa, prima di farlo: inanzitutto controllare se la funzione è definita sull'intervallo; poi controllare se si possono rimuovere i valori assoluti, se si riconosce il segno dell'integrando nel dominio o in parte di esso.

Obiettivi. Metodi di integrazione: sostituzione, integrazione per parti,...; manipolazione dell'integranda: usando le proprietà delle funzioni trignonometriche o iperboliche, frazione come somma di frazioni con denominatore di ordine 1, 2, completamento quadrato,...; proprietà dll'integrale: additività sui domini di integrazione,...

Suggerimenti

- L'operatore $\lfloor x \rfloor$ rappresenta la parte intera di x; l'operatore $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ ne re rappresenta la farte frazionaria; ad esempio: $\lfloor 3.2 \rfloor = 3$, $\{3.2\} = 0.2$. Si consiglia di sfruttare la proprietà di additività sui domini di integrazione per gli integrali in cui compaiono questi operatori.
- Per il calcolo dell'integrale **13.** è necessario utilizzare il valore dell'"*integrale* $\int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

1. $\displaystyle\int_{x=0}^{+\infty} x^7 e^{-x^2}\, dx$ R: 3

2. $\displaystyle\int_{x=0}^{\pi} \sin^5 x\, dx$ R: $\dfrac{16}{15}$

3. $\displaystyle\int_{x=0}^{1} (\sin(\ln x) + \cos(\ln x))\, dx$ R: 0

4. $\displaystyle\int_{x=-1}^{1} \frac{\cos x}{\operatorname{atan} x}\, dx$ R: 0

5. $\displaystyle\int_{x=\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+\cos x}\, dx$ R:

6. $\displaystyle\int_{x=-\infty}^{0} e^{-\sqrt[6]{-x}}\, dx$ R:

7. $\displaystyle\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{2025^{\lfloor x \rfloor}}\, dx$ R:

8. $\displaystyle\int_{x=4}^{5} \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\, dx$ R:

9. $\displaystyle\int_{x=0}^{1} x\, e^{x^2+e^{x^2}}\, dx$ R:

10. $\displaystyle\int_{x=0}^{3/2} \lfloor x + \lfloor 2x \rfloor \rfloor\, dx$ R:

11. $\displaystyle\int_{x=2024}^{2025} \ln\{x\}\, dx$ R:

12. $\displaystyle\int_{x=98}^{99} x^{-\frac{2}{\ln x}}\, dx$ R:

13. $\displaystyle\int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+3x}\, dx$ R:

Soluzione

1. L'integrale viene risolto con l'applicazione ripetuta del metodo di integrazione per parti (integrando ripetutamente l'esponenziale $f(u) = e^{-u}$) che ha primitiva $F(u) = -e^{-u}$ e derivando la potenza u^n) e con la sostituzione $x^2 = u$, che comporta $2xdx = du$,

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{+\infty} x^7 e^{-x^2}\, dx = \int_{x=0}^{+\infty} x^6\, e^{-x^2}\, x\, dx = & \\
= \frac{1}{2} \int_{u=0}^{+\infty} u^3\, e^{-u}\, du = & \qquad \text{IxP} \\
= \frac{1}{2} \left[\underbrace{-u^3 e^{-u}\big|_{u=0}^{+\infty}}_{=0} + \int_{u=0}^{+\infty} 3u^2 e^{-u} \right] = & \qquad \text{IxP} \\
= \frac{3}{2} \left[\underbrace{-u^2 e^{-u}\big|_{u=0}^{+\infty}}_{=0} + \int_{u=0}^{+\infty} 2u e^{-u} \right] = & \qquad \text{IxP} \\
= 3 \left[\underbrace{-u e^{-u}\big|_{u=0}^{+\infty}}_{=0} + \int_{u=0}^{+\infty} e^{-u} \right] = & \\
= -\,3e^{-u}\big|_{u=0}^{+\infty} = 3 &
\end{aligned}$$

avendo usato il risultato *Example 24.5.1* $\lim_{u\to+\infty} u^n e^{-u} = 0$ per ogni n.

2. L'integrale viene calcolato usando le proprietà dellle funzioni trigonometriche…

$$\begin{aligned}
I = \int_{x=0}^{\pi} \sin^5 x\, dx = \int_{x=0}^{\pi} \sin^2 x\, \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x}\, \underbrace{\sin x\, dx}_{-d\cos x} = & \\
= -\int_{x=0}^{\pi} \left(1-\cos^2 x\right)^2\, d\cos x = & \\
= -\int_{x=0}^{\pi} \left(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right)\, d\cos x = & \\
= -\left(\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x\right)\Big|_{x=0}^{\pi} = & \\
= 2\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{16}{15}\, . &
\end{aligned}$$

3. Utilizzando la sostituzione $u = \ln x$, e quindi $x = e^u$, $du = \frac{1}{|x|}\, dx$, $dx = |x|\, du = e^u\, dx$ (si osservi che il modulo assoluto è ininfluente in questo esercizio, poiché il dominio di integrazione di x è $[0, 1]$, e quindi $|x| = x$ per ogni $x \in [0, 1]$), si può riscrivere l'integrale come

$$\int_{x=0}^{1} \left(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right)\, dx = \int_{u=-\infty}^{0} \left(\sin u + \cos u\right)\, e^u\, du$$

avendo cambiato gli estremi di integrazione in maniera coerente con il cambio di variabili, $x \to 0$: $u \to -\infty$, $x = 1$: $u = 0$. Questo integrale può essere calcolato come fatto nell'esercizio Exercise 25.8.1 **24.**, **25.**

$$\begin{aligned}
I = & \left[\frac{1}{2} e^u (\sin u - \cos u) + \frac{1}{2} e^u (\sin u + \cos u)\right]\Big|_{u=-\infty}^{0} = \\
= & \left[e^u \sin u\right]\big|_{u=-\infty}^{0} = \\
= & \, 0 - \lim_{u\to-\infty} e^u \sin u = 0\, ,
\end{aligned}$$

poiché la funzione $\sin u$ è limitata, mentre $\lim_{u\to-\infty} e^u = 0$.

4. !!! Questo integrale è un *integrale improprio*, poiché l'integranda non è definita nel punto $x = 0$ e tende a $-\infty$ per $x \to 0^-$ e $+\infty$ per $x \to 0^+$, come facilmente verificabile, e come già calcolato nell'esercizio Exercise **?? 11.** Se si intende questo integrale come *valore principlae di Cauchy*, si può sfruttare le proprietà di simmetria della funzione senza indagare se l'integrale non sia la somma di due integrali divergenti.

Osservando che l'integranda è una *funzione dispari* (poiché prodotto della funzione pari $\cos x$ e funzione dispari $\text{atan}(x)$) e il dominio di integrazione è simmetrico, si può concludere immediatamente che il valore dell'integrale è 0.

5. Osservando l'argomento della radice, è lecito che venga il sospetto che sia utile usare qualche proprietà delle funzioni trigonometriche. In particolare, grazie alla relazione (18.5), si può scrivere per il generico angolo $1+\cos(2a) = 2\cos^2 a$. Questa relazione viene utilizzata per l'angolo $\frac{x}{2}$ per poter scrivere l'integranda come

$$\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| \ ,$$

e potendo rimuovere il valore assoluto (necessario per la *definizione di radice quadrata sui numeri reali*!!! Bene ricordarlo, ogni tanto) poiché $\cos\frac{x}{2} \ge 0$ per tutti i valori di x appartenenti al dominio $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Per integrali di questa funzione su altri domini nei quali occorre prestare attenzione al segno dell'integranda, si rimanda all'esercizio Exercise 25.8.3 **1.**, **2.**.

$$\begin{aligned}
\int_{x=\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+\cos x}\, dx &= \int_{x=\pi/2}^{\pi} \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\, dx = \\
&= 2\sqrt{2}\int_{x=\pi/2}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\, d\frac{x}{2} = \\
&= 2\sqrt{2}\ \sin\frac{x}{2}\Big|_{x=\pi/2}^{\pi} = \\
&= 2\sqrt{2}\,[0-(-1)] = 1 \ ,
\end{aligned}$$

avendo fatto un fatto un cambio di variabili - senza introdurre un nuovo simbolo, come può essere conveniente per sintesi in questi casi semplici - da x a $\frac{x}{2}$, solo riconoscendo che $dx = 2d\frac{x}{2}$, per avere il differenziabile della stessa variabile che compare ad argomento della funzione coseno.

6. Prima di procedere a occhi chiusi nel calcolo dell'integrale, osserviamo che la funzione è ben definita, al contrario di quello che avviene nell'esercizio {prf:ref}`` **2.**. Con il cambio di variabili $u = (-x)^{\frac{1}{6}}$, e quindi $du = \frac{1}{6}(-x)^{-\frac{5}{6}}\, dx$, $dx = (-x)^{\frac{5}{6}}\, du = u^5\, du$

$$\int_{x=-\infty}^{0} e^{-\sqrt[6]{-x}}\, dx$$

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

Exercise 25.8.3 (Esempi di integrali in cui bisogna prestare particolare attenzione)

I seguenti integrali necessitano un po" di attenzione prima di partire a testa bassa nel calcolo.

1. $\displaystyle\int_{x=0}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\, dx$ R:
2. $\displaystyle\int_{x=0}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{1+\cos x}\, dx$ R:
3. $\displaystyle\int_{x=0}^{+\infty} e^{-\sqrt[6]{-x}}\, dx$ R:

1.

2.

3. L'integranda non è definita nel dominio di integrazione (ad eccezione del punto $x = 0$) poiché $\sqrt{-x}$ non lo è: $-x$ è non positiva per tutti i valori di x nell'intervallo di integrazione $[0, +\infty)$.

Integrali impropri

Exercise 25.8.4

Si chiede di:

1. dimostrare che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ converge per $p > 1$ e diverge a $+\infty$ per $p \leq 1$.
2. dimostrare che $\lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^p}\, dx$ converge per $p < 1$ e diverge a $+\infty$ per $p \geq 1$.
3. dimostrare che $\int_t^1 e^{ax}\, dx$ converge per a … e diverge per a ….
4. …

Exercise 25.8.5

Si chiede di discutere e valutare i seguenti integrali impropri

1. $\displaystyle\int_{x=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+9}\, dx$ R:

2. $\displaystyle\int_{x=0}^{+\infty} e^{-x} \cos x\, dx$ R:

3. $\displaystyle\int_{x=2}^{+\infty} \frac{1}{2-x}\, dx$ R:

4. $\displaystyle\int_{x=0}^{3} \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\, dx$ R:

4. $\displaystyle\int_{x=0}^{3} \frac{1}{x-2}\, dx$ R:

4. $\displaystyle\int_{x=0}^{3} \frac{1}{(x-2)^2}\, dx$ R:

5. $\displaystyle\int_{x=0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\, dx$ R:

6. $\displaystyle\int dx$ R: **todo**

7. $\displaystyle\int dx$ R:

26.8.3 Problemi di geometria

Area di superfici e lunghezza di curve

Exercise 25.8.6

Calcolare l'area della superficie chiusa tra la parabola $y = -x^2 + 1$ e l'asse x.

Exercise 25.8.7

Calcolare l'area della superficie chiusa tra la parabola $y = -x^2 + 1$ e la parabola $y = x^2 - 2x$.

Exercise 25.8.8

Calcolare la lunghezza del ramo di parabola $y = x^2 - 2x + 1$ tra $x \in [0, 2]$.

Volumi e superficie di solidi di rotazione

Exercise 25.8.9

Calcolare il volume e la superficie del solido generato dalla rotazione del ramo di parabola $y = 2\,x^2$, $x \in [0, 2]$ attorno all'asse y

Exercise 25.8.10

Calcolare il volume e la superficie del solido generato dalla rotazione del ramo di parabola $y = 2\,x^2$, $x \in [0, 2]$ attorno all'asse x.

Exercise 25.8.11

Calcolare il volume e la superficie di un cilindro di altezza h e base di raggio r.

Exercise 25.8.12

Calcolare il volume e la superficie di un cono retto di altezza h e base di raggio r.

Exercise 25.8.13

Calcolare il volume e la superficie di un tronco di cono retto ottenuto dalla rivoluzione attorno all'asse x del segmento $y = x + 2$, per $x = [1, 4]$.

Exercise 25.8.14

Calcolare il volume e la superficie della sfera generata dalla rivoluzione della semicirconferenza centrata nell'origine di raggio R, $x^2 + y^2 = R^2$.

Exercise 25.8.15

Calcolare il volume e la superficie della calotta sferica sfera generata dalla rivoluzione dell'arco di circonferenza centrata nell'origine di raggio R, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, con $x = [-R, a]$, $a \leq R$.

Exercise 25.8.16

Calcolare il volume e la superficie di un toro generato dalla rivoluzione del cerchio $x^2 + (y - r_0)^2 = r_1^2$, with $r_0 \geq r_1$, attorno all'asse x.

CAPITOLO 27

Equazioni differenziali ordinarie

Le equazioni differenziali ordinarie, spesso abbreviate con l'acronimo **ODE** dall'inglese *Ordinary Differential Equations*, sono equazioni che coinvolgono una funzione di una variabile e le sue derivate.

Motivazione. Le ODE sono un argomento fondamentale da comprendere, poiché esse compaiono e governano la risposta di molti sistemi in vari ambiti della matematica, della fisica e delle scienze in generale, dell'ingegneria e dell'economia. Così, ad esempio sono ODE:

- le equazioni del moto in dinamica
- le equazioni della statica in meccanica delle strutture
- le equazioni che descrivono l'andamento della temperatura attraverso un mezzo, in condizioni stazionarie
- le equazioni che descrivono l'evoluzione di una popolazione di prede e di predatori (es. modello di Lotka-Volterra)

e in generale, in tutti le equazioni che governano processi in cui il valore di una funzione incognita in un istante di tempo o in un punto dello spazio spazio dipende dal suo valore negli istanti di tempo o nei punti dello spazio «vicini».

Approccio. Mentre le motivazioni date dovrebbero essere sufficienti a convincere dell'importanza e della necessità di un'introduzione alle ODE, una trattazione completa dell'argomento richiede strumenti matematici più avanzati di quelli disponibili a uno studente delle scuole superiori (e spesso anche di molti studenti universitari). Si cercherà quindi di trattare l'argomento nella maniera più rigorosa possibile per fornire gli strumenti necessari per (semplici) applicazioni nelle quali compaiono le ODE, mentre si chiederà qualche atto di fede nell'accettare alcuni risultati. Per completezza, in corrispondenza di questi atti di fede, verrà messo a disposizione un collegamento a una trattazione più completa dell'argomento.

Contenuti. Il capitolo è diviso come segue: dopo aver fornito le *prime definizioni*, si introduce una *classificazione* delle equazioni differenziali ordinarie, prestando massima attenzione alle *equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti*: per questo particolare tipo di ODE, è possibile trovare un metodo generale di soluzione. Dopo aver mostrato *alcuni esempi*, viene presentato il *metodo di soluzione*, e applicato successivamente alla *risoluzione degli esempi* dati: la soluzione degli esempi è pensata per fare pratica con la tecnica risolutiva e permette di indagare alcuni fenomeni fisici come quello della **risonanza todo** *aggiungere riferimento alla soluzione del sistema massa-molla-smorzatore*. Infine, viene presentata un'altra categoria di ODE, per la quale esiste - almeno formalmente - una tecnica risolutiva: la tecnica di separazione delle variabili per le *equazioni differenziali a variabili separabili*.

27.1 Prime definizioni

Un"**equazione differenziale ordinaria** è un'equazione che coinvolge una funzione reale, incognita, di una variabile reale e le sue derivate. Formalmente una ODE può essere scritta come

$$F\left(y^{(n)}(x), \dots y'(x), y(x), x\right) = 0 \quad , \qquad x \in D = [x_0, x_1]$$

Un problema differenziale **ben definito**, in generale è definito da una **ODE**, per valori della variabile indipendente x all'interno di un dominio dato, $x \in D$, e da alcune **condizioni al contorno** del dominio che consentano di determinare una soluzione del problema senza arbitrarietà. Come regola generale, affinché un problema sia definito sono necessarie n condizioni sulla funzione incognita o sulle sue derivate. Si possono definire alcuni problemi:

- problemi differenziali **ai valori iniziali** (o di **Cauchy**), se le n condizioni coinvolgono il valore della funzione e delle sue prime $n-1$ derivate all'estremo inferiore del dominio; un esempio tipico di problemi di Cauchy sono i problemi diretti in meccanica classica, dove l'evoluzione di un sistema è governata da equazioni differenziali del secondo ordine nella posizione, e può essere determinata dalle forze agenti su di esso, una volta nota la posizione (valore della funzione incognita) e della velocità (valore della derivata prima della funzione incognita) all'istante iniziale dell'intervallo di interesse
- problemi differenziali con **condizioni al contorno**

Il **grado** di una ODE è l'ordine massimo della derivata che compare nell'equazione. In generale, la soluzione di una ODE di grado n è il risultato di n operazioni di integrazione che producono n costanti arbitrarie.

27.2 Classificazione, esempi e tecniche risolutive

27.2.1 Equazioni lineari a coefficienti costanti

Definizione

Una ODE lineare a coefficienti costanti di ordine n è un'equazione differenziale che mette in relazione la combinazione lineare della funzione incognita $y(x)$ e delle sue prime n derivate con una funzione nota $f(x)$,

$$a_n y^{(n)}(x) + \dots a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \; .$$

Se la funzione $f(x)$ è la funzione identicamente nulla $f(x) \equiv 0$, l'equazione è un'equazione omogenea.

Esempi

In questa sezione vengono presentati alcuni esempi di equazioni differenziali ordinarie, ottenute partendo da alcune leggi della fisica. Successivamente nel capitolo verrà presentata la *soluzione* di alcuni problemi differenziali descritti in questi esempi.

Temperatura di un corpo, soggetto a convezione

Temperatura di un corpo, soggetto a convezione. L'equazione che governa l'evoluzione della temperatura $T(t)$ di un sistema, sufficientemente piccolo da poter essere considerato a temperatura uniforme nello spazio, soggetto alla trasmissione del calore per convezione sulla sua superficie in un ambiente a temperatura $T^e(t)$ nota è l'equazione differenziale ordinaria del primo ordine,

$$m\,C\,\dot{T}(t) + h\,T(t) = h\,T_e(t)\ ,$$

con le opportune condizioni iniziali. Questa equazione può essere ricavata dal principio della termodinamica, per il quale la variazione di energia termica E di un sistema non sottoposta a lavoro delle forze è uguale al flusso di calore «entrante» nel sistema, $\dot{Q}^e$,

$$\dot{E} = \dot{Q}^e\ ,$$

scrivendo l'energia termica come il prodotto della massa m, del calore specifico c e della temperatura T del sistema, e il flusso di calore per convezione con la *formula di Newton*, $\dot{Q} = h(T_e - T)$.

Sistema massa-molla-smorzatore

Sistema massa-molla-smorzatore. L'equazione che governa la dinamica di un sistema massa-molla-smorzatore con un corpo di massa m che si muove lungo una direzione x, vincolato a terra da una molla di costante elastica k e da uno smorzatore lineare con coefficiente c, soggetto a una forzante esterna $f^e(t)$ nota è l'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine,

$$m\,\ddot{x}(t) + c\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = f^e(t)\ ,$$

con le opportune condizioni iniziali. Questa equazione può essere ricavata dal secondo principio della dinamica di Newton lungo la direzione x

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{R}^e = \vec{F}^k + \vec{f}^c + \vec{f}^e(t)\ ,$$

scrivendo la quantità di moto del sistema lungo x come $Q_x = m\dot{x}(t)$ e assumendo che la molla e lo smorzatore esercitino una forza sul corpo $f^k = -k\,x$, $f^c = -c\,\dot{x}$ rispettivamente.

Distribuzione stazionaria di temperatura. La distribuzione stazionaria di temperatura in un corpo, senza sorgenti di calore al suo interno, è governata dall'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine,

$$(kT'(x))' = 0\ ,$$

Circuito RLC. todo

Circuito RLC. todo

Caduta di un grave - 1: senza resistenza

Caduta di un grave - 1: senza resistenza. L'equazione che governa la caduta di un corpo di massa m soggetto alla gravità g lungo la verticale nei pressi della superficie terrestre è l'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine

$$m\ddot{z} = -m\,g\ ,$$

con le opportune condizioni iniziali. Questa equazione può essere ricavata dal secondo principio della dinamica di Newton per un corpo di massa m soggetto unicamente al suo peso $\vec{F}^{peso} = -m\,g\hat{z}$,

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{F}^{peso}\ ,$$

e scegliendo la coordinata z allineata alla verticale e diretta verso l'alto.

Caduta di un grave - 2: con resistenza lineare nella velocità

Caduta di un grave - 2: con resistenza lineare nella velocità. Se la caduta del grave è influenzata dalla resistenza aerodinamica dovuta all'interazione con l'aria rispetto alla quale si muove, e se questa interazione può essere rappresentata da una forza lineare rispetto alla velocità, $\vec{D} = -c\dot{\vec{r}}$, il secondo principio della dinamica fornisce l'equazione del moto,

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{F}^{peso} + \vec{D} \ ,$$

che può essere proiettata lungo la verticale per dare l'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine,

$$m\ddot{z} + c\dot{z} = m\,g \ .$$

Caduta di un grave - 3: con resistenza quadratica nella velocità

Caduta di un grave - 3: con resistenza quadratica nella velocità Se la caduta del grave è influenzata dalla resistenza aerodinamica dovuta all'interazione con l'aria rispetto alla quale si muove, e se questa interazione può essere rappresentata da una forza lineare rispetto alla velocità, $\vec{D} = -\frac{1}{2}\rho S c_D |\dot{\vec{r}}|\dot{\vec{r}}$, il secondo principio della dinamica fornisce l'equazione del moto,

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{F}^{peso} + \vec{D} \ ,$$

che può essere proiettata lungo la verticale per dare l'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine,

$$m\ddot{z} + \frac{1}{2}\rho S c_D |\dot{z}|\dot{z} = m\,g \ .$$

Moto parabolico di un grave - 1: senza resistenza

Moto parabolico di un grave - 1: senza resistenza. Il moto parabolico nei pressi della superficie terrestre è un moto piano governato da un'equazione del moto ricavata dal secondo principio della dinamica,

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{R}^e \ .$$

Una scelta conveniente del sistema di coordinate per descrivere il moto piano consiste nella scelta di coordinate cartesiane (x, y), con l'asse y rivolto verso l'alto e l'asse x orizzontale e nel piano del moto. Scegliendo un sistema di coordinate cartesiane, la posizione di un punto può essere scritta usando i due vettori unitari (*uniformi nello spazio, e quindi costanti* **todo** *spiegarsi peggio*)

$$P(t) - O = x_P(t)\hat{x} + y_P(t)\hat{y} \ .$$

Calcolando le derivate nel tempo della posizione si trovano le espressioni della velocità e dell'accelerazione del punto P

$$\begin{aligned}\vec{v}_P(t) = v_{x,P}(t)\hat{x} + v_{y,P}(t)\hat{y} = \dot{\vec{r}}_P(t) = \dot{x}_P(t)\hat{x} + \dot{y}_P(t)\hat{y} \\ \vec{a}_P(t) = a_{x,P}(t)\hat{x} + a_{y,P}(t)\hat{y} = \ddot{\vec{r}}_P(t) = \ddot{x}_P(t)\hat{x} + \ddot{y}_P(t)\hat{y}\end{aligned}$$

Il secondo principio della dinamica diventa quindi

$$m(\ddot{x}_P(t)\hat{x} + \ddot{y}_P(t)\hat{y}) = -m\,g\hat{y} \ ,$$

avendo usato l'espressione della forza peso $\vec{F}^{peso} = -m\,g\hat{y}$. Proiettando l'equazione vettoriale lungo le due direzioni cartesiane, si ottiene un sistema di due equazioni differenziali del secondo ordine

$$\begin{cases} m\ddot{x}_P = 0 \\ m\ddot{y}_P = -m\,g \end{cases}$$

In questo caso, le due equazioni differenziali del sistema sono indipendenti tra di loro e il problema differenziale può essere risolto senza difficoltà aggiuntive, una volta che vengono date le condizioni (iniziali, per problema diretto) necessarie.

Moto parabolico di un grave - 2: con resistenza lineare nella velocità

Deformazione a torsione di una trave

Deformazione a torsione di una trave. La rotazione delle sezioni di una trave di lunghezza L soggetta a torsione con un momento torcente distribuito $m(x)$ è governata dall'equazione di equilibrio indefinito,

$$M_z'(z) = m(x) \ ,$$

con una legge costitutiva che leghi la rotazione $\theta(z)$ di una sezione al momento torcente interno $M_z(z)$, e le opportune condizioni al contorno. Nel caso di trave elastica lineare, la legge costitutiva stabilisce la relazione $M_z(z) = GJ\theta'(z)$. Nel caso di trave incastrata nell'estremo identificato dalla coordinata $z = 0$ e di momento torcente M^e applicato nell'estremo identificato dalla coordinata $z = L$, la deformazione a torsione della trave è determinata dal problema differenziale

$$\begin{cases} (GJ\theta'(z))' = m(z) & \qquad z \in [0, L] \\ \theta(0) = 0 \\ GJ\theta'(L) = M^e \end{cases}$$

Deformazione a flessione di una trave

Deformazione a flessione di una trave. La deformazione a flessione di una trave elastica lineare è governata dall'equazione \$$w''''(z) = f(z)$\$… **todo**

Soluzione generale

La soluzione di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti può essere scritta come somma di una soluzione $y_o(x)$ dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare $y_p(x)$ dell'equazione,

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x)$$

Soluzione dell'equazione omogenea

Un'equazione differenziale omogenea è un problema lineare, e quindi la somma di due soluzioni è anch'essa una soluzione. La soluzione generale dell'equazione omogenea di ordine n può essere scritta come combinazione lineare di n sue soluzioni particolari *indipendenti* (qualitativamente, cioè che non contengono le stesse informazioni ripetute).

Sfruttando le proprietà dell'esponenziale, la soluzione generale dell'equazione omogenea viene cercata come combinazione lineare di soluzioni che hanno un'espressione $y_o(x) = e^{sx}$. Sostituendo nell'equazione differenziale omogenea, si ottiene un'equazione algebrica polinomiale in s

$$\begin{aligned} 0 &= a_n y^{(n)}(x) + \dots a_1 y'(x) + a_0 y(x) = \\ &= (a_n \, s^n + \dots a_1 \, s + a_0) \underbrace{e^{sx}}_{\neq 0} \ , \end{aligned}$$

poiché la funzione esponenziale non è mai nulla. Il *teorema fondamentale dell'algebra* garantisce che il polinomio con coefficienti reali $a_n x^n + \dots a_1 x + a_0$ ha n zeri reali o complessi coniugati.

- Se il polinomio $a_n \, s^n + \dots a_1 s + a_0$ **non ha zeri** s_k **multipli**, allora la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_o(x) = C_1 \, e^{s_1 x} + \dots + C_n \, e^{s_n x}$$

Nel caso di zeri complessi coniugati, anche le rispettive costanti di integrazione saranno complesse coniugate, $C_- = C_+^*$, per avere come soluzione una funzione reale

$$\begin{aligned} C_+ e^{sx} + C_- e^{s^* x} &= (A+iB) e^{(\sigma + i\omega)x} + (A-iB) e^{(\sigma - i\omega)x} = \\ &= (A+iB) e^{\sigma x} (\cos(\omega x) + i \sin(\omega x)) + (A-iB) e^{\sigma x} (\cos(\omega x) - i \sin(\omega x)) = \\ &= 2\,(A\cos(\omega x) - B\sin(\omega x))\; e^{\sigma x} \end{aligned}$$

- Se il polinomio ha **zeri multipli**, le soluzioni esponenziali in corrispondenza degli zeri multipli non sarebbero linearmente indipendenti. In generale, in corrispondenza di uno zero s_p con molteplicità p le soluzioni indipendenti sono

$$e^{s_p x}\;, \quad x\, e^{s_p x}\;, \quad \dots\;, \quad x^{p-1}\, e^{s_p x}\;.$$

Radici multiple - «Dimostrazione»

Un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti omogenea può essere riscritta come

$$\begin{aligned} 0 &= a_n y^{(n)}(x) + \dots a_1 y'(x) + a_0 y(x) = \\ &= a_n \left(-s_1 + \frac{d}{dx}\right) \dots \left(-s_n + \frac{d}{dx}\right) y(x)\;, \end{aligned}$$

dove i fattori possono essere commutabili, per la linearità. Nel caso di radici non multiple, l'unico modo affinché l'equazione sia soddisfatta è che l'azione di uno degli *operatori* $\left(-s_k + \frac{d}{dx}\right)$ su $y(x)$ dia risultato nullo, cioè

$$0 = \left(-s_k + \frac{d}{dx}\right) y(x) = -s_k\, y(x) + y'(x)\;.$$

Nel caso in cui una radice sia multipla e abbia molteplicità p, le p soluzioni indipendenti associate a questa radice sono quelle per le quali

$$0 = \left(-s_k + \frac{d}{dx}\right)^p y(x)\;.$$

Esempio con $p = 2$. Ad esempio esiste una radice s con molteplicità $p = 2$ i due «binomi» relativi a questa radice producono l'equazione differenziale,

$$0 = \left(-s + \frac{d}{dx}\right)\left(-s + \frac{d}{dx}\right) y(x)\;.$$

Affinché questa equazione sia soddisfatta, la funzione $y(x)$ deve essere tale da soddisfare una delle due condizioni

$$\begin{aligned} -sy(x) + y'(x) &= 0 \\ -sy(x) + y'(x) &= A\, e^{sx} \end{aligned}$$

La prima condizione ha una soluzione generale

$$-sy(x) + y'(x) = 0 \qquad \to \qquad y(t) = Ce^{sx}$$

mentre la seconda condizione permette di trovare la soluzione desiderata come combinazione lineare delle $p = 2$ desiderate,

$$\begin{aligned} -sy(x) + y'(x) &= A\, e^{sx} \\ e^{-sx}\left(-sy(x) + y'(x)\right) &= A \\ \frac{d}{dx}\left(e^{-sx}\, y(x)\right) &= A \\ \int \frac{d}{dx}\left(e^{-sx} y(x)\right) &= A\, x + B \\ e^{-sx} y(x) &= A\, x + C \qquad \to \qquad y(x) = A\, x\, e^{sx} + B\, e^{sx}\;, \end{aligned}$$

avendo inizialmente moltiplicato entrambi lati dell'equazione per il termine mai nullo $e^{sx} \neq 0$, successivamente riconoscito con la formula del prodotto la derivata $\frac{d}{dx}\left(e^{-sx}y(x)\right) = -se^{sx}y(x) + s^{sx}y'(x)$, e integrato ricordandosi delle costanti di integrazione necessarie a ottenere l'espressione più generale possibile, senza perdere pezzi in giro.

Molteplicità p. Il caso di radici mulitple con molteplicità generale può essere ricavato ricorsivamente, seguendo quanto fatto per il caso $p = 2$. Questa dimostrazione viene lasciata come esercizio.

Soluzione particolare dell'equazione completa

Come regola generale, la ricerca della soluzione particolare dell'equazione completa è guidata dall'espressione della forzante. Ad esempio:

- con **forzanti polinomiali** si cerca una soluzione particolare polinomiale
- con **forzanti esponenziali** si cerca una soluzione particolare esponenziale
- con **forzanti armoniche** si cerca una soluzione particolare armonica

Nel caso in cui la soluzione particolare abbia la forma di una delle soluzioni della soluzione particolare, si adotta la stessa tecnica adottata nel caso di zeri multipli.

Soluzione degli esempi

In questa sezione vengono risolti alcuni problemi governati dalle equazioni differenziali presentate in precedenza come *esempi* di equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti, applicando il *metodo di soluzione generale* per questo tipo di equazioni.

Esempio - Temperatura di un corpo, soggetto a convezione.

L'equazione ordinaria del primo ordine

$$mx\dot{T}(t) + hT(t) = hT^e(t) \qquad , \qquad t \geq 0$$

rappresenta un bilancio di energia interna e governa la temperatura $T(t)$ di un corpo di massa m, e capacità termica c soggetto a convezione con coefficiente h con un ambiente a temperatura $T^e(t)$. Tutti i parametri del sistema e la temperatura iniziale del corpo $T(0) = T_0$ sono noti. Si vuole determinare l'evoluzione della temperatura $T(t)$ del corpo, in risposta a diversi andamenti della temperatura dell'ambiente esterno. L'equazione è un'equazione ordinaria lineare del primo ordine a coefficienti costanti. La soluzione dell'equazione può essere scritta come somma della soluzione generale dell'equazione omogenea $T_o(t)$ e di una soluzione particolare dell'equazione completa, $T_p(t)$

$$T(t) = T_o(t) + T_p(t) \ .$$

Equazione omogenea. L'equazione omogenea,

$$mc\dot{T}_o + hT_o = 0 \qquad \rightarrow \qquad T_o(t) = Ce^{-\frac{h}{mc}t} \ ,$$

è indipendente dalla forzante esterna, qui rappresentata dalla temperatura dell'ambiente $T_e(t)$.

Temperatura costante, T^e. La soluzione particolare dell'equazione con una forzante costante è una soluzione costante, $T_p(t) = T_e$. La soluzione generale ha quindi l'espressione

$$T(t) = T_e + Ce^{-\frac{h}{mc}t} \ ,$$

e la costante di integrazione C viene determinata con la condizione iniziale

$$T_0 = T(0) = T_e + Ce^{-\frac{h}{mc}t}\Big|_{t=0} = T_e + C \qquad \rightarrow \qquad C = T_0 - T_e \ .$$

La soluzione del problema è quindi

$$T(t) = T_e + (T_0 - T_e)e^{-\frac{ht}{mc}} \ .$$

Temperatura crescente linearmente, $T^e(t) = T_a + G\,t$**.** Con una forzante polinomiale di grado 1 nella variabile indipendente t, si cerca una soluzione particolare polinomiale dello stesso ordine, $T_p(t) = a + bt$. I coefficienti a, b vengono calcolati inserendo questa espressione nell'equazione differenziale,

$$mcb + h(a + bt) = h(T_a + Gt) \ ,$$

e uguagliando i termini dello stesso ordine nella variabile indipendente,

$$\begin{cases} t: \ hb = hG \\ 1: \ mcb + ha = hT_a \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} b = G \\ a = T_a - \frac{mc}{h}G \ . \end{cases}$$

La soluzione generale assume la forma

$$T(t) = T_a - \frac{mc}{h}G + Gt + Ce^{-\frac{ht}{mc}} \ ,$$

e la costante di integrazione C viene calcolata con la condizione iniziale

$$T_0 = T(0) = T_a - \frac{mc}{h}G + C \qquad \rightarrow \qquad C = T_0 - T_a + \frac{mc}{h}G \ .$$

La soluzione del problema è quindi

$$T(t) = T_a + Gt - \frac{mc}{h}G + \left(T_0 - T_a + \frac{mc}{h}G\right) e^{-\frac{ht}{mc}} \ .$$

- La somma dei primi 3 termini è la soluzione della particolare, l'ultimo termine è la soluzione dell'equazione omogenea;
- la soluzione dell'equazione omogenea tende a zero per $t \rightarrow \infty$.
- per $t \rightarrow \infty$, c'è una differenza costante tra la temperatura dell'ambiente $T^e(t) = T_a + Gt$ e la temperatura $T(t)$ del corpo, $T(t) - T^e(t) = -\frac{mc}{h}G$.

Temperatura con andamento periodico, $T^e(t) = T_a + \Delta T \sin(\Omega t)$**.** Data una forzante somma di un termine costante e di un termine armonico, si cerca una soluzione particolare come somma di un termine costante e delle funzioni armoniche di seno e coseno, $T_p(t) = a + b\cos(\Omega t) + c\sin(\Omega t)$. I coefficienti a, b, c vengono calcolati inserendo questa espressione nell'equazione differenziale,

$$mc\Omega\left(-b\sin(\Omega t) + c\cos(\Omega t)\right) + h\left(a + b\cos(\Omega t) + c\sin(\Omega t)\right) = h\left(T_a + \Delta T \sin(\Omega t)\right) \ ,$$

e uguagliando i termini omogenei nella variabile indipendente t,

$$\begin{cases} \cos\Omega t & : \quad mc\Omega c + hb = 0 \\ \sin\Omega t & : \ -mc\Omega b + hc = h\Delta T \\ 1 & : \quad ha = hT_a \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} a = T_a \\ b = -\frac{mc\Omega}{(mc\Omega)^2 + h^2} h\Delta T \\ c = \frac{h}{(mc\Omega)^2 + h^2} h\Delta T \end{cases}$$

La soluzione generale assume la forma

$$T(t) = T_a + b\cos(\Omega t) + c\sin(\Omega t) + Ce^{-\frac{ht}{mc}} \ ,$$

e la costante di integrazione C viene calcolata con la condizione iniziale

$$T_0 = T(0) = T_a + b + C \qquad \rightarrow \qquad C = T_0 - T_a - b \ .$$

La soluzione del problema è quindi

$$\begin{aligned}
T(t) &= T_a + b\cos(\Omega t) + c\sin(\Omega t) + (T_0 - T_a - b)e^{-\frac{ht}{mc}} = \\
&= T_a - \frac{\frac{mc\Omega}{h}}{\left(\frac{mc\Omega}{h}\right)^2+1}\Delta T\cos(\Omega t) + \frac{1}{\left(\frac{mc\Omega}{h}\right)^2+1}\Delta T\sin(\Omega t) + \left(T_0 - T_a + \frac{\frac{mc\Omega}{h}}{\left(\frac{mc\Omega}{h}\right)^2+1}\right)e^{-\frac{ht}{mc}} = \\
&= T_a + \Delta T\sin\left(\Omega t - \varphi\right) + \left(T_0 - T_a + \frac{\frac{mc\Omega}{h}}{\left(\frac{mc\Omega}{h}\right)^2+1}\right)e^{-\frac{ht}{mc}} \ ,
\end{aligned}$$

e può essere espressa in termini di un ritardo di fase φ, rispetto alla temperatura dell'ambiente esterno T_e

$$\cos\varphi = \frac{1}{\left(\frac{mc\Omega}{h}\right)^2+1} \qquad , \qquad \sin\varphi = \frac{\frac{mc\Omega}{h}}{\left(\frac{mc\Omega}{h}\right)^2+1}$$

L'equazione

Esempio - Sistema massa-molla-smorzatore

todo *definire il sistema adimensionale e verificare la risposta in funzione del coefficiente di smorzamento del sistema; definire smorzamento critico, e sistemi sovra- e sotto-smorzati; indagare il fenomeno della* **risonanza**

L'equazione

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f^e(t) \ ,$$

compare in molte applicazioni con coefficienti m, c, k associati a grandezze positive: in questo caso, l'equazione può essere riscritta introducendo la **frequenza naturale** $\omega_n := \sqrt{\frac{k}{m}}$ e il **coefficiente di smorzamento** $\xi := \frac{c}{2m}\frac{1}{\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$,

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{f^e(t)}{m} \ .$$

Equazione omogenea. Si distinguono quindi 3 possibili casi per la soluzione dell'equazione omogenea,

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \ ,$$

$$s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad s_{1,2} = -\xi\omega_n \mp \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

1. soluzione sotto-smorzata, $0 \le \xi < 1$: la soluzione è oscillante, smorzata se $\xi > 0$,

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \mp j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\sigma \mp j\omega \qquad \rightarrow \qquad x(t) = e^{-\sigma t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$$

2. soluzione con smorzamento critico, $\xi = 1$: è il caso limite tra le soluzioni oscillanti sotto-smorzate e le soluzioni oscillanti sovra-smorzate.

$$s_1 = s_2 = -\omega_n \qquad \rightarrow \qquad x(t) = Ae^{-\omega_n t} + B\,t\,e^{-\omega_n t}$$

3. soluzione sovra-smorzata, $\xi > 1$: la soluzione decade senza oscillazioni,

$$0 > s_{1,2} = -\xi\omega \mp \omega_n\sqrt{\xi^2-1} \in \mathbb{R} \qquad \rightarrow \qquad x(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

Moto libero - forzante nulla, $f^e = 0$

Forzante costante, f^e

Forzante armonica, $f^e(t) = f_0 + \Delta f\sin(\Omega t)$

Sistema del secondo ordine sotto-smorzato, con forzante armonica

Si vuole studiare la soluzione dell'equazione del secondo ordine

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{f^e(t)}{m} \ ,$$

soggetta alla forzante armonica $f^e(t) = F\sin\Omega t$, al variare della frequenza Ω della forzante. Si cerca una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma $x(t) = a\cos(\Omega t) + b\sin(\Omega t)$. Inserendo questa espressione nell'equazione,

$$-\Omega^2(a\cos\Omega t + b\sin\Omega t) + 2\xi\omega_n\Omega(-a\sin\Omega t + b\cos\Omega t) + \omega_n^2(a\cos\Omega t + b\sin\Omega t) = \frac{F}{m}\sin\Omega t \ ,$$

si calcolano i coefficienti a, b uguagliando i termini omogenei

$$\begin{cases} \cos(\Omega t) & : \ (-\Omega^2+\omega_n^2)a + 2\xi\omega_n\Omega b = 0 \\ \sin(\Omega t) & : \ -2\xi\omega_n\Omega a + (-\Omega^2+\omega_n^2)b = \frac{F}{m} \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} a = \frac{-2\xi\omega_n\Omega}{(-\Omega^2+\omega_n^2)^2+(2\xi\omega_n\Omega)^2}\frac{F}{m} \\ b = \frac{-\Omega^2+\omega_n^2}{(-\Omega^2+\omega_n^2)^2+(2\xi\omega_n\Omega)^2}\frac{F}{m} \ . \end{cases}$$

I coefficienti a, b possono essere riscritti in funzione di un **ritardo di fase** $\varphi(\Omega)$ e diun **guadagno** $G(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(-\Omega^2+\omega_n^2)^2+(2\xi\omega_n\Omega)^2}}$

$$\begin{cases} a = -\sin\varphi(\Omega)\, G(\Omega)\, \frac{F}{m} \\ b = \quad \cos\varphi(\Omega)\, G(\Omega)\, \frac{F}{m} \ . \end{cases}$$

così da ricavare la soluzione

$$x_p(t) = \frac{F}{m}G(\Omega)\ [\sin(\Omega t)\cos\varphi - \cos(\Omega t)\sin\varphi(\Omega)] = \frac{F}{m}G(\Omega)\ \sin(\Omega t - \varphi(\Omega)) \ .$$

Sia il guadagno sia il ritardo di fase dipendono dalla frequenza della forzante, Ω.

Studio di funzione di $G(\Omega)$**.** La derivata del guadagno rispetto alla frequenza della forzante vale,

$$G'(\Omega) = -\frac{1}{2}\frac{-2\Omega(-\Omega^2+\omega_n^2) + 2(2\xi\omega_n)^2\Omega}{[(-\Omega^2+\omega_n^2)^2+(2\xi\omega_n\Omega)^2]^{\frac{3}{2}}} \ .$$

La derivata si annulla per $\Omega = 0$ e - quando esiste, cioè per valori di smorzamento «sufficientemente ridotti», $\xi \le \frac{1}{2}$ - per la frequenza di *risonanza* $\Omega = \Omega_f$,

$$\Omega_f^2 = \omega_n^2 - 4(\xi\omega_n)^2 = \omega_n^2\left(1-4\xi^2\right) \ .$$

Nel caso in cui esista una risonanza, la massima ampiezza della risposta è

$$\begin{aligned} G(\Omega_f) &= \frac{1}{\sqrt{(-\Omega_f^2+\omega_n^2)^2+(2\xi\omega_n\Omega_f)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(4\xi^2\omega_n^2)^2+4\xi^2\omega_n^4(1-4\xi^2)}} = \frac{1}{2\xi\omega_n^2} \ . \end{aligned}$$

Esempio - Circuito RLC. todo

Esempio - Caduta di un grave - 1: senza resistenza

Esempio - Caduta di un grave - 2: con resistenza lineare nella velocità

Esempio - Caduta di un grave - 3: con resistenza quadratica nella velocità

Esempio - Moto parabolico di un grave - 1: senza resistenza

Esempio - Moto parabolico di un grave - 2: con resistenza lineare nella velocità

Esempio - Deformazione a torsione di una trave

Trave incastrata a un estremo, carico distribuito uniforme in apertura e concentrato all'altro estremo

Trave incastrata in entrambi gli estremi e con carico distribuito uniforme in apertura

Trave incastrata in un estremo e con carico distribuito triangolare in apertura

Esempio - Deformazione a flessione di una trave

Trave incastrata a un estremo, carico distribuito uniforme in apertura e all'altro estremo, sia con forza sia con momento flettente concentrato

Trave incastrata in entrambi gli estremi e con carico distribuito uniforme in apertura

Trave incastrata in un estremo e vincolata con un pattino all'altro estremo

27.2.2 Equazioni differenziali a variabili separabili: tecnica di soluzione di separazione delle variabili

$$\frac{dy}{dx} = f(y(x))\, g(x)$$

può essere riscritta formalmente come

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)\, dx$$

e integrata con le opportune condizioni

$$\tilde{F}(y(x)) - \tilde{F}(y(x_0)) = G(x) - G(x_0)$$

Esempi

Equazione logistica

$$\frac{dp}{dt} = ap\left(1 - \frac{p}{b}\right)$$

$$\frac{dp}{p\left(1 - \frac{p}{b}\right)} = adt$$

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-b}\right) dp = adt$$

$$\int_{p_0}^{p(t)} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-b}\right) dp = \int_{t_0}^{t} a\, dt$$

$$\ln\left|\frac{p(t)}{p(t)-b}\right| = at + C$$

$$\left|\frac{p(t)}{p(t)-b}\right| = e^{a\,t+C} = K\,e^{at}$$

$$p(t) = -\frac{b\,e^{at}}{1-K\,e^{at}} = \frac{b}{K-e^{-at}}$$

Equazioni nella forma $y'(x) = y^n(x)$

$$y'(x) = y^n$$

$$y^{-n}\,dy = dx$$

$$\begin{aligned} n=0: &\quad y(x) = x + C \\ n=1: &\quad \ln y(x) = x + C \\ \cdots: &\quad \frac{1}{1-n} y^{-n+1}(x) = x + C \end{aligned}$$

27.3 Sistemi lineari tempo invarianti (LTI)

In molti ambiti delle scienze, i sistemi di interesse possono essere descritti come sistemi lineari tempo-invarianti, governati da *equazioni differenziali a coefficienti costanti*.

Come visto nella sezione sulla *soluzione generale* di queste equazioni, la soluzione può essere scritta come somma di una soluzione dell'equazione omogenea indipendente dalla forzante del sistema e di una soluzione particolare che dipendente dalla forzante del sistema. **Se il sistema è asintoticamente stabile**, la soluzione dell'equazione omogenea tende a zero dopo un transitorio iniziale e rimane solo la risposta alla forzante.

todo-list: Analisi di Fourier E" possibile scrivere una funzione come somma di funzioni armoniche; è possibile scrivere una funzione come combinazione di funzioni armoniche. Aggiungere qualcosa a riguardo nel capitolo sulle funzioni trigonometriche e sui numeri complessi - magari nel discreto (DFT, per usare sommatorie ed evitare integrali)

Nella sezione successiva viene analizzata la risposta dei sistemi di primo e di secondo ordine a **forzanti armoniche**.

27.3.1 Risposta in frequenza di sistemi del primo e del secondo ordine

Sistemi del primo ordine

La risposta forzata del sistema asintoticamente stabile del primo ordine (con $c > 0$ e $k > 0$)

$$c\dot{x}(t) + kx(t) = F\cos(\Omega t)\ ,$$

coincide con la sua soluzione particolare,

$$x_p(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\ .$$

I coefficienti A, B vengono calcolati, valutando la derivata dell'espressione generica della soluzione e

$$\dot{x}_p(t) = -\Omega A\sin(\Omega t) + \Omega B\cos(\Omega t)\ ,$$

inserendola dell'equazione differenziale insieme all'espressione della soluzione,

$$\begin{aligned}F\cos(\Omega t) &= c\dot{x}_p(t) + kx_p(t) = \\ &= c\Omega\left(-A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)\right) + k\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) = \\ &= \cos(\Omega t)\left[c\Omega B + kA\right] + \sin(\Omega t)\left[-c\Omega A + kB\right]\end{aligned}$$

Affinché l'espressione proposta sia una soluzione dell'equazione differenziale, l'ultima relazione deve annullarsi per ogni valore della variabile indipendente t, e quindi devono annullarsi indipendendemente i coefficienti delle funzioni $\cos(\Omega t)$ e $\sin(\Omega t)$. Si ottengono quindi un sistema algebrico di due equazioni nelle due incognite A, B

$$\begin{aligned}kA + c\Omega B = F \\ -c\Omega A + kB = 0\end{aligned} \qquad \rightarrow \qquad \begin{aligned}A &= \frac{k}{k^2+(c\Omega)^2}F \\ B &= \frac{c\Omega}{k^2+(c\Omega)^2}F\end{aligned}$$

La soluzione è quindi una *combinazione lineare delle funzioni* cos *e* sin *con lo stesso argomento*,

$$x_p(t) = \left[\frac{k}{k^2+(c\Omega)^2}\cos(\Omega t) + \frac{c\Omega}{k^2+(c\Omega)^2}\sin(\Omega t)\right]F \ ,$$

che può essere quindi riscritta come

$$x_p(t) = X\cos(\Omega t - \varphi) \ ,$$

con l'ampiezza e il ritardo di fase

$$\begin{aligned}X(\Omega) &= \frac{1}{\sqrt{k^2+(c\Omega)^2}} \\ \varphi(\Omega) &\ \text{ s.t. } \cos\varphi = \frac{k}{\sqrt{k^2+(c\Omega)^2}} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{c\Omega}{\sqrt{k^2+(c\Omega)^2}}\end{aligned}$$

Discussione. todo

- andamenti asintotici per $\Omega \to 0, \ +\infty$
- banda passante
- coefficienti non-dimensionali…

Sistemi del secondo ordine

La risposta forzata del sistema asintoticamente stabile del secondo ordine (con $m > 0$, $c > 0$ e $k > 0$)

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F\cos(\Omega t) \ ,$$

coincide con la sua soluzione particolare,

$$x_p(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) \ .$$

I coefficienti A, B vengono calcolati, valutando le derivate prima e seconda dell'espressione generica della soluzione e

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= -\Omega A\sin(\Omega t) + \Omega B\cos(\Omega t) \\ \ddot{x}_p(t) &= -\Omega^2 A\cos(\Omega t) - \Omega^2 B\sin(\Omega t)\end{aligned}$$

inserendola dell'equazione differenziale insieme all'espressione della soluzione,

$$\begin{aligned}F\cos(\Omega t) &= m\ddot{x}(t) + c\dot{x}_p(t) + kx_p(t) = \\ &= m\Omega^2\left(-A\cos(\Omega t) - B\sin(\Omega t)\right) + c\Omega\left(-A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)\right) + k\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) = \\ &= \cos(\Omega t)\left[-m\Omega^2 + Ac\Omega B + kA\right] + \sin(\Omega t)\left[-m\Omega^2 B - c\Omega A + kB\right]\end{aligned}$$

Affinché l'espressione proposta sia una soluzione dell'equazione differenziale, l'ultima relazione deve annullarsi per ogni valore della variabile indipendente t, e quindi devono annullarsi indipendendemente i coefficienti delle funzioni $\cos(\Omega t)$ e $\sin(\Omega t)$. Si ottengono quindi un sistema algebrico di due equazioni nelle due incognite A, B identico a quello risolto in precedenza per i sistemi del primo ordine (basta chiamare $\tilde{k} = k - m\Omega^2$),

$$\begin{cases} (k - m\Omega^2)A + c\Omega B & = F \\ -c\Omega A + (k - m\Omega^2)B & = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{aligned} A &= \frac{k - m\Omega^2}{(k - m\Omega)^2 + (c\Omega)^2} F \\ B &= \frac{c\Omega}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2} F \end{aligned}$$

La soluzione è quindi una *combinazione lineare delle funzioni* cos *e* sin *con lo stesso argomento*,

$$x_p(t) = \left[\frac{k - m\Omega^2}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2} \cos(\Omega t) + \frac{c\Omega}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2} \sin(\Omega t) \right] F \ ,$$

che può essere quindi riscritta come

$$x_p(t) = X \cos(\Omega t - \varphi) \ ,$$

con l'ampiezza e il ritardo di fase

$$\begin{aligned} & X(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} \\ & \varphi(\Omega) \ \text{ s.t. } \cos\varphi = \frac{k - m\Omega^2}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{c\Omega}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} \end{aligned}$$

Discussione. todo

- andamenti asintotici per $\Omega \rightarrow 0, \ +\infty$
- banda passante
- risonanza e ruolo dello smorzamento
- coefficienti non-dimensionali: frequenza naturale e coefficiente di smorzamento

CAPITOLO 28

Introduzione al calcolo multi-variabile

Questo capitolo è un'introduzione al calcolo per funzioni di più variabili reali a valore reale, $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, estendendo gli strumenti del calcolo introdotti per funzioni a una variabile a *funzioni di più variabili di più variabili reali a valore reale*,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \ .$$

Contenuti. Questo capitolo introduce il calcolo multivariabile, seguendo lo stesso approccio adottato per l'introduzione al calcolo infinitesimale, ma ponendo l'attenzione alla discussione sulla maggior complessità dei casi e delle condizioni che emergono in un contesto multidimensionale. Inizialmente, viene definito il concetto di *limite* per funzioni di più variabili, viene utilizzato per definire le *funzioni continue* e caratterizzare i casi «patologici» di discontinuità. Successivamente, l'operazione di limite viene utilizzata per introdurre l'operazione di *derivazione*, che consente di ottenere informazioni sul comportamento locale di una funzione: vengono introdotte le derivate parziali e il concetto di differenziale. Vengono poi discusse le derivate di ordine superiore, e presentata l'approssimazione in serie polinomiale di una funzione nell'intorno di un punto. Infine viene introdotta l'operazione di *integrazione* su domini di dimensione diversa, da 1 a n.

Senza nessuna pretesa di una discussione completa nei dettagli, questo capitolo ha come obiettivo quello di fornire gli strumenti fondamentali per esplorare gli ambiti in cui compaiono le funzioni di più variabili. **todo** *in maniera autonoma, matura, con il dettaglio necessario per una comprensione più intima della materia, «sblocccando» la possibilità di comprendere esempi e lanciarsi in semplici applicazioni, che aiutino l'apprendimento*

Il calcolo multi-variabile consente di introdurre il *calcolo vettoriale*, presentato nel capitolo successivo per spazi euclidei.

todo

- collegamento a funzioni a più variabili
- collegamento a calcolo per funzioni a una variabile

Esempi e applicazioni. Il calcolo multivariabile è uno strumento indispensabile in molti ambiti. Così, ad esempio:

- in **meccanica** la distribuzione di alcune grandezze fisiche nello spazio fisico può essere rappresentata come funzione delle coordinate che descrivono lo spazio; es. la distribuzione di massa continua in un corpo può essere rappresentata dalla densità $\rho(x, y, z)$, la temperatura in una stanza $T(x, y, z)$, la quota del terreno in una regione $z(x, y)$,...; così, gli strumenti del calcolo multivariabile consento di calcolare le proprietà di inerzia di un corpo con distribuzione di massa nota

- la formulazione di Gibbs della **termodinamica classica**, consiste in un modello matematico costruito con gli strumenti del calcolo multivariabile, nel quale lo stato termodinamico di un sistema può essere espresso in funzione di un numero limitato di variabili indipendenti; così, ad esempio, in molte condizioni lo stato di un gas può essere completamente determinato dai valori della temperatura e della pressione: dati i valori di queste due grandezze, tutte le altre grandezze fisiche (come la densità, l'energia interna, l'entropia specifica,…) possono essere rappresentate come funzioni $\rho(P,T)$, $e(P,T)$, $s(P,T)$,…
- in **economia todo** …
- in ogni ambito in cui viene svolta un'attività di **ottimizzazione** su grandezze che possono essere rappresentate da funzioni algebriche di più variabili:
  - attività di approssimazione/regressione/stima: ricerca dei parametri di un modello che rendono minimo l'errore
  - controllo ottimo: ricerca dei parametri di un controllore che rendono minimo l'errore
  - …
  - attività di apprendimento di un sistema di AI: ricerca dei parametri di un modello che rendono minimo l'errore (*come attività di approssimazione, per regressione e/o classificazione*)
  - …

28.1 Limite di una funzione di più variabili

In analogia con la *definizione di limite per le funzioni di una variabile*, il limite ℓ finito al finito $\mathbf{x}_0 \in D$ di una funzione di più variabili $f(\mathbf{x})$,

$$\ell = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(x,y)$$

viene definito come quel valore ℓ che soddisfa la seguente condizione

$$\text{per } \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta_\varepsilon \quad \text{t.c.} \quad |f(x,y) - \ell| < \varepsilon \quad \text{per } \forall(x,y) \quad 0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta_\varepsilon \ ,$$

avendo usato una norma per le n-uple di numeri reali appartenenti a $\mathbb{R}^n$, per definire un'intorno di $\mathbb{x}_0$.

La definizione può essere descritta qualitativamente: il limite ℓ della funzione per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ è il valore al quale tende il valore $f(\mathbf{x})$ all'avvicinarsi di $\mathbf{x}$ al punto $\mathbf{x}_0$, in maniera indipendente dalla direzione di avvicinamento.

Data la defínzione di limite, se il limite esiste esso è unico. Alcuni casi in cui i limite non esiste vengono discussi nella sezione sulle *discontinuità*.

28.1.1 Funzioni continue

Definizione

Definition 27.1.1 (Funzione continua)

In analogia con la *definizione di funzione di una variabile continua*, una funzione di più variabili $f : D \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in un punto $\mathbf{x}_0 \in D$ se esiste il limite della funzione e coincide con il valore della funzione nel punto,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) \ .$$

Discontinuità

Esistono casi in cui:

- avvicinandosi al punto $\mathbf{x}_0$ lungo direzioni differeti, si ottengono diversi valori; *fare esempio*
- …

todo Esempi in cui il limite esiste e il limite non esiste,…

28.2 Derivate di funzioni di più variabili

28.2.1 Derivate parziali

Definition 27.2.1 (Derivata parziale)

Data una funzione di più variabili $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la **derivata parziale** rispetto alla variabile x_1, se esiste, è la derivata della funzione calcolata tenendo costanti tutte le altre variabili,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_1 + h_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h_1}$$

La definizione analoga vale per la derivata parziale rispetto a qualsiasi altra variabile indipendente.

Ricordando il significato di infinitesimo $o(h_1)$, $\lim_{h_1 \to 0} \frac{o(h_1)}{h_1} = 0$, dovrebbe essere semplice convincersi che la definizione di derivata parziale rispetto a x_1 implica

$$f(x_1 + h_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) + o(h_1) \ . \tag{28.1}$$

Example 27.2.1 (Verifica dell'incremento della funzione dovuto all'incremento di una variabile)

Verificare la validità dell'espressione (28.1), inserendola nella definizione di derivata parziale e calcolando il limite.

Soluzione

$$\begin{aligned}\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_1 + h_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h_1} & = \lim_{h_1 \to 0} \frac{1}{h_1} \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) + o(h_1) \right] = \\ & = \lim_{h_1 \to 0} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) + O(h_1) \right] = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \ .\end{aligned}$$

28.2.2 Incremento di una funzione

Definition 27.2.2 (Incremento di una funzione)

Dati gli incrementi h_i delle variabili indipendenti x_i, l'incremento della funzione partendo dalla n-pla x dopo l'incremento delle variabili è

$$\Delta f(\mathbf{x}, \mathbf{h}) := f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) \ .$$

28.2.3 Differenziale

Definition 27.2.3 (Differenziale)

Il differenziale df di una funzione di più variabili a valore reale in corrispondenza della n-pla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e dell'incremento delle variabili indipendenti $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ può essere definito come

$$df(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x})\, h_2 + \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\, h_n \ .$$

Il differenziale di una funzione rappresenta al primo ordine l'incremento della funzione rispetto all'incremento delle variabili indipendenti,

$$\Delta f(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = df(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + o(||\mathbf{h}||) \ .$$

Example 27.2.2 (Differenziale per una funzione di due variabili, $f(x_1, x_2)$)

Verificare la relazione tra incremento e differenziale per una funzione di due variabili.

Soluzione

Usando la relazione (28.1) si può scrivere

$$\begin{aligned} f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) &= f(x_1 + h_1, x_2) + h_2\, \partial_2 f(x_1 + h_1, x_2) + o(h_2) = \\ &= f(x_1, x_2) + h_1\, \partial_1 f(x_1, x_2) + o(h_1) \\ &\quad + h_2\, [\partial_2 f(x_1, x_2) + h_1\, \partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2) + o(h_1)] + o(h_2) = \\ &= f(x_1, x_2) + h_1\, \partial_1 f(x_1, x_2) + h_2\, \partial_2 f(x_1, x_2) + o(h_1) + o(h_2) + o(h_1\, h_2) \end{aligned}$$

Scegliendo una norma per l'incremento $\mathbf{h}$, si può scrivere (**todo** *sempre? Per ogni norma?*)

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = f(x_1, x_2) + h_1\, \partial_1 f(x_1, x_2) + h_2\, \partial_2 f(x_1, x_2) + o(||\mathbf{h}||)$$

e quindi ottenere la relazione desiderata

$$\begin{aligned} \Delta f(\mathbf{x}, \mathbf{h}) &= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) = \\ &= h_1\, \partial_1 f(x_1, x_2) + h_2\, \partial_2 f(x_1, x_2) + o(||\mathbf{h}||) = \\ &= df(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + o(||\mathbf{h}||) \ . \end{aligned}$$

Nota: Norma infinito La norma infinito di una n-pla apprtenente a $\mathbb{R}^n$ è definita come il valore assoluto del valore massimo

$$||\mathbf{h}||_\infty = \max_i |h_i| \ .$$

Nota: Norma-2 La norma-2 di una n-pla appartenente a $\mathbb{R}^n$ è definita come la radice della somma dei quadrati delle componenti

$$||\mathbf{h}||_2 = \sqrt{h_1^2 + \ldots h_n^2} \ .$$

28.3 Integrali su domini multi-dimensionali

28.3.1 Definizioni

La definizione di somma di Riemann e di integrale di Riemann per funzioni di più variabili è una estensione naturale della *definizione per funzioni di una variabile*.

Definition 27.3.1 (Somma di Riemann)

Data una funzione continua e limitata $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\{\Omega_k\}$ una partizione del dominio Ω, una somma di Riemann viene definita come

$$\sigma = \sum_k f(\mathbf{x}_k) \mu(\Omega_k) \ ,$$

essendo $\mathbf{x}_k \in \Omega_k$ e $\mu(\cdot)$ una misura dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$.

Definition 27.3.2 (Integrale di Riemann)

Sia $\Delta\Omega := \max_k \mu(\Omega_k)$, l'integrale definito di Riemann è definito come il limite per $\Delta\Omega \to 0$ della somma di Riemann σ,

$$\int_{\mathbf{x}\in\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \lim_{\Delta\Omega\to 0} \sigma \ .$$

todo *Tipi di integrale: a seconda del dominio e della funzione integranda. Qui o nel calcolo vettoriale? Integrali: linea, lavoro; superficie, flusso; volume*

Interpretazione geometrica

todo *…volume, massa, totale carica… corrisponenti rispettivamente a funzioni di densità* 1*, densità di massa, densità di carica*

Proprietà dell'integrale definito

todo *additività sui domini di integrazione, linearità sulla funzione integranda; ricordarsi che è una somma; fare riferimento alle* proprietà dell'integrale di funzioni a una variabile

28.3.2 Regole di integrazione

Il calcolo di un integrale di una funzione di più variabili su un dominio m-dimensionale può essere svolto con il calcolo di m integrali di funzioni di una variabile.

todo …

Il valore di un integrale su un dominio multi-dimensionale è indipendente dal metodo/ordine di integrazione.

Osservazione. Il metodo/ordine di integrazione può quindi essere scelto volta per volta in base a criteri di convenienza, con l'obiettivo di fare il numero minore di calcoli, i calcoli più semplici possibile. Anche qualora non si facesse la scelta «migliore», l'indipendenza del valore dal metodo di integrazione ci assicura di ottenere il risultato desiderato, al netto di errori, al costo/punizione di fare qualche calcolo in più o più complicato.

esempio nel caso di due variabili, con partizione dell'insieme in elementi $\Delta x_i \Delta y_j$ *con* **dominio semplice todo** *def di dominio semplice*

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sum_k f(\mathbf{x}_k) \Delta x_k \Delta y_k = \\
&= \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta y_j \Delta x_i \ \rightarrow \ \sum_i \int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} f(x_i, y) dy \, \Delta x_i \ \rightarrow \ \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} f(x, y) dy \, dx \\
&= \sum_j \sum_i f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j \ \rightarrow \ \sum_j \int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} f(x, y_j) dx \, \Delta y_j \ \rightarrow \ \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} f(x, y) dx \, dy
\end{aligned}$$

Example 27.3.1 (Indipendenza dell'integrale multiplo dal metodo di integrazione)

Calcolare la massa della superficie delimitata dall'asse x e dalla parabola con equazione $y = 1 - x^2$, e densità $\rho(x, y) = 1 + y$. Dopo aver verificato che il dominio di integrazione è semplice in entrambe le direzioni, come esercizio si chiede di svolgere il calcolo due volte: 1. una volta integrando prima in y e poi in x, 2. una volta integrando prima in x e poi in y.

todo *dominio…*

1. Si valuta l'integrale integrando prima sulla variabile y e poi sulla variabile x

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{x=-1}^{1} \int_{y=0}^{1-x^2} (1 + y) \, dy \, dx = \int_{x=-1}^{1} \left(1 - x^2 + \frac{1}{2}(1 - x^2)^2 \right) \, dx = \\
&= \int_{x=-1}^{1} \left(\frac{3}{2} - 2x^2 + \frac{1}{2}x^4 \right) \, dx = 3 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5} = \frac{28}{15} \, .
\end{aligned}$$

2. Si valuta l'integrale integrando prima sulla variabile x e poi sulla variabile y

$$I_2 = \int_{y=0}^{1} \int_{x=-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} (1+y)\, dx\, dy = \int_{y=0}^{1} 2(1+y)\sqrt{1-y}\, dy$$

e introducendo il cambio di variabile $y = \sin^2\theta$, con differenziale $dy = 2\sin\theta\,\cos\theta\, d\theta$, $x = 0 \to \theta = 0$, $x = 1 \to \theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin^2\theta)\,\cos\theta\,(2\sin\theta\,\cos\theta)\, d\theta = 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} (2-\cos^2\theta)\,\cos\theta\,\sin\theta\,\cos\theta) d\theta = \\ &= 8\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,\sin\theta\, d\theta - 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,\sin\theta\, d\theta = -8\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d\frac{\cos^3\theta}{3} + 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d\frac{\cos^5\theta}{5} = \frac{8}{3} - \frac{4}{5} = \frac{28}{15}\,. \end{aligned}$$

Si osservi come il risultato dell'integrale è indipendente dall'ordine di integrazione.

28.3.3 Teoremi

Theorem 27.3.1 (Lemma di Green)

28.3.4 Esempi

Integrale $\int_{x=\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$

L'integrale $\int_x e^{-x^2}\, dx$ è un integrale frequente in alcuni ambiti delle scienze. Ad esempio, compare in statistica di frequente quando è conivolta una *distribuzione di probabilità* normale, con densità di probabilità $f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, che a sua volta è una delle distribuzioni di probabilità più frequenti.

Pur non esistendo una forma analitica semplice di questo integrale, il valore dell'integrale definito può essere calcolato usando gli integrali multidimensionali e un opportuno cambio di coordinate tra coordinate cartesiane e polari. Si calcola il valore del quadrato dell'integrale desiderato,

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{x=\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_{y=\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\right) = \\ &= \int_{x=\infty}^{+\infty}\int_{y=\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{+\infty} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta = \\ &= 2\pi\,\frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{+\infty} e^{-r^2}\, dr^2 = \\ &= \pi\,\left(-e^{-r^2}\right)\Big|_{r=0}^{+\infty} = \pi\,. \end{aligned}$$

CAPITOLO 29

Introduzione al calcolo vettoriale su spazi euclidei

Questo capitolo è un'introduzione al calcolo vettoriale in spazi euclidei, estendendo gli strumenti del calcolo alle funzioni (scalari o vettoriali) definite in uno *spazio euclideo*, limitandosi al caso di E^2 ed E^3.

Il capitolo è suddiviso nelle seguenti sezioni:

Cenni di geometria differenziale e descrizione dello spazio con coordinate.

Lo spazio e le entità geometriche in esso possono essere rappresentate tramite l'uso di un **sistema di coordinate**. Vengono presentati alcuni sistemi di coordinate comuni (cartesiane e polari in E^2, cartesiane, cilindriche, sferiche in E^3) apppoggiandosi ai sistemi di coordinate cartesiane. Vengono introdotti concetti geometrici indotti dalla scelta del sistema di coordinate: i vettori di una base locale naturale, le curve coordinate e le superfici coordinate.

Vengono dati dei fondamenti di geometria differenziale, limitandosi ai concetti che risulteranno utili in seguito nella rappresentazione di curve, superfici e volumi negli spazi euclidei: vengono fornite le espressioni degli elementi infinitesimi di curva, superficie e volume rispetto a sistemi di coordinate generiche; vengono fornite le espressioni dei versori tangenti alle curve e normali alle superfici; questi enti geometrici risultano utili nel calcolo degli integrali che coninvolgono densità o negli integrali di lavoro o di flusso, che verranno discussi nella sezione sugli *integrali su spazi euclidei*.

Infine, viene introdotto il concetto di **campo** - funzioni definite nello spazio - e la loro rappresentazione come funzione delle coordinate usate per dscrivere lo spazio.

Dal punto di vista concettuale, si mette in evidenza da una parte un «criterio di semplicità» per la scelta di un sistema di coordinate per rappresentare un fenomeno o risolvere un problema, e dall'altra il concetto di **invarianza rispetto alla scelta del sistema di coordinate** dello spazio e delle funzioni definite in esso.

todo *Tenendo bene in mente la definizione dei sistemi di coordiante utilizzati per la rappresentazione parametrica dello spazio e degli elementi geometrici in esso, il calcolo vettoriale può essere ricondotto al calcolo multi-variabile*

Integrali su domini in spazi euclidei.

Viene esteso il concetto di integrale a funzioni definite su domini - luoghi geometrici - contenuti nello spazio euclideo. Vengono introdotti alcuni integrali che compaiono frequentemente nell'ambito delle scienze - integrali di linea (densità e lavoro), integrali di superficie (densità e flusso), integrali di volume (densità). Viene mostrato il procedimento pratico per calcolare tali integrali grazie all'uso di coordinate, tramite esempi. Questi integrali rappresentano lo strumento matematico necessario per alcune applicazioni che riguardano problemi continui, come ad esempio:

- calcolo di lunghezza di curve, area di superfici e volumi di solidi
- calcolo di proprietà meccaniche di un sistema, ad esempio le proprietà inerziali di un sistema legate alla sua distribuzione di massa $\rho(P)$: massa, centro di massa, momenti di inerzia
- calcolo di integrali ricorrenti in fisica: lavoro di una forza, circuitazione di un campo lungo una linea chiusa, flusso di un campo attraverso una superficie.

Operatori differenziali in spazi euclidei.

Viene esteso il concetto di derivata (**todo** *introdotto inizialmente per funzioni reali, e poi per funzioni di più variabili*) e applicato ai campi; vengono presentati alcuni operatori che compaiono frequentemente nell'ambito delle scienze e dal chiaro significato fisico, riconducibili alla derivata direzionale, circuitazione e flusso.

Teorema di Stokes.

Vengono presentati dei teoremi che coinvolgono l'integrale di operatori differenziali, e consentono di trasformare particolari integrali di superficie - tra cui l'integrale di **flusso** - in integrali di volume (e viceversa), e particolari integrali di linea - tra cui l'integrale di **circuitazione** - in integrali di superficie (e viceversa). I teoremi del gradiente, della divergenza e del rotore che vengono presentati nell'ultima sezione di questo capitolo sono diverse manifestazioni di un teorema più generale, il **teorema di Stokes**, che qui non verrà presentato nella sua forma più generale[1].

29.1 Cenni di geometria differenziale

29.1.1 Parametrizzazione dello spazio

Uno spazio può essere descritto tramite l'uso di un sistema di coordinate, composto da una n-upla di coordinate indipendenti $\left(q^i\right)_{i=1:n}$.

Definition 28.1.1 (Parametrizzazione regolare)

Una parametrizzazione di una regione dello spazio spazio è **regolare** se è una funzione biunivoca,

$$P\left(q^i\right)$$

tra i punti P dello spazio e i valori delle coordinate $\left(q^i\right)$. In altre parole, a ogni n-upla $\left(q^i\right)_{i=1:n}$ corrisponde uno e un punto P e viceversa.

---

todo

[1] La presentazione della forma generale del teorema di Stokes è ben al di là dello scopo di questo materiale, che si è già spinto in là a sufficienza.

- *Conseguenze sulle funzioni delle coordiante dei punti in funzione delle coordiante: derivata non si annulla nel dominio…*
- *Può essere necessario/utile definire più parametrizzazioni che coprono diverse zone del dominio…*

Example 28.1.1 (Spazio E^2: coordinate cartesiane)

Dopo aver scelto il punto O come origine, è possibile utilizzare un sistema di coordinate cartesiane $(q^1, q^2) = (x, y)$ e rappresentare un generico punto P dello spazio come

$$\vec{r} = P - O = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}\ .$$

Example 28.1.2 (Spazio E^2: coordinate polari)

Utilizzando un sistema di coordinate polari con la stessa origine O di un sistema di coordinate cartesiane, e l'asse di riferimento per l'angolo θ coincidente con l'asse x del sistema di coordinate cartesiane, è possibile rappresentare le coordinate cartesiane in funzione delle coordinate polari $(q^1, q^2) = (r, \theta)$

$$\begin{cases} x = r\ \cos\theta \\ y = r\ \sin\theta \end{cases}$$

e un punto generico nello spazio - con una rappresentazione «mista» che usa le coordinate polari e i vettori $\hat{x}$, $\hat{y}$ ddella base cartesiana[1] - come

$$\vec{r} = r\ \cos\theta\,\hat{x} + r\ \sin\theta\,\hat{y}\ .$$

Example 28.1.3 (Spazio E^3: coordinate cartesiane)

Dopo aver scelto il punto O come origine, è possibile utilizzare un sistema di coordinate cartesiane $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$ e rappresentare un generico punto P dello spazio come

$$\vec{r} = P - O = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}\ .$$

Example 28.1.4 (Spazio E^3: coordinate cilindriche)

Utilizzando un sistema di coordinate polari con la stessa origine O di un sistema di coordinate cartesiane, gli assi z coincidenti, e l'asse di riferimento per l'angolo θ coincidente con l'asse x del sistema di coordinate cartesiane, è possibile rappresentare le coordinate cartesiane in funzione delle coordinate polari $(q^1, q^2, q^3) = (r, \theta, z)$

$$\begin{cases} x = r\ \cos\theta \\ y = r\ \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

e un punto generico nello spazio - con una rappresentazione «mista» che usa le coordinate polari e i vettori $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ della base cartesiana[1] - come

$$\vec{r} = r\ \cos\theta\,\hat{x} + r\ \sin\theta\,\hat{y} + z\,\hat{z}\ .$$

[1] Questa rappresentazione può risultare utile quando è necessario svolgere derivate della posizione, poiché i vettori della base cartesiana sono costanti in tutto lo spazio e quindi la loro derivata è nulla. **todo** *Aggiungere collegamenti a sezione derivate (esempi?) e alla cinematica in meccanica classica.*

Example 28.1.5 (Spazio E^3: coordinate sferiche)

Utilizzando un sistema di coordinate polari con la stessa origine O di un sistema di coordinate cartesiane, gli assi z coincidenti, e l'asse di riferimento per l'angolo θ coincidente con l'asse x del sistema di coordinate cartesiane, è possibile rappresentare le coordinate cartesiane in funzione delle coordinate polari $(q^1, q^2, q^3) = (R, \phi, \theta)$

$$\begin{cases} x = R \sin\phi \, \sin\theta \\ y = R \sin\phi \, \cos\theta \\ z = R \cos\phi \end{cases}$$

e un punto generico nello spazio - con una rappresentazione «mista» che usa le coordinate polari e i vettori $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ della base cartesiana[1] - come

$$\vec{r} = R \sin\phi \, \cos\theta \, \hat{x} + R \sin\phi \, \sin\theta \, \hat{y} + R \cos\phi \hat{z} \, .$$

Base naturale

La paramterizzazione dello spazio permette di associare a ogni punto dello spazio una n-upla di coordiante. Usando una rappresentazione mista - scegliendo dei vettori di una base cartesiana con origine in O, e coordiante generiche q^i - si può quindi rappresentare i punti dello spazio utilizzando le coordinate q^i desiderate e i vettori della base cartesiana,

$$\vec{r} = P - O = x^k \left(q^i\right) \hat{x}_k \, ,$$

o più esplicitamente per spazi 2-dimensionali

$$\vec{r} = P - O = x\left(q^1, q^2\right) \hat{x} + y\left(q^1, q^2\right) \hat{y} \, ,$$

e per spazi 3-dimensionali

$$\vec{r} = P - O = x\left(q^1, q^2, q^3\right) \hat{x} + y\left(q^1, q^2, q^3\right) \hat{y} + z\left(q^1, q^2, q^3\right) \hat{z} \, .$$

Definition 28.1.2 (Base naturale)

In ogni punto dello spazio, è possibile definire i vettori della base naturale indotta da una particolare scelta del sistema di coordinate $\left(q^i\right)_{i:n}$ come le *derivata parziali* del punto P rispetto alle coordinate q^i. I vettori della base naturale $\left\{\vec{b}_i\right\}_{i=1:n}$ indotta dalle coordinate $\left(q^i\right)_{i=1:n}$ sono quindi i vettori

$$\vec{b}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \, .$$

In generale, come sarà chiaro dagli esempi, i vettori di una base naturale:

- dipendono dal punto nello spazio nel quale vengono calcolati - o in altre parole sono funzioni delle coordinate q^i
- non formano una base orto-normale
- non hanno lunghezza unitaria
- non sono omogenei nelle dimensioni, né adimensionali.

Definition 28.1.3 (Base fisica)

Nel caso in cui la base naturale sia ortogonale, è possibile definire una **base fisica** - orto-normale con vettori unitari e adimensionali - tramite un semplice processo di normalizzazione dei vettori della base,

$$\hat{b}_i := \frac{\vec{b}_i}{|\vec{b}_i|} \ .$$

La definizione di una base fisica, quando possibile, può rendere la rappresentazione di un vettore o di un campo vettoriale più «ordinata», avendo le componenti del vettore le stesse dimensioni fisiche della grandezza che viene rappresentata, poiché i vettori della base fisica sono adimensionali e di lunghezza unitaria - e quindi contenenti unicamente l'informazione vettoriale sulla direzione.

Example 28.1.6 (Spazio E^2: coordinate cartesiane)

I vettori della base naturale sono

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\hat{x} + y\hat{y}\right) = \hat{x} \\ \vec{b}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\hat{x} + y\hat{y}\right) = \hat{y} \end{cases}$$

Ricordando le proprietà dei vettori di una base cartesiana **todo** *link*, è immediato verificare che la base naturale di un sistema di coordinate cartesiane è anche la sua base fisica (adimensionale non-dimensionale).

Example 28.1.7 (Spazio E^2: coordinate polari)

I vettori della base naturale sono

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\cos\theta\hat{x} + r\sin\theta\hat{y}\right) = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} \\ \vec{b}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\cos\theta\hat{x} + r\sin\theta\hat{y}\right) = -r\sin\theta\hat{x} + r\cos\theta\hat{y} \end{cases}$$

E" semplice dimostrare che i due vettori sono ortogonali, ma il vettore $\vec{b}_2$ non è adimenisonale, e ha modulo $|\vec{b}_2| = r$. La base fisica - già introdotto nel capitolo sulla geometrica analitica **todo** *link* - è quindi

$$\begin{cases} \hat{r} = \hat{b}_1 = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} \\ \hat{\theta} = \frac{\hat{b}_2}{|\vec{b}_2|} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y} \end{cases}$$

Example 28.1.8 (Spazio E^3: coordinate cartesiane)

I vettori della base naturale sono

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}\right) = \hat{x} \\ \vec{b}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}\right) = \hat{y} \\ \vec{b}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}\right) = \hat{z} \end{cases}$$

Ricordando le proprietà dei vettori di una base cartesiana **todo** *link*, è immediato verificare che la base naturale di un sistema di coordinate cartesiane è anche la sua base fisica (adimensionale non-dimensionale).

Example 28.1.9 (Spazio E^3: coordinate cilindriche)

I vettori della base naturale sono

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\cos\theta\hat{x} + r\sin\theta\hat{y} + z\hat{z}\right) = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} \\ \vec{b}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\cos\theta\hat{x} + r\sin\theta\hat{y} + z\hat{z}\right) = -r\sin\theta\hat{x} + r\cos\theta\hat{y} \\ \vec{b}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(r\cos\theta\hat{x} + r\sin\theta\hat{y} + z\hat{z}\right) = \hat{z} \end{cases}$$

E" semplice dimostrare che i tre vettori sono ortogonali, ma il vettore $\vec{b}_2$ non è adimenisonale, e ha modulo $|\vec{b}_2| = r$. La base fisica - già introdotto nel capitolo sulla geometrica analitica **todo** *link* - è quindi

$$\begin{cases} \hat{r} = \hat{b}_1 = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} \\ \hat{\theta} = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y} \\ \hat{z} = \hat{b}_3 = \hat{z} \end{cases}$$

Example 28.1.10 (Spazio E^3: coordinate sferiche)

I vettori della base naturale sono

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\sin\phi\,\cos\theta\,\hat{x} + R\,\sin\phi\,\sin\theta\,\hat{y} + R\,\cos\phi\hat{z}\right) = \sin\phi\,\cos\theta\,\hat{x} + \sin\phi\,\sin\theta\,\hat{y} + \cos\phi\hat{z} \\ \vec{b}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(R\,\sin\phi\,\cos\theta\,\hat{x} + R\,\sin\phi\,\sin\theta\,\hat{y} + R\,\cos\phi\hat{z}\right) = R\,\cos\phi\,\cos\theta\,\hat{x} + R\,\cos\phi\,\sin\theta\,\hat{y} - R\,\sin\phi\hat{z} \\ \vec{b}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(R\,\sin\phi\,\cos\theta\,\hat{x} + R\,\sin\phi\,\sin\theta\,\hat{y} + R\,\cos\phi\hat{z}\right) = -R\,\sin\phi\,\sin\theta\,\hat{x} + R\,\sin\phi\,\cos\theta\,\hat{y} \end{cases}$$

E" semplice dimostrare che i tre vettori sono ortogonali, ma i vettori $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ non sono adimenisonale, e hanno modulo $|\vec{b}_2| = R$ e $|\vec{b}_3| = R|\sin\phi|$. La base fisica - già introdotto nel capitolo sulla geometrica analitica **todo** *link* - è quindi

$$\begin{cases} \hat{r} = \hat{b}_1 = \sin\phi\,\cos\theta\,\hat{x} + \sin\phi\,\sin\theta\,\hat{y} + \cos\phi\hat{z} \\ \hat{\phi} = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|} = \cos\phi\,\cos\theta\,\hat{x} + \cos\phi\,\sin\theta\,\hat{y} - \sin\phi\hat{z} \\ \hat{\theta} = \frac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|} = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y} \end{cases}$$

Curve coordinate

Superfici coordinate

29.1.2 Curve nello spazio

Una curva γ nello spazio può essere rappresentata con la sua equazione parametrica,

$$\gamma:\ \vec{r} = \vec{r}_\gamma(q^1) \quad , \quad q^1 \in Q = [q^1_a, q^1_b] \ ,$$

cioè una funzione di una variabile q^1, che associa a ogni valore del parametro $q^1 \in Q$ il punto $\vec{r}_\gamma(q^1)$ dello spazio euclideo E^n appartenente alla curva γ.

Una **parametrizzazione regolare** rappresenta una funzione biunivoca tra i valori della variabile q^1 e i punti nello spazio $\vec{r}_\gamma(q^1)$. Questa condizione si riduce alla condizione che la derivata dei punti della curva rispetto al parametro non sia mai nulla, $\vec{r}\,'(q_1) \neq 0$, $\forall q^1 \in Q$.

Definition 28.1.4 (Lunghezza d'arco)

Si definisce **lunghezza d'arco** il parametro s che permette la parametrizzazione $\vec{r}_{\gamma,s}(s)$, $s \in [s_a, s_b]$ della curva γ tale da avere

$$|\vec{r}\,'_{\gamma,s}(s)| = 1 \quad , \qquad \forall s \in [s_a, s_b] \ .$$

Elemento di curva

La variazione del parametro q^1 produce l'elemento infinitesimo di curva

$$d\vec{r}_\gamma(q^1) = \vec{r}'_\gamma(q^1)\, dq^1$$

tangente alla curva e di dimensione (lunghezza)

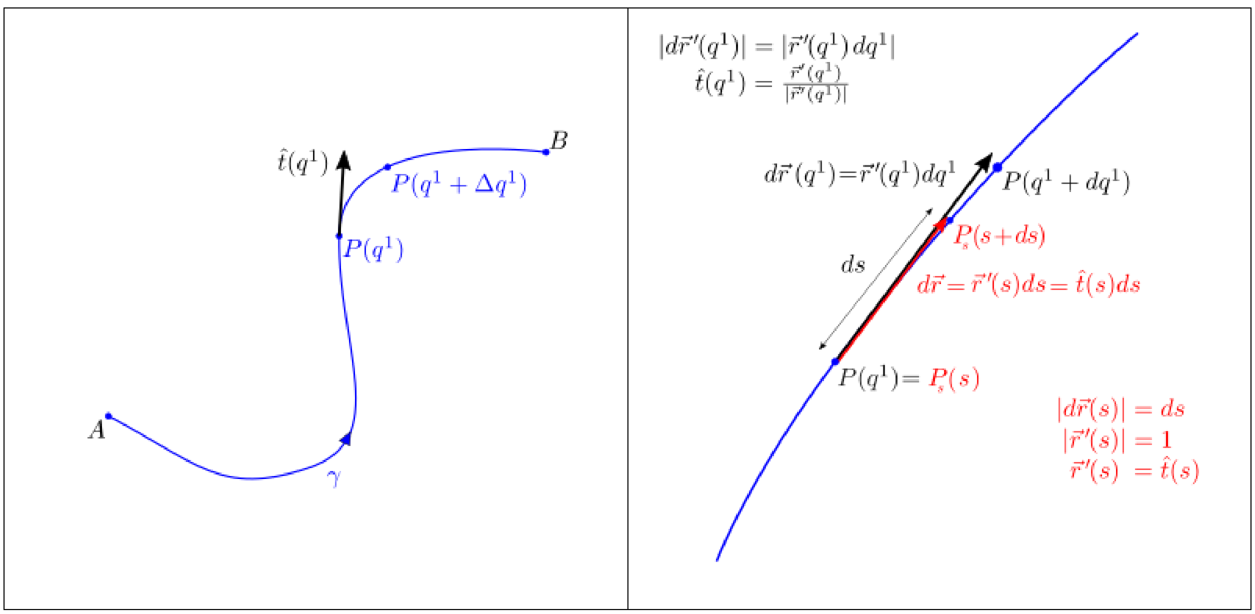
$$d\ell(q^1) := \left|d\vec{r}_\gamma(q^1)\right| = |\vec{r}'_\gamma(q^1)| dq^1 \ ,$$

avendo ipotizzato una variazione positiva del parametro $|dq^1| = dq^1 > 0$ per rimuovere il valore assoluto dalla variazione del parametro. Nel caso si utilizzi il parametro lunghezza d'arco s *Definition 28.1.4*, vale

$$d\ell(s) = |d\vec{r}_{\gamma,s}(s)| = ds \ ,$$

cioè la lunghezza dell'elemento di curva è uguale alla variazione del parametro lunghezza d'arco s. Il vettore $\vec{r}'_\gamma(s)$ di lunghezza unitaria corrisponde al versore tangente alla curva,

$$\vec{r}'_{\gamma,s}(s) = \hat{t}(s) \ .$$



29.1.3 Superfici nello spazio

Una superficie S nello spazio può essere rappresentata con la sua equazione parametrica,

$$S: \ \vec{r} = \vec{r}_S(q^1, q^2) \quad , \quad (q^1, q^2) \in Q \ ,$$

cioè una funzione di due variabili q^1, q^2, che associa a ogni coppia di valori $(q^1, q^2) \in Q$ il punto $\vec{r}_S(q^1, q^2)$ dello spazio euclideo E^n appartenente alla superficie S

Una **parametrizzazione regolare** rappresenta una funzione biunivoca la coppia di variabili (q^1, q^2) e i punti nello spazio $\vec{r}_S(q^1, q^2)$. Questa condizione equivale alla condizione che…

Elemento di superficie

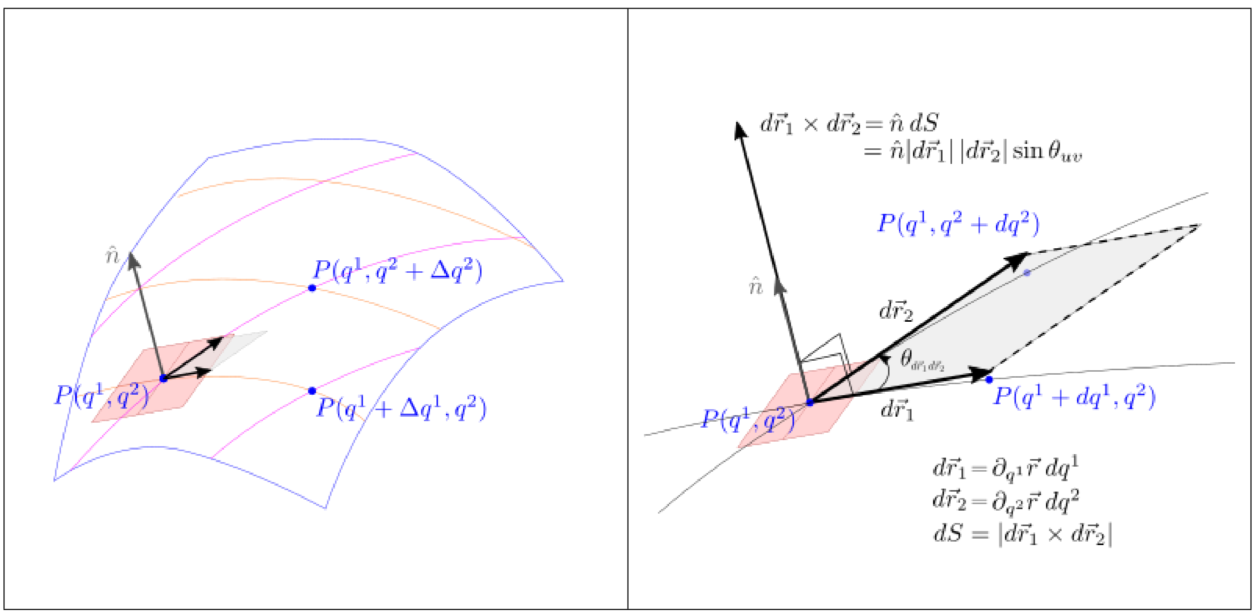
La variazione dei parametri q^1 e q^2 produce i vettori infintesimi

$$\begin{aligned} d\vec{r}_1(q^1,q^2) &= \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q^1}(q^1,q^2)dq^1 \\ d\vec{r}_2(q^1,q^2) &= \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q^2}(q^1,q^2)dq^2 \end{aligned}$$

tangenti alla superficie S. Ricordando il significato geometrico del *prodotto vettoriale tra due vettori in spazi euclidei*, il prodotto vettoriale $d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2$ produce un vettore normale alla superficie il cui modulo è uguale all'area dS del parallelogramma elementare con lati $d\vec{r}_1$ e $d\vec{r}_2$,

$$\hat{n}\, dS = d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2 = \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q^1} \times \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q^2} dq^1 dq^2,$$

avendo ipotizzato una parametrizzazione q^1, q^2 della superficie con la direzione desiderata (orientazione della superficie) del vettore normale $\hat{n}\, dS$, e sottinteso la dipendenza delle derivate parziali dalle variabili q^1, q^2 per non appesantire la notazione più del dovuto.



29.1.4 Volumi nello spazio

Un volume nello spazio E^3 si può essere rappresentato con una rappresentazione parametrica di E^3,

$$V: \ \vec{r} = \vec{r}_V(q^1,q^2,q^3) \quad , \quad (q^1,q^2,q^3) \in Q\,,$$

cioè una funzione di tre variabili q^1, q^2, q^3, che associa a ogni triple di valori $(q^1,q^2,q^3) \in Q$ il punto $\vec{r}_V(q^1,q^2,q^3)$ dello spazio euclideo E^n appartenente al volume V.

Una **parametrizzazione regolare** rappresenta una funzione biunivoca la tripla di variabili (q^1,q^2,q^3) e i punti nello spazio $\vec{r}_V(q^1,q^2,q^3)$. Questa condizione equivale alla condizione che…

Elemento di volume

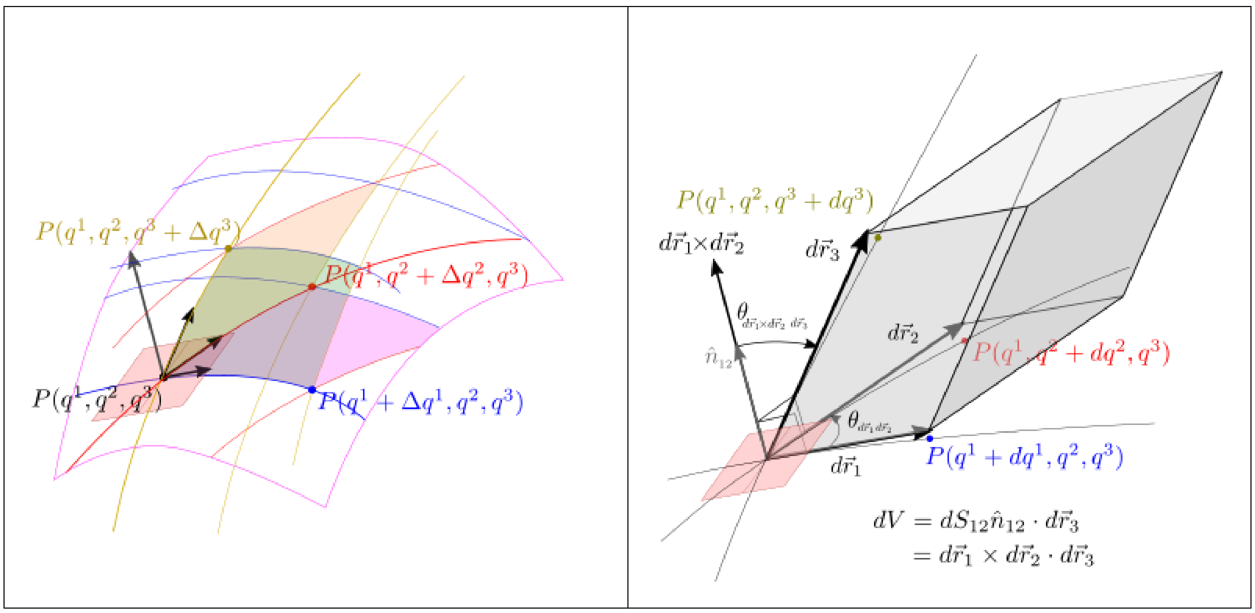
La variazione dei parametri q^1, q^2 e q^3 produce i vettori infintesimi

$$\begin{aligned}
d\vec{r}_1(q^1,q^2,q^3) &= \frac{\partial \vec{r}_V}{\partial q^1}(q^1,q^2,q^3)dq^1 \\
d\vec{r}_2(q^1,q^2,q^3) &= \frac{\partial \vec{r}_V}{\partial q^2}(q^1,q^2,q^3)dq^2 \\
d\vec{r}_3(q^1,q^2,q^3) &= \frac{\partial \vec{r}_V}{\partial q^3}(q^1,q^2,q^3)dq^3 \ .
\end{aligned}$$

Ricordando il significato geometrico del *prodotto misto tra tre vettori in spazi euclidei*, il prodotto vettoriale $d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_3$ produce uno scalare uguale al volume (con segno) del parallelepipedo elementare con spigoli $d\vec{r}_1$, $d\vec{r}_2$, $d\vec{r}_3$,

$$dV = d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_3 = \frac{\partial \vec{r}_V}{\partial q^1} \times \frac{\partial \vec{r}_V}{\partial q^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_V}{\partial q^3} dq^1 dq^2 dq^3,$$

avendo sottinteso la dipendenza delle derivate parziali dalle variabili q^1, q^2, q^3 per non appesantire la notazione più del dovuto.



Example 28.1.11 (Elemento di volume in coordinate cartesiane)

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\begin{aligned}
dV &= \partial_x \vec{r} \cdot \partial_y \vec{r} \times \partial_z \vec{r} \, dx\, dy\, dz = \\
&= \vec{x} \cdot \vec{y} \times \vec{z} \, dx\, dy\, dz = \\
&= \vec{x} \cdot \vec{x} \, dx\, dy\, dz = \\
&= dx\, dy\, dz \ .
\end{aligned}$$

Example 28.1.12 (Elemento di volume in coordinate cilindriche)

$$\vec{r} = R\,\cos\theta\,\hat{x} + R\,\sin\theta\,\hat{y} + z\,\hat{z}$$

$$\begin{aligned}
dV & = \partial_R \vec{r} \cdot \partial_\theta \vec{r} \times \partial_z \vec{r}\, dR\, d\theta\, dz = \\
& = (\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}) \cdot (-R\sin\theta\,\hat{x} + R\cos\theta\,\hat{y}) \times \hat{z}\, dR\, d\theta\, dz = \\
& = (\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}) \cdot (R\sin\theta\,\hat{y} + R\cos\theta\,\hat{x})\, dR\, d\theta\, dz = \\
& = R(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, dR\, d\theta\, dz = \\
& = R\, dR\, d\theta\, dz
\end{aligned}$$

Example 28.1.13 (Elemento di volume in coordinate sferiche)

$$\vec{r} = r\sin\phi\,\cos\theta\,\hat{x} + r\sin\phi\,\sin\theta\,\hat{y} + r\cos\phi\,\hat{z}$$

$$\begin{aligned}
dV & = \partial_r \vec{r} \cdot \partial_\phi \vec{r} \times \partial_\theta \vec{r}\, dr\, d\phi\, d\theta = \\
& = (\sin\phi\,\cos\theta\,\hat{x} + \sin\phi\,\sin\theta\,\hat{y} + \cos\phi\,\hat{z}) \cdot (r\cos\phi\,\cos\theta\,\hat{x} + r\cos\phi\,\sin\theta\,\hat{y} - r\sin\phi\,\hat{z}) \times (-r\sin\phi\sin\theta\hat{x} + r\sin\phi\cos\theta\hat{y})\, dr\, d\phi\, d\theta = \\
& = \dots = \\
& = r^2 \sin\phi\, dr\, d\phi\, d\theta\ .
\end{aligned}$$

29.2 Integrali in spazi euclidei

In questa sezione vengono presentati alcuni integrali comuni di campi scalari e vettoriali, che compaiono frequentemente in fisica e in altri ambiti scientifici. Il calcolo degli integrali in spazi euclidei viene svolto sfruttando una parametrizzazione del dominio con un insieme di coordinate per ricondurre questi integrali a *integrali su domini multi-dimensionali*, dopo aver valutato correttamente l'espressione dei domini elementari in funzione delle variazioni elementari delle coordinate usate nella parametrizzazione: le espressione dell"*elemento di linea*, dell"*elemento di superficie*, e dell"*elemento di volume* indotti da una parametrizzazione dello spazio sono stati discussi nella prima sezione di questo capitolo, sull'uso delle *coordinate per la rappresentazione parametrica dello spazio euclideo*.

29.2.1 Integrali di linea

Densità

Data una curva γ nello spazio euclideo descritta dall'equazione parametrica

$$\gamma : \vec{r} = \vec{r}_\gamma(t) \qquad , \qquad t \in [t_0, t_1]\ ,$$

e una funzione scalare $m(\vec{r})$ definita sui punti della curva, $\vec{r} \in \gamma$, densità lineare di una proprietà M additivà, si può calcolare la proprietà M associata alla linea γ come l'integrale

$$M = \int_{\vec{r}\in\gamma} m(\vec{r})\ ,$$

o indicando esplicitamente le dimensioni dell'elemento di linea (e indipendenti dal suo verso), e usando il parametro γ come variabile indipendente del problema,

$$M = \int_{\vec{r}\in\gamma} m(\vec{r})\,|d\vec{r}| = \int_{t=t_0}^{t_1} m(\vec{r}_\gamma(t))\,|\vec{r}'_\gamma(t)|\,dt$$

Questo tipo di integrale può essere utilizzato per calcolare la lunghezza di una curva o alcune proprietà additive della curva, di cui la funzione integranda è una densità lineare.

Example 28.2.1 (Lunghezza di un quarto di cerchio)

Un arco di circonferenza corrispondente a un quarto di essa può essere rappresentato in forma parametrica come,

$$\gamma:\ \vec{r}_\gamma(t) = R\cos t\hat{x} + R\sin t\hat{y}\ , \qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

L'elemento di curva è

$$d\vec{r} = \vec{r}'(t)\,dt = (-R\sin t\,\hat{x} + R\cos t\,\hat{y})\ dt$$

e il suo modulo vale

$$|d\vec{r}| = R\,|dt|\ .$$

La lunghezza della curva si ottiene con densità di proprietà $m = 1$, **todo** e, poiché la parametrizzazione è regolare e con t crescente per scrivere $|dt| = dt$ e $R > 0$,

$$L = \int \vec{r}\in\gamma|d\vec{r}| = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} |\vec{r}'(t)|\ dt = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} R\,dt = \frac{\pi}{2}\,R\ .$$

Example 28.2.2 (Massa di un quarto di cerchio di densità non uniforme)

Example 28.2.3 (Lunghezza di un'elica)

Un'elica di raggio R e passo L composta da 2 avvolgimenti può essere rappresentata in forma parametrica come

$$\gamma:\ \vec{r}(t) = R\cos t\,\hat{x} + R\sin t\,\hat{y} + \frac{L}{2\pi}\,t\,\hat{z}\ , \qquad t\in[0,4\pi]$$

L'elemento di curva è

$$d\vec{r} = \vec{r}'(t)\,dt = \left(-R\sin t\,\hat{x} + R\cos t\,\hat{y} + \frac{L}{2\pi}\,\hat{z}\right)\ dt$$

e il suo modulo vale

$$|d\vec{r}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2}\,|dt|\ .$$

La lunghezza della curva si ottiene con densità di proprietà $m = 1$, **todo** e, poiché la parametrizzazione è regolare e con t crescente per scrivere $|dt| = dt$ e $R > 0$,

$$L = \int \vec{r}\in\gamma|d\vec{r}| = \int_{t=0}^{4\pi} |\vec{r}'(t)|\ dt = \int_{t=0}^{4\pi} \sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2}\,dt = 4\pi R^2\sqrt{1 + \left(\frac{L}{2\pi R}\right)^2}\ .$$

Example 28.2.4 (Massa di un'elica con densità non uniforme)

Si vuole calcolare la massa dell'elica dell'esempio precedente, conoscendo che la sua densità lineare di massa ha una dipendenza di primo grado dal parametro t nota,

$$m(t) = a + b\,t\ , \qquad t \in [0, 4\pi]$$

con $a > 0$, $b > -\frac{a}{4\pi}$ noti. I vincoli sui parametri rappresentano il vincolo fisico di densità di massa non negativa, $m(t) > 0$, $\forall t \in [0, 4\pi]$.

…

La massa dell'elica è

$$\begin{aligned}
M &= \int_{\vec{r}\in\gamma} m(\vec{r}) = \\
&= \int_{t=0}^{4\pi} m(\vec{r}_\gamma(t))\,|\vec{r}'_\gamma(t)|\,dt = \\
&= \int_{t=0}^{4\pi} (a+bt)\,\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2}\,dt = \\
&= \left(4\pi a + \frac{(4\pi)^2}{2} b\right)\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2}\ .
\end{aligned}$$

Lavoro e circuitazione

L'integrale del prodotto scalare tra un campo vettoriale $\vec{f}(\vec{r})$ definito su una curva e il versore tangente $\hat{t}(\vec{r})$ alla curva stessa,

$$L_\gamma(\vec{f}) = \int_{\vec{r}\in\gamma} \vec{f}(\vec{r})\cdot\hat{t}(\vec{r})\ , \tag{29.1}$$

compare in molti ambiti della fisica, o delle scienze in generale, ed è spesso associato al concetto di lavoro compiuto dalla forza o dal campo di forze $\vec{f}(\vec{r})$ lungo il percorso rappresentato dalla curva γ. Esplicitando l'elemento di curva e ipotizzando una parametrizzazione regolare

$$\begin{aligned}
L_\gamma(\vec{f}) &= \int_{s\in s_0}^{s_1} \vec{f}(\vec{r}(s))\cdot\vec{r}'(s)\,ds = \\
&= \int_{t\in t_0}^{t_1} \vec{f}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt
\end{aligned}$$

todo *indipendente dalla parametrizzazione della curva*

Circuitazione

Definition 28.2.1 (Circuitazione)

L'integrale del lavoro (29.1) lungo una curva chiusa γ viene definito circuitazione del campo $\vec{f}$ lungo la linea γ, e viene indicato comunemente con

$$\Gamma_\gamma(\vec{f}) := \oint_\gamma \vec{f} \cdot \hat{t} \, ,$$

dove il circolino sul segno di integrale vuole ricordare che la linea γ è una linea chiusa.

Example 28.2.5

Campi conservativi

In alcuni casi particolari, il valore di questo integrale non dipende dalla curva γ, ma solo dai suoi punti estremi. Campi di questo $\vec{f}(\vec{r})$ di questo tipo compaiono in fisica nella definizione di campi di forze conservative, che ammettono potenziale.

todo *legare bene con il resto; discutere qui? In altre parti? Ragionare sui domini?*

- campi conservativi in un dominio hanno circuitazione nulla lungo ogni percorso appartenente al dominio

Example 28.2.6

29.2.2 Integrali di superficie

Densità

Data una superficie $S : \vec{r} = \vec{r}_S(q^1, q^2)$ e una funzione $\sigma(\vec{r})$ definita sui punti della superficie S, questa può essere interpretata come densità di superficie di una proprietà M additiva associata alla superficie S definita come l'integrale

$$M = \int_{\vec{r} \in S} \sigma(\vec{r}) \, ,$$

o indicando esplicitamente l'elemento di superficie, e ipotizzando una parametrizzazione regolare con parametri crescenti $|dq^i| = dq^i > 0$,

$$M = \int_{\vec{r} \in S} \sigma(\vec{r}) dS = \int_{(q^1, q^2) \in Q} \sigma\left(\vec{r}_S(q^1, q^2)\right) \left| \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q^1}(q^1, q^2) \times \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q^2}(q^1, q^2) \right| dq^1 \, dq^2$$

Flusso di un campo vettoriale

L'integrale del prodotto scalare tra un campo vettoriale $\vec{f}(\vec{r})$ definito su una superficice S e il versore normale $\hat{n}$ alla superficie

$$\Phi_S(\vec{f}) = \int_{\vec{r}\in S} \vec{f}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) \ , \tag{29.2}$$

compare in molti ambiti della fisica, o delle scienze in generale, e viene definito **flusso** del campo vettoriale $\vec{f}(\vec{r})$ attraverso la superficie S. Esplicitando l'elemento di superficie e ipotizzando una parametrizzazione regolare con parametri crescenti e coerenti con la direzione desiderata del versore normale (orientazione della superficie),

$$\Phi_S(\vec{f}) = \int_{(q^1,q^2)\in Q} \vec{f}(\vec{r}_S(q^1,q^2)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2}\, dq^1\, dq^2 \ , \tag{29.3}$$

29.2.3 Integrali di volume

Nello spazio 3-dimensionale i cui punti sono descritti dalle coordinate $\{q^i\}_{i=1:3}$, $\vec{r}(q^1,q^2,q^3)$, il volume elementare dV costruito con i vettori degli incrementi parziali, può essere espresso in funzione delle variazioni delle coordinate dq^1, dq^2, dq^3 e del prodotto misto delle derivate parziali,

Ricordando il significato geometrico del *prodotto misto tra tre vettori in spazi euclidei*, l'elemento infinitesimo di un volume descritto dalle coordinate $\left(q^i\right)_{i=1:n}$ è

$$dV = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^3} \right| dq^1\, dq^2\, dq^3 \ .$$

29.3 Operatori differenziali in spazi euclidei

Usando un sistema di coordinate cartesiane, un punto P nello spazio può essere identificato dal vettore euclideo tra l'origine O del sistema delle coordinate e il punto P,

$$P - O = \vec{r}_P = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} = P(x,y,z) \ .$$

29.3.1 Derivata direzionale

Dato il campo scalare $f(P)$ rappresentato usando le coordinate cartesiane,

$$f(P) = f\left(P(x,y,z)\right) = F(x,y,z) \ ,$$

il valore del campo nel punto $P + \alpha\vec{v}$ vale

$$f(P+\alpha\vec{v}) = f\left((x+\alpha v_x)\hat{x} + (y+\alpha v_y)\hat{y} + (z+\alpha v_z)\hat{z}\right) = F(x+\alpha v_x, y+\alpha v_y, z+\alpha v_z)$$

e la derivata direzionale è definita come il limite per $\alpha \to 0$ del rapporto incrementale, definito come il rapporto tra

$$\begin{aligned}
f(P+\alpha\vec{v}) - f(P) &= F(x+\alpha v_x, y+\alpha v_y, z+\alpha v_z) - F(x,y,z) = \\
&= \alpha v_x\, \partial_x F(x,y,z) + \alpha v_y\, \partial_y F(x,y,z) + \alpha v_z\, \partial_z F(x,y,z) + o(|\alpha|) = \\
&= \alpha v_x\, \partial_x f(P) + \alpha v_y\, \partial_y f(P) + \alpha v_z\, \partial_z f(P) + o(|\alpha|) = \\
&= \alpha\vec{v} \cdot \nabla f(P) + o(|\alpha|) \ ,
\end{aligned}$$

e α, cioè

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{f(P+\alpha\vec{v})-f(P)}{\alpha} = \vec{v}\cdot\nabla f(P) \ .$$

avendo introdotto il vettore formale **nabla**, ∇, per definire l'operatore **gradiente** usando il sistema di coordinate cartesiane,

$$\nabla f(P) = \hat{x}\,\partial_x f(P) + \hat{y}\,\partial_y f(P) + \hat{z}\,\partial_z f(P) \ .$$

29.3.2 Gradiente

Definizione. Il gradiente di un campo scalare $f(P)$ nello spazio 3-dimensionale è un campo vettoriale che ha la direzione locale di massima crescita della funzione e il modulo come massima derivata direzionale,

$$\nabla f(P) = \hat{x}\,\partial_x f(P) + \hat{y}\,\partial_y f(P) + \hat{z}\,\partial_z f(P) \ .$$

Proprietà. Il gradiente di un campo scalare indica la direzione **locale** di massima crescita del campo.

Dimostrazione.

La derivata direzionale della funzione f nel punto P in direzione $\hat{t}$ è definita come il prodotto scalare tra il versore $\hat{t}$ e il gradiente della funzione calcolato nel punto P

$$\hat{t}\cdot\nabla f(P) \ .$$

Ricordando la definizione di *prodotto interno in uno spazio euclideo*, è possibile dimostrare che tra tutti i possibili vettori $\hat{t}$ l'incremento della funzione è massimo in direzione del gradiente,

$$\max_{\hat{t}} \hat{t}\cdot\nabla f(P) = \max_{\hat{t}} \underbrace{|\,\hat{t}\,|}_{=1} |\nabla f(P)| \cos\theta_{\hat{t}} = \max_{\theta_{\hat{t}}} |\nabla f(P)| \cos\theta_{\hat{t}} = |\nabla f(P)| \ ,$$

quando l'angolo tra il versore $\hat{t}$ e il gradiente $\nabla f(P)$ è nullo, $\theta_{\hat{t}} = 0$.

29.3.3 Divergenza

La divergenza di un campo vettoriale $\vec{f}(P)$ nello spazio 3-dimensionale è un campo scalare che può essere interpretato come la densità volumetrica del *flusso del campo vettoriale*. Usando un sistema di coordinate cartesiane, la divergenza di un campo vettoriale può essere scritta formalmente come il prodotto interno tra il vettore formale nabla e il campo vettoriale,

$$\nabla\cdot\vec{f} = \partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z$$

Divergenza come densità volumetrica del flusso. Dimostrazione con un cubetto elementare

Usando le coordinate cartesiane si calcola il flusso del campo vettoriale attraverso la superficie di un cubetto elementare centrato nel punto P, **todo**

$$\begin{aligned}
\Phi_{\partial \Delta V(P)}\left(\vec{f}\right) & = \Delta y \Delta z \hat{x} \cdot \vec{f}\left(P + \hat{x}\frac{\Delta x}{2}\right) - \Delta y \Delta z \hat{x} \cdot \vec{f}\left(P - \hat{x}\frac{\Delta x}{2}\right) + \dots = \\
& = \Delta y \Delta z \left[f_x \ \left(P + \hat{x}\frac{\Delta x}{2}\right) f_x \ \left(P - \hat{x}\frac{\Delta x}{2}\right)\right] + \dots = \\
& = \Delta y \Delta z \left[f_x(P) + \frac{\Delta x}{2} \partial_x f(P) - f_x(P) + \frac{\Delta x}{2} \partial_x f(P) + o(\Delta x) \right] + \dots = \\
& = \Delta x \Delta y \Delta z \, \partial_x f_x(P) + o(\Delta V) + \dots = \\
& = \Delta V \ \left[\partial_x f_x(P) + \partial_y f_y(P) + \partial_z f_z(P) \right] + o(\Delta V) = \\
& = \Delta V \, \nabla \cdot \vec{f}(P) + o(\Delta V) \, .
\end{aligned}$$

Divergenza come densità volumetrica del flusso. Dimostrazione con un tetraedro elementare

Usando le coordinate cartesiane si calcola il flusso del campo vettoriale attraverso la superficie di un cubetto elementare centrato nel punto P, **todo**

$$\begin{aligned}
\Phi_{\partial \Delta V(P)}\left(\vec{f}\right) & = -\Delta S_x \hat{x} \cdot \vec{f}\left(P + \hat{y}\frac{\Delta y}{3} + \hat{z}\frac{\Delta z}{3}\right) - \Delta S_y \hat{y} \cdot \vec{f}\left(P + \hat{z}\frac{\Delta z}{3} + \hat{x}\frac{\Delta x}{3}\right) \\
& \quad - \Delta S_z \hat{z} \cdot \vec{f}\left(P + \hat{x}\frac{\Delta x}{3} + \hat{y}\frac{\Delta y}{3}\right) + \Delta S \hat{n} \cdot \vec{f}\left(P + \hat{x}\frac{\Delta x}{3} + \hat{y}\frac{\Delta y}{3} + \hat{z}\frac{\Delta z}{3}\right) + o(\Delta V) = \\
& = -\Delta S_x \left(f_x + \frac{\Delta y}{3}\partial_y f_x + \frac{\Delta_z}{3}\partial_z f_x\right) - \Delta S_y \left(f_y + \frac{\Delta z}{3}\partial_z f_y + \frac{\Delta_x}{3}\partial_x f_y\right) + \\
& \quad - \Delta S_z \left(f_z + \frac{\Delta x}{3}\partial_x f_z + \frac{\Delta_y}{3}\partial_y f_z\right) + \Delta S \sum_{k \in \{x,y,z\}} \left[n_k \ \left(f_k(P) + \frac{\Delta x}{3}\partial_x f_k + n_y \ \frac{\Delta y}{3}\partial_y f_k + n_z \ \frac{\Delta z}{3}\partial_z f_k \right)\right] + \dots + \\
& = -\Delta S_x \left(f_x + \frac{\Delta y}{3}\partial_y f_x + \frac{\Delta_z}{3}\partial_z f_x\right) - \Delta S_y \left(f_y + \frac{\Delta z}{3}\partial_z f_y + \frac{\Delta_x}{3}\partial_x f_y\right) + \\
& \quad - \Delta S_z \left(f_z + \frac{\Delta x}{3}\partial_x f_z + \frac{\Delta_y}{3}\partial_y f_z\right) + \sum_{k \in \{x,y,z\}} \Delta S_k \ \left(f_k(P) + \frac{\Delta x}{3}\partial_x f_k + n_y \ \frac{\Delta y}{3}\partial_y f_k + n_z \ \frac{\Delta_z}{3}\partial_z f_k \right) + \dots + o(\Delta \\
& = \frac{1}{3}\Delta S_x \, \Delta x \partial_x f_x + \frac{1}{3}\Delta S_y \Delta y \partial_y f_y + \frac{1}{3}\Delta S_z \Delta z \partial_z f_z = \\
& = \Delta V \left[\partial_x f_x(P) + \partial_y f_y(P) + \partial_z f_z(P) \right] + o(\Delta V) \, .
\end{aligned}$$

29.3.4 Rotore

Il rotore di un campo vettoriale $\vec{f}(P)$ nello spazio 3-dimensionale è un campo vettoriale che può essere interpretato come la densità di superficie di *circuitazione*. Usando un sistema di coordinate cartesiane, il rotore di un campo vettoriale può essere scritto formalmente come il prodotto vettoriale tra il vettore formale nabla e il campo vettoriale,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{f} & = \hat{x}\left(\partial_y f_z - \partial_z f_y\right) + \\
& + \hat{y}\left(\partial_z f_x - \partial_x f_z\right) + \\
& + \hat{z}\left(\partial_x f_y - \partial_y f_x\right) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} \, .
\end{aligned}$$

Rotore come densità di circuitazione. Dimostrazione

Usando le coordinate cartesiane si calcola la circuitazione del campo vettoriale $\vec{f}$ sui lati della faccia maggiore di un tetraedro con spigoli coincidenti con gli assi e di lunghezza Δx, Δy, Δz,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\partial \Delta V(P)}\left(\vec{f}\right) & = \vec{f}\left(P - \frac{\Delta z}{3}\hat{z} + \frac{\Delta y}{6}\hat{y} + \frac{\Delta x}{6}\hat{x}\right) \cdot (-\hat{x}\Delta x + \hat{y}\Delta y) + \\
& + \vec{f}\left(P - \frac{\Delta x}{3}\hat{x} + \frac{\Delta z}{6}\hat{z} + \frac{\Delta y}{6}\hat{y}\right) \cdot (-\hat{y}\Delta y + \hat{z}\Delta z) + \\
& + \vec{f}\left(P - \frac{\Delta y}{3}\hat{y} + \frac{\Delta x}{6}\hat{x} + \frac{\Delta z}{6}\hat{z}\right) \cdot (-\hat{z}\Delta z + \hat{x}\Delta x) = \\
& = -\Delta x\left(f_x - \frac{\Delta z}{3}\partial_z f_x + \frac{\Delta y}{6}\partial_y f_x + \frac{\Delta x}{6}\partial_x f_x\right) + \Delta y\left(f_y - \frac{\Delta z}{3}\partial_z f_y + \frac{\Delta y}{6}\partial_y f_y + \frac{\Delta x}{6}\partial_x f_y\right) \\
& \quad - \Delta y\left(f_y - \frac{\Delta x}{3}\partial_x f_y + \frac{\Delta z}{6}\partial_z f_y + \frac{\Delta y}{6}\partial_y f_y\right) + \Delta z\left(f_z - \frac{\Delta x}{3}\partial_x f_z + \frac{\Delta z}{6}\partial_z f_z + \frac{\Delta y}{6}\partial_y f_z\right) \\
& \quad - \Delta z\left(f_z - \frac{\Delta y}{3}\partial_y f_z + \frac{\Delta x}{6}\partial_x f_z + \frac{\Delta z}{6}\partial_z f_z\right) + \Delta x\left(f_x - \frac{\Delta y}{3}\partial_y f_x + \frac{\Delta x}{6}\partial_x f_x + \frac{\Delta z}{6}\partial_z f_x\right) = \\
& = \frac{1}{2}\Delta x\Delta y\left(\partial_x f_y - \partial_y f_x\right) + \frac{1}{2}\Delta y\Delta z\left(\partial_y f_z - \partial_z f_y\right) + \frac{1}{2}\Delta z\Delta x\left(\partial_z f_x - \partial_x f_z\right) = \\
& = \Delta S_z\left(\nabla \times \vec{f}\right)_z + \Delta S_x\left(\nabla \times \vec{f}\right)_x + \Delta S_y\left(\nabla \times \vec{f}\right)_y = \\
& = \Delta S\left(n_z\left(\nabla \times \vec{f}\right)_z n_x\left(\nabla \times \vec{f}\right)_x n_y\left(\nabla \times \vec{f}\right)_y\right) = \\
& = \Delta S\,\hat{n} \cdot \nabla \times \vec{f}(P) + o(\Delta S)\,.
\end{aligned}$$

29.3.5 Laplaciano

29.4 Teorema di Stokes

29.4.1 Teorema del gradiente

Theorem 28.4.1 (Teorema del gradiente)

Per campi scalari $f(\vec{r})$ sufficientemente regolari nel dominio $V \subseteq E^d$, $d = 2:3$, vale

$$\int_V \nabla f = \oint_{\partial V} f\hat{n}\,. \tag{29.4}$$

Example 28.4.1 (Teorema del gradiente)

Dato il dominio quadrato descritto dai valori delle coordinate cartesiane dei punti $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} \in E^2$, $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$, e il campo scalare

$$f(\vec{r}) = 4x + 3xy$$

viene chiesto di determinare se la funzione $f(\vec{r})$ è regolare nel dominio, di calcolare i due integrali coinvolti nel teorema del gradiente (29.4) e verificare se il teorema del gradiente è soddisfatto.

La funzione $f(\vec{r})$ è continua…Il gradiente di $f(\vec{r})$ può essere espresso usando le coordinate cartesiane come

$$\nabla f = \hat{x}\partial_x f + \hat{y}\partial_y f = (4 + 3y)\hat{x} + 3x\hat{y}\,,$$

dove i versori $\hat{x}$ e $\hat{y}$ sono uniformi nello spazio, e quindi indipendenti dalle coordinate.

Gli integrali valgono

$$\begin{aligned}
\int_V \nabla f &= \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-1}^{1} \left[(4+3y)\hat{x} + 3x\hat{y} \right] \, dx \, dy = \\
&= \hat{x} \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-1}^{1} (4+3y) \, dx \, dy + \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-1}^{1} 3x \, dx \, dy = \\
&= \hat{x} \int_{x=-1}^{1} \left[4\, y + \frac{3}{2}\, y^2 \right] \Big|_{y=-1}^{1} dx + \hat{y} \int_{y=-1}^{1} \left[\frac{3}{2}\, x^2 \right] \Big|_{y=-1}^{1} dy = \\
&= 16\hat{x} + 0\hat{y} \, .
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial V} f\hat{n} &= \int_{y=-1}^{1} f(x=1,y)\hat{x} \, dy + \int_{x=1}^{-1} f(x,y=1)\hat{y} \, dx + \\
&+ \int_{y=1}^{-1} f(x=-1,y)(-\hat{x}) \, dy + \int_{x=-1}^{1} f(x,y=-1)(-\hat{y}) \, dx = \\
&= \int_{y=-1}^{1} (4+3y)\hat{x} \, dy + \int_{x=1}^{-1} (4x+3x)\hat{y} \, dx + \\
&+ \int_{y=1}^{-1} (-4-3y)(-\hat{x}) \, dy + \int_{x=-1}^{1} (4x-3x))(-\hat{y}) \, dx = \\
&= 8\hat{x} + 0\hat{y} + 8\hat{x} + 0\hat{y} = 16\hat{x} \, .
\end{aligned}$$

Example 28.4.2 (Teorema del gradiente)

29.4.2 Teorema della divergenza

Theorem 28.4.2 (Teorema della divergenza)

Per campi vettoriali $\vec{f}(\vec{r})$ sufficientemente regolari nel dominio $V \subseteq E^d$, $d = 2:3$, vale

$$\int_V \nabla \cdot \vec{f} = \oint_{\partial V} \vec{f} \cdot \hat{n} \, . \qquad (29.5)$$

Example 28.4.3 (Teorema della divergenza)

Example 28.4.4 (Teorema della divergenza)

29.4.3 Teorema del rotore

Theorem 28.4.3 (Teorema del rotore)

Per campi vettoriali $\vec{f}(\vec{r})$ sufficientemente regolari sulla superficie $S \subseteq E^3$, vale

$$\int_S \nabla \times \vec{f} \cdot \hat{n} = \oint_{\partial S} \vec{f} \cdot \hat{t} \, . \tag{29.6}$$

Example 28.4.5 (Teorema del rotore)

Example 28.4.6 (Teorema della rotore)

29.5 Problemi

29.5.1 Operatori differenziali

29.5.2 Integrali

Geometria

Exercise 28.5.1 (Superfici piane - 2D)

Exercise 28.5.2 (Curve nello spazio)

Exercise 28.5.3 (Volumi e superfici di solidi - 3D)

1. Calcolare il volume e la superficie di una **sfera** di raggio R. *Hint: usare le coordinate sferiche. Come esercizio sugli integrali, ripetere l'esercizio usando le coordinate cilindriche*
2. Calcolare il volume e la superficie laterale di un **cilindro** con base circolare di raggio R e di altezza H.
3. Calcolare il volume e la superficie laterale di un **cono retto** con raggio della base R e altezza H.
4. Calcolare il volume e la superficie di una **cupola sferica** di raggio R e di altezza H.
5. Calcolare il volume e la superficie laterale di una **piramide retta con base quadrata** di lato L e altezza H. Generalizzare poi il caso a una piramide con base rettangolare.
6. Calcolare il volume e la superficie laterale di una **piramide retta con base triangolare** rettangola con cateti L_1, L_2 e altezza H. Generalizzare poi il caso a una piramide con base triangolare qualsiasi.
7. Generalizzare i risultati trovati in precedenza a 1. piramidi con un poligono regolare di n lati come base, 2. base qualsiasi.

Exercise 28.5.4 (Problemi di minimo e massimo)

Fisica

Exercise 28.5.5 (Proprietà inerziali - massa, centro di massa, momenti)

Exercise 28.5.6 (Flusso e circuitazione)

Parte VII

Statistica

CAPITOLO 30

Introduzione alla statistica

Approcci. Statistica descrittiva o inferenziale

Contenuti.

- Calcolo combinatorio
- Variabili casuali
- Processi casuali

Applicazioni.

- Verifica delle ipotesi
- Stima
- …
- Nell'ambito del machine learning:
  - SL: regressione/classificazione
  - UL: clustering, riduzione dimensionale,…
  - RL: ottimizzazione/controllo
- …

30.1 Calcolo combinatorio

Il calcolo combinatorio si occupa di contare i diversi modi possibili per organizzare un insieme finito di elementi.

30.1.1 Permutazioni

Una permutazione di un insieme $I = \{a_i\}_{i=1:n}$ di n elementi è una configurazione ordinata dei suoi elementi

$$\left(a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_n}\right) \ ,$$

nella quale ogni elemento viene presentato **una e una sola volta**. Si definiscono le **permutazioni semplici**, se l'insieme I non ha elementi ripetuti, e le **permutazioni con ripetizioni** se l'insieme I può avere elementi uguali.

Permutazioni semplici

Il numero di permutazioni semplici di un insieme di n elementi è

$$P_n = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 = n! \ ,$$

poichè ci sono n modi di scegliere il primo elemento, $n-1$ modi di scegliere il secondo elemento una volta scelto il primo, $n-2$ modi di scegliere il terzo elemento della sequenza una volta scelti i primi due, e così via fino all'ultimo elemento per il quale esiste un solo modo,

Permutazioni con ripetizioni

Il numero di permutazioni con ripetizione distinte di un insieme di n elementi è

$$P_{n,\mathbf{r}} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} \ ,$$

essendoci r elementi distinti nell'insieme I e l'elemento i ripetuto n_i volte, e quindi $n = \sum_r n_r$. Supponendo che tutti gli elementi siano distinguibili, data una permutazione, esistono $n_1!$ modi di disporre gli n_1 elementi a_1 ripetuti, $n_2!$ modi di disporre gli n_2 elementi a_2 ripetuti,...e quindi il numero di sequenze distinte nel quale gli elementi uguali non sono distinguibili è uguale al numero di tutte le permutazioni semplici diviso il prodotto degli r fattoriali $n_i!$.

30.1.2 Disposizioni

Disposizioni semplici

Dato un insieme I di n elementi distinti, una disposizione di k elementi è una **configurazione ordinata** di $k \le n$ elementi nella quale non si possono avere ripetizioni degli elementi di I. Il numero di disposizioni semplici è quindi

$$D_{n,k} = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \ ,$$

seguendo lo stesso ragionamento con il quale si è ricavato il numero di permutazioni semplici, ma fermandosi alla scelta di $k \le n$ elementi.

Osservazione. Se $k = n$, le disposizioni semplici corrispondono alle permutazioni semplici.

Disposizioni con ripetizioni

Dato un insieme I di n elementi distinti, una disposizione di k elementi è una **configurazione ordinata** di $k \le n$ elementi nella quale si possono avere ripetizioni degli elementi di I. Ogni elemento distinto dell'insieme I può essere scelto più volte. Il numero di disposizioni semplici è

$$D'_{n,k} = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ volte}} = n^k \ ,$$

poiché ognuno degli n elementi distinti dell'insieme di partenza può essere scelto ogni volta.

30.1.3 Combinazioni

Combinazioni semplici

Dato un insieme I di n elementi distinti, una combinazione semplice di k elementi è una **configurazione non ordinata** di $k \le n$ elementi dell'insieme I, nella quale non si possono ripetere gli elementi di I. Il numero di permutazioni semplici di k elementi è uguale al numero $D_{n,k}$ delle disposizioni semplici di k oggetti di un insieme di n elementi (per le quali l'ordine è importante), diviso il numero di permutazioni semplici di k elementi (che è uguale al numero di modi di configurazioni ordinate dei k elementi di una disposizione),

$$C_{n,k} = \frac{D_{n.k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \ .$$

Combinazioni con ripetizioni

Dato un insieme I di n elementi distinti, una combinazione con ripetizione di k elementi è una **configurazione non ordinata** di k elementi dell'insieme I, nella quale ogni elemento può essere ripetuto k volte.

Il numero di combinazioni di k elementi con ripetizione degli elementi di un insieme I di n elementi distinti è uguale al numero di permutazioni con ripetizioni di $k+n-1$ elementi di un insieme di partenza con due elementi, uno ripetuto $n-1$ volte, l'altro k volte, cioè

$$C'_{n,k} = P_{n+k-1,(n-1,k)} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} \ ,$$

e quindi $C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$.

Una dimostrazione può essere svolta rappresentando gli elementi della combinazione come una sequenza k di $*$, separati da $n-1$ divisori $|$: gli $n-1$ divisori separano la sequenza di k $*$ in n regioni (ordinate) associabili con una corrispondenza biunivoca agli elementi (ordinati) dell'insieme di partenza; il numero di $*$ nella i-esima regione rappresenta il numero di volte che l'elemento a_i è ripetuto nella sequenza. Così ad esempio, le combinazioni con ripetizione di $k = 4$ elementi di un insieme $I = \{1, 2, 3\}$ di $n = 3$ elementi possono essere rappresentate come

$$\begin{array}{ll}
****|| & \{1,1,1,1\} \\
***|*| & \{1,1,1,2\} \\
|| & \{1,1,2,2\} \\
*|***| & \{1,2,2,2\} \\
|****| & \{2,2,2,2\} \\
***||* & \{1,1,1,3\} \\
\dots & \\
||**** & \{3,3,3,3\}
\end{array}$$

Example 29.1.1 (Combinazioni con ripetizione di $k = 3$ elementi di un insieme di $n = 2$ elementi)

Il numero di combinazioni con ripetizione di $k = 3$ elementi dell'insieme $I = \{1, 2\}$ di $n = 2$ elementi è

$$C'_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{(3+2-1)!}{1!3!} = 4 \ ,$$

e le possibili combinazioni sono

$$\begin{array}{ll} *\,*\,*\,| & \{1,1,1\} \\ *\,*|* & \{1,1,2\} \\ *\,|\,*\,* & \{1,2,2\} \\ |\,*** & \{2,2,2\} \end{array}$$

Example 29.1.2 (Combinazione con ripetizioni di $k = 2$ elementi di un insieme di $n = 3$ elementi)

Il numero di combinazioni con ripetizione di $k = 2$ elementi dell'insieme $I = \{1, 2, 3\}$ di $n = 3$ elementi è

$$C'_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{(2+3-1)!}{2!2!} = 6 \ ,$$

e le possibili combinazioni sono

$$\begin{array}{ll} *\,*|| & \{1,1\} \\ *\,|\,*\,| & \{1,2\} \\ *\,||* & \{1,3\} \\ |\,*\,*| & \{2,2\} \\ |\,*\,|* & \{2,3\} \\ ||\,*\,* & \{3,3\} \end{array}$$

Example 29.1.3 (Caramelle uguali a bambini diversi)

In quanti modi si possono distribuire 5 caramelle indistinguibili a 3 bambini distinguibili? Il numero è uguale al numero di combinazioni con ripetizione di $k = 5$ elementi di un gruppo di $n = 3$ elementi, e cioè

$$C'_{3,5} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21 \ .$$

Example 29.1.4 (Bose-Einstein)

…

Nota:

- esistenza librerie
- nel calcolo delle configurazioni in problemi di grosse dimensioni si possono incontrare limiti dell'aritmetica finita: **overflow** con i fattoriali; se compare un rapporto tra fattoriali, meglio non calcolare l'intero numeratore e l'intero denominatore prima di fare il rapporto…

Parte VIII

Indice

CAPITOLO 31

Indice

Proof Index

thm:infinitesimal-calculus:derivatives:thm:hopital

thm:infinitesimal-calculus:derivatives:thm:lagrange

thm:infinitesimal-calculus:derivatives:thm:rolle

trigonometry:cos2x