continuum mechanics

basics

Jan 15, 2025

CONTENTS

Cinematica. Descrizione lagrangiana, euleriana e arbitraria.

Equazioni di bilancio per mezzi continui.

- Princìpi (massa, quantità di moto, energia totale):
  - Forma integrale:
    - volume materiale, sistema chiuso
    - volumi arbitrari (tramite derivazione su domini mobili, teoremi del trasporto **todo** link)
  - Forma differenziale:
    - coordinate fisiche, materiali e arbitrarie

Equazioni di stato ed equazioni costitutive.

- legami tra variabili termodinamiche
- espressione del tensore degli sforzi e del flusso di conduzione

Bilanci derivati.

- energia cinetica
- energia interna
- entropia

Part I

Continuum Mechanics

CHAPTER

ONE

CINEMATICA

- coordinate fisiche $\mathbf{r}$
- coordinate materiali $\mathbf{r}_0$
- coordinate arbitrarie $\mathbf{r}_b$

Il moto dei punti materiali nello spazio fisico è descritto dalla una funzione

$$\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \ ,$$

che associa a ogni punto materiale "etichettato" con la coordinata $\mathbf{r}_0$ la sua posizione nello spazio al tempo t

Il campo di velocità dei punti materiali è definito come la derivata nel tempo della posizione, tenendo fissa la coordinata $\mathbf{r}_0$ che identifica i punti,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) = \left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}_0} = \frac{D\mathbf{r}}{Dt} \ ,$$

avendo introdotto l'operatore di derivata materiale $\frac{D}{Dt}$.

Alla stessa maniera la posizione nello spazio e la velocità dei punti in moto arbitrario, etichettati con le coordinate $\mathbf{r}_b$, sono

$$\mathbf{r}(\mathbf{r}_b, t) \ ,$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_b, t) = \left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}_b} \ .$$

Le leggi di trasformazione tra le coordinate forniscono anche la legge di trasformazione delle derivate parziali,

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), t) = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}} + \left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}_0} \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\right|_{t} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}} + \mathbf{u} \cdot \nabla f$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}_b} f(\mathbf{r}(\mathbf{r}_b, t), t) = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}} + \left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}_b} \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\right|_{t} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}} + \mathbf{u}_b \cdot \nabla f$$

e quindi

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}_0} f = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}} f + \mathbf{u} \cdot \nabla f = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}_b} f + (\mathbf{u} - \mathbf{u}_b) \cdot \nabla f \ .$$

()=

1.1 Kinematics of two points

$$\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) = ...$$

strain velocity tensor

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{u} + \nabla^T\vec{u}\right] \tag{1.1}$$

CHAPTER

TWO

PRINCÌPI IN FORMA INTEGRALE PER VOLUMI MATERIALI

In meccanica classica, per sistemi chiusi

Principio di conservazione della massa: bilancio di massa. $\dot{M}_{V_t} = 0$

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t} \rho = 0 \ .$$

Secondo principio della dinamica: bilancio di quantità di moto. $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{ext}$

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t} \rho \mathbf{u} = \int_{V_t} \rho \mathbf{g} + \oint_{\partial V_t} \mathbf{t_n} \ .$$

Primo principio della termodinamica: bilancio di energia totale. $\dot{E}^{tot} = P^{ext} + \dot{Q}^{ext}$

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t} \rho e^t = \int_{V_t} \rho \mathbf{g}\cdot\mathbf{u} + \oint_{\partial V_t} \mathbf{t_n}\cdot\mathbf{u} - \oint_{\partial V_t} \mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{n}} + \int_{V_t} \rho r \ .$$

CHAPTER

THREE

PRINCÌPI IN FORMA INTEGRALE PER DOMINI ARBITRARI

Usando i teoremi del trasporto per la derivata nel tempo di grandezze fisiche su domini mobili **todo** *aggiungere riferimento* si può ricavare la forma integrale dei princìpi per sistemi aperti.

3.1 Volume di controllo, V

Bilancio di massa

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho + \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}} = 0\ .$$

Bilancio della quantità di moto

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u}\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \int_V \rho \mathbf{g} + \oint_{\partial V} \mathbf{t_n}\ .$$

Bilancio dell'energia totale.

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho e^t + \oint_{\partial V} \rho e^t \mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \int_V \rho \mathbf{g}\cdot\mathbf{u} + \oint_{\partial V} \mathbf{t_n}\cdot\mathbf{u} - \oint_{\partial V} \mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{n}} + \int_V \rho r\ .$$

3.2 Volume arbitrario, v_t

Bilancio di massa

$$\frac{d}{dt}\int_{v_t} \rho + \oint_{\partial v_t} \rho (\mathbf{u}-\mathbf{u}_b)\cdot\hat{\mathbf{n}} = 0\ .$$

Bilancio della quantità di moto

$$\frac{d}{dt}\int_{v_t} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial v_t} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_b)\cdot\hat{\mathbf{n}} = \int_{v_t} \rho \mathbf{g} + \oint_{\partial v_t} \mathbf{t_n}\ .$$

Primo principio della termodinamica: bilancio di energia totale. $\dot{E}^{tot} = P^{ext} + \dot{Q}^{ext}$

$$\frac{d}{dt}\int_{v_t} \rho e^t + \oint_{\partial v_t} \rho e^t (\mathbf{u}-\mathbf{u}_b)\cdot\hat{\mathbf{n}} = \int_{v_t} \rho \mathbf{g}\cdot\mathbf{u} + \oint_{\partial v_t} \mathbf{t_n}\cdot\mathbf{u} - \oint_{\partial v_t} \mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{n}} + \int_{v_t} \rho r\ .$$

CHAPTER

FOUR

PRINCÌPI IN FORMA DIFFERENZIALE

4.1 Bilanci in coordinate fisiche

Partendo dai bilanci in forma integrale per volumi di controllo, se sono soddifatte le condizioni di "sufficiente regolarità" dei campi (intese come "ogni cosa che scriviamo ha senso"), si possono ricavare i bilanci i forma differenziale, sfruttando il teorema della divregenza per trasformare gli integrali di superficie in integrali di volume, e l'arbitrarietà del volume di controllo (poiché la validità dei princìpi fisici è indipendente dal particolare sistema considerato).

Viene usata la relazione di Cauchy per esprimere il vettore sforzo sul contorno del dominio ∂V come in funzione della normale alla superficie e del tensore degli sforzi $\mathbb{T}$ **todo** riferimento alla relazione di Cauchy,

$$\mathbf{t_n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} \ .$$

Bilancio di massa.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \int_V \rho + \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\
&= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \\
&= \int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right\}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

Bilancio della quantità di moto.

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_V \rho \mathbf{g} - \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} = \\
&= \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \int_V \rho \mathbf{g} - \int_V \nabla \cdot \mathbb{T} = \\
&= \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot \mathbb{T} \right\}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot \mathbb{T}$$

Bilancio dell'energia totale.

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\int_V \rho e^t + \oint_{\partial V} \rho e^t \mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}} - \int_V \rho \mathbf{g}\cdot\mathbf{u} - \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbb{T}\cdot\mathbf{u} + \oint_{\partial V} \mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{n}} - \int_V \rho r = \\
&= \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho e^t) + \int_{\partial V} \nabla\cdot(\rho e^t \mathbf{u}) - \int_V \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{u} - \int_V \nabla\cdot(\mathbb{T}\cdot\mathbf{u}) + \int_V \nabla\cdot\mathbf{q} - \int_V \rho r = \\
&= \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e^t) + \nabla\cdot(\rho e^t\mathbf{u}) - \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{u} - \nabla\cdot(\mathbb{T}\cdot\mathbf{u}) + \nabla\cdot\mathbf{q} - \rho r \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\rho e^t) + \nabla\cdot(\rho e^t\mathbf{u}) = \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{u} + \nabla\cdot(\mathbb{T}\cdot\mathbf{u}) - \nabla\cdot\mathbf{q} + \rho r
$$

CHAPTER

FIVE

EQUAZIONI DI STATO ED EQUAZIONI COSTITUTIVE

CHAPTER

SIX

EQUAZIONI DI BILANCIO DI ALTRE GRANDEZZE FISICHE

Partendo dai bilanci di massa, quantità di moto e di energia totale, si possono ricare le le equazioni di bilancio di altre grandezze fisiche come l'*energia cinetica*, l'*energia interna*, l'*entropia*.

6.1 Bilanci in forma differenziale, convettiva

Energia cinetica. L'energia cinetica (macroscopica) per unità di massa è $k = \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$. L'equazione di bilancio dell'energia cinetica viene derivata moltiplicando scalarmente l'equazione della quantità di moto

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho\mathbf{g} + \nabla\cdot\mathbb{T} \ ,$$

per il campo di velocità **u**,

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{u} + \nabla\cdot\mathbb{T}\cdot\mathbf{u} \ ,$$

avendo usato $\mathbf{u}\cdot d\mathbf{u} = d\left(\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}{2}\right) = dk$.

Energia interna. L'energia interna per unità di massa è la differenza tra l'energia totale e l'energia cinetica, $e = e^{tot} - k$. L'equazione di bilancio dell'energia interna viene ottenuta come differenza dell'equazione dell'energia totale

$$\rho \frac{De^{tot}}{Dt} = \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{u} + \nabla\cdot(\mathbb{T}\cdot\mathbf{u}) - \nabla\cdot\mathbf{q} + \rho r \ ,$$

e quella dell'energia cinetica, per ottenere

$$\rho \frac{De}{Dt} = \mathbb{T} : \nabla\mathbf{u} - \nabla\cdot\mathbf{q} + \rho r \ .$$

Entropia.

- **Entropia nei fluidi.** Se l'entropia può essere scritta come funzione dell'energia interna e della densità, e il primo principio della termodinamica viene scritto come

  $$de = \frac{P}{\rho^2}\,d\rho + T\,ds \ ,$$

  e il tensore degli sforzi può essere rappresentato come somma degli sforzi di pressione e degli sforzi viscosi **todo** *riferimento alle leggi costitutive*,

  $$\mathbb{T} = -P\mathbb{I} + \mathbb{S} = -P\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbb{I} \ ,$$

si può ricavare l'equazione di governo dell'entropia usando il differenziale $ds = \dfrac{1}{T}\, de - \dfrac{P}{T\rho^2}\, d\rho$

$$\begin{aligned}
\rho \frac{Ds}{Dt} & = \frac{\rho}{T} \left(\frac{De}{Dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \right) = \\
& = \frac{1}{T} \left(\rho \frac{De}{Dt} - \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right) = \\
& = \frac{1}{T} \left(\mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r - \frac{P}{\rho} \left(\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \right) = \\
& = \frac{1}{T} \left(-P \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbb{S} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + P\, \nabla \cdot \mathbf{u} \right) = \\
& = \frac{1}{T} \left(\mathbb{S} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \right) = \\
& = \frac{1}{T} \left(2 \mu |\mathbb{D}|^2 + \lambda |(\nabla \cdot \mathbf{u})|^2 - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \right) = \\
& = \frac{2 \mu |\mathbb{D}|^2 + \lambda |(\nabla \cdot \mathbf{u})|^2}{T} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\rho r}{T} \ ,
\end{aligned}$$

avendo usato la degola del prodotto $\nabla \cdot \left(\dfrac{\mathbf{q}}{T} \right) = \dfrac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{T} - \dfrac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2}$.

Gli ultimi due termini sono legati alla **sorgenti di entropia** nel sistema, dovute alla sorgente di calore nel sistema e al flusso di calore tramite la frontiera del sistema.

I primi due termini possono essere ricondotti alla **dissipazione viscosa** e dovuta alla **conduzione termica** all'interno del volume: entrambi devono essere non-negativi per il secondo principio della termodinamica **todo**. Il primo termine è positivo se i coefficienti di viscosità del modello di fluido newtoniano sono non-negativi

$$\mu, \lambda \ge 0$$

. Il secondo termine impone che il flusso di calore avvenga in direzione opposta al gradiente di temperatura locale, e quindi la proiezione su di esso sia negativa (traducendo il concetto che il calore trasferisce energia da un corpo caldo a uno freddo),

$$-\mathbf{q} \cdot \nabla T \ge 0 \ ,$$

come è facile da verificare per il modello di Fourier per la conduzione in mezzi isotropi, $\mathbf{q} = -k \nabla T$, $-\mathbf{q} \cdot \nabla T = k |\nabla T|^2 \ge 0$ se

$$k \ge 0 \ .$$

Nel caso di modello lineare per la conduzione in mezzi non isotrpi, il flusso di conduzione può essere descritto usando un tensore del secondo ordine $\mathbb{K}$, $\mathbf{q} = -\mathbb{K} \cdot \nabla T$ (**todo** simmetria?) e la condizione diventa

$$0 \le -\nabla T \cdot \mathbf{q} = \nabla T \cdot \mathbb{K} \cdot \nabla T \ ,$$

che impone che il tensore di conduzione sia (semi-)definito positivo, a causa dell'arbitrarietà del vettore ∇T.

Se questi due termini sono non-negativi, il bilancio di entropia può essere riscritto come la disuguaglianza

$$\begin{aligned}
\rho \frac{Ds}{Dt} & = \underbrace{\frac{2 \mu |\mathbb{D}|^2 + \lambda |(\nabla \cdot \mathbf{u})|^2}{T} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2}}_{\ge 0} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\rho r}{T} = \\
& \ge - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\rho r}{T} \ ,
\end{aligned}$$

o nella forma integrale per un volume materiale

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho s \ge - \oint_{\partial V_t} \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \int_{V_t} \rho \frac{r}{T} \ ,$$

che richiama alla mente la disuguaglianza di Clausius **todo** *aggiungere riferimento*

$$dS \geq \frac{\delta Q^e}{T} \, .$$

La differenza di segno deriva dalla definizione di dQ^e come flusso di calore dall'ambiente verso il sistema e del vettore flusso di calore $\mathbf{q}$ come flusso di calore "uscente dal sistema" **todo**

Part II

Solid Mechanics

CHAPTER

SEVEN

INTRODUCTION TO SOLID MECHANICS

Part III

Fluid Mechanics

CHAPTER

EIGHT

INTRODUCTION TO FLUID MECHANICS

- Statics and definition of fluids, as medium that has no shear stress at rest.
- Kinematics
- Dynamics
- Models:
  - Incompressible flows
    - Governing equations, theorems and regimes of motion
      - Inviscid
      - Irrotational
  - Compressible flows
    - Inviscid
    - …

CHAPTER

NINE

STATICS

The behavior of continuous medium in static conditions can be used to define a fluid.

Definition 1 (Fluid)

A fluid can be defined as a continuous medium with no shear stress in static conditions. Thus, the stress tensor of an *isotropic fluid* under static conditions reads

$$\mathbb{T}^s = -p\mathbb{I} \ ,$$

where p is *pressure*. (**todo** mechanical? Thermodynamical?)

CHAPTER

TEN

CONSTITUTIVE EQUATIONS OF FLUID MECHANICS

10.1 Newtonian Fluids

A Newtonian fluid is the model of a fluid as a continuous medium whose stress tensor can be written as the sum of the hydrostatic pressure stress tensor $-p\mathbb{I}$ - the only contribution holding in *statics* - and a viscous stress tensor $\mathbb{S}$

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S} \ ,$$

and the viscous stress tensor is isotropic and **linear** in the first-order spatial derivatives of the velocity field,

$$\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \vec{u})\mathbb{I} \ , \tag{10.1}$$

being μ, λ the viscosity coefficients, and $\mathbb{D}$ the strain velocity tensor (1.1). Thus, the definition

Definition 2 (Newtonian fluid)

A Newtonian fluid is a continuous medium whose stress tensor reads

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \vec{u})\mathbb{I} \ . \tag{10.2}$$

Note: The expression (10.1) of the viscosity stress tensor is the most general expression of a 2-nd order symmetric isotropic tensor proportional to 1-st order derivatives of a vector field.

CHAPTER

ELEVEN

GOVERNING EQUATIONS OF FLUID MECHANICS

11.1 Newtonian Fluid

The differential conservative form of the governing equations of a *Newtonian fluid* directly follows from the *governing equations of a continuum medium in differential form*,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot \mathbb{T} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho e^t) + \nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \end{cases}$$

using the expression (10.2) of the stress tensor of a Newtonian fluid, and the required constitutive equations and equations of state characterizing the behavior of the medium and required to get a well-defined mathematical problem, providing the expression of thermodynamic variables and heat conduction flux as a function of the primary variables of the problem. As an example, Fourier's law for heat conduction reads

$$\vec{q} = -k \nabla T \ ,$$

…

CHAPTER

TWELVE

NON-DIMENSIONAL EQUATIONS OF FLUID MECHANICS

$\{$

CHAPTER

THIRTEEN

INCOMPRESSIBLE FLUID MECHANICS

Chapter of a introductory course in incompressible fluid mechanics:

- statics
- kinematics
- governing equations
- non-dimensional equations
- vorticity dynamics
- low-Re exact solutions
- high-Re flows, incompressible inviscid irrotational flows:
  - vorticity dynamics and Bernoulli theorems
  - aeronautical applications
- boundary layer
- instability and turbulence

13.1 Navier-Stokes Equations

The kinematic constraints (link to *Non-dimensional Equations of Fluid Mechanics*?)

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

replaces mass balance in the governing equation and implies $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, i.e. all the material particles have constant density in time.

If …

$$\begin{cases} \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} \right] - \mu \nabla^2 \vec{u} + \nabla P = \rho \vec{g} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \tag{13.1}$$

with the proper initial conditions, boundary conditions and - if required - *compatibility conditions*.

Compatibility condition

A compatibility condition is needed if the velocity field is prescribed on the whole boundary ∂V of the domain V,

$$\vec{u}\Big|_{\partial V} = \vec{b}_n \ .$$

The compatibility condition reads

$$\oint_{\partial V} \vec{b} \cdot \hat{n} = 0 \ ,$$

to ensure that the conudary conditions are consistent with the incompressibility constraint, as it is readily proved using divergence theorem on the velocity field in V,

$$0 \equiv \int_V \underbrace{\nabla \cdot \vec{u}}_{=0} = \oint_{\partial V} \hat{v} \cdot \hat{n} = \oint_{\partial V} \vec{b} \cdot \hat{n} \ .$$

13.2 Vorticity

A dynamical equation for vorticity $\vec{\omega} := \nabla \times \vec{u}$ reailty follows taking the curl of Navier-Stokes equations (13.1)

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} + \nu \Delta \vec{\omega} \ , \tag{13.2}$$

i.e. vorticity can be stretched-tilted by the term $(\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u}$, or diffused by the term $\nu \Delta \vec{\omega}$.

…

13.3 Bernoulli theorems

For an incompressible fluid, the advective term $(\vec{u} \cdot \nabla) \cdot \vec{u}$ can be recasted as

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \cdot \vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{u} + \nabla \frac{|\vec{u}|^2}{2} \ ,$$

so that the momentum equation in Navier-Stokes equations (13.1) for fluids with uniform density ρ reads

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u} + \nabla \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right] - \mu \Delta \vec{u} + \nabla P = \rho \vec{g} \ . \tag{13.3}$$

Starting from the form (13.3), different forms of Bernoulli theorems are readilty derived with the proper assumptions.

Theorem 1 (Bernoulli theorem along path and vortex lines in steady flows)

In a steady incompressible inviscid flow with conservative volume forces, $\vec{g} = -\nabla \chi$, the Bernoulli polynomial is constant along path (everywhere tangent to the velocity field, $\hat{t}(\vec{r}) \parallel \vec{u}(\vec{r})$) and vortex lines (everywhere tangent to the vorticity field, $\hat{t}(\vec{r}) \parallel \vec{\omega}(\vec{r})$), i.e. the directional derivative of the Bernoulli polynomial in the direction of the velocity or the vorticity field is identically zero,

$$\hat{t} \cdot \nabla \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \chi \right) = 0 \ .$$

The proof readily follows taking the scalar product with a unit-norm vector $\hat{t}$ parallel to the local velocity or vorticity, and noting that $\hat{t} \cdot \vec{u} \times \vec{\omega}$ is zero if either $\hat{t} \parallel \vec{v}$ or $\hat{t} \parallel \vec{\omega}$.

Theorem 2 (Bernoulli theorem in irrotational inviscid steady flows)

In a steady incompressible inviscid irrotational flow with conservative volume forces, $\vec{g} = -\nabla \chi$, the Bernoulli polynomial is uniform in the whole domain, since its gradient is identically zero

$$\nabla \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \chi \right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \chi = 0 \ .$$

Theorem 3 (Bernoulli theorem in irrotational inviscid flows)

In an incompressible inviscid irrotational flow with conservative volume forces, $\vec{g} = -\nabla \chi$, the Bernoulli polynomial is uniform in the connected irrotational regions of the domain - but not constant in time in general - , since its gradient is identically zero

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \chi \right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \chi = C(t) \ .$$

being ϕ the velocity potential used to write the irrotational velocity field as the gradient of a scalar function $\vec{u} = \nabla \phi$.

Note: The assumption of inviscid flow is not directly required if irrotationality holds. Anyway the inviscid flow assumption may be required to make irrotationality condition holds. Lookinig at the vorticity equation (13.2) the assumption of negligible viscosity prevents diffusion of vorticity from rotational regions to irrotational regions.

Note: A barotropic fluid is defined as a fluid where the pressure is a function of density only, $P(\rho)$. For this kind of flows it's possible to find a function Π so that

$$d\Pi = \frac{dP}{\rho} \ .$$

The results of this section derived for a uniform density flow hold for a barotropic fluid as well, replacing $\frac{P}{\rho}$ with Π.

CHAPTER

FOURTEEN

COMPRESSIBLE FLUID MECHANICS

PROOF INDEX