
electromagnetism

basics

04 feb 2025

I	Elettromagnetismo	3
1	Brief history of Electromagnetism	5
2	Principles of Classical Electromagnetism	7
2.1	Principi in forma differenziale	7
2.2	Principi in forma integrale: equazioni dell'elettromagnetismo e relatività galileiana	8
3	Potenziali elettromagnetici	11
3.1	Potenziale vettore e potenziale scalare	11
3.2	Condizioni di gauge	12
4	Elettromagnetismo nella materia	13
4.1	Vuoto	13
4.2	Mezzi continui	13
4.3	Polarizzazione	14
4.4	Magnetizzazione	15
4.5	Esempi	18
4.6	Jump conditions	18
5	Electrostatics	21
5.1	Zero electric field inside a conductor	21
6	Energy balance in electromagnetism	23
6.1	Force, moment, and power on elementary components	23
6.2	Energy balance	25
7	Energy and momentum balance in linear, local, isotropic, non-dispersive media	29
7.1	Linear media - energy	30
7.2	Linear media - momentum	30
8	Equazioni dell'elettromagnetismo e relatività galileiana	33
9	Onde elettromagnetiche	35
9.1	Equazioni delle onde in elettromagnetismo	35
9.2	Onde elettromagnetiche piane	37

II	Elettrotecnica	43
10	Approssimazione circuitale	47
10.1	Circuiti elettrici	47
10.2	Circuiti elettromagnetici	50
10.3	Circuiti elettromeccanici	53
III	Metodi numerici	59
11	Green's function method	63
11.1	Poisson equation	63
11.2	Helmholtz equation	64
11.3	Wave equation	66
12	Metodi numerici	69
12.1	Elettrostatica	69
IV	Appendici	73
13	Ottica	77
	Proof Index	79

This material is part of the [basics-books project](#). It is also available as a .pdf document.

Introduzione.

L'elettromagnetismo si occupa dello studio dei fenomeni elettromagnetici prodotti da cariche e correnti elettriche o dalla struttura microscopica della materia (magnetismo naturale)

Breve storia. *Prime esperienze: cariche di 2 tipi diversi e legge di Coulomb;*

Argomenti.

Prime esperienze **TODO** *Prime esperienze; elettromagnetismo come teoria dei campi* **TODO** *aggiungere una sezione su first-experiments-revisited, dopo la presentazione dei principi dell'elettromagnetismo*

todo Aggiungere sezione su strumenti matematici necessari, per la formulazione di una teoria dei campi

Principi dell'elettromagnetismo **TODO** *Trattare prima regime stazionario - elettricità e magnetismo - e poi regime non-stazionario - elettromagnetismo**?** **TODO** *Principi. Conservazione della carica, leggi di Maxwell, legge di Lorentz* **TODO** *Principi in forma integrale; principi in forma differenziale - le leggi di Maxwell*

Energia

Onde elettromagnetiche

Approssimazione circuitale **TODO** *Circuiti elettrici; circuiti elettromagnetici; sistemi elettro-meccanici. Regimi: stazionario, non-stazionario: regime transitorio e armonico*

Extra.

Ottica

Elettromagnetismo e relatività **todo** *Relatività a per $v \ll c$; crisi della relatività galileiana*

Parte I

Elettromagnetismo

CAPITOLO 1

Brief history of Electromagnetism

Principles of Classical Electromagnetism

I progressi nello studio dei fenomeni elettromagnetici nel XIX secolo, permisero a James Clerk Maxwell di formulare quelle che oggi sono note con il nome di *equazioni di Maxwell* e possono essere considerate la prima formulazione consistente dei principi dell'elettromagnetismo classico, insieme alla legge di bilancio della carica e all'espressione della forza di Lorentz su una carica elettrica immersa in un campo elettromagnetico.

I principi in forma differenziale possono essere ricavati dai principi in forma integrale, più generici, se i campi soddisfano le necessarie condizioni di regolarità minima, che qualitativamente si possono enunciare come «tutte le operazioni svolte devono avere senso».

2.1 Principi in forma differenziale

Conservazione della carica elettrica.

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 .$$

Equazioni di Maxwell.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{d} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{e} + \partial_t \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{h} - \partial_t \mathbf{d} = \mathbf{j} \end{cases}$$

con la necessità di definire delle equazioni costitutive $\mathbf{d}(\mathbf{e}, \mathbf{b})$, $\mathbf{h}(\mathbf{e}, \mathbf{b})$.

Forza di Lorentz. La forza per unità di volume agente sulla carica elettrica presente in un punto \mathbf{r} nello spazio è

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \\ &= \rho(\mathbf{r}, t) [\mathbf{e}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)] = \\ &= \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}^*(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

avendo definito \mathbf{e}^* il campo elettrico **visto dalla carica in movimento**.*

2.2 Principi in forma integrale: equazioni dell'elettromagnetismo e relatività galileiana

2.2.1 Forma integrale su volumi di controllo

La forma integrale dei principi dell'elettromagnetismo per volumi V e superfici S fissi nello spazio viene ricavata integrando le equazioni differenziali sui domini e usando il teorema della divergenza per ottenere termini di flusso, e il teorema del rotore per ottenere termini di circuitazione.

Continuità della carica elettrica.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho + \oint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$$

Legge di Gauss per il campo $\mathbf{d}(\mathbf{r}, t)$.

$$\oint_{\partial V} \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_V \rho$$

Legge di Gauss per il campo $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$.

$$\oint_{\partial V} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$$

Legge di Faraday-Neumann-Lenz, per l'induzione elettromagnetica.

$$\oint_{\partial S} \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$$

Legge di Ampère-Maxwell.

$$\oint_{\partial S} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

2.2.2 Forma integrale su volumi arbitrari

Per la loro importanza in applicazioni fondamentali come i motori elettrici, e per evitare confusione e voli pindarici quando si tratta il fenomeno dell'induzione elettromagnetica, risulta di primaria importanza fornire l'espressione corretta dei principi dell'elettromagnetismo quando sono coinvolti volumi mobili nello spazio. Non viene solo mostrata la forma di questi principi, ma anche il procedimento corretto per ricavarli partendo dalla loro forma valida per volumi di controllo fermi nello spazio: per fare questo, vengono usate le regole di derivazione nel tempo di integrali fondamentali su domini mobili, come l'integrale su un volume di una funzione densità, il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie o una circuitazione lungo una curva.

Queste tre regole di derivazione recitano **todo** Iniziare il bbook di calcolo vettoriale, e aggiungere riferimento

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v_t} f &= \int_{v_t} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{\partial v_t} f \mathbf{u}_b \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \frac{d}{dt} \int_{s_t} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_{s_t} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{s_t} \nabla \cdot \mathbf{f} \mathbf{u}_b \cdot \hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial s_t} \mathbf{u}_b \times \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} \\ \frac{d}{dt} \int_{\ell_t} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} &= \int_{\ell_t} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \int_{\ell_t} \nabla \times \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_b \times \hat{\mathbf{t}} + \mathbf{f}_B \cdot \mathbf{u}_B - \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{u}_A \end{aligned}$$

Continuità della carica elettrica.

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} \int_V \rho + \oint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho - \oint_{\partial v_t} \rho \mathbf{u}_b \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial v_t} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{v_t} \rho + \oint_{\partial v_t} \underbrace{\rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_b)}_{\mathbf{j}^*} \cdot \hat{\mathbf{n}}
 \end{aligned}$$

Legge di Gauss per il campo $\mathbf{d}(\mathbf{r}, t)$.

$$\oint_{\partial v_t} \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v_t} \rho$$

Legge di Gauss per il campo $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$.

$$\oint_{\partial v_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$$

Legge di Faraday-Neumann-Lenz, per l'induzione elettromagnetica.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{0} &= \oint_{\partial S} \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= \oint_{\partial s_t} \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \frac{d}{dt} \int_{s_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{s_t} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{b}}_{=0} \mathbf{u}_b \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{s_t} \mathbf{u}_b \times \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \\
 &= \oint_{\partial s_t} \mathbf{e}^* \cdot \hat{\mathbf{t}} + \frac{d}{dt} \int_{s_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}},
 \end{aligned}$$

con la definizione $\mathbf{e}^* := \mathbf{e} + \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{b}$, già usata nell'espressione della legge di Lorentz.

Legge di Ampère-Maxwell.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{0} &= \oint_{\partial s_t} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} - \frac{d}{dt} \int_{s_t} \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{s_t} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= \oint_{\partial s_t} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} - \frac{d}{dt} \int_{s_t} \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{s_t} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{d}}_{=\rho} \mathbf{u}_b \cdot \hat{\mathbf{n}} - \oint_{s_t} \mathbf{u}_b \times \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{t}} - \int_{s_t} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= \oint_{\partial s_t} \mathbf{h}^* \cdot \hat{\mathbf{t}} - \frac{d}{dt} \int_{s_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{s_t} \mathbf{j}^* \cdot \hat{\mathbf{n}},
 \end{aligned}$$

avendo definito $\mathbf{h}^* := \mathbf{h} - \mathbf{u}_b \times \mathbf{d}$, e usato la definizione già introdotta in precedenza $\mathbf{j}^* := \mathbf{j} - \rho \mathbf{u}_b$.

Aggiungendo le definizioni

$$\rho^* = \rho$$

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{d}$$

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{b}$$

si ottengono delle equazioni che hanno la stessa forma delle equazioni scritte per domini fermi nello spazio, ma che possono essere applicati a domini mobili. Le definizioni

$$\begin{aligned}
 \rho^* &= \rho & , & & \mathbf{j}^* &= \mathbf{j} - \rho \mathbf{u}_b \\
 \mathbf{d}^* &= \mathbf{d} & , & & \mathbf{e}^* &= \mathbf{e} + \mathbf{u}_b \times \mathbf{b} \\
 \mathbf{b}^* &= \mathbf{b} & , & & \mathbf{h}^* &= \mathbf{h} - \mathbf{u}_b \times \mathbf{d}
 \end{aligned}$$

non rappresentano altro che la trasformazione dei campi per due osservatori in moto relativo, e corrispondono al limite delle trasformazioni di Lorentz della relatività speciale per velocità $|\mathbf{u}_b| \ll c$: in questo procedimento vengono ottenute le trasformazioni per basse velocità relative, poiché non è stata considerata nessuna trasformazione delle dimensioni spaziali e temporali, come prevede la teoria della relatività di Einstein.

todo riferimento alle trasformazioni galileiane e di Lorentz per la relatività nell'elettromagnetismo.

basics

04 feb 2025

1 min read

Potenziali elettromagnetici

E' possibile dimostrare che il sistema di equazioni di Maxwell e dell'equazione del bilancio della carica elettrica è un sistema sovra-determinato. In particolare, è possibile dimostrare che, nota la distribuzione di carica e di densità di corrente - considerate come cause generanti il campo elettrico -, date le leggi costitutive del materiale, sono sufficienti 4 incognite per definire le 6 incognite (3 componenti, per due campi vettoriali) del problema. E' possibile formulare quindi il problema in termini di un potenziale scalare φ e un potenziale vettore \mathbf{a} per ottenere, insieme a una condizione di gauge che elimini le due arbitrarietà (irrilevanti ai fini del calcolo dei campi fisici) restanti.

3.1 Potenziale vettore e potenziale scalare

Partendo dalle equazioni di Maxwell si possono definire i potenziali del campo elettromagnetico. Usando l'equazione di Gauss per il campo magnetico si può introdurre il potenziale vettore $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$,

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a} ,$$

poiché la divergenza di un rotore è identicamente nulla. Introducendo questa relazione nell'equazione di Faraday-Newumann-Lenz, nell'ipotesi di sufficiente regolarità dei campi che consenta di invertire l'ordine delle derivate,

$$0 = \nabla \times \mathbf{e} + \partial_t \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{e} + \partial_t \nabla \times \mathbf{a} = \nabla \times (\mathbf{e} + \partial_t \mathbf{a}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{e} + \partial_t \mathbf{a} = -\nabla \varphi ,$$

poiché il rotore di un gradiente è identicamente nulla. Le grandezze «fisiche» campo elettrico $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ e campo magnetico $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$ possono quindi essere scritte usando i potenziali elettromagnetici come

$$\begin{cases} \mathbf{e} &= -\nabla \varphi - \partial_t \mathbf{a} \\ \mathbf{b} &= \nabla \times \mathbf{a} \end{cases}$$

3.2 Condizioni di gauge

I potenziali sono definiti a meno di una condizione di gauge, un'ulteriore condizione che elimina ogni arbitrarietà nella definizione. Ad esempio, il potenziale vettore è definito a meno del gradiente di una funzione scalare, poiché $\nabla \times \nabla f \equiv \mathbf{0}$, e quindi il potenziale $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \nabla f$ produce lo stesso campo magnetico \mathbf{b}

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{a}} = \nabla \times (\mathbf{a} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{a} .$$

Condizione di gauge di Lorentz. Per motivi che saranno più evidenti nella sezione sulle *onde elettromagnetiche*, una condizione di gauge conveniente è

$$\nabla \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi = 0$$

Condizione di gauge di Coulomb.

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$$

Elettromagnetismo nella materia

todo

4.1 Vuoto

I fenomeni elettromagnetici nel vuoto sono governati dalle equazioni di Maxwell nel vuoto,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{e} + \partial_t \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{b} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{e} = \mu_0 \mathbf{j} \end{cases}$$

e dall'equazione della continuità della carica elettrica,

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 .$$

4.2 Mezzi continui

In generale, alcuni materiali rispondono a un campo elettromagnetico «esterno» imposto, con una polarizzazione e una magnetizzazione. In particolare, la polarizzazione elettrica di un materiale corrisponde a una separazione locale delle cariche elettriche dal punto di vista macroscopico equivalente a una densità di volume di dipoli, $\mathbf{p}(\mathbf{r}_0)$; la magnetizzazione corrisponde a un orientamento degli assi delle spire delle correnti amperiane dal punto di vista macroscopico equivalente a una densità di momento magnetico $\mathbf{m}(\mathbf{r}_0)$.

4.3 Polarizzazione

4.3.1 Singolo dipolo elettrico

Un dipolo elettrico discreto è formato da due cariche elettriche uguali e opposte $q, -q$, nei punti $P_+, P_- = P_+ \mathbf{l}$, nel limite $q \rightarrow +\infty, |\mathbf{l}| \rightarrow 0$ con $q|\mathbf{l}|$ finito.

Il campo elettrico (stazionario **todo** controllare cosa succede nel caso non stazionario. Magari dopo aver derivato la soluzione generale del problema, come soluzione delle equazioni delle onde in termini dei potenziali EM) generato nel punto dello spazio \mathbf{r} da un dipolo elettrico nel punto \mathbf{r}_0 viene calcolato come limite del campo elettrico generato da due cariche uguali e opposte q^\mp nei punti $\mathbf{r}_0 \mp \frac{1}{2}\mathbf{l}$,

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{l})}{|\mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{l})|^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{l})}{|\mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{l})|^3}.$$

Usando la formula per la derivata dei termini

$$\begin{aligned} \partial_{\ell_k} \frac{x_i \pm \frac{\ell_i}{2}}{|\mathbf{x} \pm \frac{1}{2}\mathbf{l}|^3} &= \frac{1}{2} \left[\pm \frac{\delta_{ik}}{r^3} - 3r^{-4} \left(\pm \frac{x_k \pm \frac{\ell_k}{2}}{r} \right) \right] \\ \partial_{\ell_k} \frac{x_i \pm \frac{\ell_i}{2}}{|\mathbf{x} \pm \frac{1}{2}\mathbf{l}|^3} \Big|_{\mathbf{l}=\mathbf{0}} &= \mp \frac{1}{2} \left[-\frac{\delta_{ik}}{|\mathbf{x}|^3} + 3 \left(\frac{x_k}{r^5} \right) \right] = \mp \frac{1}{2} \partial_{r_{0k}} \frac{r_i - r_{0i}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \mp \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \end{aligned}$$

si ricava l'approssimazione al primo ordine in \mathbf{l} dei due termini

$$\frac{\mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 \mp \frac{1}{2}\mathbf{l})}{|\mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 \mp \frac{1}{2}\mathbf{l})|^3} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \pm \mathbf{l} \cdot \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) + o(|\mathbf{l}|)$$

e, definendo l'intensità del dipolo $\mathbf{P}_0 := q\mathbf{l}$ e facendo tendere le grandezze al limite desiderato, quella del campo elettrico

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} \cdot \mathbf{P}_0 - \frac{\mathbf{P}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} - \frac{\mathbb{I}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right] \cdot \mathbf{P}_0. \end{aligned}$$

todo nel caso generale sarebbe necessario prestare attenzione all'ordine dei fattori nel prodotto tra vettori e tensori, ma in questo caso si può sfruttare la simmetria del tensore del secondo ordine (o delle operazioni).

4.3.2 Distribuzione continua di dipoli

Una distribuzione di dipoli con densità di volume $\mathbf{p}(\mathbf{r}_0)$, che produce il dipolo elementare $\Delta\mathbf{P}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{p}(\mathbf{r}_0)dV_0$ nel volume dV_0 , produce il campo elettrico

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0 \in V_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right),$$

la cui espressione può essere riscritta usando le regole di integrazione per parti

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbf{r}_0 \in V_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) = \\ &= \oint_{\mathbf{r}_0 \in \partial V_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \underbrace{\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}_0)}_{=: \sigma_P(\mathbf{r}_0)} + \int_{\mathbf{r}_0 \in V_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \underbrace{(-\nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}_0))}_{=: \rho_P(\mathbf{r}_0)}, \end{aligned}$$

avendo definito le densità di carica di polarizzazione superficiale σ_P e di volume ρ_P come le intensità delle sorgenti distribuite di campo elettrico, in analogia con l'espressione della legge di Coulomb.

4.3.3 Riformulazione delle equazioni di Maxwell e della continuità della carica

L'equazione di Gauss determina la densità di flusso nel volume del campo elettrico \mathbf{e} ,

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Scomponendo la densità di carica come somma delle **cariche libere** ρ_f e delle **cariche di polarizzazione** $\rho_P := -\nabla \cdot \mathbf{p}$, si può rielaborare l'equazione di Gauss,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{e} &= \frac{\rho_f + \rho_P}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p}) &= \rho_f\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \rho_f,$$

avendo introdotto il **campo di spostamento**, $\mathbf{d} := \varepsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p}$.

La scomposizione della corrente elettrica come somma $\mathbf{j} = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P$ della corrente libera \mathbf{j}_f e corrente di polarizzazione \mathbf{j}_P , permette di rielaborare l'equazione della continuità della carica elettrica

$$\begin{aligned}0 &= \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = \\ &= \partial_t (\rho_f + \rho_P) + \nabla \cdot (\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P) = \\ &= \partial_t \rho_f + \nabla \cdot \mathbf{j}_f + \partial_t \rho_P + \nabla \cdot \mathbf{j}_P,\end{aligned}$$

e scrivere le equazioni di continuità per le due distribuzioni di carica (di natura diversa, si suppone che entrambe devono soddisfare la continuità della carica in maniera indipendente, se le cariche libere rimangono libere e le cariche di polarizzazione rimangono di polarizzazione),

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_f + \nabla \cdot \mathbf{j}_f &= 0 \\ \partial_t \rho_P + \nabla \cdot \mathbf{j}_P &= 0 \quad \rightarrow \quad 0 = \nabla \cdot (-\partial_t \mathbf{p} + \mathbf{j}_P) \quad \rightarrow \quad \mathbf{j}_P = \partial_t \mathbf{p}\end{aligned}$$

todo giustificare assenza di campo costante

4.4 Magnetizzazione

4.4.1 Singolo momento magnetico (limite di una spira elementare)

Usando la legge di Biot-Savart, specializzato a un conduttore percorso da corrente $i(\mathbf{r}_0)$

$$\begin{aligned}d\mathbf{b}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}_0) dV_0 = \\ &= -\frac{\mu}{4\pi} i(\mathbf{r}_0) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \times \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_0) d\ell_0,\end{aligned}$$

si può calcolare il campo magnetico generato da una spira con percorso $\ell_0 = \partial S_0$ sfruttando il PSCE

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(\mathbf{r}) &= \oint_{\ell_0} d\mathbf{b}(\mathbf{r}_0) = \\ &= -\frac{\mu}{4\pi} i_0 \oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \times \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_0) = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} i_0 \int_{\mathbf{r}_0 \in S_0} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right)\end{aligned}$$

Il campo generato da spira elementare di superficie S_0 con normale $\hat{\mathbf{n}}_0$, usando il teorema della media, è

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} i_0 S_0 \hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) + o(S_0)$$

e al tendere di $i_0 \rightarrow \infty$, $S_0 \rightarrow 0$ in modo tale da avere $\mathbf{M}_0 := i_0 S_0 \hat{\mathbf{n}}_0$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \mathbf{M}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} \cdot \mathbf{M}_0 - \frac{\mathbf{M}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right] = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} - \frac{\mathbb{I}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right] \cdot \mathbf{M}_0 . \end{aligned}$$

todo Analogia con il campo elettrico prodotto da una distribuzione di dipoli.

Dettagli

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} A t_i &= \int_S \varepsilon_{ijk} n_j \partial_k A \quad , \quad \oint_{\partial S} A \hat{\mathbf{t}} = \int_S \hat{\mathbf{n}} \times \nabla A \\ \oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \times \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_0) d\ell_0 &= \oint_{\mathbf{r}_0 \in \ell_0} \varepsilon_{ijk} \frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} t_k = \\ &= \int_{\mathbf{r}_0 \in S_0} \varepsilon_{krs} n_r \partial_s^0 \left(\varepsilon_{ijk} \frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) = \\ &= \int_{\mathbf{r}_0 \in S_0} (\delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}) n_r \partial_s^0 \left(\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) = \\ &= \int_{\mathbf{r}_0 \in S_0} \left\{ \underbrace{n_i \partial_j^0 \left(\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right)}_{=0} - n_j \partial_i^0 \left(\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) \right\} = \\ &= - \int_{\mathbf{r}_0 \in S_0} n_j \partial_i^0 \left(\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) . \end{aligned}$$

4.4.2 Distribuzione continua di momento magnetico

Per calcolare il campo magnetico generato da una distribuzione di volume di momento magnetico si può procedere in analogia con quanto fatto per calcolare il campo elettrico generato da una distribuzione di dipoli

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbf{r}_0 \in V_0} \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) = \\ &= \oint_{\mathbf{r}_0 \in \partial V_0} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r}_0 \in V_0} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} (-\nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{m}(\mathbf{r}_0)) , \end{aligned}$$

ma senza ottenere un'analogia con l'espressione della legge di Biot-Savart che prevede il prodotto vettore tra il termine $\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$ con una densità di corrente $\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)$.

Dettagli

Si può riscrivere

$$\begin{aligned}
& \oint_{\mathbf{r}_0 \in \partial V_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \times (\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{m}(\mathbf{r}_0)) \\
&= \oint_{\mathbf{r}_0 \in \partial V_0} \varepsilon_{ijk} \frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \varepsilon_{krs} n_r m_s = \\
&= \int_{\mathbf{r}_0 \in V_0} (\delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}) \partial_r^0 \left(\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} m_s \right) = \\
&= \int_{\mathbf{r}_0 \in V_0} \left\{ \partial_i^0 \left(\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} m_j \right) - \partial_j^0 \left(\frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} m_i \right) \right\} = \\
&= \int_{\mathbf{r}_0 \in V_0} \left\{ \partial_i^0 \frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} m_j + \frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \partial_i^0 m_j - \frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \partial_j^0 m_i - \underbrace{\partial_j^0 \frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} m_i}_{=0} \right\} = \\
&= \int_{\mathbf{r}_0 \in V_0} \left\{ \partial_i^0 \frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} m_j + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{krs} \frac{r_j - r_{0,j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \partial_r^0 m_s \right\} = \\
&= \int_{\mathbf{r}_0 \in V_0} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot \mathbf{m}(\mathbf{r}_0) + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \times (\nabla_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{m}(\mathbf{r}_0)) \right\} =
\end{aligned}$$

usando le identità del calcolo vettoriale,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{krs} b_r c_s = \\
&= (\delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}) a_j b_r c_s = \\
&= a_j b_i c_j - c_i b_j a_j = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\
a_j \partial_i m_j - a_j \partial_j m_i &= (\delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}) a_j \partial_r m_s = \\
&= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{krs} a_j \partial_r m_s = \\
&= \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{m})
\end{aligned}$$

Il campo magnetico generato da una distribuzione di momento magnetico può quindi essere riscritto come

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbf{r}_0 \in V_0} \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) = \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathbf{r}_0 \in \partial V_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \times \underbrace{(-\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{m}(\mathbf{r}_0))}_{\mathbf{j}_M^s} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbf{r}_0 \in V_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \times \underbrace{(\nabla_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{m}(\mathbf{r}_0))}_{\mathbf{j}_M},
\end{aligned}$$

avendo definito le densità di corrente di magnetizzazione superficiale \mathbf{j}_M^s e di volume \mathbf{j}_M come le intensità delle singolarità distribuite, in analogia con l'espressione della legge di Biot-Savart.

4.4.3 Riformulazione delle equazioni di Maxwell e della continuità della carica

La legge di Ampère-Maxwell può essere riscritta

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{b} - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{e} &= \mu_0 \mathbf{j} \\
\nabla \times \mathbf{b} - \mu_0 \partial_t (\mathbf{d} - \mathbf{p}) &= \mu_0 (\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M) \\
\nabla \times \underbrace{(\mathbf{b} - \mu_0 \mathbf{m})}_{=:\mu_0 \mathbf{h}} - \mu_0 \partial_t \mathbf{d} + \mu_0 \underbrace{(\partial_t \mathbf{p} - \mathbf{j}_P)}_{=0} &= \mu_0 \mathbf{j}_f \\
\nabla \times \mathbf{h} - \partial_t \mathbf{d} &= \mathbf{j}_f
\end{aligned}$$

Dalla legge di continuità della corrente elettrica,

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 ,$$

si ricava l'equazione di continuità per le cariche di magnetizzazione

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t \rho_M + \nabla \cdot \mathbf{j}_M = \\ &= \partial_t \rho_M + \underbrace{\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{m}}_{\equiv 0} . \end{aligned}$$

4.5 Esempi

- conduttori
- ferromagnetici e magnetismo debole (para-, dia-, anti-)

4.6 Jump conditions

Differential form of Maxwell's equations

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{d} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{e} + \partial_t \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{h} - \partial_t \mathbf{d} = \mathbf{j}_f \end{cases}$$

Integral form of Maxwell's equations

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_V \rho_f \\ \oint_{\partial S} \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \oint_{\partial V} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \oint_{\partial S} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_S \mathbf{j}_f \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{cases}$$

Letting V and S «collapsing on a discontinuity»...

$$\begin{cases} [d_n] = \sigma_f \\ [e_t] = 0 \\ [b_n] = 0 \\ [h_t] = \iota_f , \end{cases} \quad (4.1)$$

being σ_f and ι_f surface charge and current density, with physical dimension $\frac{\text{charge}}{\text{surface}}$, and $\frac{\text{current}}{\text{surface}}$ respectively. These contributions can be thought as Dirac delta contributions in volume density, namely

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}, t) + \sigma(\mathbf{r}_s, t) \delta_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) ,$$

being $\rho(\mathbf{r}, t)$ the regular part of the volume density in all the points of the domain $\mathbf{r} \in V$, $\sigma(\mathbf{r}_s, t)$ the surface density on 2-dimensional surfaces $\mathbf{r}_s \in S$, $\delta_1()$ the Dirac's delta with physical dimension $\frac{1}{\text{length}}$.

If there's no free surface charge and currents, jump conditions form linear media become

$$\left\{ \begin{array}{l} [d_n] = 0 \\ [e_t] = 0 \\ [b_n] = 0 \\ [h_t] = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d_{n,1} = d_{n,2} \rightarrow \varepsilon_1 e_{n,1} = \varepsilon_2 e_{n,2} \\ e_{t,1} = e_{t,2} \\ b_{n,1} = b_{n,2} \\ h_{t,1} = h_{t,2} \rightarrow \frac{1}{\mu_1} b_{t,1} = \frac{1}{\mu_2} b_{t,2} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

5.1 Zero electric field inside a conductor

Studying the transient of the electric charge distribution inside a conductor,

$$\vec{e} = \rho_R \vec{j} ,$$

whose constitutive equation is

$$\vec{d} = \varepsilon \vec{e} ,$$

with free electric charge continuity equation

$$\partial_t \rho_f + \nabla \cdot \vec{j}_f = 0 ,$$

and Gauss equation for the displacement field

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{d} &= \rho_f . \\ \partial_t \rho_f &= -\nabla \cdot \vec{j}_f = \\ &= -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_R} \vec{e} \right) = \\ &= -\frac{1}{\rho_R \varepsilon} \nabla \cdot \vec{d} = \\ &= -\frac{1}{\rho_R \varepsilon} \rho_f , \end{aligned}$$

having assumed uniform properties. The differential equation in the volume of the conductor provides the evolution of the electric charge in the volume $\rho(\mathbf{r}, t)$, given the initial condition $\rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_{f,0}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_f &= -\frac{1}{\rho_R \varepsilon} \rho_f \\ \rho_f(\mathbf{r}, t) &= \rho_{f,0}(\mathbf{r}) \exp \left[-\frac{t}{\rho_R \varepsilon} \right] . \end{aligned}$$

For a conductor:

- $\varepsilon \sim \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{Fm}^{-1}$
- $\rho_R \sim 10^{-7} \Omega \text{m}$

so that the time constant (that can be thought as a characteristic time) of the process is

$$\tau = \rho_R \varepsilon \sim 8.85 \cdot 10^{-19} \text{s} ,$$

and thus, after a very short period of time the volume charge density is approximately zero everywhere in the volume: it accumulates in a very thin surface layer.

Proof

$$\partial_t \left(\rho_f e^{\frac{t}{\rho_R \varepsilon}} \right) = 0$$

$$\rho_f(\mathbf{r}, t) e^{\frac{t}{\rho_R \varepsilon}} = a(\mathbf{r})$$

and applying initial conditions in all the points of the domain, $\rho_f(\mathbf{r}, 0) = \rho_{f,0}(\mathbf{r})$, function $a(\mathbf{r})$ must be equal to $\rho_{f,0}(\mathbf{r})$ and the solution reads

$$\rho_f(\mathbf{r}, t) = \rho_{f,0}(\mathbf{r}) \exp \left[-\frac{t}{\rho_R \varepsilon} \right]$$

Energy balance in electromagnetism

6.1 Force, moment, and power on elementary components

6.1.1 Force, moment and power on a point electric charge

Point electric charge with charge q in a point $\vec{r}_P(t)$ at time t where electromagnetic field is $\vec{e}(\vec{r}, t), \vec{b}(\vec{r}, t)$:

- Lorentz's force

$$\vec{F} = q \left(\vec{e}(\vec{r}_P(t), t) - \vec{b}(\vec{r}_P(t), t) \times \vec{v}_P(t) \right) ,$$

- zero moment, since it has no dimension (and assumed uniform or symmetric or... distribution of electric charge)
- power

$$\begin{aligned} P &= \vec{v}_P(t) \cdot \vec{F} = \\ &= \vec{v}_P(t) \cdot q \left(\vec{e}(\vec{r}_P(t), t) - \vec{b}(\vec{r}_P(t), t) \times \vec{v}_P(t) \right) = q \vec{v}_P(t) \cdot \vec{e}(\vec{r}_P(t), t) . \end{aligned}$$

6.1.2 Force, moment and power on a electric dipole

Electric dipole with center $\vec{r}_C(t)$, axis $\vec{\ell}$, so that the positive charge q is in $P_+ = C + \frac{\vec{\ell}}{2}$ and the negative charge is in $P_- = C - \frac{\vec{\ell}}{2}$, with $q \rightarrow +\infty, |\vec{\ell}| \rightarrow 0$, s.t. $q|\vec{\ell}| = |\vec{d}|$ finite.

Kinematics and expansion of the field

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\pm} &= \vec{v}_C \pm \vec{\omega} \times \frac{\vec{\ell}}{2} \\ \vec{e}(P_{\pm}) &= \vec{e} \left(C \pm \frac{\vec{\ell}}{2} \right) = \vec{e}(C) \pm \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{e}(C) + o(|\vec{\ell}|) \end{aligned}$$

$$\vec{b}(P_{\pm}) = \vec{b} \left(C \pm \frac{\vec{\ell}}{2} \right) = \vec{b}(C) \pm \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{b}(C) + o(|\vec{\ell}|)$$

Net force.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_+ + \vec{F}_- = \\ &= q [\vec{e}(P_+) - \vec{b}(P_+) \times \vec{v}_+] - q [\vec{e}(P_-) - \vec{b}(P_-) \times \vec{v}_-] = \\ &= q \left[\vec{e}_C + \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{e}_C - \left(\vec{b}_C + \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{b}_C \right) \times \left(\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \frac{\vec{\ell}}{2} \right) \right] + \\ &\quad - q \left[\vec{e}_C - \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{e}_C - \left(\vec{b}_C - \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{b}_C \right) \times \left(\vec{v}_C - \vec{\omega} \times \frac{\vec{\ell}}{2} \right) \right] = \\ &= q\vec{\ell} \cdot \nabla \vec{e}(C) - (q\vec{\ell} \cdot \nabla \vec{b}(C)) \times \vec{v}_C + \vec{b}(C) \times (\vec{\omega} \times q\vec{\ell}) + o(|\vec{\ell}|) \end{aligned}$$

Net moment, w.r.t. C .

$$\begin{aligned} \vec{M}_C &= \frac{\vec{\ell}}{2} \times \vec{F}_+ - \frac{\vec{\ell}}{2} \times \vec{F}_- = \\ &= q\frac{\vec{\ell}}{2} \times [\vec{e}(P_+) - \vec{b}(P_+) \times \vec{v}_+] + q\frac{\vec{\ell}}{2} \times [\vec{e}(P_-) - \vec{b}(P_-) \times \vec{v}_-] = \\ &= q\frac{\vec{\ell}}{2} \times \left[\vec{e}_C + \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{e}_C - \left(\vec{b}_C + \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{b}_C \right) \times \left(\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \frac{\vec{\ell}}{2} \right) \right] + \\ &\quad + q\frac{\vec{\ell}}{2} \times \left[\vec{e}_C - \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{e}_C - \left(\vec{b}_C - \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{b}_C \right) \times \left(\vec{v}_C - \vec{\omega} \times \frac{\vec{\ell}}{2} \right) \right] = \\ &= q\vec{\ell} \times [\vec{e}_C - \vec{b}_C \times \vec{v}_C] + o(|\vec{\ell}|). \end{aligned}$$

Power.

$$\begin{aligned} P &= P_+ + P_- = \\ &= \vec{F}_+ \cdot \vec{v}_+ + \vec{F}_- \cdot \vec{v}_- = \\ &= q [\vec{e}(P_+) - \vec{b}(P_+) \times \vec{v}_+] \cdot \vec{v}_+ - q [\vec{e}(P_-) - \vec{b}(P_-) \times \vec{v}_-] \cdot \vec{v}_- = \\ &= q \vec{e}(P_+) \cdot \vec{v}_+ - q \vec{e}(P_-) \cdot \vec{v}_- = \\ &= q \left[\vec{e}_C + \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{e}_C \right] \cdot \left[\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \frac{\vec{\ell}}{2} \right] - q \left[\vec{e}_C - \frac{\vec{\ell}}{2} \cdot \nabla \vec{e}_C \right] \cdot \left[\vec{v}_C - \vec{\omega} \times \frac{\vec{\ell}}{2} \right] = \\ &= \vec{e}_C \cdot (\vec{\omega} \times q\vec{\ell}) + (q\vec{\ell} \cdot \nabla \vec{e}_C) \cdot \vec{v}_C + o(|\vec{\ell}|^2). \end{aligned}$$

6.1.3 Force, moment and power on a magnetic dipole

On an elementary magnetic dipole, modeled as a «small» circuit with current i enclosing area S and center C , with $S \rightarrow 0$, $i \rightarrow +\infty$ so that $iS\hat{n} := \vec{m}$ finite

Force.

...

$$\vec{F} = \nabla \vec{b}(C) \cdot \vec{m}$$

Moment.

...

$$\vec{M}_C = \vec{m} \times \vec{b}(C)$$

Power.

$$P = \vec{v}_C \cdot \nabla \vec{b}(C) \cdot \vec{m} + \vec{\omega} \cdot \vec{m} \times \vec{b}(C) .$$

6.2 Energy balance

todo Check and put charges, currents, and dipoles together with the electromagnetic field

Ispirati dalle dimensioni fisiche dei campi elettromagnetici,

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}] &= \frac{\text{force}}{\text{charge}} & , & & [\mathbf{d}] &= \frac{\text{charge}}{\text{length}^2} \\ [\mathbf{b}] &= \frac{\text{force} \cdot \text{time}}{\text{charge} \cdot \text{length}} & , & & [\mathbf{h}] &= \frac{\text{charge}}{\text{time} \cdot \text{length}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{e} \cdot \mathbf{d}] &= \frac{\text{force}}{\text{length}^2} = \frac{\text{energy}}{\text{length}^3} = [u] \\ [\mathbf{b} \cdot \mathbf{h}] &= \frac{\text{force}}{\text{length}^2} = \frac{\text{energy}}{\text{length}^3} = [u] \end{aligned}$$

si può costruire la densità di volume di energia (**todo** trovare motivazioni più convincenti, non basandosi solo sull'analisi dimensionale ma sul lavoro)

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}) .$$

Si può calcolare la derivata parziale nel tempo della densità di energia, u , e usare le equazioni di Maxwell per ottenere un'equazione di bilancio dell'energia del campo elettromagnetico. Per un mezzo isotropo lineare, per il quale valgono le equazioni costitutive $\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e}$, $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$, la derivata parziale nel tempo dell'energia elettromagnetica può essere riscritta sfruttando la regola di derivazione del prodotto e le equazioni di Faraday-Lenz-Neumann e Ampère-Maxwell,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{h} \right) = \quad (\dots) \\ &= \mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{d} + \mathbf{h} \cdot \partial_t \mathbf{b} = \\ &= \mathbf{e} \cdot (\nabla \times \mathbf{h} - \mathbf{j}) - \mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{e} . \end{aligned}$$

L'ultimo termine può essere ulteriormente manipolato, usando l'identità vettoriale

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{h} - \mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{e} &= e_i \varepsilon_{ijk} \partial_j h_k - h_i \varepsilon_{ijk} \partial_j e_k = \quad (i \rightarrow k, k \rightarrow i) \\ &= e_i \varepsilon_{ijk} \partial_j h_k - h_k \varepsilon_{kji} \partial_j e_i = \\ &= e_i \varepsilon_{ijk} \partial_j h_k + h_k \varepsilon_{ijk} \partial_j e_i = \\ &= \partial_j (\varepsilon_{ijk} e_i h_k) = \\ &= \partial_j (\varepsilon_{jki} e_i h_k) = \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{h} \times \mathbf{e}) = -\nabla \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) \end{aligned}$$

che permette di scrivere l'equazione del bilancio di energia elettromagnetica come,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{s} = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{j} ,$$

dove è stato definito il **vettore di Poynting**, o meglio il campo vettoriale di Poynting,

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) ,$$

che può essere identificato come un flusso di potenza per unità di superficie, comparando sotto l'operatore di divergenza nel bilancio di energia.

todo. Rimandare a una sezione in cui si mostra questa ultima affermazione passando dal bilancio differenziale al bilancio integrale e si usa il teorema della divergenza, $\int_V \nabla \cdot \mathbf{s} = \oint_{\partial V} \mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{n}}$.

Bilancio di energia di cariche nel vuoto, o i materiali senza polarizzazione o magnetizzazione

Moto di cariche puntiformi. L'equazione del moto di carica puntiforme q_k nella posizione $\mathbf{r}_k(t)$ al tempo t è

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{f}_k + \mathbf{f}_k^{em} ,$$

avendo riconosciuto i contributi di forza dovuti al campo elettromagnetico come \mathbf{f}_k^{em} dagli altri. L'espressione della forza dovuta al campo elettromagnetico sulla carica k è data dalla forza di Lorentz,

$$\mathbf{f}_k^{em}(t) = q_k [\mathbf{e}(\mathbf{r}_k(t), t) - \mathbf{b}(\mathbf{r}_k(t), t) \times \dot{\mathbf{r}}_k(t)]$$

Continuità della carica elettrica. La densità di carica e di corrente elettrica di un insieme di cariche libere puntiformi macroscopiche può essere scritta come

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \sum_k q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \sum_k q_k \dot{\mathbf{r}}_k(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)) . \end{aligned}$$

L'equazione di continuità della carica, $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, risulta quindi soddisfatta,

$$\begin{aligned} \partial_t \rho &= - \sum_k q_k \partial_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)) \dot{r}_{k,i} \\ \partial_i j_i &= \sum_k q_k \dot{r}_{k,i} \partial_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)) \end{aligned}$$

Procedimento alternativo (e più generale?)

todo In caso questo procedimento sia più generale, o più corretto, sostituire il procedimento precedente.

La carica elementare in un volumetto ΔV è data da dal prodotto tra il volume e la densità volumetrica di carica, $\rho \Delta V$; la velocità media locale della carica elettrica è \mathbf{v} ; la forza agente sulla carica elementare immersa in un campo elettromagnetico è determinata dalla formula di Lorentz, $\mathbf{f} \Delta V = \Delta V \rho (\mathbf{e} - \mathbf{b} \times \mathbf{v})$. La potenza di questa forza è il prodotto scalare con la velocità media delle cariche, $\Delta V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$

La potenza del campo elettromagnetico sul moto della carica elettrica per unità di volume è quindi

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} = \rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{b} \times \mathbf{v}) = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{e} .$$

todo

- discutere questo termine del bilancio di energia cinetica nel moto della carica elettrica
- questo termine compare con segno opposto nel bilancio dell'energia elettromagnetica del sistema
- dove compare la non-conservatività del problema in presenza di materiali dissipativi (come resistenza elettrica con $\mathbf{e} = \rho_R \mathbf{j}$?

Il termine $\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}$ può essere manipolato usando le equazioni di Maxwell, e le relazioni

$$\begin{cases} \mathbf{d} = \varepsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p} \\ \mathbf{h} = \frac{\mathbf{b}}{\mu_0} - \mathbf{m} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{e} \cdot (\nabla \times \mathbf{h} - \partial_t \mathbf{d}) = \\ &= -\nabla \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) + \mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{d} = \\ &= -\nabla \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) - \mathbf{h} \cdot \partial_t \mathbf{b} - \mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{d} \end{aligned}$$

Gli ultimi due termini possono essere manipolati in diverse maniere,

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{d} &= \mathbf{e} \cdot \partial_t (\varepsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p}) = \partial_t \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \right) + \mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{p} \\ &= \partial_t \left(\frac{1}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{d} \right) + \frac{1}{2} (\mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \partial_t \mathbf{e}) \\ &= \partial_t \left(\frac{1}{2\varepsilon_0} \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} \right) - \frac{\mathbf{p}}{\varepsilon_0} \cdot \partial_t \mathbf{d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \cdot \partial_t \mathbf{b} &= \mathbf{h} \cdot \partial_t (\mu_0 \mathbf{h} + \mu_0 \mathbf{m}) = \partial_t \left(\frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} \right) + \mu_0 \mathbf{h} \cdot \partial_t \mathbf{m} \\ &= \partial_t \left(\frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{h} \right) + \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{h} \cdot \partial_t \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \partial_t \mathbf{h}) \\ &= \partial_t \left(\frac{1}{2\mu_0} \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \right) - \mathbf{m} \cdot \partial_t \mathbf{b} \end{aligned}$$

Nel vuoto o in mezzi lineari $\mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \partial_t \mathbf{e} = 0$, $\mathbf{h} \cdot \partial_t \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \partial_t \mathbf{h} = 0$. Usando le seconde espressioni, si può riscrivere l'equazione dell'energia del campo elettromagnetico come

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{1}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{h} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) &= -\mathbf{e} \cdot \mathbf{j} + \\ &\quad - \frac{1}{2} [\mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \partial_t \mathbf{e} + \mu_0 (\mathbf{h} \cdot \partial_t \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \partial_t \mathbf{h})] \end{aligned}$$

o, usando le definizioni di densità di energia elettromagnetica u e vettore di Poynting \mathbf{s} ,

$$\partial_t u + \nabla \cdot \mathbf{s} = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{j} - \frac{1}{2} [\mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \partial_t \mathbf{e} + \mu_0 (\mathbf{h} \cdot \partial_t \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \partial_t \mathbf{h})]$$

Energy and momentum balance in linear, local, isotropic, non-dispersive media

$$\begin{cases} \mathbf{d} = \varepsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p} \\ \mathbf{h} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b} - \mathbf{m} . \end{cases}$$

with

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e} \quad , \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{b}}{\mu}$$

Let r be mass density, and \vec{v} be charge velocity field, the equation of motion - momentum equation - of electric charges reads

$$r \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{f} ,$$

and the kinetic energy equation becomes

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} = r \mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = r \frac{D}{Dt} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} ,$$

or using continuity equation for r , it can be recast in conservative form. The same term can be recast using the expression of Lorentz's force on electric charges in electromagnetic field (**is this the right way to evaluate power of bounded charges and currents? check it!**)

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{v} \cdot [\rho(\mathbf{e} - \mathbf{b} \times \mathbf{v})] = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} ,$$

and furthered manipulated writing $\mathbf{j} = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_m$ and using Maxwell's equations

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{e} \cdot (\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_m) = \\ &= \mathbf{e} \cdot (\nabla \times \mathbf{h} - \partial_t \mathbf{d}) + \mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{p} + \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{m} = \\ &= \mathbf{e} \cdot \nabla \times (\mathbf{h} + \mathbf{m}) - \mathbf{e} \cdot \partial_t (\mathbf{d} - \mathbf{p}) = \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{b} - \varepsilon_0 \mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{e} = \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{b}) - \frac{\mathbf{b}}{\mu_0} \cdot \partial_t \mathbf{b} - \varepsilon_0 \mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{e} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{h} &= e_i \varepsilon_{ijk} \partial_j h_k = \partial_j (\varepsilon_{jki} h_k e_i) - \varepsilon_{ijk} h_k \partial_j e_i = -\nabla \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) + \mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{e} = -\nabla \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) - \mathbf{h} \cdot \partial_t \mathbf{b} \\ \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_f &= -\nabla \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) - \mathbf{e} \cdot \partial_t \mathbf{d} - \mathbf{h} \cdot \partial_t \mathbf{b}\end{aligned}$$

7.1 Linear media - energy

For linear media, the energy of the electromagnetic field per unit volume reads

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{b})$$

so that the differential balance equation for the energy of the electromagnetic field becomes

$$\partial_t u + \nabla \cdot \mathbf{s} = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{j},$$

with Poynting vector $\mathbf{s} := \mathbf{e} \times \mathbf{h}$, namely the momentum density of the electromagnetic field.

7.2 Linear media - momentum

$$\partial_t \mathbf{s} = \partial_t s_i = \partial_t (\varepsilon_{ijk} e_j h_k)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} \partial_t e_j h_k &= \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon_{ijk} \partial_t d_j h_k \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon_{ijk} (\varepsilon_{jlm} \partial_l h_m - j_j^f) h_k \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \varepsilon_{ijk} j_j^f h_k + \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} h_k \partial_l h_m \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \varepsilon_{ijk} j_j^f h_k + \frac{1}{\varepsilon} (\delta_{im} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{km}) h_k \partial_l h_m = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \varepsilon_{ijk} j_j^f h_k + \frac{1}{\varepsilon} (h_m \partial_m h_i - h_m \partial_i h_m) = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \varepsilon_{ijk} j_j^f h_k + \frac{1}{\varepsilon} \left[\partial_m (h_m h_i) - \partial_m h_m h_i - \partial_i \left(\frac{h_m h_m}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\varepsilon \mu} \varepsilon_{ijk} b_j j_k^f + \frac{1}{\varepsilon \mu} \left[\partial_m (b_m h_i) - \underbrace{\partial_m b_m}_{=0} h_i - \partial_i \left(\frac{h_m b_m}{2} \right) \right] = \\ \varepsilon_{ijk} e_j \partial_t h_k &= \frac{1}{\mu} \varepsilon_{ijk} e_j \partial_t b_k = \\ &= -\frac{1}{\mu} \varepsilon_{ijk} e_j (\varepsilon_{klm} \partial_l e_m) = \\ &= -\frac{1}{\mu} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) e_j \partial_l e_m = \\ &= -\frac{1}{\mu} (e_m \partial_i e_m - e_m \partial_m e_i) = \\ &= -\frac{1}{\mu} \left[\partial_i \left(\frac{e_m e_m}{2} \right) - \partial_m (e_m e_i) + \partial_m e_m e_i \right] = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon \mu} \left[\partial_i \left(\frac{d_m e_m}{2} \right) - \partial_m (d_m e_i) + \rho^f e_i \right].\end{aligned}$$

so that

$$\partial_t s_i + c^2 \partial_m \left[\frac{1}{2} (d_n e_n + h_n b_n) \delta_{mi} - (h_m b_i + d_m e_i) \right] = -c^2 \rho^f e_i + c^2 \varepsilon_{ijk} b_j j_k^f$$

or

$$\partial_t \mathbf{s} + c^2 \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{b}) \mathbb{I} - (\mathbf{d} \otimes \mathbf{e} + \mathbf{h} \otimes \mathbf{b}) \right] = -c^2 (\rho^f \mathbf{e} - \mathbf{b} \times \mathbf{j}^f)$$

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla \cdot \mathbf{s} = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}^f \\ \partial_t \mathbf{s} + c^2 \nabla \cdot [u \mathbb{I} - (\mathbf{d} \otimes \mathbf{e} + \mathbf{h} \otimes \mathbf{b})] = -c^2 (\mathbf{e} \rho^f - \mathbf{b} \times \mathbf{j}^f) \end{cases}$$

todo use this system to derive the 4-d formulation of special relativity in modern physics

Equazioni dell'elettromagnetismo e relatività galileiana

Onde elettromagnetiche

basics

04 feb 2025

1 min read

9.1 Equazioni delle onde in elettromagnetismo

Identità vettoriale.

$$\Delta \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}$$

Dim.

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} \partial_l v_m) = \\ &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \partial_{jl} v_m = \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_{jl} v_m = \\ &= \partial_{ij} v_j - \partial_{jj} v_i = \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v}, \end{aligned}$$

avendo utilizzato l'identità

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

9.1.1 Potenziali elettromagnetici

Partendo dalle definizioni dei potenziali elettromagnetici e dalle equazioni di Maxwell, con l'aiuto di alcune identità vettoriali, è possibile (**TODO ipotesi, elencare quelle necessarie alla derivazione**) scrivere delle equazioni delle onde per il potenziale vettore e per il potenziale scalare.

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= -\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{a} \\ \mathbf{b} &= \nabla \times \mathbf{a}\end{aligned}$$

Usando le equazioni costitutive

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e} \quad , \quad \mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$$

Potenziale vettore.

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \nabla \times \mathbf{a} \\ \mathbf{0} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{a} - \nabla \times \mathbf{b} = \\ &= -\Delta \mathbf{a} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \mu \nabla \times \mathbf{h} = \\ &= -\Delta \mathbf{a} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \mu(\partial_t \mathbf{d} + \mathbf{j}) = \\ &= -\Delta \mathbf{a} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \mu(\varepsilon \partial_t \mathbf{e} + \mathbf{j}) = \\ &= -\Delta \mathbf{a} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \mu\varepsilon(-\partial_t \nabla\varphi - \partial_{tt} \mathbf{a}) + \mu \mathbf{j} = \\ &= -\Delta \mathbf{a} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla\varphi + \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{a} - \mu \mathbf{j}\end{aligned}$$

Usando la condizione di gauge di Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi = 0 \quad ,$$

si ottiene un'equazione delle onde per il potenziale vettore

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a} = \mu \mathbf{j} \quad .$$

Potenziale scalare.

$$\mathbf{e} = \nabla\varphi - \partial_t \mathbf{a}$$

Calcolando la derivata nel tempo della condizione di gauge di Lorentz

$$\begin{aligned}0 &= \partial_t \left(\frac{1}{c^2} \partial_t \varphi + \nabla \cdot \mathbf{a} \right) = \\ &= \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \varphi + \nabla \cdot \partial_t \mathbf{a} = \\ &= \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \varphi - \nabla \cdot \nabla\varphi - \nabla \cdot \mathbf{e} = \\ &= \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \varphi - \Delta\varphi - \frac{\rho}{\varepsilon} =\end{aligned}$$

si arriva all'equazione delle onde per il potenziale scalare,

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \varphi - \Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad .$$

9.1.2 Campo elettrico e campo magnetico

Usando le definizioni dei campi fisici in termini dei potenziali elettromagnetici e la linearità (**TODO** *tutto deve essere lineare, anche le leggi costitutive*) delle operazioni, partendo dalle equazioni delle onde per i potenziali, si possono ricavare le equazioni delle onde per i campi fisici. **TODO** *Nell'ipotesi di proprietà costanti e uniformi*

Campo elettrico.

$$\begin{aligned}\square \mathbf{e} &= \square(-\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{a}) = \\ &= -\nabla\square\varphi - \partial_t\square\mathbf{a} = \\ &= -\nabla\frac{\rho}{\varepsilon} - \mu\partial_t \mathbf{j}.\end{aligned}$$

Campo magnetico.

$$\begin{aligned}\square \mathbf{b} &= \square\nabla \times \mathbf{a} = \\ &= \nabla \times \square\mathbf{a} = \\ &= \mu\nabla \times \mathbf{j}\end{aligned}$$

9.2 Onde elettromagnetiche piane

Harmonic decomposition of the electromagnetic field. EM field can be written as the superposition of plane waves (Fourier decomposition)

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\end{aligned}$$

Introducing this decomposition in Maxwell's equations with no free charge and current

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{d} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{e} + \partial_t \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{h} - \partial_t \mathbf{d} = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{E} - i\omega\mathbf{B} = \mathbf{0} \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{H} + i\omega\mathbf{D} = \mathbf{0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i\varepsilon\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{E} - i\omega\mathbf{B} = \mathbf{0} \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ i\frac{1}{\mu}\mathbf{k} \times \mathbf{B} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases}$$

- From Gauss' equations for the electric and the magnetic field

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{E}, \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{B}$$

- From Faraday and Ampère-Maxwell equations

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\mu\varepsilon\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{B}$$

It follows that:

- \mathbf{k} , \mathbf{E} , \mathbf{B} are orthogonal «RHS» set of vectors
- Relations between \mathbf{E} , \mathbf{B} , and \mathbf{k} and the speed of light

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = -c \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}$$

hold, with speed of light $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}$, and unit vector $\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$.

Proof using vector algebra identity

Recalling $c^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon}$ and

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \left[-c^2 \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{B} \right] = -\frac{c^2 |\mathbf{k}|^2}{\omega^2} \hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B})$$

Vector identity

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m = b_i a_m c_m - c_i a_m b_m = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

applied to $\hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B})$ gives

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}) = \underbrace{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B})}_{=0 \text{ since } \mathbf{k} \perp \mathbf{B}} \hat{\mathbf{k}} - \underbrace{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}})}_{=1} \mathbf{B} = -\mathbf{B},$$

and the original relation gives

$$\mathbf{B} = \mathbf{B} \frac{c^2 |\mathbf{k}|^2}{\omega^2},$$

and the relation between pulsation ω , wave vector \mathbf{k} and speed of light (EM radiation) c ,

$$c = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}.$$

9.2.1 Snell's law at an interface

Snell's law is derived here assuming isotropic linear media, so that

$$\begin{cases} \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) \end{cases}$$

and for harmonic plane EM waves

$$\begin{cases} \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_a e^{i(\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_a e^{i(\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{cases}$$

$$\mathbf{B}_a = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}}_a \times \mathbf{E}_a$$

$$\mathbf{E}_a = -c \hat{\mathbf{k}}_a \times \mathbf{B}_a$$

being index a representing the media involved: $a = 1$ for the medium with incident and reflected waves, $a = 2$ for the medium with the refracted wave.

Jump conditions of electromagnetic field at an interface with no charge or current surface density are given by conditions (4.2),

$$\begin{cases} \varepsilon_1 e_{n,1} = \varepsilon_2 e_{n,2} \\ e_{t_\alpha,1} = e_{t_\alpha,2} \\ b_{n,1} = b_{n,2} \\ \frac{1}{\mu_1} b_{t_\alpha,1} = \frac{1}{\mu_2} b_{t_\alpha,2} \end{cases}, \quad \alpha = 1 : 2$$

Definition of some vectors: $\hat{\mathbf{n}}$ unit normal vector, \mathbf{k} wave vector, $\hat{\mathbf{b}} = \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{k}}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{k}|}$ (singular only for normal incident ray),

$$\hat{\mathbf{c}} = \frac{\hat{\mathbf{b}} \times \mathbf{k}}{|\hat{\mathbf{b}} \times \mathbf{k}|}, \hat{\mathbf{t}} = \frac{\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{n}}}{|\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{n}}|}$$

Incident angle $\theta_{1,i}$ is the angle between $\hat{\mathbf{n}}$ and \mathbf{k} , s.t. $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{k} = \hat{\mathbf{b}} k \sin \theta_{1,i}$.

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{k}} = \cos \theta_{1,i} \hat{\mathbf{n}} + \sin \theta_{1,i} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\mathbf{c}} = -\sin \theta_{1,i} \hat{\mathbf{n}} + \cos \theta_{1,i} \hat{\mathbf{t}} \end{cases}, \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{n}} = \cos \theta_{1,i} \hat{\mathbf{k}} - \sin \theta_{1,i} \hat{\mathbf{c}} \\ \hat{\mathbf{t}} = \sin \theta_{1,i} \hat{\mathbf{k}} + \cos \theta_{1,i} \hat{\mathbf{c}} \end{cases}$$

The electromagnetic field can be written as

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_b \hat{\mathbf{b}} + E_c \hat{\mathbf{c}} = \\ &= E_b \hat{\mathbf{b}} - E_c \sin \theta_{1,i} \hat{\mathbf{n}} + E_c \cos \theta_{1,i} \hat{\mathbf{t}} \\ \mathbf{B} &= B_b \hat{\mathbf{b}} + B_c \hat{\mathbf{c}} = \\ &= \frac{E_c}{c} \hat{\mathbf{b}} - \frac{E_b}{c} \hat{\mathbf{c}} = \\ &= \frac{E_c}{c} \hat{\mathbf{b}} + \frac{E_b}{c} \sin \theta_{1,i} \hat{\mathbf{n}} - \frac{E_b}{c} \cos \theta_{1,i} \hat{\mathbf{t}}. \end{aligned}$$

so that jump relations become

$$\begin{cases} b : & E_{b,1} = E_{b,2} \\ n : & \dots \\ t : & \dots \end{cases}, \quad \begin{cases} b : & \dots \\ n : & \frac{E_{b,1}}{c_1} \sin \theta_{1,i} = \frac{E_{b,2}}{c_2} \sin \theta_{2,i} \\ t : & \dots \end{cases}$$

thus **Snell's law** follows

$$\frac{\sin \theta_{1,i}}{\sin \theta_{2,t}} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Incident, reflected and refracted wave. Wave at interface in medium 1 has the contribution of the incoming incident wave, and the reflected one.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{e}_i(\mathbf{r}, t) + \mathbf{e}_r(\mathbf{r}, t) = \\ &= \mathbf{E}_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{E}_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \\ &= (\mathbf{E}_i e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{E}_r e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}}) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_i &= k_{i,n} \hat{\mathbf{n}} + k_{i,t} \hat{\mathbf{t}} \\ \mathbf{k}_r &= k_{r,n} \hat{\mathbf{n}} + k_{r,t} \hat{\mathbf{t}} \end{aligned}$$

At the interface, $\mathbf{r}_s \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, and thus

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1(\mathbf{r}_s, t) &= (\mathbf{E}_i e^{ik_{i,t}x_t} + \mathbf{E}_r e^{ik_{r,t}x_t}) e^{-i\omega t} \\ \mathbf{e}_2(\mathbf{r}_s, t) &= \mathbf{E}_t e^{ik_{t,t}x_t} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

In order for the boundary conditions to be satisfied at all the points of the interface at each time,

$$k_{i,t} = k_{r,t} = k_{t,t} .$$

Exploiting the relation between the pulsation, the wave-length and the speed of light in media, $c_a = \frac{\omega}{|\mathbf{k}_a|} = \frac{c}{n_a}$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_i| &= |\mathbf{k}_r| \quad \rightarrow \quad k_{r,n} = -k_{i,n} \\ \frac{|\mathbf{k}_2|}{|\mathbf{k}_1|} &= \frac{c_1}{c_2} \\ \frac{k_{t,t}^2 + k_{t,n}^2}{k_{i,t}^2 + k_{i,n}^2} &= \frac{c_1^2}{c_2^2} \\ k_{i,n} &= |\mathbf{k}_i| \cos \theta_i \quad k_{i,t} = |\mathbf{k}_i| \sin \theta_i \\ k_{r,n} &= -|\mathbf{k}_r| \cos \theta_r \quad , \quad k_{r,t} = |\mathbf{k}_r| \sin \theta_r \\ k_{t,n} &= |\mathbf{k}_t| \cos \theta_t \quad k_{t,t} = |\mathbf{k}_t| \sin \theta_t \\ \begin{cases} E_n : & \varepsilon_1 (E_{i,c} \sin \theta_i + E_{r,c} \sin \theta_r) = \varepsilon_2 E_{t,c} \sin \theta_t \\ E_t : & E_{i,c} \cos \theta_i - E_{r,c} \cos \theta_r = E_{t,c} \cos \theta_t \\ E_b : & E_{i,b} + E_{r,b} = E_{t,b} \\ B_n : & B_{i,c} \sin \theta_i + B_{r,c} \sin \theta_r = B_{t,c} \sin \theta_t \\ B_t : & \frac{1}{\mu_1} (B_{i,c} \cos \theta_i - B_{r,c} \cos \theta_r) = \frac{1}{\mu_2} B_{t,c} \cos \theta_t \\ B_b : & \frac{1}{\mu_1} (B_{i,b} + B_{r,b}) = \frac{1}{\mu_2} B_{t,b} \end{cases} \end{aligned}$$

Writing the magnetic field as a function of the wave-vector and the magnetic field, it's possible to write 2 decoupled systems of equations

$$\begin{aligned} \begin{cases} E_n : & \varepsilon_1 (E_{i,c} \sin \theta_i + E_{r,c} \sin \theta_r) = \varepsilon_2 E_{t,c} \sin \theta_t \\ E_t : & E_{i,c} \cos \theta_i - E_{r,c} \cos \theta_r = E_{t,c} \cos \theta_t \\ B_b : & \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{E_{i,c}}{c_1} + \frac{E_{r,c}}{c_1} \right) = \frac{1}{\mu_2} \frac{E_{t,c}}{c_2} \end{cases} \\ \begin{cases} E_b : & E_{i,b} + E_{r,b} = E_{t,b} \\ B_n : & \frac{E_{i,b}}{c_1} \sin \theta_i + \frac{E_{r,b}}{c_1} \sin \theta_r = \frac{E_{t,b}}{c_2} \sin \theta_t \\ B_t : & \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{E_{i,b}}{c_1} \cos \theta_i - \frac{E_{r,b}}{c_1} \cos \theta_r \right) = \frac{1}{\mu_2} \frac{E_{t,b}}{c_2} \cos \theta_t \end{cases} \end{aligned}$$

The equations E_n and B_b are equivalent; E_b and B_n are equivalent as well, because of Snell's law. Thus, defining

$$\begin{aligned} r_c &:= \frac{E_{r,c}}{E_{i,c}} \quad r_b := \frac{E_{r,b}}{E_{i,b}} \\ t_c &:= \frac{E_{t,c}}{E_{i,c}} \quad t_b := \frac{E_{t,b}}{E_{i,b}} \end{aligned} ,$$

and $\alpha_i := \frac{1}{\mu_i c_i}$

(for P-polarization **todo** change index from c to p ; for S-polarization **todo** change index from b to s)

the systems of equations become

$$\begin{aligned} \begin{cases} E_t : & \cos \theta_i - \cos \theta_r r_c = \cos \theta_t t_c \\ B_b : & \alpha_1 + \alpha_1 r_c = \alpha_2 t_c \end{cases} \\ \begin{cases} E_b : & 1 + r_b = t_b \\ B_t : & \alpha_1 \cos \theta_i - \alpha_1 \cos \theta_r r_b = \alpha_2 \cos \theta_t t_b \end{cases} \end{aligned}$$

Calling $\theta_i = \theta_r = \theta_1$, $\theta_2 = \theta_t$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \\ -1 & \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_c \\ t_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} r_c \\ t_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}} \begin{bmatrix} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} & -\frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_2 \cos \theta_1 - \alpha_1 \cos \theta_2}{\alpha_2 \cos \theta_1 + \alpha_1 \cos \theta_2} \\ \frac{2\alpha_1 \cos \theta_1}{\alpha_2 \cos \theta_1 + \alpha_1 \cos \theta_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \frac{\alpha_2 \cos \theta_2}{\alpha_1 \cos \theta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_b \\ t_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} r_b \\ t_b \end{bmatrix} = \frac{1}{-\frac{\alpha_2 \cos \theta_2}{\alpha_1 \cos \theta_1} - 1} \begin{bmatrix} \frac{\alpha_2 \cos \theta_2}{\alpha_1 \cos \theta_1} & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1 \cos \theta_1 - \alpha_2 \cos \theta_2}{\alpha_1 \cos \theta_1 + \alpha_2 \cos \theta_2} \\ \frac{2\alpha_1 \cos \theta_1}{\alpha_1 \cos \theta_1 + \alpha_2 \cos \theta_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

that can be recast with the wave impedance Z ,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\mu_1 c_1} = \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}{\mu_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} =: \frac{1}{Z_1}, \\ \begin{bmatrix} r_c \\ t_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} \\ \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r_b \\ t_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \\ \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Energy balance and transmission coefficients. Energy balance for a domain collapsing on the interface reduces to power flux balance, namely

$$\oint_{\partial V} \mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0,$$

with $\mathbf{s} = \mathbf{e} \times \mathbf{h}$ the Poynting vector. For harmonic plane waves,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \\ &= \frac{1}{\mu} [\mathbf{E} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{E}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] \times [\mathbf{B} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{B}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] = \\ &= \frac{1}{\mu} [\mathbf{E} \times \mathbf{B} e^{i2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + c.c.] + \frac{1}{\mu} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}^* + c.c.] = \\ &= \dots + \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \left(\frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \right)^* = \\ &= \dots + \frac{1}{\mu c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \hat{\mathbf{k}} = \\ &= \dots + \frac{1}{\mu c} |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad = \dots + \alpha |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{k}}.$$

For each one of the two polarizations, the following holds ($\cos \theta$ comes from the dot product $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ appearing in the surface integral),

$$\alpha_1 \cos \theta_1 = \alpha_1 r_x^2 \cos \theta_1 + \alpha_2 t_x^2 \cos \theta_2,$$

i.e. the sum of reflected and transmitted power equals the incident power.

Proof of the power balance, for P-polarization

todo Here P is index c

Dividing by $\alpha_1 \cos \theta_1$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\alpha_1 \cos \theta_1} (\alpha_1 r_p^2 \cos \theta_1 + \alpha_2 t_p^2 \cos \theta_2) = \\
 & = \frac{(\alpha_1 \cos \theta_1 - \alpha_2 \cos \theta_2)^2}{(\alpha_1 \cos \theta_1 + \alpha_2 \cos \theta_2)^2} + \frac{\alpha_2 \cos \theta_2}{\alpha_1 \cos \theta_1} \frac{(2\alpha_1 \cos \theta_1)^2}{(\alpha_1 \cos \theta_1 + \alpha_2 \cos \theta_2)^2} = \\
 & = \frac{1}{(\alpha_1 \cos \theta_1 + \alpha_2 \cos \theta_2)^2} [\alpha_1^2 \cos^2 \theta_1 - 2\alpha_1 \alpha_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \alpha_2^2 \cos^2 \theta_2 + 4\alpha_1 \alpha_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2] = \\
 & = 1 .
 \end{aligned}$$

Parte II

Elettrotecnica

basics

04 feb 2025

0 min read

Approssimazione circuitale

Circuiti elettrici. *Condizioni per la validità dell'approssimazione circuitale; componenti elementari; regimi di utilizzo: stazionario, armonico (alternato), transitorio;*

Circuiti elettromagnetici. *Condizioni per la validità dell'approssimazione circuitale; es. trasformatori*

Circuito elettro-magneto-meccanici. *Es. semplici circuiti; motori elettrici e generatori*

basics

04 feb 2025

0 min read

10.1 Circuiti elettrici

Se il sistema di interesse soddisfa alcune condizioni, è possibile ridurre la teoria di campo dell'elettromagnetismo a una teoria circuitale. Quando possibile, cioè quando capace di descrivere adeguatamente il comportamento del sistema di interesse, l'approccio circuitale semplifica di molto la descrizione del problema, non richiedendo la soluzione di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali da risolvere nello spazio, ma la soluzione di equazioni differenziali ordinarie nelle incognite circuitali, che si riduce a un sistema algebrico, spesso lineare, in regime stazionario.

Giustificazione dell'approccio circuitale.

Componenti elementari di un circuito elettrico.

10.1.1 Validità dell'approccio circuitale

L'approccio circuitale consente di ridurre il problema elettromagnetico, in generale un problema di campo che richiede la soluzione di PDE, a un approccio «ai morsetti» **todo**, che richiede la soluzione di ODE.

Una rivisitazione dell'*equazione dell'energia* permette di valutare i regimi in cui è possibile usare un approccio circuitale a un sistema elettromagnetico.

In particolare, nell'equazione di bilancio dell'energia elettromagnetica

$$\frac{d}{dt} \int_V u = \oint_{\partial V} \mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{e} ,$$

viene indagato il termine di flusso alla frontiera, ricordando la definizione di vettore di Poynting $\mathbf{s} := \mathbf{e} \times \mathbf{h}$, e riscrivendo i campi elettrico e magnetico in funzione dei potenziali elettromagnetici, $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$, $\mathbf{e} = -\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{a}$,

$$\begin{aligned} - \oint_{\partial V} \mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= - \oint_{\partial V} (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \oint_{\partial V} (\nabla\varphi + \partial_t \mathbf{a}) \times \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \dots \\ &= \underbrace{\oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times (\varphi \mathbf{h})}_{=0 \text{ (Stokes' thm **todo** check)}} - \oint_{\partial V} \varphi \underbrace{\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\nabla \times \mathbf{h}}{\partial_t \mathbf{d} + \mathbf{j}}}_{\partial_t \mathbf{d} + \mathbf{j}} + \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_t \mathbf{a} \times \mathbf{h} = \\ &= - \oint_{\partial V} \varphi \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\partial_t \mathbf{d} + \mathbf{h} \times \partial_t \mathbf{a}) , \end{aligned}$$

e assumendo che il flusso di carica elettrica avvenga solo in corrispondenza di un numero finito di sezioni $S_k \in \partial V$ equipotenziali a potenziale $v_k = -\varphi_k$, costante sulle sezioni, e riconoscendo il flusso di carica elettrica attraverso la sezione S_k come la corrente $i_k = \int_{S_k} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, si può scrivere

$$- \oint_{\partial V} \mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sum_k v_k i_k - \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\partial_t \mathbf{d} + \mathbf{h} \times \partial_t \mathbf{a}) .$$

Il bilancio di energia elettromagnetica del sistema può quindi essere riscritto come

$$\frac{d}{dt} \int_V u = \sum_k v_k i_k - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{e} - \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\partial_t \mathbf{d} + \mathbf{h} \times \partial_t \mathbf{a}) .$$

Nelle condizioni in cui l'ultimo termine è nullo o trascurabile (**todo quali? Spendere due parole sulla validità dell'approssimazione, con analisi dimensionale? Fare esempio in cui l'approssimazione non funziona**), la variazione di energia interna al sistema è dovuta alla differenza della potenza in ingresso ai morsetti, e la dissipazione all'interno del volume (ad esempio dovuta alla conduzione non ideale in conduttori con resistività finita),

$$\dot{E}^{em} = P^{ext,vi} - \dot{D} ,$$

con $\dot{D} \geq 0$ per il secondo principio della termodinamica **todo aggiungere riferimento, e discussione**.

basics

04 feb 2025

1 min read

10.1.2 Induzione elettromagnetica nell'approssimazione circuitale

E' possibile applicare l'approssimazione circuitale anche in presenza di regioni in cui non è possibile trascurare il termine $\partial_t \mathbf{b}$, come ad esempio circuiti elettromagnetici che coinvolgono trasformatori e/o motori o generatori elettrici.

In queste situazioni, se è possibile identificare una regione V_0 dello spazio connessa nella quale il termine $\partial_t \mathbf{b} = \mathbf{0}$, e quindi $\nabla \times \mathbf{e} = \mathbf{0}$, in V_0 è possibile definire il campo elettrico in termini di un potenziale φ ,

$$\mathbf{e} = -\nabla\varphi \quad , \quad \mathbf{r} \in V_0 .$$

E' possibile calcolare le differenze di potenziale ai morsetti di un sistema in cui $\delta_t \mathbf{b} \neq 0$, racchiuso nel volume V_k , con la legge di Faraday,

$$\oint_{\ell_k} \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{t}} = -\frac{d}{dt} \int_{S_k} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} ,$$

dove il percorso chiuso $\ell_k = \ell_k^{cond} \cup \ell_k^{mors}$ descrive il conduttore in V_k chiuso dalla linea geometrica tra i morsetti. Se si può trascurare la resistività del conduttore in V_k , $\int_{\ell_k^{cond}} \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0$, la differenza di tensione ai morsetti vale

$$\Delta v_k = \int_{\ell_k^{mors}} \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{t}} = -\frac{d}{dt} \int_{S_k} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

basics

04 feb 2025

1 min read

10.1.3 Componenti elementari dei circuiti elettrici

Resistore ohmico

Un resistore di Ohm risulta dall'approssimazione circuitale di un materiale con equazione costitutiva lineare

$$\mathbf{e} = \rho_R \mathbf{j} ,$$

tra il campo elettrico \mathbf{e} e la densità di corrente \mathbf{j} , tramite la costante di proporzionalità ρ_R , la **resistività** del materiale. La corrente elettrica attraverso una sezione del componente è definita come il flusso di carica attraverso una sua sezione

$$i = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{t}} \simeq j A ,$$

Nell'ipotesi che il vettore densità di corrente si allineato con l'asse del componente e uniforme sulla sezione A , «piccola». Se il materiale non è in grado di accumulare carica, il bilancio di carica elettrica si traduce nella continuità della corrente elettrica attraverso le sezioni del conduttore.

Utilizzando l'equazione costitutiva su un elemento di lunghezza elementare $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{t}} d\ell$, e assumendo che il campo elettrico sia allineato con l'asse del componente, $\mathbf{e} = e\hat{\mathbf{t}}$ si può scrivere il lavoro elementare per unità di carica come

$$\delta v = \mathbf{e} \cdot d\mathbf{r} = e d\ell = \rho_R j d\ell = \frac{\rho_R d\ell}{A} i .$$

Da questa ultima equazione seguono le due leggi di Ohm, per resistori lineari.

Prima legge di Ohm. La differenza di potenziale tra due sezioni di un resistore lineare è proporzionale alla corrente che passa attraverso di esso,

$$\delta v = dR i .$$

Seconda legge di Ohm. La costante di proporzionalità che lega la differenza di potenziale e la corrente all'interno di un resistore ohmico, la **resistenza** del resistore, è proporzionale alla resistività e alla lunghezza del resistore, e inversamente proporzionale alla sua sezione,

$$dR = \frac{\rho_R d\ell}{A}.$$

Se le proprietà sono uniformi nel resistore, si possono integrare le relazioni elementari per ottenere la relazione tra grandezze finite,

$$\Delta V = R i$$

$$R = \frac{\rho_R \ell}{A}$$

todo (perché si può usare il potenziale? Nelle mie note avevo usato il simbolo v^* , come se fosse una definizione leggermente diversa per incorporare movimento e instazionarietà, che si riduce a v nel caso stazionario).

Condensatore.

Induttore.

Generatore di tensione.

Generatore di corrente.

basics

04 feb 2025

0 min read

10.1.4 Regimi di funzionamento in circuiti elettrici

basics

04 feb 2025

1 min read

10.2 Circuiti elettromagnetici

Sotto opportune ipotesi è possibile usare un modello circuitale anche per sistemi elettromagnetici, come ad esempio i trasformatori, o i motori elettrici.

- legge di Gauss per il campo magnetico

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$$

- legge di Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{h} - \partial_t \mathbf{d} = \mathbf{j}$$

Si aggiungono le seguenti ipotesi:

- materiali lineari non-dissipativi e non-dispersivi $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$ **todo** discutere questa ipotesi, insieme a isteresi materiali, cicli di magnetizzazione,....
- variazioni del campo \mathbf{d} nel tempo trascurabili, $\partial_t \mathbf{d} = \mathbf{0}$.

La legge di Gauss del campo magnetico in forma integrale permette di scrivere la **legge ai nodi** del flusso del campo magnetico per i circuiti magnetici,

$$0 = \oint_{\partial V} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sum_k \phi_k .$$

La legge di Ampère-Maxwell in forma integrale considerando:

- un percorso incatenato con il solo induttore

$$\int_{\ell_{ind}} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \int_{\ell_{12}} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \oint_{\ell_1} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_{S^{ind}} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} = Ni =: m$$

- un percorso incatenato con il traferro, aggirando l'induttore

$$0 = \int_{\ell_{traf}} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \int_{\ell_{21}} \hat{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \sum_k h_k \ell_k + \int_{\ell_{21}} \hat{h} \cdot \hat{\mathbf{t}}$$

e sommando le due equazioni, riconoscendo che i due integrali di linea sullo stesso percorso in versi opposti si annullano, si ottiene la **legge alle maglie** per i circuiti magnetici

$$\begin{aligned} m &= \int_{\ell_{ind}} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \int_{\ell_{traf}} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \\ &\approx \sum_{k \in \ell} h_k \ell_k = \sum_{k \in \ell} \frac{b_k}{\mu_k} \ell_k = \sum_{k \in \ell} \frac{\ell_k}{\mu_k A_k} \phi_k . \end{aligned}$$

Le leggi di Kirchhoff per i circuiti magnetici sono quindi

$$\begin{cases} \sum_{k \in N_j} \phi_k = 0 \\ m_{\ell_i} = \sum_{k \in \ell_i} \theta_k \phi_k , \end{cases}$$

avendo introdotto la riluttanza $\theta_k = \frac{\ell_k}{\mu_k A_k}$, l'inverso della permeanza $\Lambda_k = \theta_k^{-1}$.

basics

04 feb 2025

1 min read

10.2.1 Trasformatore

- flusso del campo magnetico, nell'ipotesi di campo uniforme, o in termini del campo medio

$$\phi = b A$$

- flusso del campo magnetico concatenato a N avvolgimenti

$$\psi = N \phi$$

- relazione tra tensione ai morsetti dell'induttore e flusso concatenato, applicando la *legge di Faraday solo in parte irrotazionali*

$$v = \dot{\psi}$$

Trasformatore ideale

In assenza di flussi dispersi e riluttanza nel traferro, la legge alle maglie nel traferro implica

$$0 = m_1 + m_2 = N_1 i_1 + N_2 i_2$$

Il flusso del campo magnetico può essere scritto in funzione del flusso concatenato agli avvolgimenti,

$$\phi = \frac{\psi_1}{N_1} = \frac{\psi_2}{N_2}$$

La derivata nel tempo di questa relazione, con numero di avvolgimenti costanti nel tempo, implica

$$\frac{v_2}{N_2} = \frac{v_1}{N_1}.$$

Trasformatore con flussi dispersi

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 - \phi_{1,d} = \phi \\ \phi_2 - \phi_{2,d} = \phi \\ m_1 = \theta_{1,d} \phi_{1,d} \\ m_2 = \theta_{2,d} \phi_{2,d} \\ m_1 + m_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow 0 = m_1 + m_2 = N_1 i_1 + N_2 i_2$$

$$\begin{aligned} 0 &= \phi_2 - \phi_1 - \phi_{2,d} + \phi_{1,d} \\ &= \phi_2 - \phi_1 - \frac{m_2}{\theta_{2,d}} + \frac{m_1}{\theta_{1,d}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\psi_2}{N_2} - \frac{m_2}{\theta_{2,d}} = \frac{\psi_1}{N_1} - \frac{m_1}{\theta_{1,d}}.$$

$$\rightarrow \frac{1}{N_2} \left(v_2 - \frac{N_2^2}{\theta_{2,d}} \frac{di_2}{dt} \right) = \frac{1}{N_1} \left(v_1 - \frac{N_1^2}{\theta_{1,d}} \frac{di_1}{dt} \right).$$

Trasformatore con flussi dispersi e riluttanza θ_{Fe} nel traferro

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 - \phi_{1,d} = \phi \\ \phi_2 - \phi_{2,d} = \phi \\ m_1 = \theta_{1,d} \phi_{1,d} \\ m_2 = \theta_{2,d} \phi_{2,d} \\ m_1 + m_2 = \theta_{Fe} \phi \end{array} \right.$$

todo finire e controllare i conti; disegnare circuito equivalente

10.3 Circuiti elettromeccanici

Alcuni sistemi di interesse e di enorme diffusione nella società moderna sfruttano le interazioni tra componenti fenomeni elettromagnetici e meccanici: un esempio fondamentale sono le macchine elettriche, alcune delle quali possono operare sia come motore (con la potenza fornita dal sistema elettrico e convertita in potenza meccanica) sia come generatore di energia elettrica (convertendo potenza meccanica in potenza elettrica).

In un sistema di induttori con mutua influenza, la differenza di tensione ai capi dell'induttore «potenziato» i è

$$v_i = \dot{\psi}_i = \frac{d}{dt} (N_i \phi_i) .$$

Il flusso concatenato dipende dall'effetto di tutti gli induttori del sistema (e del campo magnetico generato da eventuali cause esterne al sistema),

$$\phi_i = \sum_k \phi_{ik} = \sum_k \frac{1}{\theta_{ik}} m_k ,$$

avendo indicato con θ_{ik} la riluttanza del circuito tra l'induttore potenziante k e l'induttore potenziato i . Usando l'espressione della forza magneto-motrice $m_k = N_k i_k$, si può riscrivere l'espressione della differenza di tensione

$$v_i = \sum_k \frac{d}{dt} \left(\frac{N_i N_k}{\theta_{ik}} i_k \right) = \sum_k \frac{d}{dt} (L_{ik} i_k) .$$

In generale, in circuiti elettromeccanici le riluttanze non sono dei parametri costanti del sistema ma dipendono dallo stato «meccanico» del sistema, descritto qui dalle variabili \mathbf{x} ,

$$v_i = \sum_k \frac{d}{dt} \left(\frac{N_i N_k}{\theta_{ik}(\mathbf{x})} i_k \right) = \sum_k \frac{d}{dt} (L_{ik}(\mathbf{x}) i_k) .$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} (\mathbf{L}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{i}(t)) .$$

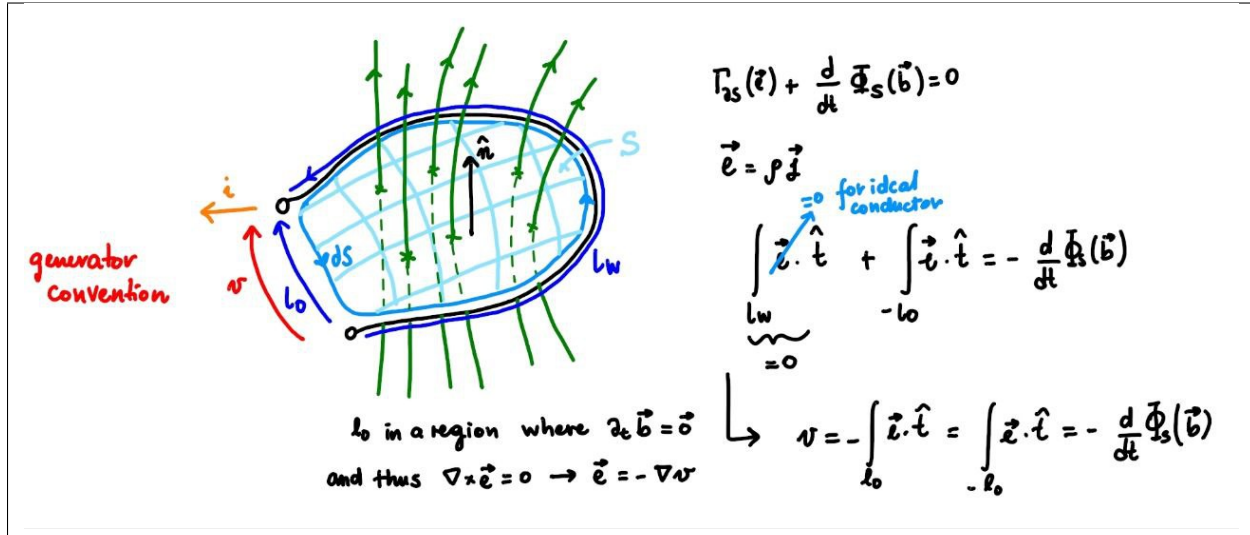
La matrice di induttanza \mathbf{L} è simmetrica **todo** *Dimostrazione*

Example 1

Given an constant and uniform magnetic field $\mathbf{b}(r) = \mathbf{B}$ in a region of space where a simple electric circuit is placed. The electric circuit consists in a simple circuit with a resistance R as a lumped load, and has a rectangular shape. Three sides are fixed, and the distance between the pair of parallel fixed sides is ℓ ; the fourth side can move and its distance between the parallel fixed side is x . The unit vector orthogonal to the rectangular surface enclosed in the circuit is $\hat{\mathbf{n}}$.

A mechanical system provides the prescribed motion $x(t) = x_0 + \Delta x \sin(\Omega t)$ to the moving side. It's asked to evaluate and discuss:

- voltage at the electric port of the load
- energy balance



Without considering the inductance of the simple circuit. Faraday's law

$$\Gamma_{\partial s_t}(\mathbf{e}) + \dot{\Phi}_{s_t}(\mathbf{b}) = 0 ,$$

provides the relation between the time derivative of the magnetic flux through two points of the electric circuit on opposite sides of the moving side of the circuit, corresponding to the voltage at the electric port of the load

$$v = - \int_{\ell_0} \mathbf{e} \cdot \hat{t} = - \dot{\Phi}_{s_t}(\mathbf{b}) = - \frac{d}{dt} (NBA) = -B\ell \dot{x} ,$$

being $N = 1$, and B constant and uniform if self-inductance is not considered. If the inductance of the circuit is neglected, from the constitutive equation of the resistance, $v = Ri$, and voltage Kirchhoff law, it follows that the current in the simple circuit is

$$i = \frac{v}{R} = - \dot{\Phi}_{s_t}(\mathbf{b}) = - \frac{B_n \dot{A}}{R} = - \frac{B_n \ell \dot{x}}{R} = - \frac{B_n \ell \Delta x}{R} \Omega \cos(\Omega t) .$$

The force acting on a wire conducting electric current i in a uniform magnetic field \mathbf{B} is

$$\mathbf{F} = -i\mathbf{B} \times \mathbf{l} .$$

Calling y the «positive» direction of the moving side, and assuming $\mathbf{B} = B\hat{z}$, with $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$,

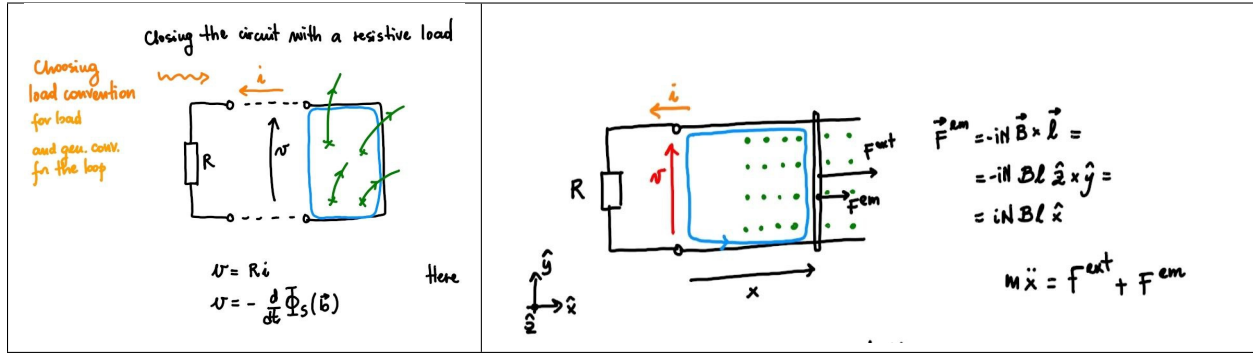
$$\mathbf{F} = iB\ell\hat{x} .$$

Assuming negligible mass of the moving wire, the second principle of dynamics reduces to force equilibrium, so that the external force provided to the wire must be opposite to the force acting on the wire due to the EM field

$$\mathbf{F}^e = -\mathbf{F} ,$$

and the external power reads

$$P^e = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}^e = -iB\ell \dot{x} = \frac{B^2 \ell^2 \dot{x}^2}{R} = \frac{B^2 \ell^2 (\Delta x)^2}{R} \Omega^2 \cos^2(\Omega t) .$$



Considering the inductance of the circuit and inertia of the wire. Considering the self-induced magnetic flux ϕ ,

$$v = -\frac{d}{dt} (N(\phi + BA)) ,$$

with $\phi = \frac{m}{\theta} = \frac{N}{\theta} i$. The expression of the voltage at the port of the circuit can be recast as

$$v = -\frac{d}{dt} (NBA) - \frac{d}{dt} \left(\frac{N^2}{\theta} i \right) = -\frac{d}{dt} (NBlx) - \frac{d}{dt} (Li) .$$

Now, assuming everything constant except for the x and i , and connecting this circuit to the load with constitutive equation, $v = Ri$, the dynamical equation of the electric circuit becomes

$$L \frac{di}{dt} + Ri = -NBl \frac{dx}{dt} .$$

The dynamical equation of the wire is

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F^{ext} + F^{EM} = \\ &= F^{ext} + iBl . \end{aligned}$$

Energy balance immediately follows after multiplying the circuit equation by i , the dynamical equation by \dot{x} and summing,

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m |\dot{x}|^2 + \frac{1}{2} Li^2 \right)}_{\text{energy: kin.+em.}} + \underbrace{Ri^2}_{\text{dissipation}} = \underbrace{F^{ext} \dot{x}}_{\text{ext. power done on the sys}} .$$

10.3.1 Sistemi elettromeccanici conservativi

Le equazioni che governano il sistema elettromeccanico, senza condensatori, in generale possono essere scritte come

$$\begin{cases} M\ddot{\mathbf{x}} + D\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}^{em} \\ \frac{d}{dt} (\mathbf{L}\mathbf{i}) + \mathbf{R}\mathbf{i} = \mathbf{e} \end{cases}$$

In termini di energia,

$$0 = \dot{\mathbf{x}}^T [M\ddot{\mathbf{x}} + D\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} - \mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f}^{em}] + \mathbf{i}^T \left[\frac{d}{dt} (\mathbf{L}\mathbf{i}) + \mathbf{R}\mathbf{i} - \mathbf{e} \right]$$

Nel caso di matrici di massa, smorzamento e rigidzza costanti, e usando la derivata del prodotto per ottenere un termine di derivata dell'energia degli induttori sfruttando la simmetria di \mathbf{L} ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \mathbf{i}^T \mathbf{L} \mathbf{i} \right] &= \mathbf{i}^T \frac{d}{dt} (\mathbf{L} \mathbf{i}) + \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \frac{d\mathbf{L}}{dt} \mathbf{i} = \\ &= \mathbf{i}^T \frac{d}{dt} (\mathbf{L} \mathbf{i}) + \sum_a \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_a} \mathbf{i} \dot{x}_a = \\ &= \mathbf{i}^T \frac{d}{dt} (\mathbf{L} \mathbf{i}) + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{i}^T \mathbf{L} \mathbf{i} \right) \dot{\mathbf{x}} . \end{aligned} \quad (10.1)$$

si può scrivere un'equazione di bilancio dell'energia meccanica macroscopica, $E^{mec,int}$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \mathbf{L} \mathbf{i} \right] - \dot{\mathbf{x}}^T (\mathbf{f}^{em} - \nabla E^{ind}(\mathbf{x}, \mathbf{i})) + \\ &\quad - \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}^{ext} - \mathbf{i}^T \mathbf{e} + \\ &\quad + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{i}^T \mathbf{R} \mathbf{i} . \end{aligned}$$

Nell'ipotesi che il processo sia conservativo, si ricava la forma delle forze dovute ai fenomeni elettromagnetici,

$$\mathbf{f}^{em} = \nabla_{\mathbf{x}} E^{ind}(\mathbf{x}, \mathbf{i}) . \quad (10.2)$$

10.3.2 Equazioni di governo

Usando l'espressione (10.2) delle azioni meccaniche dovute agli effetti elettromagnetici, del sistema sono

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} - \nabla_{\mathbf{x}} E^{ind}(\mathbf{x}, \mathbf{i}) = \mathbf{f}^{ext} \\ \frac{d}{dt} (\mathbf{L}(\mathbf{x}) \mathbf{i}) + \mathbf{R} \mathbf{i} = \mathbf{e} \end{cases}$$

o nel caso generale

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}} E^{ind}(\mathbf{x}, \mathbf{i}) = \mathbf{f}^{ext} \\ \frac{d}{dt} (\mathbf{L}(\mathbf{x}) \mathbf{i}) + \mathbf{R} \mathbf{i} = \mathbf{e} \end{cases}$$

10.3.3 Bilancio energetico

Energia meccanica macroscopica

Usando l'espressione (10.2) delle azioni meccaniche dovute ai fenomeni elettromagnetici, si può riscrivere la relazione (10.1), come un bilancio di energia meccanica macroscopica del sistema,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \mathbf{L} \mathbf{i} \right] = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{i}^T \mathbf{e} - \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{i}^T \mathbf{R} \mathbf{i} ,$$

e quindi

$$\dot{E}^{mec} = P^{ext} - \dot{D} .$$

Energia cinetica

L'energia meccanica macroscopica può essere scritta come la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale interna del sistema, $E^{mec} = K + V^{int}$. La derivata nel tempo dell'energia potenziale delle azioni interne è l'opposto della potenza delle azioni interne conservative, $P^{int,c} = -\dot{V}^{int}$; la dissipazione è l'opposto della potenza delle azioni interne non-conservative, $P^{int,nc} = -\dot{D}$. La potenza complessiva delle azioni interne può quindi essere scritta come

$$P^{int} = P^{int,c} + P^{int,nc} = -\dot{V}^{int} - \dot{D},$$

$$\dot{K} = \dot{E}^{mec} - \dot{V}^{int} = P^{ext} \underbrace{-\dot{D} - \dot{V}^{int}}_{=P^{int}}$$

Energia totale

Il primo principio della termodinamica fornisce l'equazione di bilancio dell'energia totale di un sistema chiuso,

$$\dot{E}^{tot} = P^{ext} + \dot{Q}^{ext}.$$

Energia interna

L'energia interna di un sistema è definita come la differenza dell'energia totale e dell'energia cinetica macroscopica, $E := E^{tot} - K$. L'equazione di bilancio dell'energia interna di un sistema chiuso è

$$\dot{E} = \dot{Q}^{ext} - P^{int}.$$

Energia interna termica (microscopica)

Se si definisce l'energia interna termica, corrispondente all'energia cinetica associata alle dinamiche microscopiche, come differenza tra energia interna e energia potenziale interna, o differenza di energia totale ed energia meccanica macroscopica,

$$E^{th} = E - V^{int} =$$

$$= E^{tot} - E^{mec},$$

l'equazione di bilancio dell'energia interna termica è

$$\dot{E}^{th} = \dot{Q}^{ext} + \dot{D}.$$

Dimostrazione

$$\dot{E}^{th} = \dot{E} - \dot{V}^{int} = \dot{Q}^{ext} - P^{int} - \dot{V}^{int} =$$

$$= \dot{Q}^{ext} + \dot{D} + \dot{V}^{int} - \dot{V}^{int} =$$

$$= \dot{Q}^{ext} + \dot{D}.$$

Con condensatori. todo

Equazioni

- Leggi ai nodi.

$$0 = \sum_{k \in B_j} \alpha_{jk} i_{jk}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

- Differenza di potenziale nodi-lati.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v}_n = \mathbf{v}$$

- Nodo a terra.

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_0 \cdot$$

- Equazioni costitutive.

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_R - \mathbf{R} \mathbf{i}_R \quad \text{resistenze}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_L - \frac{d}{dt} (\mathbf{L} \mathbf{i}_L) \quad \text{induttanze}$$

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt} (C \mathbf{v}_C) - \mathbf{i}_C \quad \text{condensatori}$$

Parte III

Metodi numerici

basics

04 feb 2025

1 min read

11.1 Poisson equation

General Poisson's problem

$$\begin{cases} -\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \\ + \text{b.c.} \end{cases}$$

with common boundary conditions

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{on } S_D \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{h} & \text{on } S_N \end{cases}$$

over Dirichlet and Neumann regions of the boundary.

Poisson's problem for Green's function, in infinite domain

$$-\nabla_{\mathbf{r}}^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

Green's function method

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}_0, t) u_i(\mathbf{r}_0, t) &= \int_{\mathbf{r} \in \Omega} u_i(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \\ &= - \int_{\mathbf{r} \in \Omega} u_i(\mathbf{r}, t) \nabla_{\mathbf{r}}^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \\ &= - \int_{\mathbf{r} \in \Omega} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (u_i \nabla_{\mathbf{r}} G - G \nabla_{\mathbf{r}} u_i) - \int_{\mathbf{r} \in \Omega} G \nabla^2 u_i = \\ &= - \oint_{\mathbf{r} \in \partial \Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot (u_i \nabla_{\mathbf{r}} G - G \nabla_{\mathbf{r}} u_i) + \int_{\mathbf{r} \in \Omega} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f_i(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

An integro-differential boundary problem can be written using boundary conditions. As an example, using Dirichlet and Neumann boundary conditions, the integro-differential problem reads

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}_0, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) + \int_{\mathbf{r} \in S_N} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r} \in S_D} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \\ = - \int_{\mathbf{r} \in S_D} \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r} \in S_N} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) + \int_{\mathbf{r} \in \Omega} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathbf{f}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Green's function of the Poisson-Laplace equation reads

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$

Green's function of the Laplace equation

$$-\nabla^2 G = 0 \quad \text{for } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$$

Solutions with spherical symmetry,

$$0 = \nabla^2 G = \frac{1}{r^2} (r^2 G')' \rightarrow G'(r) = \frac{A}{r^2} \rightarrow G(r) = -\frac{A}{r} + B$$

Choosing $B = 0$ s.t. $G(r) \rightarrow 0$ as $r \rightarrow \infty$, and integrating over a sphere centered in $r = 0$ to get $A = -\frac{1}{4\pi}$,

$$1 = \int_V \delta(r) = - \int_V \nabla^2 G = - \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla G = - \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \frac{A}{r^2} = -4\pi A$$

11.2 Helmholtz equation

todo from Fourier to Laplace transform in the first lines of this section

A Helmholtz's equation can be thought as the time Fourier transform of a wave equation,

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \\ + \text{b.c.} \\ + \text{i.c.} \end{cases}$$

Fourier transform in time of field $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ reads

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{F}\{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\} = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} d\omega$$

and, if $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ is compact in time, Fourier transform of its time partial derivatives read

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)\} &= \int_{t=-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} d\omega = \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} \Big|_{t=-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{t=-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} d\omega = \\ &= i\omega \mathcal{F}\{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\} \\ \mathcal{F}\{\partial_t^n \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\} &= (i\omega)^n \tilde{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

The differential problem in the transformed domain thus reads

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{u}} - \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}}$$

Green's function of Helmholtz's equation reads

$$G(\mathbf{r}, s) = \alpha^+ \frac{e^{\frac{s|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \alpha^- \frac{e^{-\frac{s|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$$

with $\alpha^+ + \alpha^- = \frac{1}{4\pi}$.

Being the Laplace transform,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{t=0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

the Laplace transform of a causal function with time delay $\tau \geq 0$ reads

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = \int_{t=0^-}^{+\infty} f(t-\tau) e^{-st} dt = \int_{z=-\tau}^{+\infty} f(z) e^{-s(z+\tau)} dz = e^{-s\tau} \int_{z=0}^{+\infty} f(z) e^{-sz} dz = e^{-s\tau} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

having used causality $f(t) = 0$ for $t < 0$. Laplace transform of Dirac's delta $\delta(t)$ reads

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{t=0^-}^{+\infty} \delta(t) dt = 1,$$

so that $e^{-s\tau} = e^{-s\tau} 1 = \mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\}$.

Thus, Green's function for the wave equation reads

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \alpha^+ \frac{\delta\left(t - t_0 + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \alpha^- \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$$

If $t \geq t_0$, and $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0)$ connects the past t_0 with the future t , the first term is not causal, and thus $\alpha^+ = 0$ and

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}.$$

Green's function of Helmholtz's equation

$$\frac{s^2}{c^2} G - \nabla^2 G = \delta(r)$$

$$G(r) = \frac{\alpha e^{kr} + \beta e^{-kr}}{r}$$

Proof:

- Gradient

$$\nabla G(r) = \hat{\mathbf{r}} \partial_r G = \hat{\mathbf{r}} \frac{\alpha(kr - 1)e^{kr} + \beta(-kr - 1)e^{-kr}}{r^2}$$

- Laplacian

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 G(r) &= \frac{1}{r^2} (r^2 G'(r))' = \\
 &= \frac{1}{r^2} (\alpha(kr - 1)e^{kr} + \beta(-kr - 1)e^{-kr})' = \\
 &= \frac{1}{r^2} (\alpha ke^{kr} + \alpha k^2 r e^{kr} - \alpha k e^{kr} - \beta k e^{-kr} + \beta k^2 r e^{-kr} + \beta k e^{-kr}) = \\
 &= \frac{1}{r} (\alpha e^{kr} + \beta e^{-kr}) k^2 = k^2 G(r) .
 \end{aligned}$$

and thus $k^2 G(r) - \nabla^2 G = 0$, for $r \neq 0$;

- Unity

$$1 = \int_V \delta(r) = \int_V (k^2 G - \nabla^2 G) = \int_V k^2 G - \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla G$$

the second term is the sum of two contributions of the form

$$\oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla G^\pm = \oint_{\partial V} \frac{\alpha^\pm (\pm kr - 1) e^{\pm kr}}{r^2} = 4\pi \alpha^\pm (\pm kr - 1) e^{\pm kr}$$

the first term is the sum of two contributions of the form

$$\begin{aligned}
 k^2 \int_V G(r) &= k^2 \int_V \frac{\alpha^\pm e^{\pm kr}}{r} = \\
 &= k^2 \alpha^\pm \int_{R=0}^r \int_{\phi=0}^\pi \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{e^{\pm kR}}{R} R^2 \sin \phi \, dR \, d\phi \, d\theta = \\
 &= k^2 \alpha^\pm 4\pi \int_{R=0}^r R e^{\pm kR} \, dR .
 \end{aligned}$$

the last integral can be evaluated with integration by parts

$$\begin{aligned}
 \int_{R=0}^r R e^{\pm kR} \, dR &= \left[\frac{1}{\pm k} e^{\pm kR} R \right]_{R=0}^r \mp \frac{1}{k} \int_{R=0}^r e^{\pm kR} \, dR = \\
 &= \frac{1}{\pm k} e^{\pm kr} r - \frac{1}{k^2} e^{\pm kR} + \frac{1}{k^2} =
 \end{aligned}$$

Thus summing everything together,

$$\begin{aligned}
 1 &= \alpha^+ \left[4\pi k^2 \left(\frac{r}{k} e^{kr} - \frac{1}{k^2} e^{kr} + \frac{1}{k^2} \right) - 4\pi (kr - 1) e^{kr} \right] + \alpha^- [\dots] = \\
 &= 4\pi (\alpha^+ + \alpha^-) .
 \end{aligned}$$

11.3 Wave equation

Wave equation general problem

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \\ + \text{b.c.} \\ + \text{i.c.} \end{cases}$$

Green's problem of the wave equation

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) - \nabla_{\mathbf{r}}^2 G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0)$$

Integration by parts

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{r}_\alpha, t_\alpha) \mathbf{u}(\mathbf{r}_\alpha, t_\alpha) &= \int_{t \in T} \int_{\mathbf{r} \in V} \delta(t - t_\alpha) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \\
 &= \int_{t \in T} \int_{\mathbf{r} \in V} \left\{ \frac{1}{c^2} \partial_{tt} G - \nabla_{\mathbf{r}}^2 G \right\} \mathbf{u} = \\
 &= \int_{t \in T} \int_{\mathbf{r} \in V} \left\{ \frac{1}{c^2} [\partial_t (\mathbf{u} \partial_t G - G \partial_t \mathbf{u}) + G \partial_{tt} \mathbf{u}] - \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\nabla_{\mathbf{r}} G \mathbf{u} - G \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{u}) - G \nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{u} \right\} = \\
 &= \int_{\mathbf{r} \in V} \frac{1}{c^2} [\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \partial_t G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_\alpha, t_\alpha) - G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_\alpha, t_\alpha) \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)] \Big|_{t_0}^{t_1} + \\
 &\quad + \int_{t \in T} \oint_{\mathbf{r} \in \partial V} \{ -\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_\alpha, t_\alpha) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_\alpha, t_\alpha) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \} + \\
 &\quad + \int_{t \in T} \int_{\mathbf{r} \in V} G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_\alpha, t_\alpha) \underbrace{\left\{ \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right\}}_{=\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)} \\
 \int_{t \in T} \int_{\mathbf{r} \in V} \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t - t_\alpha + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) &= \int_{\mathbf{r} \in V \cap B_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha| \leq c(t_\alpha - t)}} \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|} \mathbf{f}\left(\mathbf{r}, t_\alpha - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|}{c}\right)
 \end{aligned}$$

basics

04 feb 2025

1 min read

12.1 Elettrostatica

I problemi dell'elettrostatica sono governate dalle due equazioni di Maxwell per i campi \mathbf{e} , \mathbf{d} ,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{d} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{e} = \mathbf{0} \end{cases},$$

dotate delle opportune condizioni al contorno ed equazioni costitutive. Per un materiale lineare isotropo, ad esempio, $\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e}$. La condizione di irrotazionalità del campo elettrico, permette di scriverlo come gradiente di un potenziale scalare, $\mathbf{e} = -\nabla v$, e di ottenere l'equazione di Poisson,

$$-\nabla \cdot (\varepsilon \nabla v) = \rho .$$

12.1.1 Sorgente

$$\mathbf{e}(r) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}} v(\mathbf{r})$$

$$\varepsilon v(\mathbf{r}) = \frac{q_i}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

12.1.2 Dipolo

Un dipolo è definito come due cariche di intensità uguale e contraria $-q_2 = q_1 = q > 0$, nei punti dello spazio $P_1, P_2 = P_1 + \mathbf{l}$, nelle condizioni limite $|\mathbf{l}| \rightarrow 0, q \rightarrow \infty$, in modo tale da avere $q|\mathbf{l}|$ finito, $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$.

Il potenziale del dipolo è dato dal principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti,

$$\begin{aligned} \varepsilon v(\mathbf{r}) &= -\frac{q}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{l}}{2}|} + \frac{q}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{l}}{2}|} = \\ &= \dots \\ &= \frac{q}{4\pi} \left(-\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot \frac{\mathbf{l}}{2} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot \frac{\mathbf{l}}{2} + o(|\mathbf{l}|) \right) = \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot \mathbf{p}, \end{aligned}$$

avendo definito il vettore momento dipolo $\mathbf{P} = q\mathbf{l}$.

Polarizzazione - Potenziale generato da una distribuzione di dipoli.

$$d\mathbf{P} = \mathbf{p} \Delta V$$

$$\varepsilon v_P(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0 \in V_0} \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}_0) dV_0$$

$$\begin{aligned} \partial_i |\mathbf{r}|^2 &= 2x_i \\ &= 2|\mathbf{r}| \partial_i |\mathbf{r}| \quad \rightarrow \quad \partial_i |\mathbf{r}| = \frac{x_i}{|\mathbf{r}|} \end{aligned}$$

$$\partial_i |\mathbf{r}|^n = n|\mathbf{r}|^{n-1} \partial_i |\mathbf{r}| = nx_i |\mathbf{r}|^{n-2}$$

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}_0) &= \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}_0) = \\ &= \nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \mathbf{p}(\mathbf{r}_0) \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}_0) = \end{aligned}$$

e quindi

$$4\pi \varepsilon v_P(\mathbf{r}) = \oint_{\mathbf{r}_0 \in \partial V_0} \frac{\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \oint_{\mathbf{r}_0 \in V_0} \frac{\nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

I due contributi hanno la forma di sorgenti, essendo termini proporzionali a $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$. Il potenziale dovuto alla densità di volume di dipoli equivale alla somma dei due contributi delle cariche di:

- polarizzazione di superficie $\sigma_p = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}$
- polarizzazione di volume $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{p}$

Oss. Se la polarizzazione è uniforme nel volume, il contributo della polarizzazione nel volume si annulla e rimane solo il contributo della polarizzazione sul contorno del volume.

Oss. Legge di Gauss per il campo elettrico,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{e} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho = \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_l + \rho_p) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_l - \nabla \cdot \mathbf{p}) \\ \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p}) &= \rho_l \\ \nabla \cdot \mathbf{d} &= \rho_l\end{aligned}$$

Parte IV

Appendici

basics

04 feb 2025

0 min read

CAPITOLO 13

Ottica

example-0

example-0 (*ch/circuits-electromechanic*), [53](#)