electromagnetism

basics

23 gen 2025

This material is part of the **basics-books project**. It is also available as a .pdf document.

Introduzione.

L'elettromagnetismo si occupa dello studio dei fenomeni elettromagnetici prodotti da cariche e correnti elettriche o dalla struttura microscopica della materia (magnetismo naturale)

Breve storia. *Prime esperienze: cariche di 2 tipi diversi e legge di Coulomb;*

Argomenti.

Prime esperienze **TODO** *Prime esperienze; elettromagnetismo come teoria dei* **campi** **TODO** *aggiungere una sezione su first-experiments-revisited, dopo la presentazione dei princìpi dell'elettromagnetismo*

todo Aggiungere sezione su strumenti matematici necessari, per la formulazione di una teoria dei campi

Princìpi dell'elettromagnetismo **TODO** *Trattare prima regime stazionario - elettricità e magnetismo - e poi regime non-stazionario - elettromagnetismo**?*** **TODO** *Princìpi. Conservazione della carica, leggi di Maxwell, legge di Lorentz* **TODO** *Principi in forma integrale; princìpi in forma differenziale - le leggi di Maxwell*

Energia

Onde elettromagnetiche

Approssimazione circuitale **TODO** *Circuiti elettrici; circuiti elettromagnetici; sistemi elettro-meccanici. Regimi: stazionario, non-stazionario: regime transitorio e armonico*

Extra.

Ottica

Elettromagnetismo e relatività todo *Relatività a per $v \ll c$; crisi della relatività galileiana*

Parte I

Elettromagnetismo

basics

23 gen 2025

0 min read

CAPITOLO 1

Prime esperienze

basics

23 gen 2025

2 min read

CAPITOLO 2

Princìpi dell'elettromagnetismo classico

I progressi nello studio dei fenomeni elettromagnetici nel XIX secolo, permisero a James Clerk Maxwell di formulare quelle che oggi sono note con il nome di *equazioni di Maxwell* e possono essere considerate la prima formulazione consistente dei principi dell'elettromagnetismo classico, insieme alla legge di bilancio della carica e all'espressione della forza di Lorentz su una carica elettrica immersa in un campo elettromagnetico.

I principi in forma differenziale possono essere ricavati dai principi in forma integrale, più generici, se i campi soddisfano le necessarie condizioni di regolarità minima, che qualitativamente si possono enunciare come «tutte le operazioni svolte devono avere senso».

2.1 Prinicipi in forma differenziale

Conservazione della carica elettrica.

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \; .$$

Equazioni di Maxwell.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{d} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{e} + \partial_t \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{h} - \partial_t \mathbf{d} = \mathbf{j} \end{cases}$$

con la necessità di definire delle equazioni costitutive $\mathbf{d}(\mathbf{e}, \mathbf{b})$, $\mathbf{h}(\mathbf{e}, \mathbf{b})$.

Forza di Lorentz. La forza per unità di volume agente sulla carica elettrica presente in un punto $\mathbf{r}$ nello spazio è

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}, t)\, \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \\ &= \rho(\mathbf{r}, t)\, [\mathbf{e}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)] = \\ &= \rho(\mathbf{r}, t)\, \mathbf{e}^*(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

avendo definito $\mathbf{e}^*$ il campo elettrico **visto dalla carica in movimento**.*

2.2 Principi in forma integrale: equazioni dell'elettromagnetismo e relatività galileiana

2.2.1 Forma integrale su volumi di controllo

La forma integrale dei principi dell'elettromagnetismo per volumi V e superfici S fissi nello spazio viene ricavata integrando le equazioni differenziali sui domini e usando il teorema della divergenza per ottenere termini di flusso, e il teorema del rotore per ottenere termini di circuitazione.

Continuità della carica elettrica.

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho + \oint_{\partial V} \mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{n}} = 0$$

Legge di Gauss per il campo $\mathbf{d}(\mathbf{r},t)$.

$$\oint_{\partial V} \mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \int_V \rho$$

Legge di Gauss per il campo $\mathbf{b}(\mathbf{r},t)$.

$$\oint_{\partial V} \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}} = 0$$

Legge di Faraday-Neumann-Lenz, per l'induzione elettromagnetica.

$$\oint_{\partial S} \mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{t}} + \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$$

Legge di Ampére-Maxwell.

$$\oint_{\partial S} \mathbf{h}\cdot\hat{\mathbf{t}} - \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \int_S \mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,.$$

2.2.2 Forma integrale su volumi arbitrari

Per la loro importanza in applicazioni fondamentali come i motori elettrici, e per evitare confusione e voli pindarici quando si tratta il fenomeno dell'induzione elettromagnetica, risulta di primaria importanza fornire l'espressione corretta dei principi dell'elettromagnetismo quando sono coinvolti volumi mobili nello spazio. Non viene solo mostrata la forma di questi principi, ma anche il procedimento corretto per ricavarli partendo dalla loro forma valida per volumi di controllo fermi nello spazio: per fare questo, vengono usate le regole di derivazione nel tempo di integrali fondamentali su domini mobili, come l'integrale su un volume di una funzione densità, il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie o una circuitazione lungo una curva.

Queste tre regole di derivazione recitano **todo** Iniziare il bbook di calcolo vettoriale, e aggiungere riferimento

$$\frac{d}{dt}\int_{v_t} f = \int_{v_t}\frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{\partial v_t} f\,\mathbf{u}_b\cdot\hat{\mathbf{n}}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{s_t} \mathbf{f}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \int_{s_t}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\cdot\hat{\mathbf{n}} + \int_{s_t}\nabla\cdot\mathbf{f}\,\mathbf{u}_b\cdot\hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial s_t}\mathbf{u}_b\times\mathbf{f}\cdot\hat{\mathbf{t}}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\ell_t} \mathbf{f}\cdot\hat{\mathbf{t}} = \int_{\ell_t}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\cdot\hat{\mathbf{t}} + \int_{\ell_t}\nabla\times\mathbf{f}\ \cdot\ \mathbf{u}_b\times\hat{\mathbf{t}} + \mathbf{f}_B\cdot\mathbf{u}_B - \mathbf{f}_A\cdot\mathbf{u}_A$$

Continuità della carica elettrica.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\int_V \rho + \oint_{\partial V} \mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \\
&= \frac{d}{dt}\int_{v_t} \rho - \oint_{\partial v_t} \rho \mathbf{u}_b \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial v_t} \mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{n}} \\
&\frac{d}{dt}\int_{v_t} \rho + \oint_{\partial v_t} \underbrace{\rho(\mathbf{u}-\mathbf{u}_b)}_{\mathbf{j}^*}\cdot\hat{\mathbf{n}}
\end{aligned}$$

Legge di Gauss per il campo $\mathbf{d}(\mathbf{r},t)$.

$$\oint_{\partial v_t} \mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \int_{v_t} \rho$$

Legge di Gauss per il campo $\mathbf{b}(\mathbf{r},t)$.

$$\oint_{\partial v_t} \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}} = 0$$

Legge di Faraday-Neumann-Lenz, per l'induzione elettromagnetica.

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \oint_{\partial S} \mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{t}} + \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \\
&= \oint_{\partial s_t} \mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{t}} + \frac{d}{dt}\int_{s_t} \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}} - \int_{s_t} \underbrace{\nabla\cdot\mathbf{b}}_{=0}\,\mathbf{u}_b\cdot\hat{\mathbf{n}} + \oint_{s_t} \mathbf{u}_b\times\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{t}} = \\
&\oint_{\partial s_t} \mathbf{e}^*\cdot\hat{\mathbf{t}} + \frac{d}{dt}\int_{s_t} \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,,
\end{aligned}$$

con la definizione $\mathbf{e}^* := \mathbf{e} + \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{b}$, già usata nell'espressione della legge di Lorentz.

Legge di Ampére-Maxwell.

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \oint_{\partial s_t} \mathbf{h}\cdot\hat{\mathbf{t}} - \frac{d}{dt}\int_{s_t} \mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{n}} - \int_{s_t} \mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \\
&= \oint_{\partial s_t} \mathbf{h}\cdot\hat{\mathbf{t}} - \frac{d}{dt}\int_{s_t} \mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{n}} + \int_{s_t} \underbrace{\nabla\cdot\mathbf{d}}_{=\rho}\,\mathbf{u}_b\cdot\hat{\mathbf{n}} - \oint_{s_t} \mathbf{u}_b\times\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{t}} - \int_{s_t} \mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \\
&\oint_{\partial s_t} \mathbf{h}^*\cdot\hat{\mathbf{t}} - \frac{d}{dt}\int_{s_t} \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \int_{s_t} \mathbf{j}^*\cdot\hat{\mathbf{n}}\,,
\end{aligned}$$

avendo definito $\mathbf{h}^* := \mathbf{h} - \mathbf{u}_b \times \mathbf{d}$, e usato la definizione già introdotta in precedenza $\mathbf{j}^* := \mathbf{j} - \rho\mathbf{u}_b$.

Aggiungendo le definizioni

$$\rho^* = \rho$$

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{b}$$

si ottengono delle equazioni che hanno la stessa forma delle equazioni scritte per domini fermi nello spazio, ma che possono essere applicati a domini mobili. Le definizioni

$$\begin{aligned}
\rho^* &= \rho \quad &,\quad \mathbf{j}^* &= \mathbf{j} - \rho\mathbf{u}_b \\
\mathbf{d}^* &= \mathbf{d} \quad &,\quad \mathbf{e}^* &= \mathbf{e} + \mathbf{u}_b \times \mathbf{b} \\
\mathbf{b}^* &= \mathbf{b} \quad &,\quad \mathbf{h}^* &= \mathbf{h} - \mathbf{u}_b \times \mathbf{d}
\end{aligned}$$

non rappresentano altro che la trasformazione dei campi per due osservatori in moto relativo, e corrispondono al limite delle trasformazioni di Lorentz della relatività speciale per velocità $|\mathbf{u}_b| \ll c$: in questo procedimento vengono ottenute le trasformazioni per basse velocità relative, poiché non è stata considerata nessuna trasformazione delle dimensioni spaziali e temporali, come prevede la teoria della relatività di Einstein.

todo riferimento alle trasformazioni galileiane e di Lorentz per la relatività nell'elettromagnetismo.

basics

23 gen 2025

1 min read

CAPITOLO 3

Potenziali elettromagnetici

E" possibile dimostrare che il sistema di equazioni di Maxwell e dell'equazione del bilancio della carica elettrica è un sistema sovra-determinato. In particolare, è possibile dimostrare che, nota la distribuzione di carica e di densità di corrente - considerate come cause generanti il campo elettrico -, date le leggi costitutive del materiale, sono sufficienti 4 incognite per definire le 6 incognite (3 componenti, per due campi vettoriali) del problema. E" possibile formulare quindi il problema in termini di un potenziale scalare φ e un potenziale vettore **a** per ottenere, insieme a una condizione di gauge che elimini le due arbitrarietà (irrilevanti ai fini del calcolo dei campi fisici) restanti.

3.1 Potenziale vettore e potenziale scalare

Partendo dalle equazioni di Maxwell si possono definire i potenziali del campo elettromagnetico. Usando l'equazione di Gauss per il campo magnetico si può introdurre il potenziale vettore $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$,

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{b} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a} \ ,$$

poiché la divergenza di un rotore è identicamente nulla. Introducendo questa relazione nell'equazione di Faraday-Newumann-Lenz, nell'ipotesi di sufficiente regolarità dei campi che consenta di invertire l'ordine delle derivate,

$$0 = \nabla \times \mathbf{e} + \partial_t \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{e} + \partial_t \nabla \times \mathbf{a} = \nabla \times (\mathbf{e} + \partial_t \mathbf{a}) \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{e} + \partial_t \mathbf{a} = -\nabla \varphi \ ,$$

poichè il rotore di un gradiente è identicamente nulla. Le grandezze «fisiche» campo elettrico $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ e campo magnetico $\mathbf{b}(mathbfr, t)$ possono quindi essere scritte usando i pootenziali elettromagnetici come

$$\begin{cases} \mathbf{e} & = -\nabla \varphi - \partial_t \mathbf{a} \\ \mathbf{b} & = \nabla \times \mathbf{a} \end{cases}$$

3.2 Condizioni di gauge

I potenziali sono definiti a meno di una condizione di gauge, un'ulteriore condzione che elimina ogni arbitrarietà nella definizione. Ad esempio, il potenziale vettore è definito a meno del gradiente di una funzione scalare, poiché $\nabla \times \nabla f \equiv \mathbf{0}$, e quindi il potenziale $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \nabla f$ produce lo stesso campo magnetico $\mathbf{b}$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{a}} = \nabla \times (\mathbf{a} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{a} \ .$$

Condizione di gauge di Lorentz. Per motivi che saranno più evidenti nella sezione sulle *onde elettromagnetiche*, una condizione di gauge conveniente è

$$\nabla \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi = 0$$

Condizione di gauge di Coulomb.

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$$

basics

23 gen 2025

3 min read

CAPITOLO 4

Elettromagnetismo nella materia

todo

4.1 Vuoto

I fenomeni elettromagnetici nel vuoto sono governati dalle equazioni di Maxwell nel vuoto,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{e} + \partial_t \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{b} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{e} = \mu_0 \mathbf{j} \end{cases}$$

e dall'equazione della continuità della carica elettrica,

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \ .$$

4.2 Mezzi continui

In generale, alcuni materiali rispondono a un campo elettromagnetico «esterno» imposto, con una polarizzazione e una magnetizzazione. In particolare, la polarizzazione elettrica di un materiale corrisponde a una separazione locale delle cariche elettriche dal punto di vista macroscopico equivalente a una densità di volume di dipoli, $\mathbf{p}(\mathbf{r}_0)$; la magnetizzazione corrisponde a un orientamento degli assi delle spire delle correnti amperiane dal punto di vista macroscopico equivalente a una densità di momento magnetico $\mathbf{m}(\mathbf{r}_0)$.

4.3 Polarizzazione

4.3.1 Singolo dipolo elettrico

Un dipolo elettrico discreto è formato da due cariche elettriche uguali e opposte q, $-q$, nei punti P_+, $P_- = P_+\mathbf{l}$, nel limite $q \to +\infty$, $|\mathbf{l}| \to 0$ con $q|\mathbf{e}|$ finito.

Il campo elettrico (stazioario **todo** *controllare cosa succede nel caso non stazionario. Magari dopo aver derivato la soluzione generale del problema, come soluzione delle equazioni delle onde in termini dei potenziali EM*) generato nel punto dello spazio $\mathbf{r}$ da un dipolo elettrico nel punto $\mathbf{r}_0$ viene calcolato come limite del campo elettrico generato da due cariche uguali e opposte $q^{\mp}$ nei punti $\mathbf{r}_0 \mp \frac{\mathbf{l}}{2}$,

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\left(\mathbf{r}_0-\frac{\mathbf{l}}{2}\right)}{\left|\mathbf{r}-\left(\mathbf{r}_0-\frac{\mathbf{l}}{2}\right)\right|^3} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\left(\mathbf{r}_0+\frac{\mathbf{l}}{2}\right)}{\left|\mathbf{r}-\left(\mathbf{r}_0+\frac{\mathbf{l}}{2}\right)\right|^3} .$$

Usando la formula per la derivata dei termini

$$\partial_{\ell_k}\frac{x_i \pm \frac{\ell_i}{2}}{\left|\mathbf{x}\pm\frac{\mathbf{l}}{2}\right|^3} = \frac{1}{2}\left[\pm\frac{\delta_{ik}}{r^3} - 3r^{-4}\left(\pm\frac{x_k \pm \frac{\ell_k}{2}}{r}\right)\right]$$

$$\partial_{\ell_k}\frac{x_i \pm \frac{\ell_i}{2}}{\left|\mathbf{x}\pm\frac{\mathbf{l}}{2}\right|^3}\Bigg|_{\mathbf{l}=\mathbf{0}} = \mp\frac{1}{2}\left[-\frac{\delta_{ik}}{|\mathbf{x}|^3} + 3\left(\frac{x_k}{r^5}\right)\right] = \mp\frac{1}{2}\partial_{r_{0k}}\frac{r_i - r_{0i}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} = \mp\frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}$$

si ricava l'apporssimazione al primo ordine in $\mathbf{l}$ dei due termini

$$\frac{\mathbf{r}-\left(\mathbf{r}_0\mp\frac{\mathbf{l}}{2}\right)}{\left|\mathbf{r}-\left(\mathbf{r}_0\mp\frac{\mathbf{l}}{2}\right)\right|^3} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|^3} \pm \mathbf{l}\cdot\frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\right) + o(|\mathbf{l}|)$$

e, definendo l'intensità del dipolo $\mathbf{P}_0 := q\mathbf{l}$ e facendo tendere le grandezze al limite desiderato, quella del campo elettrico

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{P}_0\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\right) = \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^5}\cdot\mathbf{P}_0 - \frac{\mathbf{P}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\right] = \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\otimes(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^5} - \frac{\mathbb{I}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\right]\cdot\mathbf{P}_0 .
\end{aligned}$$

todo nel caso generale sarebbe necessario prestare attenzione all'ordine dei fattori nel prodotto tra vettori e tensori, ma in questo caso si può sfruttare la simmetria del tensore del secondo ordine (o delle operazioni).

4.3.2 Distribuzione continua di dipoli

Una distribuzione di dipoli con densità di volume $\mathbf{p}(\mathbf{r_0})$, che produce il dipolo elementare $\Delta\mathbf{P}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{p}(\mathbf{r}_0)dV_0$ nel volume dV_0, produce il campo elettrico

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0\in V_0}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{p}(\mathbf{r}_0)\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\right) ,$$

la cui espressione può essere riscritta usando le regole di integrazione per parti

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbf{r}_0\in V_0}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{p}(\mathbf{r}_0)\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\right) = \\
&= \oint_{\mathbf{r}_0\in\partial V_0}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\underbrace{\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{p}(\mathbf{r}_0)}_{=:\sigma_P(\mathbf{r}_0)} + \int_{\mathbf{r}_0\in V_0}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\underbrace{\left(-\nabla_{\mathbf{r}_0}\cdot\mathbf{p}(\mathbf{r}_0)\right)}_{=:\rho_P(\mathbf{r}_0)} ,
\end{aligned}$$

avendo definito le densità di carica di polarizzazione superficiale σ_P e di volume ρ_P come le intensità delle sorgenti distribuite di campo elettrico, in analogia con l'espressione della legge di Coulomb.

4.3.3 Riformulazione delle equazioni di Maxwell e della continuità della carica

L'equazione di Gauss determina la densità di flusso nel volume del campo elettrico **e**,

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \ .$$

Scomponendo la densità di carica come somma delle **cariche libere** ρ_f e delle **cariche di polarizzazione** $\rho_P := -\nabla \cdot \mathbf{p}$, si può rielaborare l'equazione di Gauss,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{e} &= \frac{\rho_f + \rho_P}{\varepsilon_0} \\
\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p}) &= \rho_f \\
\\
\nabla \cdot \mathbf{d} &= \rho_f \ ,
\end{aligned}$$

avendo introdotto il **campo di spostamento**, $\mathbf{d} := \varepsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p}$.

La scomposizione della corrente elettrica come somma $\mathbf{j} = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P$ della corrente libera $\mathbf{j}_f$ e corrente di polarizzazione $\mathbf{j}_P$, permette di rielaborare l'equazione della continuità della carica elettrica

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = \\
&= \partial_t (\rho_f + \rho_P) + \nabla \cdot \left(\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P \right) = \\
&= \partial_t \rho_f + \nabla \cdot \mathbf{j}_f + \partial_t \rho_P + \nabla \cdot \mathbf{j}_P \ ,
\end{aligned}$$

e scrivere le equazioni di continuità per le due distribuzioni di carica (di natura diversa, si suppone che entrambe devono soddisfare la continuità della carica in maniera indipendente, se le cariche libere rimangono libere e le cariche di polarizzazione rimangono di polarizzazione),

$$\begin{aligned}
& \partial_t \rho_f + \nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0 \\
& \partial_t \rho_P + \nabla \cdot \mathbf{j}_P = 0 \qquad \rightarrow \qquad 0 = \nabla \cdot (-\partial_t \mathbf{p} + \mathbf{j}_P) \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{j}_P = \partial_t \mathbf{p}
\end{aligned}$$

todo *giustificare assenza di campo costante*

4.4 Magnetizzazione

4.4.1 Singolo momento magnetico (limite di una spira elementare)

Usando la legge di Biot-Savart, specializzato a un conduttore percorso da corrente $i(\mathbf{r}_0)$

$$\begin{aligned}
d\mathbf{b}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}_0) dV_0 = \\
&= -\frac{\mu}{4\pi} i(\mathbf{r}_0) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \times \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_0) d\ell_0 \ ,
\end{aligned}$$

si può calcolare il campo magnetico generato da una spira con percorso $\ell_0 = \partial S_0$ sfruttando il PSCE

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(\mathbf{r}) &= \oint_{\ell_0} d\mathbf{b}(\mathbf{r}_0) = \\
&= -\frac{\mu}{4\pi} i_0 \oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \times \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_0) = \\
&= \frac{\mu}{4\pi} i_0 \int_{\mathbf{r}_0 \in S_0} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right)
\end{aligned}$$

Il campo generato da spira elementare di superficie S_0 con normale $\hat{\mathbf{n}}_0$, usando il teorema della media, è

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} i_0 S_0 \hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right) + o(S_0)$$

e al tendere di $i_0 \to \infty$, $S_0 \to 0$ in modo tale da avere $\mathbf{M}_0 := i_0 S_0 \hat{\mathbf{n}}_0$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(\mathbf{r}) & = \frac{\mu}{4\pi} \mathbf{M}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right) \\
& = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^5} \cdot \mathbf{M}_0 - \frac{\mathbf{M}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right] = \\
& = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \otimes (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^5} - \frac{\mathbb{I}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right] \cdot \mathbf{M}_0 \, .
\end{aligned}$$

todo Analogia con il campo elettrico prodotto da una distribuzione di dipoli.

Dettagli

$$\oint_{\partial S} A \, t_i = \int_S \varepsilon_{ijk} \, n_j \, \partial_k A \qquad , \qquad \oint_{\partial S} A \, \hat{\mathbf{t}} = \int_S \hat{\mathbf{n}} \times \nabla A$$

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \times \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_0) d\ell_0 & = \oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \varepsilon_{ijk} \frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \, t_k = \\
& = \int_{\mathbf{r}_0 \in S_0} \varepsilon_{krs} n_r \partial^0_s \left(\varepsilon_{ijk} \frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right) = \\
& = \int_{\mathbf{r}_0 \in S_0} \left(\delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr} \right) n_r \partial^0_s \left(\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right) = \\
& = \int_{\mathbf{r}_0 \in S_0} \left\{ n_i \underbrace{\partial^0_j \left(\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right)}_{=0} - n_j \partial^0_i \left(\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right) \right\} = \\
& = -\int_{\mathbf{r}_0 \in S_0} n_j \partial^0_i \left(\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right) \, .
\end{aligned}$$

4.4.2 Distribuzione continua di momento magnetico

Per calcolare il campo magnetico generato da una distribuzione di volume di momento magnetico si può procedere in analogia con quanto fatto per calcolare il campo elettrico generato da una distribuzione di dipoli

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(\mathbf{r}) & = \int_{\mathbf{r}_0 \in V_0} \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right) = \\
& = \oint_{\mathbf{r}_0 \in \partial V_0} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r}_0 \in V_0} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \left(-\nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{m}(\mathbf{r}_0) \right) \, ,
\end{aligned}$$

ma senza ottenere un'analogia con l'espressione della legge di Biot-Savart che prevede il prodotto vettore tra il termine $\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}$ con una densità di corrente $\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)$.

Dettagli

Si può riscrivere

$$\begin{aligned}
&\oint_{\mathbf{r}_0\in\partial V_0} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \times (\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_0)\times\mathbf{m}(\mathbf{r}_0)) \\
&\qquad = \oint_{\mathbf{r}_0\in\partial V_0} \varepsilon_{ijk}\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\varepsilon_{krs} n_r m_s = \\
&\qquad = \int_{\mathbf{r}_0\in V_0} (\delta_{ir}\delta_{js}-\delta_{is}\delta_{jr})\,\partial^0_r\left(\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} m_s\right) = \\
&\qquad = \int_{\mathbf{r}_0\in V_0} \left\{\partial^0_i\left(\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} m_j\right) - \partial^0_j\left(\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} m_i\right)\right\} = \\
&\qquad = \int_{\mathbf{r}_0\in V_0} \left\{\partial^0_i\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} m_j + \frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\partial^0_i m_j - \frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\partial^0_j m_i - \underbrace{\partial^0_j\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}}_{=0} m_i\right\} = \\
&\qquad = \int_{\mathbf{r}_0\in V_0} \left\{\partial^0_i\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} m_j + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{krs}\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\partial^0_r m_s\right\} = \\
&\qquad = \int_{\mathbf{r}_0\in V_0} \left\{\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\cdot\mathbf{m}(\mathbf{r}_0) + \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\times\left(\nabla_{\mathbf{r}_0}\times\mathbf{m}(\mathbf{r}_0)\right)\right\} =
\end{aligned}$$

usando le identità del calcolo vettoriale,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{krs} b_r c_s = \\
&= (\delta_{ir}\delta_{js}-\delta_{is}\delta_{jr}) a_j b_r c_s = \\
&= a_j b_i c_j - c_i b_j a_j = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_j\partial_i m_j - a_j\partial_j m_i &= (\delta_{ir}\delta_{js}-\delta_{is}\delta_{jr}) a_j \partial_r m_s = \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{krs} a_j \partial_r m_s = \\
&= \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{m})
\end{aligned}$$

Il campo magnetico generato da una distribuzione di momento magnetico può quindi essere riscritto come

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbf{r}_0\in V_0} \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{m}(\mathbf{r}_0)\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\right) = \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\mathbf{r}_0\in\partial V_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\times\underbrace{(-\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_0)\times\mathbf{m}(\mathbf{r}_0))}_{\mathbf{j}^s_M} - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbf{r}_0\in V_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\times\underbrace{\left(\nabla_{\mathbf{r}_0}\times\mathbf{m}(\mathbf{r}_0)\right)}_{\mathbf{j}_M},
\end{aligned}$$

avendo definito le densità di corrente di magnetizzazione superficiale $\mathbf{j}^s_M$ e di colume $\mathbf{j}_M$ come le intensità delle singolarità distribuite, in analogia con l'espressione della legge di Biot-Savart.

4.4.3 Riformulazione delle equazioni di Maxwell e della continuità della carica

La legge di Ampére-Maxwell può essere riscritta

$$\begin{aligned}
&\nabla\times\mathbf{b} - \mu_0\varepsilon_0\partial_t\mathbf{e} = \mu_0\mathbf{j} \\
&\nabla\times\mathbf{b} - \mu_0\partial_t(\mathbf{d}-\mathbf{p}) = \mu_0\left(\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M\right) \\
&\nabla\times\underbrace{(\mathbf{b}-\mu_0\mathbf{m})}_{=:\mu_0\mathbf{h}} - \mu_0\partial_t\mathbf{d} + \mu_0\underbrace{(\partial_t\mathbf{p}-\mathbf{j}_P)}_{=\mathbf{0}} = \mu_0\mathbf{j}_f
\end{aligned}$$

$$\nabla\times\mathbf{h} - \partial_t\mathbf{d} = \mathbf{j}_f$$

Dalla legge di continuità della corrente elettrica,

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \ ,$$

si ricava l'equazione di continuità per le cariche di magnetizzazione

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t \rho_M + \nabla \cdot \mathbf{j}_M = \\ &= \partial_t \rho_M + \underbrace{\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{m}}_{\equiv \mathbf{0}} \ . \end{aligned}$$

4.5 Esempi

- conduttori
- ferromagentici e magnetismo debole (para-, dia-, anti-)

CAPITOLO 5

Energy balance in electromagnetism

5.1 Force, moment, and power on elementary components

5.1.1 Force, moment and power on a point electric charge

Point electric charge with charge q in a point $\vec{r}_P(t)$ at time t where electromagnetic field is $\vec{e}(\vec{r},t)$, $\vec{b}(\vec{r},t)$:

- Lorentz's force

$$\vec{F} = q\left(\vec{e}(\vec{r}_P(t),t) - \vec{b}(\vec{r}_P(t),t) \times \vec{v}_P(t)\right) \ ,$$

- zero moment, since it has no dimension (and assumed uniform or symmetric or… distribution of electric charge)
- power

$$\begin{aligned} P & = \vec{v}_P(t) \cdot \vec{F} = \\ & = \vec{v}_P(t) \cdot q \, \left(\vec{e}(\vec{r}_P(t),t) - \vec{b}(\vec{r}_P(t),t) \times \vec{v}_P(t)\right) = q \, \vec{v}_P(t) \cdot \vec{e}(\vec{r}_P(t),t) \ . \end{aligned}$$

5.1.2 Force, moment and power on a electric dipole

Electric dipole with center $\vec{r}_C(t)$, axis $\vec{\ell}$, so that the positive charge q is in $P_+ = C + \dfrac{\vec{\ell}}{2}$ and the negative charge is in $P_- = C - \dfrac{\vec{\ell}}{2}$, with $q \rightarrow +\infty$, $|\vec{\ell}| \rightarrow 0$, s.t. $q|\vec{\ell}| = |\vec{d}|$ finite.

Kinematics and expansion of the field

$$\vec{v}_\pm = \vec{v}_C \pm \vec{\omega} \times \frac{\vec{\ell}}{2}$$

$$\vec{e}(P_\pm) = \vec{e}\left(C \pm \frac{\vec{\ell}}{2}\right) = \vec{e}(C) \pm \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{e}(C) + o(|\vec{\ell}|)$$

$$\vec{b}(P_\pm) = \vec{b}\left(C \pm \frac{\vec{\ell}}{2}\right) = \vec{b}(C) \pm \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{b}(C) + o(|\vec{\ell}|)$$

Net force.

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \vec{F}_+ + \vec{F}_- = \\
&= q\left[\vec{e}(P_+) - \vec{b}(P_+) \times \vec{v}_+\right] - q\left[\vec{e}(P_-) - \vec{b}(P_-) \times \vec{v}_-\right] = \\
&= q\left[\vec{e}_C + \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{e}_C - \left(\vec{b}_C + \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{b}_C\right) \times \left(\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \frac{\vec{\ell}}{2}\right)\right] + \\
&- q\left[\vec{e}_C - \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{e}_C - \left(\vec{b}_C - \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{b}_C\right) \times \left(\vec{v}_C - \vec{\omega} \times \frac{\vec{\ell}}{2}\right)\right] = \\
&= q\vec{\ell} \cdot \nabla \vec{e}(C) - \left(q\vec{\ell} \cdot \nabla \vec{b}(C)\right) \times \vec{v}_C + \vec{b}(C) \times \left(\vec{\omega} \times q\vec{\ell}\right) + o(|\vec{\ell}|)
\end{aligned}$$

Net moment, w.r.t. C.

$$\begin{aligned}
\vec{M}_C &= \frac{\vec{\ell}}{2} \times \vec{F}_+ - \frac{\vec{\ell}}{2} \times \vec{F}_- = \\
&= q\frac{\vec{\ell}}{2} \times \left[\vec{e}(P_+) - \vec{b}(P_+) \times \vec{v}_+\right] + q\frac{\vec{\ell}}{2} \times \left[\vec{e}(P_-) - \vec{b}(P_-) \times \vec{v}_-\right] = \\
&= q\frac{\vec{\ell}}{2} \times \left[\vec{e}_C + \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{e}_C - \left(\vec{b}_C + \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{b}_C\right) \times \left(\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \frac{\vec{\ell}}{2}\right)\right] + \\
&+ q\frac{\vec{\ell}}{2} \times \left[\vec{e}_C - \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{e}_C - \left(\vec{b}_C - \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{b}_C\right) \times \left(\vec{v}_C - \vec{\omega} \times \frac{\vec{\ell}}{2}\right)\right] = \\
&= q\vec{\ell} \times \left[\vec{e}_C - \vec{b}_C \times \vec{v}_C\right] + o(|\vec{\ell}|) \ .
\end{aligned}$$

Power.

$$\begin{aligned}
P &= P_+ + P_- = \\
&= \vec{F}_+ \cdot \vec{v}_+ + \vec{F}_- \cdot \vec{v}_- = \\
&= q\ \left[\vec{e}(P_+) - \vec{b}(P_+) \times \vec{v}_+\right] \cdot \vec{v}_+ - q\ \left[\vec{e}(P_-) - \vec{b}(P_-) \times \vec{v}_-\right] \cdot \vec{v}_- = \\
&= q\,\vec{e}(P_+) \cdot \vec{v}_+ - q\,\vec{e}(P_-) \cdot \vec{v}_- = \\
&= q\ \left[\vec{e}_C + \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{e}_C\right] \cdot \left[\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \frac{\vec{\ell}}{2}\right] - q\ \left[\vec{e}_C - \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{e}_C\right] \cdot \left[\vec{v}_C - \vec{\omega} \times \frac{\vec{\ell}}{2}\right] = \\
&= \vec{e}_C \cdot \left(\vec{\omega} \times q\vec{\ell}\right) + \left(q\vec{\ell} \cdot \nabla \vec{e}_C\right) \cdot \vec{v}_C + o(|\vec{\ell}|^2) \ .
\end{aligned}$$

5.1.3 Force, moment and power on a magnetic dipole

5.2 Energy balance

todo *Check and put charges, currents, and dipoles together with the electromagnetic field*

Ispirati dalle dimensioni fisiche dei campi elettromagnetici,

$$[\mathbf{e}] = \frac{\text{force}}{\text{charge}} \qquad , \qquad [\mathbf{d}] = \frac{\text{charge}}{\text{length}^2}$$
$$[\mathbf{b}] = \frac{\text{force} \cdot \text{time}}{\text{charge} \cdot \text{length}} \qquad , \qquad [\mathbf{h}] = \frac{\text{charge}}{\text{time} \cdot \text{length}}$$

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{e}\cdot\mathbf{d}] &= \frac{\text{force}}{\text{length}^2} = \frac{\text{energy}}{\text{length}^3} = [u] \\
[\mathbf{b}\cdot\mathbf{h}] &= \frac{\text{force}}{\text{length}^2} = \frac{\text{energy}}{\text{length}^3} = [u]
\end{aligned}
$$

si può costruire la densità di volume di energia (**todo** trovare motivazioni più convincenti, non basandosi solo sull'analisi dimensionale ma sul lavoro)

$$
u = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}\cdot\mathbf{d} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{h}\right) \ .
$$

Si può calcolare la derivata parziale nel tempo della densità di energia, u, e usare le equazioni di Maxwell per ottenere un'equazione di bilancio dell'energia del campo elettromagnetico. Per un mezzo isotropo lineare, per il quale valgono le equazioni costitutive $\mathbf{d} = \varepsilon\mathbf{e}$, $\mathbf{b} = \mu\mathbf{h}$, la derivata parziale nel tempo dell'energia elettromagnetica può essere riscritta sfuttando la regola di derivazione del prodotto e le equazioni di Faraday-Lenz-Neumann e Ampére-Maxwell,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{e}\cdot\mathbf{d} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{h}\right) = \qquad (...) \\
&= \mathbf{e}\cdot\partial_t\mathbf{d} + \mathbf{h}\cdot\partial_t\mathbf{b} = \\
&= \mathbf{e}\cdot(\nabla\times\mathbf{h} - \mathbf{j}) - \mathbf{h}\cdot\nabla\times\mathbf{e} \ .
\end{aligned}
$$

L'ultimo termine può essere ulteriormente manipolato, usando l'identità vettoriale

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}\cdot\nabla\times\mathbf{h} - \mathbf{h}\cdot\nabla\times\mathbf{e} &= e_i\varepsilon_{ijk}\partial_j h_k - h_i\varepsilon_{ijk}\partial_j e_k = \qquad (i\rightarrow k, k\rightarrow i) \\
&= e_i\varepsilon_{ijk}\partial_j h_k - h_k\varepsilon_{kji}\partial_j e_i = \\
&= e_i\varepsilon_{ijk}\partial_j h_k + h_k\varepsilon_{ijk}\partial_j e_i = \\
&= \partial_j(\varepsilon_{ijk}e_i h_k) = \\
&= \partial_j(\varepsilon_{jki}e_i h_k) = \\
&= \nabla\cdot(\mathbf{h}\times\mathbf{e}) = -\nabla\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{h})
\end{aligned}
$$

che permette di scrivere l'equazione del bilancio di energia elettromagnetica come,

$$
\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{s} = -\mathbf{e}\cdot\mathbf{j} \ ,
$$

dove è stato definito il **vettore di Poynting**, o meglio il campo vettoriale di Poynting,

$$
\mathbf{s}(\mathbf{r},t) := \mathbf{e}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{h}(\mathbf{r},t) \ ,
$$

che può essere identificato come un flusso di potenza per unità di superficie, comparendo sotto l'operatore di divergenza nel bilnacio di energia.

todo. Rimandare a una sezione in cui si mostra questa ultima affermazione passando dal bilancio differenziale al bilancio integrale e si usa il teorema della divergenza, $\int_V \nabla\cdot\mathbf{s} = \oint_{\partial V}\mathbf{s}\cdot\hat{\mathbf{n}}$.

Bilancio di energia di cariche nel vuoto, o i materiali senza polarizzazione o magnetizzazione

Moto di cariche puntiformi. L'equazione del moto di carica puntiforme q_k nella posizione $\mathbf{r}_k(t)$ al tempo t è

$$
m_k\ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{f}_k + \mathbf{f}_k^{em} \ ,
$$

avendo riconosciuto i contributi di forza dovuti al campo elettromagnetico come $\mathbf{f}_k^{em}$ dagli altri. L'espressione della forza dovuta al campo elettromagnetico sulla carica k è data dalla forza di Lorentz,

$$
\mathbf{f}_k^{em}(t) = q_k\left[\mathbf{e}(\mathbf{r_k}(t),t) - \mathbf{b}(\mathbf{r}_k(t),t)\times\dot{\mathbf{r}}_k(t)\right]
$$

Continuità della carica elettrica. La densità di carica e di corrente elettrica di un insieme di cariche libere puntiformi macroscopiche può essere scritta come

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{r},t) &= \sum_k q_k \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k(t)) \\
\mathbf{j}(\mathbf{r},t) &= \sum_k q_k \dot{\mathbf{r}}_k(t) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k(t)) \ .
\end{aligned}$$

L'equazione di continuità della carica, $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, risulta quindi soddisfatta,

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho &= -\sum_k q_k \, \partial_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k(t)) \, \dot{r}_{k,i} \\
\partial_i j_i &= \sum_k q_k \, \dot{r}_{k,i} \, \partial_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k(t))
\end{aligned}$$

Procedimento alternativo (e più generale?)

todo *In caso questo procedimento sia più generale, o più corretto, sostituire il procedimento precedente.*

La carica elementare in un volumetto ΔV è data da dal prodotto tra il volume e la densità volumetrica di carica, $\rho \Delta V$; la velocità media locale della carica elettrica è $\mathbf{v}$; la forza agente sulla carica elementare immersa in un campo elettromagnetico è determinata dalla formula di Lorentz, $\mathbf{f} \Delta V = \Delta V \rho \left(\mathbf{e} - \mathbf{b} \times \mathbf{v} \right)$. La potenza di questa forza è il prodotto scalare con la velocità media delle cariche, $\Delta V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$

La potenza del campo elettromagnetico sul moto della carica elettrica per unità di volume è quindi

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} = \rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{b} \times \mathbf{v}) = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{e} \ .$$

todo

- discutere questo termine del bilancio di energia cinetica nel moto della carica elettrica
- questo termine compare con segno opposto nel bilancio dell'energia elettromagnetica del sistema
- dove compare la non-conservatività del problema in presenza di materiali dissipativi (come resistenza elettrica con $\mathbf{e} = \rho_R \mathbf{j}$?

Il termine $\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}$ può essere manipolato usando le equazioni di Maxwell, e le relazioni

$$\begin{cases} \mathbf{d} = \varepsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p} \\ \mathbf{h} = \frac{\mathbf{b}}{\mu_0} - \mathbf{m} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{e} \cdot (\nabla \times \mathbf{h} - \partial_t \mathbf{d}) & = \\
& = - \nabla \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) + \mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{d} = \\
& = - \nabla \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) - \mathbf{h} \cdot \partial_t \mathbf{b} - \mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{d}
\end{aligned}$$

Gli ultimi due termini possono essere manipolati in diverse maniere,

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{d} = \mathbf{e} \cdot \partial_t \left(\varepsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p} \right) & = \partial_t \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \right) + \mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{p} \\
& = \partial_t \left(\frac{1}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{d} \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \partial_t \mathbf{e} \right) \\
& = \partial_t \left(\frac{1}{2\varepsilon_0} \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} \right) - \frac{\mathbf{p}}{\varepsilon_0} \cdot \partial_t \mathbf{d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}\cdot\partial_t\mathbf{b} = \mathbf{h}\cdot\partial_t\left(\mu_0\mathbf{h}+\mu_0\mathbf{m}\right) & = \partial_t\left(\frac{1}{2}\mu_0\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}\right)+\mu_0\mathbf{h}\cdot\partial_t\mathbf{m} \\
& = \partial_t\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}\cdot\mathbf{h}\right)+\frac{1}{2}\mu_0\left(\mathbf{h}\cdot\partial_t\mathbf{m}-\mathbf{m}\cdot\partial_t\mathbf{h}\right) \\
& = \partial_t\left(\frac{1}{2\mu_0}\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\right)-\mathbf{m}\cdot\partial_t\mathbf{b}
\end{aligned}$$

Nel vuoto o in mezzi lineari $\mathbf{e}\cdot\partial_t\mathbf{p}-\mathbf{p}\cdot\partial_t\mathbf{e}=\mathbf{0}$, $\mathbf{h}\cdot\partial_t\mathbf{m}-\mathbf{m}\cdot\partial_t\mathbf{h}=\mathbf{0}$. Usando le seconde espressioni, si può riscrivere l'equazione dell'energia del campo elettromagnetico come

$$\begin{aligned}
\partial_t\left(\frac{1}{2}\mathbf{e}\cdot\mathbf{d}+\frac{1}{2}\mathbf{b}\cdot\mathbf{h}\right)+\nabla\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{h}) = & -\mathbf{e}\cdot\mathbf{j}+ \\
& -\frac{1}{2}\left[\mathbf{e}\cdot\partial_t\mathbf{p}-\mathbf{p}\cdot\partial_t\mathbf{e}+\mu_0\left(\mathbf{h}\cdot\partial_t\mathbf{m}-\mathbf{m}\cdot\partial_t\mathbf{h}\right)\right]
\end{aligned}$$

o, usando le definizioni di densità di energia elettromagnetica u e vettore di Poynting $\mathbf{s}$,

$$\partial_t u+\nabla\cdot\mathbf{s} = -\mathbf{e}\cdot\mathbf{j}\ -\frac{1}{2}\left[\mathbf{e}\cdot\partial_t\mathbf{p}-\mathbf{p}\cdot\partial_t\mathbf{e}+\mu_0\left(\mathbf{h}\cdot\partial_t\mathbf{m}-\mathbf{m}\cdot\partial_t\mathbf{h}\right)\right]$$

basics

23 gen 2025

0 min read

CAPITOLO 6

Equazioni dell'elettromagnetismo e relatività galileiana

basics

23 gen 2025

0 min read

CAPITOLO 7

Onde elettromagnetiche

basics

23 gen 2025

1 min read

7.1 Equazioni delle onde in elettromagnetismo

Identità vettoriale.

$$\Delta \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}$$

Dim.

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} &= \varepsilon_{ijk}\partial_j(\varepsilon_{klm}\partial_l v_m) = \\ &= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\partial_{jl} v_m = \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_{jl} v_m = \\ &= \partial_{ij} v_j - \partial_{jj} v_i = \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v} \, ,\end{aligned}$$

avendo utilizzato l'identità

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

7.1.1 Potenziali elettromagnetici

Partendo dalle definizioni dei potenziali elettromagnetici e dalle equazioni di Maxwell, con l'aiuto di alcune identità vettoriali, è possibile (**TODO** *ipotesi, elencare quelle necessarie alla derivazione*) scrivere delle equazionin delle onde per il potenziale vettore e per il potenziale scalare.

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= -\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{a} \\ \mathbf{b} &= \nabla \times \mathbf{a}\end{aligned}$$

Usando le equazioni costitutive

$$\mathbf{d} = \varepsilon\,\mathbf{e} \qquad , \qquad \mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$$

Potenziale vettore.

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{a} - \nabla \times \mathbf{b} = \\ &= -\Delta\mathbf{a} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \mu \nabla \times \mathbf{h} = \\ &= -\Delta\mathbf{a} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \mu(\partial_t \mathbf{d} + \mathbf{j}) = \\ &= -\Delta\mathbf{a} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \mu(\varepsilon\partial_t \mathbf{e} + \mathbf{j}) = \\ &= -\Delta\mathbf{a} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \mu\varepsilon(-\partial_t \nabla\varphi - \partial_{tt}\mathbf{a}) + \mu\mathbf{j} = \\ &= -\Delta\mathbf{a} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \frac{1}{c^2}\partial_t \nabla\varphi + \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{a} - \mu\mathbf{j}\end{aligned}$$

Usando la condizione di gauge di Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{c^2}\partial_t \varphi = 0\ ,$$

si ottiene un'equazione delle onde per il potenziale vettore

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a} = \mu\mathbf{j}\ .$$

Potenziale scalare.

$$\mathbf{e} = \nabla\varphi - \partial_t \mathbf{a}$$

Calcolando la derivata nel tempo della condizione di gauge di Lorentz

$$\begin{aligned}0 &= \partial_t \left(\frac{1}{c^2}\partial_t \varphi + \nabla \cdot \mathbf{a}\right) = \\ &= \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi + \nabla \cdot \partial_t \mathbf{a} = \\ &= \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi - \nabla \cdot \nabla\varphi - \nabla \cdot \mathbf{e} = \\ &= \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi - \Delta\varphi - \frac{\rho}{\varepsilon} =\end{aligned}$$

si arriva all'equazione delle onde per il potenziale scalare,

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi - \Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon}\ .$$

7.1.2 Campo elettrico e campo magnetico

Usando le definizioni dei campi fisici in termini dei potenziali elettromagnetici e la linearità (**TODO** *tutto deve essere lineare, anche le leggi costitutive*) delle operazioni, partendo dalle equazioni delle onde per i potenziali, si possono ricavare le equazioni delle onde per i campi fisici. **TODO** *Nell'ipotesi di proprietà costanti e uniformi*

Campo elettrico.

$$\begin{aligned}\Box \mathbf{e} & = \Box(-\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{a}) = \\ & = -\nabla\Box\varphi - \partial_t \Box \mathbf{a} = \\ & = -\nabla\frac{\rho}{\varepsilon} - \mu\partial_t \mathbf{j} \ .\end{aligned}$$

Campo magnetico.

$$\begin{aligned}\Box \mathbf{b} & = \Box\nabla\times\mathbf{a} = \\ & = \nabla\times\Box\mathbf{a} = \\ & = \mu\nabla\times\mathbf{j}\end{aligned}$$

basics

23 gen 2025

0 min read

7.2 Onde elettromagnetiche piane

Parte II

Elettrotecnica

basics

23 gen 2025

0 min read

CAPITOLO 8

Approssimazione circuitale

Circuiti elettrici. *Condizioni per la validità dell'approssimazione circuitale; componenti elementari; regimi di utilizzo: stazionario, armonico (alternato), transitorio;*

Circuiti elettromagnetici. *Condizioni per la validità dell'approssimazione circuitale; es. trasformatori*

Circuito elettro-magneto-meccanici. *Es. semplici circuiti; motori elettrici e generatori*

basics

23 gen 2025

0 min read

8.1 Circuiti elettrici

Se il sistema di interesse soddisfa alcune condizioni, è possibile ridurre la teoria di campo dell'elettromagnetismo a una teoria circuitale. Quando possibile, cioè quando capace di descrivere adeguatamente il comportamento del sistema di interesse, l'approccio circuitale semplifica di molto la descrizione del problema, non richiedendo la soluzione di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali da risolvere nello spazio, ma la soluzione di equazioni differenziali ordinarie nelle incognite circuitali, che si riduce a un sistema algebrico, spesso lineare, in regime stazionario.

Giustificazione dell'approccio circuitale.

Componenti elementari di un circuito elettrico.

basics

23 gen 2025

1 min read

8.1.1 Validità dell'approccio circuitale

L'approccio circuitale consente di ridurre il problema elettromagnetico, in generale un problema di campo che richiede la soluzione di PDE, a un approccio «ai morsetti» **todo**, che richiede la soluzione di ODE.

Una rivisitazione dell'"*equazione dell'energia* permette di valutare i regimi in cui è possibile usare un approccio circuitale a un sistema elettromagnetico.

In particolare, nell'equazione di bilancio dell'energia elettromagnetica

$$\frac{d}{dt}\int_V u = \oint_{\partial V} \mathbf{s}\cdot\hat{\mathbf{n}} - \int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{e}\,,$$

viene indagato il termine di flusso alla frontiera, ricordando la definizione di vettore di Poynting $\mathbf{s} := \mathbf{e}\times\mathbf{h}$, e riscrivendo i campi elettrico e magnetico in funzione dei potenziali elettromagnetici, $\mathbf{b} = \nabla\times\mathbf{a}$, $\mathbf{e} = -\nabla\varphi - \partial_t\mathbf{a}$,

$$\begin{aligned}
-\oint_{\partial V} \mathbf{s}\cdot\hat{\mathbf{n}} & = -\oint_{\partial V} (\mathbf{e}\times\mathbf{h})\cdot\hat{\mathbf{n}} = \\
& = \oint_{\partial V} (\nabla\varphi + \partial_t\mathbf{a})\times\mathbf{h}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \\
& = \dots \\
& = \underbrace{\oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\times(\varphi\mathbf{h})}_{=0 \text{ (Stokes'thm **todo** check)}} - \oint_{\partial V} \varphi\hat{\mathbf{n}}\cdot\underbrace{\nabla\times\mathbf{h}}_{\partial_t\mathbf{d}+\mathbf{j}} + \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}\cdot\partial_t\mathbf{a}\times\mathbf{h} = \\
& = -\oint_{\partial V} \varphi\mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}\cdot(\partial_t\mathbf{d} + \mathbf{h}\times\partial_t\mathbf{a})\ ,
\end{aligned}$$

e assumendo che il flusso di carica elettrica avvenga solo in corrispondenza di un numero finito di sezioni $S_k \in \partial V$ equipotenziali a potenziale $v_k = -\varphi_k$, costante sulle sezioni, e riconoscento il flusso di carica elettrica attraverso la sezione S_k come la corrente $i_k = \int_{S_k} \mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{n}}$, si può scrivere

$$-\oint_{\partial V} \mathbf{s}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \sum_k v_k\, i_k - \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}\cdot(\partial_t\mathbf{d} + \mathbf{h}\times\partial_t\mathbf{a})\ .$$

Il bilancio di energia elettromagnetica del sistema può quindi essere riscritto come

$$\frac{d}{dt}\int_V u = \sum_k v_k\, i_k - \int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{e} - \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}\cdot(\partial_t\mathbf{d} + \mathbf{h}\times\partial_t\mathbf{a})\ .$$

Nelle condizioni in cui l'ultimo termine è nullo o trascurabile (**todo** *quali? Spendere due parole sulla validità dell'approssimazione, con analisi dimensionale? Fare esempio in cui l'approssimazione non funziona*), la variazione di energia interna al sistema è dovuta alla differenza della potenza in ingresso ai morsetti, e la dissipazione all'interno del volume (ad esempio dovuta alla conduzione non ideale in conduttori con resistività finita),

$$\dot{E}^{em} = P^{ext,vi} - \dot{D}\,,$$

con $\dot{D} \ge 0$ per il secondo principio della termodinamica **todo** *aggiungere riferimento, e discussione.*

basics

23 gen 2025

1 min read

8.1.2 Induzione elettromagnetica nell'approssimazione circuitale

E" possibile applicare l'approssimazione circuitale anche in presenza di regioni in cui non è possibile trascurare il termine $\partial_t \mathbf{b}$, come ad esempio circuiti elettromagnetici che coinvolgono trasformatori e/o motori o generatori elettrici.

In queste situazioni, se è possibile identificare una regione V_0 dello spazio connessa nella quale il termine $\partial_t \mathbf{b} = \mathbf{0}$, e quindi $\nabla \times \mathbf{e} = \mathbf{0}$, in V_0 è possibile definire il campo elettrico in termini di un potenziale φ,

$$\mathbf{e} = -\nabla \varphi \qquad , \qquad \mathbf{r} \in V_0 \ .$$

E" possibile calcolare le differenze di potenziale ai morsetti di un sistema in cui $\delta_t \mathbf{b} \neq 0$, racchiuso nel volume V_k, con la legge di Faraday,

$$\oint_{\ell_k} \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{t}} = -\frac{d}{dt} \int_{S_k} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} \ ,$$

dove il percorso chiuso $\ell_k = \ell_k^{cond} \cup \ell_k^{mors}$ descrive il conduttore in V_k chiuso dalla linea geometrica tra i morsetti. Se si può trascurare la resistività del conduttore in V_k, $\int_{\ell_k^{cond}} \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0$, la differenza di tensione ai morsetti vale

$$\Delta v_k = \int_{\ell_k^{mors}} \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{t}} = -\frac{d}{dt} \int_{S_k} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

basics

23 gen 2025

1 min read

8.1.3 Componenti elementari dei circuiti elettrici

Resistore ohmico

Un resistore di Ohm risulta dall'approssimazione circuitale di un materiale con equazione costitutiva lineare

$$\mathbf{e} = \rho_R \, \mathbf{j} \ ,$$

tra il campo elettrico **e** e la densità di corrente **j**, tramite la costante di proporzionalità ρ_R, la **resistività** del materiale. La corrente elettrica attraverso una sezione del componente è definita come il flusso di carica attraverso una sua sezione

$$i = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{t}} \simeq j \, A \ ,$$

Nell'ipotesi che il vettore densità di corrente si allineato con l'asse del componente e uniforme sulla sezione A, «piccola». Se il materiale non è in grado di accumulare carica, il bilancio di carica elettrica si traduce nella continuità della corrente elettrica attraverso le sezioni del conduttore.

Utilizzando l'equazione costitutiva su un elemento di lunghezza elementare $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{t}} \, d\ell$, e assumendo che il campo elettrico sia allineato con l'asse del componente, $\mathbf{e} = e\hat{\mathbf{t}}$ si può scrivere il lavoro elementare per unità di carica come

$$\delta v = \mathbf{e} \cdot d\mathbf{r} = e \, d\ell = \rho_R \, j \, d\ell = \frac{\rho_R \, d\ell}{A} i \ .$$

Da questa ultima equazione seguono le due leggi di Ohm, per resistori lineari.

Prima legge di Ohm. La differenza di potenziale tra due sezioni di un resistore lineare è proporzionale alla corrente che passa attraverso di esso,

$$\delta v = dR \, i \ .$$

Seconda legge di Ohm. La costante di proporzionalità che lega la differenza di potenziale e la corrente all'interno di un resistore ohmico, la **resistenza** del resistore, è proporzionale alla resistività e alla lunghezza del resistore, e inversamente proporzionale alla sua sezione,

$$dR = \frac{\rho_R \, d\ell}{A} \ .$$

Se le proprietà sono uniformi nel resistore, si possono integrare le relazioni elementari per ottenere la relazione tra grandezze finite,

$$\Delta V = R \, i$$

$$R = \frac{\rho_R \, \ell}{A}$$

todo (perché si può usare il potenziale? Nelle mie note avevo usato il simbolo v^*, come se fosse una definizione leggermente diversa per incorporare movimento e instazionarietà, che si riduce a v nel caso stazionario).

Condensatore.

Induttore.

Generatore di tensione.

Generatore di corrente.

basics

23 gen 2025

0 min read

8.1.4 Regimi di funzionamento in circuiti elettrici

basics

23 gen 2025

1 min read

8.2 Circuiti elettromagnetici

Sotto opportune ipotesi è possibile usare un modello circuitale anche per sistemi elettromagnetici, come ad esempio i trasformatori, o i motori elettrici.

- legge di Gauss per il campo magnetico

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$$

- legge di Ampére-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{h} - \partial_t \mathbf{d} = \mathbf{j}$$

Si aggiungono le seguenti ipotesi:

- materiali lineari non-dissipativi e non-dispersivi $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$ **todo** discutere questa ipotesi, insieme a isteresi materiali, cicli di magnetizzazione,….
- variazioni del campo $\mathbf{d}$ nel tempo trascurabili, $\partial_t \mathbf{d} = \mathbf{0}$.

La legge di Gauss del campo magnetico in forma integrale permette di scrivere la **legge ai nodi** del flusso del campo magnetico per i circuiti magnetici,

$$0 = \oint_{\partial V} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sum_k \phi_k \ .$$

La legge di Ampére-Maxwell in forma integrale considerando:

- un percorso incatenato con il solo induttore

$$\int_{\ell_{ind}} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \int_{\ell_{12}} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \oint_{\ell_1} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_{S^{ind}} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} = Ni =: m$$

- un percorso incatenato con il traferro, aggirando l'induttore

$$0 = \int_{\ell_{traf}} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \int_{\ell_{21}} \hat{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \sum_k h_k \ell_k + \int_{\ell_{21}} \hat{h} \cdot \hat{\mathbf{t}}$$

e sommando le due equazioni, riconoscendo che i due integrali di linea sullo stesso percorsoin versi opposti si annullano, si ottiene la **legge alle maglie** per i circuiti magnetici

$$\begin{aligned} m & = \int_{\ell_{ind}} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \int_{\ell_{traf}} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \\ & \approx \sum_{k \in \ell} h_k \, \ell_k = \sum_{k \in \ell} \frac{b_k}{\mu_k} \, \ell_k = \sum_{k \in \ell} \frac{\ell_k}{\mu_k \, A_k} \, \phi_k \ . \end{aligned}$$

Le leggi di Kirchhoff per i circuiti magnetici sono quindi

$$\begin{cases} \sum_{k \in N_j} \phi_k = 0 \\ \\ m_{\ell_i} = \sum_{k \in \ell_i} \theta_k \phi_k \ , \end{cases}$$

avendo introdotto la riluttanza $\theta_k = \frac{\ell_k}{\mu_k \, A_k}$, l'inverso della permeanza $\Lambda_k = \theta_k^{-1}$.

basics

23 gen 2025

1 min read

8.2.1 Trasformatore

- flusso del campo magnetico, nell'ipotesi di campo uniforme, o in termini del campo medio

$$\phi = b \, A$$

- flusso del campo magnetico concatenato a N avvolgimenti

$$\psi = N \, \phi$$

- relazione tra tensione ai morsetti dell'induttore e flusso concatenato, applicando la *legge di Faraday solo in parte irrotazionali*

$$v = \dot{\psi}$$

Trasformatore ideale

In assenza di flussi dispersi e riluttanza nel traferro, la legge alle maglie nel traferro implica

$$0 = m_1 + m_2 = N_1\, i_1 + N_2\, i_2$$

Il flusso del campo magnetico può essere scritto in funzione del flusso concatenato agli avvolgimenti,

$$\phi = \frac{\psi_1}{N_1} = \frac{\psi_2}{N_2}$$

La derivata nel tempo di questa relazione, con numero di avvolgimenti costanti nel tempo, implica

$$\frac{v_2}{N_2} = \frac{v_1}{N_1}\ .$$

Trasformatore con flussi dispersi

$$\begin{cases} \phi_1 - \phi_{1,d} = \phi \\ \phi_2 - \phi_{2,d} = \phi \\ m_1 = \theta_{1,d}\phi_{1,d} \\ m_2 = \theta_{2,d}\phi_{2,d} \\ m_1 + m_2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \qquad 0 = m_1 + m_2 = N_1\, i_1 + N_2\, i_2$$

$$\begin{aligned} 0 &= \phi_2 - \phi_1 - \phi_{2,d} + \phi_{1,d} \\ &= \phi_2 - \phi_1 - \frac{m_2}{\theta_{2,d}} + \frac{m_1}{\theta_{1,d}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \frac{\psi_2}{N_2} - \frac{m_2}{\theta_{2,d}} = \frac{\psi_1}{N_1} - \frac{m_1}{\theta_{1,d}}\ .$$

$$\rightarrow \qquad \frac{1}{N_2}\left(v_2 - \frac{N_2^2}{\theta_{2,d}}\frac{di_2}{dt} \right) = \frac{1}{N_1}\left(v_1 - \frac{N_1^2}{\theta_{1,d}}\frac{di_1}{dt} \right)\ .$$

Trasformatore con flussi dispersi e riluttanza θ_{Fe} nel traferro

$$\begin{cases} \phi_1 - \phi_{1,d} = \phi \\ \phi_2 - \phi_{2,d} = \phi \\ m_1 = \theta_{1,d}\phi_{1,d} \\ m_2 = \theta_{2,d}\phi_{2,d} \\ m_1 + m_2 = \theta_{Fe}\,\phi \end{cases}$$

todo finire e controllare i conti; disegnare circuito equivalente

basics

23 gen 2025

2 min read

8.3 Circuiti elettromeccanici

Alcuni sistemi di interesse e di enorme diffusione nella società moderna sfruttano le interazioni tra componenti fenomeni elettromagnetici e meccanici: un esempio fondamentale sono le macchine elettriche, alcune delle quali possono operare sia come motore (con la potenza fornita dal sistema elettrico e convertita in potenza meccanica) sia come generatore di energia elettrica (convertendo potenza meccanica in potenza elettrica).

In un sistema di induttori con mutua influenza, la differenza di tensione ai capi dell'induttore «potenziato» i è

$$v_i = \dot{\psi}_i = \frac{d}{dt}\left(N_i\,\phi_i\right)\ .$$

Il flusso concatenato dipende dall'effetto di tutti gli induttori del sistema (e del campo magnetico generato da eventuali cause esterne al sistema),

$$\phi_i = \sum_k \phi_{ik} = \sum_k \frac{1}{\theta_{ik}}\,m_k\ ,$$

avendo indicato con θ_{ik} la riluttanza del circuito tra l'induttore potenziante k e l'induttore potenziato i. Usando l'espressione della forza magneto-motrice $m_k = N_k\,i_k$, si può riscrivere l'espressione della differenza di tensione

$$v_i = \sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{N_i\,N_k}{\theta_{ik}} i_k\right) = \sum_k \frac{d}{dt}\left(L_{ik}\,i_k\right)\ .$$

In genereale, in circuiti elettromeccanici le riluttanze non sono dei parametri costanti del sistema ma dipendono dallo stato «meccanico» del sistema, descritto qui dalle variabili **x**,

$$v_i = \sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{N_i\,N_k}{\theta_{ik}(\mathbf{x})} i_k\right) = \sum_k \frac{d}{dt}\left(L_{ik}(\mathbf{x})\,i_k\right)\ .$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\Big(\mathbf{L}(\mathbf{x}(t))\,\mathbf{i}(t)\Big)\ .$$

La matrice di induttanza **L** è simmetrica **todo** *Dimostrazione*

8.3.1 Sistemi elettromeccanici conservativi

Le equazioni che governano il sistema elettromeccanico, senza condensatori, in generale possono essere scritte come

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}^{em} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{L}\mathbf{i}\right) + \mathbf{R}\mathbf{i} = \mathbf{e} \end{cases}$$

In termini di energia,

$$0 = \dot{\mathbf{x}}^T\left[\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f}^{em}\right] + \mathbf{i}^T\left[\frac{d}{dt}\left(\mathbf{L}\mathbf{i}\right) + \mathbf{R}\mathbf{i} - \mathbf{e}\right]$$

Nel caso di matrici di massa, smorzamento e rigidzza costanti, e usando la derivata del prodotto per ottenere un termine di derivata dell'energia degli induttori sfruttando la simmetria di **L**,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\mathbf{i}^T\mathbf{L}\mathbf{i}\right] &= \mathbf{i}^T\frac{d}{dt}\left(\mathbf{L}\,\mathbf{i}\right) + \frac{1}{2}\mathbf{i}^T\frac{d\mathbf{L}}{dt}\mathbf{i} = \\ &= \mathbf{i}^T\frac{d}{dt}\left(\mathbf{L}\,\mathbf{i}\right) + \sum_a \frac{1}{2}\mathbf{i}^T\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial x_a}\mathbf{i}\,\dot{x}_a = \\ &= \mathbf{i}^T\frac{d}{dt}\left(\mathbf{L}\,\mathbf{i}\right) + \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{i}^T\mathbf{L}\mathbf{i}\right)\dot{\mathbf{x}}\ . \end{aligned} \tag{8.1}$$

si può scrivere un'equazione di bilancio dell'energia meccanica macroscopica, $E^{mec,int}$

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{K}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{i}^T\mathbf{L}\mathbf{i}\right] - \dot{\mathbf{x}}^T\left(\mathbf{f}^{em} - \nabla E^{ind}(\mathbf{x},\mathbf{i})\right) + \\
& - \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{f}^{ext} - \mathbf{i}^T\mathbf{e} + \\
& + \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{i}^T\mathbf{R}\mathbf{i} \, .
\end{aligned}$$

Nell'ipotesi che il processo sia conservativo, si ricava la forma delle forze dovute ai fenomeni elettromagnetici,

$$\mathbf{f}^{em} = \nabla_{\mathbf{x}} E^{ind}(\mathbf{x},\mathbf{i}) \, . \tag{8.2}$$

8.3.2 Equazioni di governo

Usando l'espressione (8.2) delle azioni meccaniche dovute agli effetti elettromagnetici, del sistema sono

$$\begin{cases}
\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} - \nabla_{\mathbf{x}} E^{ind}(\mathbf{x},\mathbf{i}) = \mathbf{f}^{ext} \\
\frac{d}{dt}\left(\mathbf{L}(\mathbf{x})\mathbf{i}\right) + \mathbf{R}\mathbf{i} = \mathbf{e}
\end{cases}$$

o nel caso generale

$$\begin{cases}
\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}} E^{ind}(\mathbf{x},\mathbf{i}) = \mathbf{f}^{ext} \\
\frac{d}{dt}\left(\mathbf{L}(\mathbf{x})\mathbf{i}\right) + \mathbf{R}\mathbf{i} = \mathbf{e}
\end{cases}$$

8.3.3 Bilancio energetico

Energia meccanica macroscopica

Usando l'espressione (8.2) delle azioni meccaniche dovute ai fenomeni elettromagnetici, si può riscrivere la relazione (8.1), come un bilancio di energia meccanica macroscopica del sistema,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{K}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{i}^T\mathbf{L}\mathbf{i}\right] = \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{f}^{ext} + \mathbf{i}^T\mathbf{e} - \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{i}^T\mathbf{R}\mathbf{i} \, ,$$

e quindi

$$\dot{E}^{mec} = P^{ext} - \dot{D} \, .$$

Energia cinetica

L'energia meccanica macroscopica può essere scritta come la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale interna del sistema, $E^{mec} = K + V^{int}$. La derivata nel tempo dell'energia potenziale delle azioni interne è l'opposto della potenza delle azioni interne conservative, $P^{int,c} = -\dot{V}^{int}$; la dissipazione è l'opposto della potenza delle azioni interne non-conservative, $P^{int,nc} = -\dot{D}$. La potenza complessiva delle azioni interne può quindi essere scritta come

$$P^{int} = P^{int,c} + P^{int,nc} = -\dot{V}^{int} - \dot{D} \, ,$$

$$\dot{K} = \dot{E}^{mec} - \dot{V}^{int} = P^{ext} \underbrace{- \dot{D} - \dot{V}^{int}}_{=P^{int}}$$

Energia totale

Il primo principio della termodinamica fornisce l'equazione di bilancio dell'energia totale di un sistema chiuso,

$$\dot{E}^{tot} = P^{ext} + \dot{Q}^{ext} \ .$$

Energia interna

L'energia interna di un sistema è definita come la differenza dell'energia totale e dell'energia cinetica macroscopica, $E := E^{tot} - K$. L'equazione di bilancio dell'energia interna di un sistema chiuso è

$$\dot{E} = Q^{ext} - P^{int} \ .$$

Energia interna termica (microscopica)

Se si definisce l'energia interna termica, corrispondente all'energia cinetica associata alle dinamiche microscopiche, come differenza tra energia interna e energia potenziale interna, o differenza di energia totale ed energia meccanica macrsocopica,

$$\begin{aligned} E^{th} & = E - V^{int} = \\ & = E^{tot} - E^{mec} \ , \end{aligned}$$

l'equazione di bilancio dell'energia interna termica è

$$\dot{E}^{th} = \dot{Q}^{ext} + \dot{D} \ .$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \dot{E}^{th} = \dot{E} - V^{int} & = \dot{Q}^{ext} - P^{int} - V^{int} = \\ & = \dot{Q}^{ext} + \dot{D} + \dot{V}^{int} - \dot{V}^{int} = \\ & = \dot{Q}^{ext} + \dot{D} \ . \end{aligned}$$

Con condensatori. todo

Equazioni

- **Leggi ai nodi.**

$$0 = \sum_{k \in B_j} \alpha_{jk} \, i_{jk}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

- **Differenza di potenziale nodi-lati.**

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v}_n = \mathbf{v}$$

- **Nodo a terra.**

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_0 \ .$$

- **Equazioni costitutive.**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \mathbf{v}_R - \mathbf{R}\mathbf{i}_R && \text{resistenze} \\
\mathbf{0} &= \mathbf{v}_L - \frac{d}{dt}\left(\mathbf{L}\mathbf{i}_L\right) && \text{induttanze} \\
\mathbf{0} &= \frac{d}{dt}\left(C\mathbf{v}_C\right) - \mathbf{i}_C && \text{condensatori}
\end{aligned}
$$

Parte III

Metodi numerici

basics

23 gen 2025

1 min read

CAPITOLO 9

Green's function method

9.1 Poisson equation

General Poisson's problem

$$\begin{cases} -\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \mathbf{f}(\mathbf{r},t) \\ + \text{b.c.} \end{cases}$$

with common boundary conditions

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{on } S_D \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{h} & \text{on } S_N \end{cases}$$

over Dirichlet and Neumann regions of the boundary.

Poisson's problem for Green's function, in infinite domain

$$-\nabla^2_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$$

Green's function method

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{r}_0,t) u_i(\mathbf{r}_0,t) & = \int_{\mathbf{r}\in\Omega} u_i(\mathbf{r},t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \\
& = -\int_{\mathbf{r}\in\Omega} u_i(\mathbf{r},t)\nabla^2_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \\
& = -\int_{\mathbf{r}\in\Omega} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (u_i \nabla_{\mathbf{r}} G - G \nabla_{\mathbf{r}} u_i) - \int_{\mathbf{r}\in\Omega} G \nabla^2 u_i = \\
& = -\oint_{\mathbf{r}\in\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot (u_i \nabla_{\mathbf{r}} G - G \nabla_{\mathbf{r}} u_i) + \int_{\mathbf{r}\in\Omega} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) f_i(\mathbf{r},t).
\end{aligned}$$

An integro-differential boundary problem can be written using boundary conditions. As an example, using Dirichlet and Neumann boundary conditions, the integro-differential problem reads

$$\begin{aligned}E(\mathbf{r}_0, t)\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) + \int_{\mathbf{r}\in S_N} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\, \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}\in S_D} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\, \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \\ = -\int_{\mathbf{r}\in S_D} \mathbf{g}(\mathbf{r}, t)\, \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r}\in S_N} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\, \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) + \int_{\mathbf{r}\in \Omega} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\, \mathbf{f}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}$$

Green's function of the Poisson-Laplace equation reads

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \ .$$

Green's function of the Laplace equation

$$-\nabla^2 G = 0 \qquad \text{for } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$$

Solutions with spherical symmetry,

$$0 = \nabla^2 G = \frac{1}{r^2}\left(r^2 G'\right)' \quad \rightarrow \quad G'(r) = \frac{A}{r^2} \quad \rightarrow \quad G(r) = -\frac{A}{r} + B$$

Choosing $B = 0$ s.t. $G(r) \to 0$ as $r \to \infty$, and integrating over a sphere centered in $r = 0$ to get $A = -\frac{1}{4\pi}$,

$$1 = \int_V \delta(r) = -\int_V \nabla^2 G = -\oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla G = -\oint_{\partial V} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \frac{A}{r^2} = -4\pi\, A$$

9.2 Helmholtz equation

todo from Fourier to Laplace trasnform in the first lines of this section

A Helmholtz's equation can be thouought as the time Fourier transform of a wave equation,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \\ + \text{b.c.} \\ + \text{i.c.}\ , \end{cases}$$

Fourier transform in time of field $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ reads

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{F}\{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\} = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t}\, d\omega$$

and, if $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ is compact in time, Fourier transform of its time partial derivatives read

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)\} = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t}\, d\omega = \\ = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega t}\Big|_{t=-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{t=-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega t}\, d\omega = \\ = i\omega \mathcal{F}\{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\}\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\{\partial_t^n \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\} = (i\omega)^n \tilde{\mathbf{u}}\ .$$

The differential problem in the transformed domain thus reads

$$-\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\mathbf{u}} - \nabla^2\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}}$$

Green's function of Helmholtz'e equation reads

$$G(\mathbf{r}, s) = \alpha^+ \frac{e^{\frac{s|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \alpha^- \frac{e^{-\frac{s|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$$

with $\alpha^+ + \alpha^- = \frac{1}{4\pi}$.

Being the Laplace transform,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{t=0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt\ ,$$

the Laplace transform of a causal function with time delay $\tau \geq 0$ reads

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = \int_{t=0^-}^{+\infty} f(t-\tau) e^{-st} dt = \int_{z=-\tau}^{+\infty} f(z) e^{-s(z+\tau)}\, dz = e^{-s\tau} \int_{z=0}^{+\infty} f(z) e^{-sz}\, dz = e^{-s\tau}\, \mathcal{L}\{f(t)\}$$

having used causality $f(t) = 0$ for $t < 0$. Laplace transform of Dirac's delta $\delta(t)$ reads

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{t=0^-}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1\ ,$$

so that $e^{-s\tau} = e^{-s\tau}\, 1 = \mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\}$.

Thus, Green's function for the wave equation reads

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \alpha^+ \frac{\delta\left(t - t_0 + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \alpha^- \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$$

If $t \geq t_0$, and $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0)$ connects the past t_0 with the future t, the first term is not causal, and thus $\alpha^+ = 0$ and

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\ .$$

Green's function of Helmholtz's equation

$$\frac{s^2}{c^2} G - \nabla^2 G = \delta(r)$$

$$G(r) = \frac{\alpha e^{kr} + \beta e^{-kr}}{r}$$

Proof:

- Gradient

$$\nabla G(r) = \hat{\mathbf{r}} \partial_r G = \hat{\mathbf{r}} \frac{\alpha(kr-1)e^{kr} + \beta(-kr-1)e^{-kr}}{r^2}$$

- Laplacian

$$\begin{aligned}\nabla^2 G(r) &= \frac{1}{r^2}\left(r^2 G'(r)\right)' = \\ &= \frac{1}{r^2}\left(\alpha(kr-1)e^{kr} + \beta(-kr-1)e^{-kr}\right)' = \\ &= \frac{1}{r^2}\left(\alpha k e^{kr} + \alpha k^2 r e^{kr} - \alpha k e^{kr} - \beta k e^{-kr} + \beta k^2 r e^{-kr} + \beta k e^{-kr}\right) = \\ &= \frac{1}{r}\left(\alpha e^{kr} + \beta e^{-kr}\right) k^2 = k^2 G(r)\ .\end{aligned}$$

  and thus $k^2 G(r) - \nabla^2 G = 0$, for $r \neq 0$;

- Unity

$$1 = \int_V \delta(r) = \int_V \left(k^2 G - \nabla^2 G\right) = \int_V k^2 G - \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla G$$

  the second term is the sum of two contributions of the form

$$\oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla G^{\pm} = \oint_{\partial V} \frac{\alpha^{\pm}(\pm kr - 1)e^{\pm kr}}{r^2} = 4\pi\alpha^{\pm}(\pm kr - 1)e^{\pm kr}$$

  the first term is the sum of two contributions of the form

$$\begin{aligned}k^2 \int_V G(r) = k^2 \int_V \frac{\alpha^{\pm} e^{\pm kr}}{r} &= \\ &= k^2 \alpha^{\pm} \int_{R=0}^{r} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{e^{\pm kR}}{R} R^2 \sin\phi\, dR\, d\phi\, d\theta = \\ &= k^2 \alpha^{\pm}\, 4\pi \int_{R=0}^{r} R\, e^{\pm kR}\, dR\ .\end{aligned}$$

  the last integral can be evaluated with integration by parts

$$\begin{aligned}\int_{R=0}^{r} R\, e^{\pm kR}\, dR &= \left[\frac{1}{\pm k} e^{\pm kR} R\right]\Big|_{R=0}^{r} \mp \frac{1}{k}\int_{R=0}^{r} e^{\pm kR}\, dR = \\ &= \frac{1}{\pm k} e^{\pm kr} r - \frac{1}{k^2} e^{\pm kR} + \frac{1}{k^2} =\end{aligned}$$

  Thus summing everything together,

$$\begin{aligned}1 &= \alpha^{+}\left[4\pi k^2 \left(\frac{r}{k} e^{kr} - \frac{1}{k^2} e^{kr} + \frac{1}{k^2}\right) - 4\pi\,(kr-1)\, e^{kr}\right] + \alpha^{-}\,[\ldots] = \\ &= 4\pi\left(\alpha^{+} + \alpha^{-}\right)\ .\end{aligned}$$

9.3 Wave equation

Wave equation general problem

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{u}(\mathbf{r},t) - \nabla^2\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \mathbf{f}(\mathbf{r},t) \\ + \text{b.c.} \\ + \text{i.c.} \end{cases}$$

Green's problem of the wave equation

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt} G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}_0,t_0) - \nabla^2_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}_0,t_0) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\delta(t-t_0)$$

Integration by parts

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{r}_\alpha, t_\alpha)\mathbf{u}(\mathbf{r}_\alpha, t_\alpha) & = \int_{t\in T}\int_{\mathbf{r}\in V} \delta(t-t_\alpha)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha)\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \\
& = \int_{t\in T}\int_{\mathbf{r}\in V} \left\{ \frac{1}{c^2}\partial_{tt} G - \nabla^2_{\mathbf{r}} G \right\} \mathbf{u} = \\
& = \int_{t\in T}\int_{\mathbf{r}\in V} \left\{ \frac{1}{c^2}\left[\partial_t \left(\mathbf{u}\partial_t G - G \partial_t \mathbf{u} \right) + G\partial_{tt}\mathbf{u} \right] - \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\nabla_{\mathbf{r}} G \, \mathbf{u} - G \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{u} \right) - G \, \nabla^2_{\mathbf{r}} \mathbf{u} \right\} = \\
& = \int_{\mathbf{r}\in V} \frac{1}{c^2}\left[\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\partial_t G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}_\alpha,t_\alpha) - G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}_\alpha,t_\alpha)\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{r},t) \right] \Big|_{t_0}^{t_1} + \\
& \quad + \int_{t\in T}\oint_{\mathbf{r}\in\partial V} \left\{ -\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r},t)\cdot\nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}_\alpha,t_\alpha)\, \mathbf{u}(\mathbf{r},t) + G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}_\alpha,t_\alpha)\, \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r},t)\cdot\nabla_{\mathbf{r}}\mathbf{u}(\mathbf{r},t) \right\} + \\
& \quad + \int_{t\in T}\int_{\mathbf{r}\in V} G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}_\alpha,t_\alpha) \underbrace{\left\{ \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{u}(\mathbf{r},t) - \nabla^2_{\mathbf{r}}\mathbf{u}(\mathbf{r},t) \right\}}_{=\mathbf{f}(\mathbf{r},t)}
\end{aligned}$$

$$\int_{t\in T}\int_{\mathbf{r}\in V} \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left(t - t_\alpha + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha|}{c} \right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha|} \mathbf{f}(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbf{r}\in V\cap B_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha|\le c(t_\alpha - t)}} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha|} \mathbf{f}\left(\mathbf{r}, t_\alpha - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha|}{c} \right)$$

basics

23 gen 2025

1 min read

CAPITOLO 10

Metodi numerici

10.1 Elettrostatica

I problemi dell'elettrostatica sono governate dalle due equazioni di Maxwell per i campi $\mathbf{e}$, $\mathbf{d}$,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{d} = \rho \\ \\ \nabla \times \mathbf{e} = \mathbf{0} \ , \end{cases}$$

dotate delle opportune condizioni al contorno ed equazioni costitutive. Per un materiale lineare isotropo, ad esempio, $\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e}$. La condizione di irrotazionalità del campo elettrico, permette di scriverlo come gradiente di un potenziale scalare, $\mathbf{e} = -\nabla v$, e di ottenere l'equazione di Poisson,

$$-\nabla \cdot (\varepsilon \nabla v) = \rho \ .$$

10.1.1 Sorgente

$$\mathbf{e}(r) = \frac{q_i}{4 \pi \varepsilon} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}} v(\mathbf{r})$$

$$\varepsilon \, v(\mathbf{r}) = \frac{q_i}{4 \pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

10.1.2 Dipolo

Un dipolo è definito come due cariche di intensità uguale e contraria $-q_2 = q_1 = q > 0$, nei punti dello spazio P_1, $P_2 = P_1 + \mathbf{l}$, nelle condizioni limite $|\mathbf{l}| \to 0$, $q \to \infty$, in modo tale da avere $q|\mathbf{l}|$ finito, $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$.

Il potenziale del dipolo è dato dal principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti,

$$\begin{aligned}
\varepsilon\, v(\mathbf{r}) &= -\frac{q}{4\pi}\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0+\frac{1}{2}\right|} + \frac{q}{4\pi}\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0-\frac{1}{2}\right|} = \\
&= \dots \\
&= \frac{q}{4\pi}\left(-\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\cdot\frac{\mathbf{l}}{2} + \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\cdot\frac{\mathbf{l}}{2} + o(|\mathbf{l}|)\right) = \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\cdot\mathbf{P}\,,
\end{aligned}$$

avendo definito il vettore momento dipolo $\mathbf{P} = q\mathbf{l}$.

Polariazazione - Potenziale generato da una distribuzione di dipoli.

$$d\mathbf{P} = \mathbf{p}\,\Delta V$$

$$\varepsilon v_P(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0\in V_0} \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\cdot\mathbf{p}(\mathbf{r}_0)\,dV_0$$

$$\begin{aligned}
\partial_i|\mathbf{r}|^2 &= 2x_i \\
&= 2|\mathbf{r}|\partial_i|\mathbf{r}|
\end{aligned} \qquad \to \qquad \partial_i|\mathbf{r}| = \frac{x_i}{|\mathbf{r}|}$$

$$\partial_i|\mathbf{r}|^n = n|\mathbf{r}|^{n-1}\,\partial_i|\mathbf{r}| = n x_i|\mathbf{r}|^{n-2}$$

$$\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} = \nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\cdot\mathbf{p}(\mathbf{r}_0) &= \nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\cdot\mathbf{p}(\mathbf{r}_0) = \\
&= \nabla_{\mathbf{r}_0}\cdot\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\mathbf{p}(\mathbf{r}_0)\right) - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\nabla_{\mathbf{r}_0}\cdot\mathbf{p}(\mathbf{r}_0) =
\end{aligned}$$

e quindi

$$4\,\pi\,\varepsilon v_P(\mathbf{r}) = \oint_{\mathbf{r}_0\in\partial V_0}\frac{\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{p}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \oint_{\mathbf{r}_0\in V_0}\frac{\nabla_{\mathbf{r}_0}\cdot\mathbf{p}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$$

I due contributi hanno la forma di sorgenti, essendo termini proporzionali a $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$. Il potenziale dovuto alla densità di volume di dipoli equivale alla somma dei due contributi delle cariche di:

- polarizzazione di superficie $\sigma_p = \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{p}$
- polarizzazione di volume $\rho_p = -\nabla\cdot\mathbf{p}$

Oss. Se la polarizzazione è uniforme nel volume, il contributo della polarizzazione nel volume si annulla e rimane solo il contributo della polarizzazione sul contorno del volume.

Oss. Legge di Gauss per il campo elettrico,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{e} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho = \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_l + \rho_p\right) = \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_l - \nabla \cdot \mathbf{p}\right) \\
\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p}) &= \rho_l \\
\nabla \cdot \mathbf{d} &= \rho_l
\end{aligned}$$

Parte IV

Appendici

basics

23 gen 2025

0 min read

CAPITOLO 11

Ottica