

---

# Fisica per le superiori

**basics**

**28 nov 2024**



<b>I</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Programma</b>	<b>7</b>
<b>II</b>	<b>Introduzione alla fisica</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Introduzione alla fisica</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Grandezze fisiche</b>	<b>13</b>
3.1	Spazio . . . . .	14
3.2	Quantità di materia . . . . .	14
3.3	Tempo . . . . .	14
3.4	Temperatura . . . . .	15
3.5	Carica e corrente elettrica . . . . .	15
3.6	Quantità di sostanza, la mole . . . . .	15
3.7	Intensità luminosa . . . . .	15
<b>III</b>	<b>Meccanica classica</b>	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>Meccanica classica</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Introduzione alla meccanica classica</b>	<b>21</b>
5.1	Breve storia . . . . .	21
5.2	Modelli . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Cinematica</b>	<b>25</b>
6.1	Cinematica del punto . . . . .	26
6.2	Cinematica di un corpo rigido . . . . .	28
6.3	Cinematica dei sistemi deformabili . . . . .	30
6.4	Cinematica relativa . . . . .	30
<b>7</b>	<b>Azioni</b>	<b>31</b>
7.1	Forza, momento di una forza, azioni distribuite . . . . .	31
7.2	Lavoro e potenza . . . . .	33
7.3	Azioni conservative . . . . .	34
7.4	Esempi di forze . . . . .	35

<b>8</b>	<b>Statica</b>	<b>41</b>
8.1	Statica del punto . . . . .	41
8.2	Statica di un corpo rigido . . . . .	42
8.3	Statica dei mezzi deformabili . . . . .	42
8.4	Problemi . . . . .	43
<b>9</b>	<b>Inerzia</b>	<b>51</b>
9.1	Massa e distribuzione di massa . . . . .	51
9.2	Quantità dinamiche . . . . .	51
9.3	Inerzia e grandezze dinamiche di un punto . . . . .	52
9.4	Inerzia e grandezze dinamiche di un sistema esteso con distribuzione discreta di massa . . . . .	52
9.5	Inerzia e grandezze dinamiche di un sistema esteso con distribuzione continua di massa . . . . .	53
<b>10</b>	<b>Dinamica</b>	<b>55</b>
10.1	Principi della dinamica di Newton . . . . .	56
10.2	Equazioni cardinali della dinamica per sistemi chiusi . . . . .	58
10.3	Leggi di conservazione . . . . .	62
10.4	Equazioni cardinali della dinamica per sistemi aperti . . . . .	62
10.5	Collisioni . . . . .	65
10.6	Gravitazione . . . . .	76
<b>IV</b>	<b>Termodinamica</b>	<b>81</b>
<b>11</b>	<b>Introduzione alla termodinamica</b>	<b>83</b>
11.1	Breve storia della termodinamica . . . . .	84
11.2	Esperienze ed esperimenti . . . . .	86
11.3	Termodinamica e teoria atomica . . . . .	92
11.4	Concetti in termodinamica . . . . .	92
<b>12</b>	<b>Principi della termodinamica</b>	<b>95</b>
12.1	Principio di Lavoisier . . . . .	96
12.2	Primo principio della termodinamica . . . . .	96
12.3	Gibbs: energia interna, regola delle fasi e funzioni multi-variabili . . . . .	96
12.4	Diagrammi termodinamici . . . . .	102
12.5	Secondo principio della termodinamica . . . . .	103
12.6	Sistemi aperti . . . . .	105
<b>13</b>	<b>Stati della materia</b>	<b>107</b>
13.1	Gas ideali . . . . .	107
13.2	Aria umida . . . . .	113
13.3	Solidi elastici . . . . .	117
<b>14</b>	<b>Fondamenti di fisica tecnica</b>	<b>121</b>
14.1	Cicli termodinamici . . . . .	122
14.2	Macchina termica di Carnot . . . . .	122
14.3	Secondo principio della termodinamica per cicli termodinamici . . . . .	122
14.4	Ciclo Otto . . . . .	123
14.5	Ciclo Diesel . . . . .	124
14.6	Ciclo Joule-Brayton . . . . .	125
14.7	Ciclo Rankine . . . . .	126
14.8	Problemi . . . . .	126
<b>15</b>	<b>Meccanismi di trasmissione del calore</b>	<b>127</b>

<b>V</b>	<b>Elettromagnetismo</b>	<b>129</b>
<b>16</b>	<b>Introduzione all'elettromagnetismo</b>	<b>131</b>
16.1	Breve storia dell'elettromagnetismo . . . . .	131
16.2	Esperienze ed esperimenti . . . . .	132
16.3	Problemi . . . . .	134
<b>17</b>	<b>Fondamenti di elettromagnetismo</b>	<b>137</b>
17.1	Elettrostatica . . . . .	138
17.2	Corrente elettrica . . . . .	145
17.3	Magnetismo ed elettromagnetismo in regime stazionario . . . . .	147
17.4	Induzione ed elettromagnetismo . . . . .	151
<b>18</b>	<b>Fondamenti di elettrotecnica</b>	<b>153</b>
18.1	Circuiti elettrici . . . . .	154
18.2	Circuiti magnetici . . . . .	155
18.3	Sistemi elettromeccanici e macchine elettriche . . . . .	156
<b>19</b>	<b>Onde elettromagnetiche</b>	<b>157</b>
<b>VI</b>	<b>Fisica moderna</b>	<b>159</b>
<b>20</b>	<b>Fisica del XX secolo</b>	<b>161</b>
20.1	Struttura del capitolo . . . . .	161
<b>21</b>	<b>Introduzione alla fisica del XX secolo</b>	<b>165</b>
<b>22</b>	<b>Radioattività</b>	<b>167</b>
22.1	Storia . . . . .	167
22.2	Applicazioni . . . . .	169
22.3	Riferimenti . . . . .	169
22.4	Esercizi . . . . .	170
<b>23</b>	<b>Fenomeni termo-elettrici nella materia</b>	<b>171</b>
<b>24</b>	<b>Fotografia</b>	<b>173</b>
<b>25</b>	<b>Sviluppi dell'astronomia</b>	<b>175</b>
25.1	Breve storia . . . . .	175
<b>VII</b>	<b>Indice</b>	<b>177</b>
<b>26</b>	<b>Indice</b>	<b>179</b>
	<b>Proof Index</b>	<b>181</b>



**basics-books project.** Questo materiale fa parte del progetto **basics-books**. Il materiale prodotto è navigabile partendo dalla [landing page](#), e pubblicamente disponibile nel [repository](#).

In particolare questo libro fa parte del materiale pensato per le **scuole superiori**. Il materiale è disponibile:

- [versione in .pdf](#) scaricabile
- in versione online all'indirizzo: <https://basics2022.github.io/bbooks-physics-hs/intro.html>





## **Parte I**

# **Introduzione**



$()=$



# CAPITOLO 1

---

## Programma

---



## **Parte II**

# **Introduzione alla fisica**





---

### Introduzione alla fisica

---

- Metodo scientifico:
  - ricerca di principi fisici in accordo con le attività sperimentali
  - deduzione di una teoria, a partire dai principi
- Grandezze fisiche:
  - fondamentali e derivate
    - \* lunghezza, aree e volumi
    - \* massa e densità
    - \* tempo
  - processo e strumenti di misura:
    - \* logica **todo** ?
    - \* analisi dati, errori
- **Astrazione** e costruzione di **modelli**, con il linguaggio matematico
- Rappresentazione dei dati
  - ...



---

### Grandezze fisiche

---

- Come conosciamo il mondo? Come misuriamo il mondo?
- Necessità di avere delle grandezze di riferimento stabili o facilmente riproducibili in maniera precisa, da usare come unità di misura delle grandezze fisiche.
- Nell'antichità, dall'esperienza:
  - spazio:
    - \* importanza di misurare le distanze (es. distanze da percorrere), le aree (es. misura dei campi,...), e i volumi
    - \* grandezze di riferimento: lunghezze ideali di parti anatomiche umane: cubito, pollice, piede,...
  - tempo:
    - \* alternanza di luce e buio, alternanza delle stagioni, alternanza di configurazioni degli astri osservati dalla terra; queste alternanze scandiscono
    - \* grandezze di riferimento: intervalli temporali scanditi dalla natura
  - peso:
    - \* misura della quantità di merce, quantità di denaro o materiali preziosi, per le prescrizioni mediche (apothecary,...)
    - \* grandezze di riferimento: grano (basato su un seme ideale di cereale), libbra (dallo strumento usato per la misura del peso/massa, *libra* = bilancia)
- In epoca moderna:
  - aggiornamento delle grandezze di riferimento
    - \* Parigi tra fine XVIII e XIX secolo:
      - lunghezza: metro (1791) come  $1/10.000.000$  la distanza tra l'equatore e il polo nord sul meridiano terrestre passante per Parigi
      - tempo: **todo**
      - **todo**

- nuove grandezze fisiche misurate nelle nuove scienze, chimica, termodinamica ed elettromagnetismo:
  - \* quantità di sostanza
  - \* temperatura
  - \* corrente elettrica
  - \* luminosità
- XX-XXI secolo: continuo aggiornamento delle unità di misura, usando definizioni più precise e replicabili, tramite misure non disponibili solo qualche decennio prima

### 3.1 Spazio

### 3.2 Quantità di materia

### 3.3 Tempo

#### Prime esperienze e strumenti.

- tempo scandito dall'astronomia:
  - osservazioni astronomiche degli astri
  - alternanza stagioni
  - alternanza luce/buio e meridiana
  - astrolabio
- primi strumenti rudimentali
  - orologio ad acqua
  - orologio a candela e clessidra
- orologi meccanici:
  - a pendolo
  - a molla
- orologi a batteria,
  - al quarzo, digitali,...

#### Ma cos'è il tempo?

- Kairos e Chronos, come percezione personale e percezione assoluta
- Newton e la formulazione della meccanica con spazio e tempo assoluti, il tempo come misurato dall'orologio meccanico allora disponibile
- Relatività di Einstein: la misura del tempo dipende dall'osservatore; spazio e tempo non sono più assoluti; assoluta - indipendente dall'osservatore - è la misura della velocità della luce per ogni osservatore

### **3.4 Temperatura**

### **3.5 Carica e corrente elettrica**

### **3.6 Quantità di sostanza, la mole**

### **3.7 Intensità luminosa**



## **Parte III**

# **Meccanica classica**





---

## Meccanica classica

---

La meccanica classica si occupa del moto **todo**

La meccanica classica fu sviluppata da Newton nel XVII secolo, e presentata nei *Principi matematici di filosofia naturale* (1687) **todo** Dire due parole su *Principi matematici di filosofia naturale*

L'opera di Newton **todo** usa i metodi della geometria analitica introdotti da Cartesio, e viene sviluppata in accordo con le osservazioni astronomiche, come le leggi di Keplero, e le esperienze di Galileo sul principio di inerzia, sulla caduta dei gravi (**todo** anche se probabilmente era lo studio del rotolamento di corpi su piani inclinati) e sull'isocronismo delle piccole oscillazioni libere di un pendolo (**todo** cosa c'entra? Isocronismo come principio alla base del principio di funzionamento dei primi orologi meccanici, a gravità o a molla, con regolazione tramite scappamento; lo stesso principio, anche se migliorato, degli orologi meccanici contemporanei)

A partire dal principio di conservazione della massa di sistemi chiusi e da tre principi della dinamica, Newton formula una teoria capace di descrivere il moto dei corpi in termini usando concetti definiti nelle prime pagine della sua opera, come:

- lo spazio assoluto, inteso come uno spazio euclideo o un sottoinsieme dello spazio euclideo **todo** ref
- il tempo assoluto, in contrapposizione con il tempo percepito dagli individui (che può sembrare scorrere più velocemente o più lentamente a seconda dell'individuo, del divertimento o della noia provata,...) **todo** ref, e discussione su cos'è il tempo e come si misura
- la massa, intesa come la quantità di materia di un sistema **todo** come la misura Newton?
- la quantità di moto, intesa come il prodotto di massa e velocità del centro di massa del sistema **todo** ok, ma cos'è il centro di massa? E' proprio questa la definizione?
- le forze, intese come le azioni che possono far cambiare la quantità di moto di un sistema.



---

## Introduzione alla meccanica classica

---

- Prime esperienze:
  - astronomia
  - Galileo, la relatività, gravità
  - Hooke, le molle e i dinamometri
- Grandezze fisiche, strumenti di misura e concetti:
  - spazio, tempo, massa; velocità, accelerazione, quantità di moto,...
  - cos'è lo spazio? cos'è il tempo? cos'è la massa? cos'è una forza?

### 5.1 Breve storia

#### 5.1.1 Osservazioni astronomiche

- leggi di Keplero

#### 5.1.2 Galileo

- inerzia e relatività
- esperimenti sulla caduta dei gravi
- pendolo
- osservazioni astronomiche: lune di Giove e verifica della legge di Keplero?

### 5.1.3 Newton

- grandezze e concetti per lo sviluppo della teoria:
  - spazio e tempo assoluti; massa come quantità di materia
    - \* ma cosa sono? o meglio, come si misurano? Cenni agli orologi meccanici (pendolo, molle ed escapement clocks), per la misura del tempo assoluto
    - \* modelli e astrazione
  - equazioni della dinamica in termini di forza che causa la quantità di moto
- strumenti matematici:
  - dalla geometria analitica al calcolo infinitesimale
- legge di gravitazione universale: l'origine del moto dei gravi è la stessa del moto dei corpi celesti

## 5.2 Modelli

Muovere in una sezione «Introduzione alla meccanica», per rendere lo schema uniforme con Termodinamica ed Elettromagnetismo: prime esperienze; approccio di Newton (grandezze fisiche e concetti); modelli

Quando si costruisce una teoria scientifica, è spesso necessario compiere uno sforzo di astrazione (**todo** *come conosciamo?* *Discorso filosofico...*), di modellazione dei fenomeni di interesse. Un buon modello è in grado di rappresentare con la precisione (**todo** *o accuratezza?*) richiesta il fenomeno studiato, essere in accordo con attività sperimentali e garantire capacità di previsione che coinvolgono tali fenomeni.

Nello studio della meccanica e della fisica in generale, si è soliti distinguere gli elementi oggetti di studio da tutti gli altri elementi:

- **sistema**, unione degli elementi oggetti di studio
- **ambiente esterno**, tutto quello che non fa parte del sistema

In meccanica, è necessario uno sforzo di modellazione per costruire un modello matematico che rappresenti:

- i componenti meccanici, che costituiscono il sistema
- le connessioni tra componenti meccanici del sistema, o le connessioni con l'ambiente esterno
- le azioni che operano sul sistema, dovute alle interazioni del sistema con l'esterno o scambiate tra componenti del sistema

A seconda del livello di dettaglio richiesto, si possono definire diversi modelli di componenti meccanici in base a:

- dimensioni:
  - sistemi puntiformi, di dimensioni trascurabili per il problema di interesse
  - sistemi estesi, di dimensioni non trascurabili per il problema di interesse; a seconda della loro deformabilità e/o del livello di dettaglio dell'analisi:
    - \* rigidi
    - \* deformabili
- inertia:
  - massa non trascurabile
  - massa trascurabile

**Esempio.** Analisi di un aereo:

- per lo studio di traiettorie e prestazioni, può essere considerato come un sistema puntiforme
- per uno studio preliminare di equilibrio e dinamica del velivolo, può essere usato un modello esteso rigido
- per lo studio accurato dell'equilibrio, della dinamica del volo e del progetto aero-servo-elastico l'aereo viene modellato come un insieme di elementi: viene usato un modello esteso deformabile dotato di massa per molti elementi strutturali, connessi tramite vincoli



La cinematica si occupa della descrizione del moto dei sistemi, senza indagarne le cause. La cinematica si occupa della descrizione dello stato di un sistema, e della sua variazione, nello spazio.

La **configurazione di un sistema** è definita da un insieme di variabili indipendenti, o coordinate, dette **gradi di libertà**. Il numero di gradi di libertà di un sistema dipende dalla dimensione dello spazio nel quale avviene il moto, dal numero e dal tipo degli elementi che lo compongono e dai vincoli che connettono gli elementi del sistema tra di loro o con l'ambiente esterno. In generale, in meccanica classica lo **stato di un sistema** è definito dalla sua configurazione e dalla derivata prima nel tempo delle variabili che definiscono i gradi di libertà: questo è sensato per sistemi meccanici la cui dinamica è governata da equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine.

La configurazione di un **punto** libero nello **spazio euclideo**  $E^n$  ( $n = 2$  piano,  $n = 3$  spazio) è definita dalla sua posizione nello spazio, tramite un insieme di  $n$  coordinate:

- un punto libero nel piano ha 2 gradi di libertà (traslazione);
- un punto libero nello spazio ha 3 gradi di libertà (traslazione).

La configurazione di un **corpo rigido** è definita dalla posizione di un suo punto nello spazio e dalla sua orientazione:

- un corpo rigido nel piano ha 3 gradi di libertà, 2 per definire la posizione di un suo punto nello spazio (traslazione) e 1 per definire la sua orientazione (rotazione) rispetto a un asse ortogonale al piano;
- un corpo rigido nello spazio ha 6 gradi di libertà, 3 per definire la posizione di un suo punto nello spazio (traslazione) e 3 per definire la sua orientazione (rotazione).

## 6.1 Cinematica del punto

La cinematica di un punto  $P(t)$  è completamente definita dalla sua posizione nello spazio in funzione del tempo.

**Posizione di un punto.**  $P(t) - O = \vec{r}_P(t)$

**Velocità di un punto.**  $\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt}$

**Accelerazione di un punto.**  $\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_P}{dt^2}$

### 6.1.1 Moti particolari

#### Moto non accelerato

Un moto non accelerato di un punto  $P$  rispetto a un sistema di riferimento con origine in  $O$  può essere definito dalla condizione di accelerazione nulla

$$\vec{a}_P = \ddot{\vec{r}}_P(t) = \vec{0} ,$$

la cui integrazione due volte in tempo fornisce le leggi della velocità e dello spazio

$$\begin{cases} \vec{v}_P(t) &= \vec{c}_1 \\ \vec{r}_P(t) &= \vec{c}_1 t + \vec{c}_2 . \end{cases}$$

**todo** dimostrazione come esercizio con procedimento

Si nota che la condizione di accelerazione nulla implica la condizione di velocità costante. **todo**

accompagnata da condizioni tra di loro compatibili (**todo** fare esempio di condizioni non compatibili, es. velocità diverse in due istanti temporali diversi) che identifichino unicamente il moto, come possono essere ad esempio:

- posizione e velocità a un istante temporale

$$\begin{cases} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

Le leggi del moto possono diventare

$$\begin{cases} \vec{v}_P &= \vec{v}_0 \\ \vec{r}_P(t) &= \vec{v}_0 (t - t_0) + \vec{r}_0 , \end{cases}$$

**todo** dimostrazione come esercizio con procedimento

- posizione in due istanti temporali

$$\begin{cases} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \\ \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1 \end{cases}$$

Le leggi del moto possono diventare

$$\begin{cases} \vec{v}_P &= \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{t_1 - t_0} \\ \vec{r}_P(t) &= \vec{v}_P (t - t_0) + \vec{r}_0 , \end{cases}$$

**todo** dimostrazione come esercizio con procedimento



## Moto uniformemente accelerato

Un moto uniformemente accelerato di un punto  $P$  rispetto a un sistema di riferimento con origine in  $O$  può essere definito dalla condizione di accelerazione costante

$$\vec{a}_P = \ddot{\vec{r}}_P(t) = \vec{a} ,$$

la cui integrazione due volte in tempo fornisce le leggi della velocità e dello spazio

$$\begin{cases} \vec{v}_P(t) &= \vec{a}t + \vec{c}_1 \\ \vec{r}_P(t) &= \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{c}_1 t + \vec{c}_2 . \end{cases}$$

**todo** dimostrazione come esercizio con procedimento

accompagnata da condizioni tra di loro compatibili che identifichino unicamente il moto, come possono essere ad esempio:

- posizione e velocità a un istante temporale

$$\begin{cases} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

Le leggi del moto possono diventare

$$\begin{cases} \vec{v}_P(t) &= \vec{a}t + \vec{v}_0 \\ \vec{r}_P(t) &= \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2 + \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{r}_0 , \end{cases}$$

**todo** dimostrazione come esercizio con procedimento

- posizione in due istanti temporali... **todo**

**todo** dimostrazione come esercizio con procedimento

## Moto circolare

La cinematica di un punto su una traiettoria circolare (**todo** è un vincolo!) può essere rappresentato usando un sistema di **coordinate polari** con origine coincidente con il centro della circonferenza

$$r = R , \quad \theta_P(t) = \text{**todo**}$$

o in coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x_P(t) = R \cos \theta_P(t) \\ y_P(t) = R \sin \theta_P(t) \end{cases}$$

che permettono di identificare il punto  $P$  con il raggio vettore rispetto all'origine

$$\vec{r}_P = R \cos \theta_P(t) \hat{x} + R \sin \theta_P(t) \hat{y} .$$

- Definizione vettori  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  **todo** \*dipendenza di questi versori dalla posizione di  $P$  nello spazio, e quindi in generale dal tempo
- La velocità e l'accelerazione del punto **todo**
  - direzione e modulo di velocità e accelerazione

$$\begin{cases} \vec{v}_P(t) &= R\dot{\theta}(t) (-\sin \theta_P(t) \hat{x} + \cos \theta_P(t) \hat{y}) = R\dot{\theta}(t) \hat{\theta}(t) \\ \vec{a}_P(t) &= R\ddot{\theta}(t) (-\sin \theta_P(t) \hat{x} + \cos \theta_P(t) \hat{y}) + \\ &\quad + R\dot{\theta}^2(t) (-\cos \theta_P(t) \hat{x} - \sin \theta_P(t) \hat{y}) = R\ddot{\theta}(t) \hat{\theta}(t) - R\dot{\theta}^2(t) \hat{r}(t) . \end{cases}$$

### Moto circolare uniforme

Il moto circolare uniforme ha modulo della velocità costante,

$$|\vec{v}_P| = |R\dot{\theta}_P|$$

e la derivata nel tempo della coordinata  $\theta_P$  è costante **todo**

- **todo** pulsazione, periodo, frequenza,...

### Moto armonico lungo un segmento

Un moto armonico lungo un segmento può essere definito come la proiezione di un punto che compie un moto circolare uniforme su una circonferenza che ha il segmento come diametro **todo**

## 6.1.2 Problemi

basics

28 nov 2024

2 min read

## 6.2 Cinematica di un corpo rigido

La cinematica di corpo rigido è definita dalla posizione di un suo punto materiale e dalla propria orientazione in funzione del tempo. In generale, per definire la posizione di corpo rigido nello spazio 3-dimensionale servono 6 parametri: 3 coordinate per definire la posizione di un punto materiale  $Q$  e 3 parametri per definire l'orientazione del corpo nello spazio. Per definire la posizione di un corpo rigido che compie un moto piano servono 3 parametri: 2 coordinate per definire la posizione di un punto e 1 parametro per definirne l'orientazione.

**todo** definizione di moto piano

---

**Nota:** Questo materiale è rivolto a studenti delle scuole superiori, e si limita a discutere il moto 2-dimensionale di corpi rigidi. Una discussione del moto 3-dimensionale di corpi rigidi richiede l'uso e la dimestichezza con oggetti matematici che non sono introdotti nei primi anni delle scuole superiori - e purtroppo troppo spesso nemmeno nei corsi universitari dei primi anni -, i tensori.

Al prezzo di non poter trattare i problemi meccanici più generali, questa scelta evita di richiedere la conoscenza dell'algebra tensoriale o di introdurre formule in forma quantomeno discutibile. Per una discussione completa del problema, si rimanda al materiale pensato per studenti più maturi: **todo**

- algebra vettoriale e tensoriale **todo**
  - meccanica classica **todo**
-

### 6.2.1 Posizione dei punti di un corpo rigido

- **Posizione del punto materiale di riferimento,  $Q$ .**

$$Q - O = \vec{r}_Q$$

- **Posizione di tutti i punti materiali  $P$  del corpo rigido, e orientazione del corpo.** Nell'ipotesi di moto 2-dimensionale, il vettore tra due punti materiali  $\vec{r}_{QP} = P - Q$  può essere scritto in funzione del vettore  $\vec{r}_{QP}^0$  nella configurazione di riferimento del corpo e della rotazione di un angolo  $\theta$  attorno a un asse di direzione  $\hat{n}$  costante e perpendicolare al piano del moto,

$$P - Q = \vec{r}_{QP} = \cos \theta \vec{r}_{QP}^0 + \sin \theta \hat{n} \times \vec{r}_{QP}^0$$

La posizione di un punto materiale  $P$  di un corpo rigido rispetto al sistema di riferimento scelto, può essere quindi scritta come

$$\begin{aligned} P - O &= Q - O + P - Q = \\ &= \vec{r}_{OQ} + \cos \theta \vec{r}_{QP}^0 + \sin \theta \hat{n} \times \vec{r}_{QP}^0 . \end{aligned}$$

### 6.2.2 Velocità dei punti di un corpo rigido

- **Velocità del punto materiale di riferimento,  $Q$**

$$\vec{v}_Q = \frac{d\vec{r}_Q}{dt}$$

- **Velocità di tutti i punti materiali  $P$  del corpo rigido, e velocità angolare del corpo,  $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{n}$ .** La velocità relativa di un punto  $P$  rispetto al punto di riferimento  $Q$  viene calcolata con la derivata del vettore  $\vec{r}_{QP}$  rispetto al tempo, ricordando che  $\hat{n}$  è costante e quindi  $\frac{d}{dt} \hat{n} = \vec{0}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_{QP}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\cos \theta \vec{r}_{QP}^0 + \sin \theta \hat{n} \times \vec{r}_{QP}^0) = \\ &= \dot{\theta} (-\sin \theta \vec{r}_{QP}^0 + \cos \theta \hat{n} \times \vec{r}_{QP}^0) = \\ &= \dot{\theta} \hat{n} \times (\sin \theta \hat{n} \times \vec{r}_{QP}^0 + \cos \theta \vec{r}_{QP}^0) = \\ &= \dot{\theta} \hat{n} \times \vec{r}_{QP} = \\ &= \vec{\omega} \times \vec{r}_{QP} , \end{aligned}$$

avendo definito la **velocità angolare**,  $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{n}$  per un moto 2-dimensionale, e usato l'identità vettoriale

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{w}) = \underbrace{\hat{n} (\hat{n} \cdot \vec{w})}_{=0} - \underbrace{\vec{w} (\hat{n} \cdot \hat{n})}_{=1} = -\vec{w} .$$

---

**Nota:** La formula

$$\vec{v}_P - \vec{v}_Q = \vec{\omega} \times (P - Q)$$

vale anche per moti 3-dimensionali. In questo caso però **non** è possibile scrivere  $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{n}$ .

---

La velocità di un punto materiale  $P$  di un corpo rigido rispetto al sistema di riferimento scelto, può essere quindi scritta come

$$\begin{aligned} \vec{v}_P &= \vec{v}_{Q/O} + \vec{v}_{P/Q} = \\ &= \vec{v}_{Q/O} + \vec{\omega} \times (P - Q) . \end{aligned}$$

### 6.2.3 Accelerazione dei punti di un corpo rigido

- Accelerazione del punto materiale di riferimento,  $Q$

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_P}{dt^2}$$

- Accelerazione di tutti i punti materiali  $P$  del corpo rigido, e accelerazione angolare del corpo,  $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\theta}\hat{n}$ .  
L'accelerazione relativa di un punto  $P$  rispetto al punto di riferimento  $Q$  viene calcolata con la derivata seconda del vettore  $\vec{r}_{QP}$  rispetto al tempo, ricordando che  $\hat{n}$  è costante e quindi  $\frac{d}{dt}\hat{n} = \vec{0}$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{r}_{QP}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_{QP}) = \\ &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{QP} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{QP}}{dt} = \\ &= \vec{\alpha} \times \vec{r}_{QP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{QP}) .\end{aligned}$$

L'accelerazione di un punto materiale  $P$  di un corpo rigido rispetto al sistema di riferimento scelto, può essere quindi scritta come

$$\begin{aligned}\vec{a}_P &= \vec{a}_{Q/O} + \vec{a}_{P/Q} = \\ &= \vec{a}_{Q/O} + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{QP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{QP}) .\end{aligned}$$

basics

28 nov 2024

0 min read

## 6.3 Cinematica dei sistemi deformabili

## 6.4 Cinematica relativa

basics

28 nov 2024

0 min read

- Tipi di azione:
  - forza concentrata, momento di una forza, coppia di forze; carichi equivalenti
  - azioni distribuite: azioni di volume, e di superficie (sforzo e pressione)
- Lavoro e potenza; azioni conservative
- Esempi:
  - gravitazione: gravitazione universale, nei pressi della superficie terrestre; cenni a interazione a distanza
  - elasticità
  - reazioni vincolari
  - contatto: reazione normale e attrito
  - cenni ad altre azioni (tra cariche elettriche, cariche in campi EM,...; esempi: levmag,...)

basics

28 nov 2024

1 min read

## 7.1 Forza, momento di una forza, azioni distribuite

### 7.1.1 Forza concentrata

Una forza (concentrata) è una quantità vettoriale di dimensioni fisiche,

$$[\text{forza}] = \frac{[\text{massa}][\text{lunghezza}]}{[\text{tempo}]^2}$$

che può essere misurata tramite un dinamometro, e il cui effetto può alterare le condizioni di equilibrio o di moto di un sistema fisico.

Oltre alle informazioni tipiche di una quantità vettoriale - intensità, direzione e verso - contenute nel vettore forza  $\vec{F}$ , è spesso necessario conoscere il **punto di applicazione**, o la retta di applicazione, della forza.

### 7.1.2 Momento di una forza concentrata

Il momento di una forza  $\vec{F}$  applicata nel punto  $P$ , o con retta di applicazione passante per  $P$ , rispetto al punto  $H$  viene definito come il prodotto vettoriale,

$$\vec{M}_H = (P - H) \times \vec{F}$$

### 7.1.3 Sistema di forze, risultante delle azioni e carichi equivalenti

Dato un sistema di  $N$  forze  $\{\vec{F}_n\}_{n=1:N}$ , applicate nei punti  $P_n$ , si definiscono:

- **risultante** del sistema di forze: la somma delle forze,

$$\vec{R} = \sum_{n=1}^N \vec{F}_n,$$

- risultante dei momenti rispetto a un punto  $H$ : la somma dei momenti

$$\vec{M}_H = \sum_{n=1}^N (P_n - H) \times \vec{F}_n,$$

- un **carico equivalente**: un sistema di forze che ha la stessa risultante di forze e momenti; per un sistema di forze, è possibile definire un carico equivalente formato da una sola forza, la risultante delle forze  $\vec{R}$  applicata nel punto  $Q$  ricavato dall'equivalenza ai momenti

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \sum_{n=1}^N \vec{F}_n \\ (Q - H) \times \vec{R} &= \sum_{n=1}^N (P_n - H) \times \vec{F}_n \end{aligned}$$

### 7.1.4 Coppia di forze

Una coppia di forze è un carico equivalente a due forze di uguale intensità e verso opposto,  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ , applicate in due punti  $P_1, P_2$  non allineati lungo la retta di applicazione delle forze per avere effetti non nulli.

**todo immagine**

La risultante delle forze è nulla,

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 - \vec{F}_1 = \vec{0},$$

mentre la risultante dei momenti non dipende dal polo dei momenti,

$$\begin{aligned} \vec{M}_H &= (P_1 - H) \times \vec{F}_1 + (P_2 - H) \times \vec{F}_2 = \\ &= (P_1 - H) \times \vec{F}_1 - (P_2 - H) \times \vec{F}_1 = \\ &= (P_1 - P_2) \times \vec{F}_1 =: \vec{C}. \end{aligned}$$

## 7.1.5 Campi di forze

todo

## 7.1.6 Azioni distribuite

todo

basics

28 nov 2024

2 min read

## 7.2 Lavoro e potenza

In meccanica, come sarà più chiaro avanti (**todo** aggiungere riferimento), il concetto di lavoro è legato al concetto di energia. **todo**

### 7.2.1 Lavoro e potenza di una forza

**Lavoro.** Il lavoro elementare di una forza  $\vec{F}$  applicata nel punto  $P$  che subisce uno spostamento elementare  $d\vec{r}_P$  è definito come il prodotto scalare tra la forza e lo spostamento,

$$\delta L := \vec{F} \cdot d\vec{r}_P .$$

Il lavoro compiuto dalla forza  $\vec{F}$  applicata nel punto  $P$  che si muove dal punto  $A$  al punto  $B$  lungo il percorso  $\ell_{AB}$  è la somma di tutti i contributi elementari - e quindi, al limite per spostamenti elementari  $\rightarrow 0$  per variazioni continue, l'integrale di linea,

$$L_{\ell_{AB}} = \int_{\ell_{AB}} \delta L = \int_{\ell_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}_P .$$

In generale, il lavoro di una forza o di un campo di forze dipende dal percorso  $\ell_{AB}$ . Nei casi in cui il lavoro è indipendente dal percorso, ma dipende solo dagli estremi del percorso, si parla di *azioni conservative*.

**Potenza.** La potenza della forza viene definita come la derivata nel tempo del lavoro,

$$P := \frac{\delta L}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_P ,$$

e coincide con il prodotto scalare tra la forza e la velocità del punto di applicazione. Prestare attenzione se una forza è applicata a punti geometrici e non materiali, come ad esempio il caso di una disco che rotola senza strisciare su una superficie: in ogni istante il (nuovo) punto materiale di contatto ha velocità nulla, mentre il punto geometrico di contatto è la proiezione del centro del disco e si muove con la stessa velocità,  $v = R\dot{\theta}$

## 7.2.2 Lavoro e potenza di un sistema di forze

**Lavoro.** Il lavoro di un sistema di forze è la somma dei lavori delle singole forze,

$$\delta L = \sum_{n=1}^N \delta L_n = \sum_{n=1}^N \vec{F}_n \cdot d\vec{r}_n$$

**Potenza.** La potenza di un sistema di forze è la somma delle potenze delle singole forze

$$P = \sum_{n=1}^N P_n = \sum_{n=1}^N \vec{F}_n \cdot \vec{v}_n .$$

## 7.2.3 Lavoro e potenza di una coppia di forze

**Lavoro.** Il lavoro elementare di una coppia di forze è la somma dei lavori elementari

$$\begin{aligned} \delta L &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \\ &= \vec{F}_1 \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \end{aligned}$$

**Potenza.** La potenza di una coppia di forze,

$$P = \vec{F}_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

può essere riscritta se i punti di applicazione compiono un atto di moto rigido (**todo** verificare la definizione di atto di moto e se è il caso di introdurla),

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{\omega} \times (P_1 - P_2) ,$$

come

$$\begin{aligned} P &= \vec{F}_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \\ &= \vec{F}_1 \cdot [\vec{\omega} \times (P_1 - P_2)] = \\ &= \vec{\omega} \cdot [(P_1 - P_2) \times \vec{F}_1] = \\ &= \vec{\omega} \cdot \vec{C} . \end{aligned}$$

basics

28 nov 2024

1 min read

## 7.3 Azioni conservative

Un campo di forze conservativo viene definito tramite il lavoro compiuto. In generale, il lavoro di un campo di forze agente su un punto  $P$  che si muove nello spazio dal punto  $A$  al punto  $B$  lungo un percorso  $\ell_{AB}$  dipende dal percorso. (**todo** aggiungere riferimento)

Se il lavoro di un campo di forze non dipende dal percorso  $\ell_{AB}$  ma solo dai punti estremi  $A, B$ , per tutte le coppie di punti appartenenti a una regione dello spazio  $\Omega$ , si dice che il **campo di forze** è **conservativo** nella regione  $\Omega$  dello spazio.



In questo caso, il lavoro compiuto può essere scritto come differenza di una campo scalare,  $U(P)$  o il suo opposto  $V(P) := -U(P)$ ,

$$\begin{aligned} L_{AB} &= U(B) - U(A) = \Delta_{AB}U \\ &= V(A) - V(B) = -\Delta_{AB}V \end{aligned}$$

Le funzioni  $U$ ,  $V$  vengono definite rispettivamente **potenziale** ed **energia potenziale** del campo di forze.

Il lavoro elementare può quindi essere scritto in termini del differenziale di queste funzioni,

$$\begin{aligned} \delta L &= dU = d\vec{r} \cdot \nabla U = \\ &= -dV = -d\vec{r} \cdot \nabla V \end{aligned}$$

Confrontando questa relazione con la definizione di lavoro  $\delta L = d\vec{r} \cdot \vec{F}$ , è possibile identificare il campo di forze con il gradiente della funzione potenziale, e l'opposto del gradiente dell'energia potenziale,

$$\vec{F} = \nabla U = -\nabla V.$$

basics

28 nov 2024

3 min read

## 7.4 Esempi di forze

### 7.4.1 Gravità

#### Legge di gravitazione universale

La forza  $\vec{F}_{12}$  esercitata da un corpo di massa  $m_2$  in  $P_2$  su un corpo di massa  $m_1$  in  $P_1$  è descritta dalla **legge di gravitazione universale di Newton**,

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12},$$

avendo indicato con  $\vec{r}_{12} = (P_2 - P_1)$  il vettore che punta dal punto  $P_1$  al punto  $P_2$ ,  $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$  il suo modulo, e  $\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$  il vettore unitario lungo la stessa direzione, e con

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2}$$

la **costante di gravitazione universale**, considerata una costante della natura. **todo**

#### Campo di gravità

Il campo di gravità generato da una massa  $m_2$  posta in  $P_2$  è **todo** una funzione dello spazio che associa a ogni punto  $P$  un vettore,

$$\vec{g}(\vec{r}_1) = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} = G \frac{m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12},$$

- **todo** abituarsi al concetto di campo, introdotto a partire dalla definizione operativa con *massa test*

- **todo** PSCE
- **todo** noto il campo di gravità  $\vec{g}(P)$ , la forza di gravità percepita da un sistema di massa  $m$  in  $P$  può essere scritta come

$$\vec{F}_g = m\vec{g}(P)$$

**Energia potenziale gravitazionale.** E' possibile dimostrare che il campo gravitazionale è ... **todo**

$$V(P) = -G m m_1 \frac{1}{|P - P_1|}$$

### Campo di gravità nei pressi della superficie terrestre

All'interno di un dominio limitato nei pressi della superficie terrestre, è comune approssimare il campo di gravitazione terrestre come un campo uniforme, diretto lungo la verticale locale verso il centro della terra e di intensità  $g = G \frac{M_E}{R_E^2}$ .

E' possibile derivare questo modello, approssimando il vettore posizione rispetto al centro della terra  $P - P_E \sim R_E \hat{r}$  e il versore che identifica la direzione da un punto del dominio al centro della Terra con la verticale locale  $\hat{r}_{12} \sim -\hat{z}$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \frac{M_E}{R_E^2} \hat{z} = -g \hat{z}.$$

La forza di gravità percepita da un corpo di massa  $m$  nei pressi della superficie terrestre è quindi

$$\vec{F}_g = -mg \hat{z},$$

quello che viene comunemente chiamato **peso**.

**Energia potenziale gravitazionale.** E' possibile dimostrare che il potenziale gravitazionale nei pressi della superficie terrestre diventa

$$V(P) = m g z_P.$$

### Dimostrazione.

Con l'espansione in serie, con  $P - P_E = R_E \hat{r} + \vec{d}$ , e  $|\vec{d}| \ll R_E$

$$\begin{aligned} V(P) &= -G m M_E \frac{1}{|P - P_E|} = \\ &\approx G M_E m \left[ -\frac{1}{R_E} + \frac{R_E \hat{r} \cdot \vec{d}}{R_E^3} \right] = \\ &= \underbrace{-m \frac{G M_E}{R_E}}_{\text{const}} + m \underbrace{\frac{G M_E}{R_E^2}}_{=g} \underbrace{\hat{r} \cdot \vec{d}}_{=z} \end{aligned}$$

### 7.4.2 Azioni elastiche: molle lineari

Secondo la legge di Hooke, il comportamento di una molla elastica lineare ideale è descritto dall'equazione costitutiva

$$F = k(\ell - \ell_0) ,$$

essendo  $F$  il valore assoluto della forza trasmessa dalla molla,  $k$  la costante elastica della molla,  $\ell_0$  la lunghezza a riposo della molla, e  $\ell$  la lunghezza nella configurazione considerata.

**Energia potenziale.**

$$\delta L = F d\ell = k(\ell - \ell_0) d\ell$$

$$L = \int_{\ell_1}^{\ell_2} = \left[ \frac{1}{2} k \ell^2 - k \ell_0 \ell \right] \Big|_{\ell_1}^{\ell_2}$$

$$V = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$$

### 7.4.3 Azioni di contatto

**Reazioni vincolari di vincoli ideali**

I vincoli ideali sono modelli di vincolo che **non compiono lavoro netto**, e per questo sono **elementi conservativi**. Come dovrebbe risultare evidente nei paragrafi successivi dalle espressioni delle velocità relative e dalle azioni scambiate,

$$\begin{aligned} P &= \vec{v}_1 \cdot \vec{F}_{21} + \vec{v}_2 \cdot \vec{F}_{12} + \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \vec{M}_{21} + \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \vec{M}_{12} = \\ &= (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{F}_{21} + (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \cdot \vec{M}_{21} = \\ &= \vec{v}_{21}^{rel} \cdot \vec{F}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{21}^{rel} \cdot \vec{M}_{21} , \end{aligned}$$

entrambi i termini sono nulli, o perché il moto relativo è nullo, o le azioni agiscono in direzione ortogonale ai moti relativi.

**Incastro**

Il vincolo di incastro impedisce sia il moto sia la rotazione relativa,

$$\begin{cases} \vec{0} = \vec{v}_{21}^{rel} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \\ \vec{0} = \boldsymbol{\omega}_{21}^{rel} = \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1 \end{cases} , \quad \begin{cases} \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \\ \vec{M}_{12} = -\vec{M}_{21} \end{cases}$$

**Pattino**

Il vincolo di pattino impedisce il moto relativo in una direzione e la rotazione relativa.

$$\begin{cases} \forall \vec{v}_{\hat{t},21}^{rel} = \vec{v}_{\hat{t},2} - \vec{v}_{\hat{t},1} \\ 0 = v_{\hat{n},21}^{rel} = v_{\hat{n},2} - v_{\hat{n},1} \\ \vec{0} = \boldsymbol{\omega}_{21}^{rel} = \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1 \end{cases} , \quad \begin{cases} \vec{0} = \vec{F}_{\hat{t},12} = \vec{F}_{\hat{t},21} \\ F_{\hat{n},12} = -F_{\hat{n},21} \\ \vec{M}_{12} = -\vec{M}_{21} \end{cases}$$

### Cerniera (cilindrica)

Il vincolo di pattino impedisce il moto relativo e consente solo la rotazione attorno a un asse.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{0} = \vec{v}_{21}^{rel} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \\ \forall \omega_{\hat{t},21}^{rel} = \omega_{\hat{t},2} - \omega_{\hat{t},1} \\ \vec{0} = \omega_{\hat{n},21}^{rel} = \omega_{\hat{n},2} - \omega_{\hat{n},1} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \\ 0 = M_{\hat{t},12} = M_{\hat{t},21} \\ \vec{M}_{\hat{n},12} = -\vec{M}_{\hat{n},21} \end{array} \right.$$

### Cerniera (sferica)

Il vincolo di pattino impedisce il moto relativo, consentendo una rotazione generica.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{0} = \vec{v}_{21}^{rel} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \\ \forall \omega_{21}^{rel} = \omega_2 - \omega_1 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \\ \vec{0} = \vec{M}_{12} = \vec{M}_{21} \end{array} \right.$$

### Carrello

Il vincolo di carrello può essere pensato come la combinazione di un pattino e di una cerniera

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \vec{v}_{\hat{t},21}^{rel} = \vec{v}_{\hat{t},2} - \vec{v}_{\hat{t},1} \\ 0 = v_{\hat{n},21}^{rel} = v_{\hat{n},2} - v_{\hat{n},1} \\ \forall \omega_{\hat{t},21}^{rel} = \omega_{\hat{t},2} - \omega_{\hat{t},1} \\ \vec{0} = \omega_{\hat{n},21}^{rel} = \omega_{\hat{n},2} - \omega_{\hat{n},1} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} = \vec{F}_{\hat{t},12} = \vec{F}_{\hat{t},21} \\ F_{\hat{n},12} = -F_{\hat{n},21} \\ 0 = M_{\hat{t},12} = M_{\hat{t},21} \\ \vec{M}_{\hat{n},12} = -\vec{M}_{\hat{n},21} \end{array} \right.$$

### Appoggio

Il vincolo di appoggio è un vincolo monolatero **todo aggiungere descrizione**

### Attrito

#### Attrito statico

L'attrito statico è la forma di attrito che si manifesta tra due corpi quando non c'è moto relativo tra di essi, come una forza tangenziale alla superficie di contatto. Il più semplice modello di attrito statico prevede che il modulo massimo della forza di attrito  $F_{max}^s$  che si può esercitare tra due corpi è proporzionale alla reazione normale tra di essi,  $N$ ,

$$F_{max}^s = \mu^s N .$$

Il coefficiente di proporzionalità  $\mu^s$  viene definito **coefficiente di attrito statico**. In generale, le forze di attrito statico sono determinate dalle condizioni di equilibrio del corpo, se queste condizioni sono ottenibili ed è soddisfatta la relazione

$$|F^s| \geq F_{max}^s .$$

### Attrito dinamico

L'attrito dinamico è la forma di attrito che si manifesta tra due corpi a contatto e in moto relativo, come una forza tangenziale alla superficie di contatto. Il più semplice modello di attrito statico prevede che la forza di attrito dinamico sia proporzionale alla reazione normale tra i due corpi e diretta in verso opposto alla velocità relativa,

$$\vec{F}_{12} = -\mu^d N \frac{\vec{v}_{12}}{|\vec{v}_{12}|} ,$$

avendo definito  $\vec{F}_{12}$  come la forza agente sul corpo 1 a causa del corpo 2, e  $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$  la velocità del corpo 1 relativa al corpo 2.

### Puro rotolamento



La statica si occupa dello studio delle condizioni di equilibrio di un sistema, cioè le condizioni in cui un sistema rimane in quiete anche quando soggetto ad *azioni* esterne. Le condizioni di equilibrio dei sistemi sono un caso particolare delle *equazioni della dinamica*, nel caso in cui il sistema sia in quiete e le derivate delle quantità dinamiche nulle.

In generale le condizioni di equilibrio dipendono dalla natura del sistema. Come si vedrà meglio nelle sezioni di questo capitolo,

- le condizioni di equilibrio di un sistema puntiforme sono garantite dall'equilibrio globale delle forze agenti sul sistema
- le condizioni di equilibrio di un corpo rigido sono garantite dall'equilibrio globale delle forze e dall'equilibrio globale dei momenti agenti sul sistema
- le condizioni di equilibrio di sistemi composti da corpi puntiformi e corpi rigidi sono garantite dalle condizioni di equilibrio di ognuna delle sue parti
- le condizioni di equilibrio di mezzi continui deformabili è garantito dall'equilibrio globale e locale delle forze

## 8.1 Statica del punto

La condizione necessaria all'equilibrio di un sistema puntiforme è:

- l'equilibrio **globale** delle **forze esterne** agenti sul sistema

$$\sum_k \vec{F}_k^{ext} = \vec{0}.$$

## 8.2 Statica di un corpo rigido

Le condizioni necessarie all'equilibrio di un corpo rigido sono:

- l'equilibrio **globale** delle **forze esterne** agenti sul sistema
- l'equilibrio **globale** dei **momenti esterni** agenti sul sistema

$$\begin{cases} \sum_k \vec{F}^{ext} = \vec{0} \\ \sum_k \vec{M}_{k,H}^{ext} = \vec{0} . \end{cases}$$

### 8.2.1 Problemi nel piano

#### Esempi ed esercizi

- leve
- carrucole
- ingranaggi e trasmissioni

## 8.3 Statica dei mezzi deformabili

La condizione necessaria all'equilibrio di un sistema puntiforme è:

- l'equilibrio **locale** delle forze agenti sul sistema
- l'equilibrio **locale** dei momenti agenti sul sistema

Gli equilibri globali sono una diretta conseguenza degli equilibri locali, e del principio di azione e reazione della dinamica.

### 8.3.1 Strutture

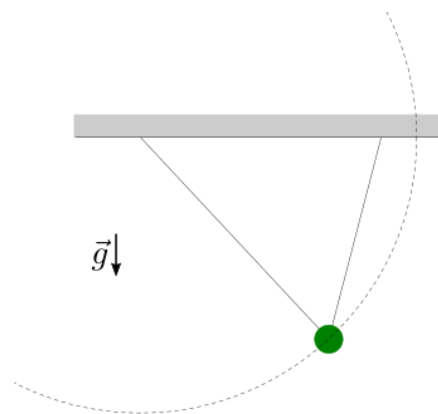
### 8.3.2 Fluidi

- Stevino e principio di Archimede



## 8.4 Problemi

**Problema 1.** Data la massa  $m$  della massa puntiforme appeso tramite due fili inestensibili ideali di lunghezza  $L_1$  e  $L_2$  note, si calcolino le reazioni a terra.



**Soluzione.** I fili inestensibili senza massa e senza rigidezza flessionale possono solo trasmettere un'azione assiale. Ci si aiuta qui con un sistema di coordinate cartesiane con asse  $x$  orizzontale con coordinata crescente verso destra e asse  $y$  verticale con coordinata crescente verso l'alto. Date le direzioni dei fili identificate dai vettori unitari  $\hat{t}_1, \hat{t}_2$ , l'equilibrio della massa  $m$  è garantito dall'equilibrio delle forze,

$$\hat{0} = -mg\hat{y} + F_1\hat{t}_1 + F_2\hat{t}_2.$$

Definiti gli angoli  $\theta_1, \theta_2$ , calcolabili dalla geometria del problema - qui considerati noti e calcolati in seguito - e tali che  $\hat{t}_1 = \hat{x} \cos \theta_1 + \hat{y} \sin \theta_1$ ,  $\hat{t}_2 = \hat{x} \cos \theta_2 + \hat{y} \sin \theta_2$ , le componenti cartesiane della condizione di equilibrio forniscono un sistema di due equazioni nelle due incognite  $F_1, F_2$ ,

$$\begin{cases} F_1 \cos \theta_1 + F_2 \cos \theta_2 = 0 \\ F_1 \sin \theta_1 + F_2 \sin \theta_2 = mg \end{cases}$$

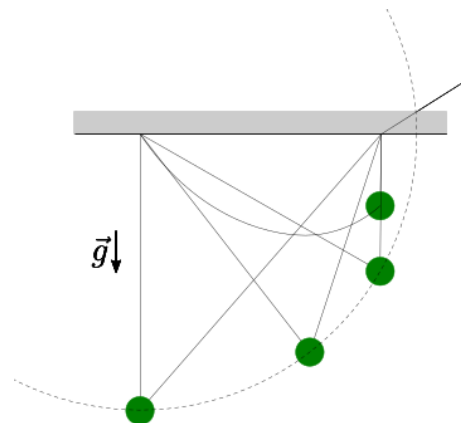
che ha soluzione

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2} \begin{bmatrix} \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \begin{bmatrix} -\cos \theta_2 \\ \cos \theta_1 \end{bmatrix} mg.$$

**todo** Controllare conti. Aggiungere immagine.

**Grandezze geometriche del problema. todo**

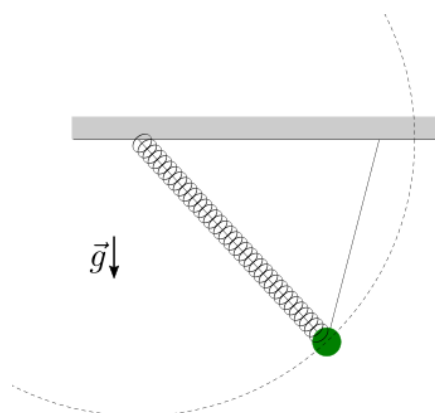
**Problema 2.** Data la massa  $m$  della massa puntiforme appeso tramite due fili inestensibili ideali di lunghezza  $L_1$  nota e  $L_2$  variabile, si calcolino le reazioni a terra in funzione della lunghezza del filo 2.



**Soluzione.**

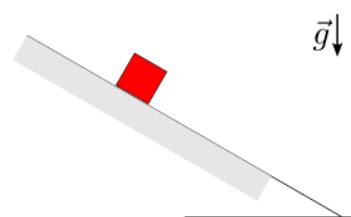
**Problema 3.** Data la massa  $m$  della massa puntiforme appeso tramite un filo inestensibile ideale di lunghezza  $L$  e una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo  $x_0$  collegata a terra in un punto distante  $H$  dal punto a terra dove è collegato il filo, si calcoli:

1. la posizione del punto
  2. la lunghezza della molla
  3. le reazioni vincolari a terra
- nella configurazione di equilibrio.



**Soluzione.**

**Problema 4.** Data  $m, \mu^s$ , trovare l'angolo massimo  $\theta_{\max}$  per il quale esiste una condizione di equilibrio per il cubetto rosso.



**Soluzione.** Per l'equilibrio del corpo è necessario l'equilibrio delle forze. Le forze agenti sul cubetto rosso sono la sua forza peso e la reazione di contatto  $\vec{R}$  con la parete inclinata, che può essere scomposta nella direzione perpendicolare - reazione normale - e parallela alla parete - attrito.

La condizione di equilibrio,

$$\vec{0} = -mg\hat{y} + \vec{R},$$

può essere proiettata lungo la direzione normale alla parete  $\hat{n}$  e la direzione tangente  $\hat{t}$  (verto l'alto, così che  $\hat{y} = -\cos\theta\hat{n} - \sin\theta\hat{t}$ )

$$\begin{cases} 0 = N - mg \cos \theta \\ 0 = F - mg \sin \theta, \end{cases}$$

così che  $F = N \tan \theta$ . Bisogna infine verificare che questa forza di attrito statico possa essere trasmessa, con la condizione

$$|F| \leq F^{s,max} = \mu^s N,$$

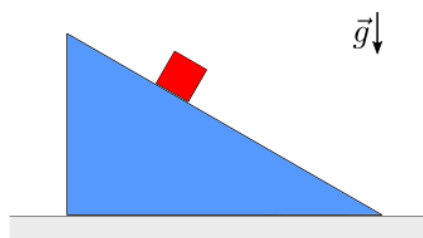
insieme alla condizione di contatto  $N \geq 0$ , e quindi

$$|\tan \theta| \leq \mu^s.$$

**Problema 5.** Data  $m, M, \mu^s$  tra i due solidi, si chiede di calcolare:

1. la risultante delle azioni scambiate tra i due corpi
2. la risultante delle reazioni vincolari a terra agenti sul solido blu,

nella condizione di equilibrio del sistema, nell'ipotesi che l'attrito tra solido blu e terra sia trascurabile. Verificare le condizioni limite tra  $\theta$  e  $\mu^s$  affinché l'equilibrio sia possibile



**Soluzione.** Il piano orizzontale liscio non può trasmettere nessuna forza orizzontale al prisma triangolare. L'equilibrio delle forze del prisma triangolare, necessaria alla condizione di equilibrio, implica quindi che la risultante delle forze di contatto con il blocchetto rosso ha direzione verticale anch'essa.

Dalla condizione di equilibrio per il blocchetto rosso,

$$\vec{0} = -mg\hat{y} + \vec{R}_{quad,tri} \quad \rightarrow \quad \vec{R}_{quad,tri} = mg\hat{y}.$$

La risultante delle forze scambiate tra i corpi è quindi uguale e contraria al peso del cubetto (1). L'equilibrio del corpo triangolare

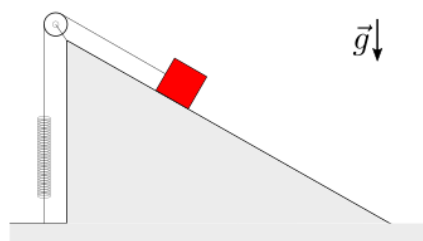
$$\vec{0} = -Mg\hat{y} + \vec{R}_{tri,quad} + \vec{R}_{tri,plane},$$

implica che la reazione  $\vec{R}_{tri,plane}$  agente sul solido triangolare dovuta alla superficie orizzontale è uguale e contraria alla somma del peso dei due solidi (2),

$$\vec{R}_{tri,plane} = Mg\hat{y} - \vec{R}_{tri,quad} = Mg\hat{y} + \vec{R}_{quad,tri} = Mg\hat{y} + mg\hat{y}.$$

**Problema 6.** Data la massa  $m$  del blocco rosso, la costante elastica  $k$  della molla lineare ideale, con lunghezza a riposo  $\ell_0$ , viene chiesto di:

1. determinare la lunghezza della molla nella condizione di equilibrio, nell'ipotesi che l'attrito tra blocco rosso e piano inclinato sia trascurabile
2. determinare le possibili condizioni di equilibrio, nell'ipotesi che l'attrito statico tra blocco rosso e piano inclinato sia  $\mu^s$



**Soluzione.** I fili inestensibili trasmettono solo azione assiale nella direzione del filo, costante in ogni sua sezione. Le condizioni di equilibrio alla rotazione di una carrucola assicurano che sia costante l'azione assiale ai due capi di un filo parzialmente avvolto attorno alla carrucola, nel caso di attriti nulli (carrucola ideale).

Il problema può essere risolto scrivendo le condizioni di equilibrio della molla,

$$F = k(\ell - \ell_0)$$

e del blocchetto rosso, proiettate in direzione perpendicolare e tangente alla superficie inclinata

$$\vec{0} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{R} \quad , \quad \begin{cases} t : 0 = -F + mg \sin \theta + F_t \\ n : 0 = -mg \cos \theta + F_n \end{cases}$$

**In assenza di attrito**,  $F_t = 0$ . In assenza di attrito, la reazione tangenziale è nulla  $F_t = 0$  e quindi

$$F_n = mg \cos \theta$$

$$F = mg \sin \theta$$

$$\Delta \ell = \frac{mg}{k} \sin \theta$$

**Con attrito statico.** In presenza di attrito statico, la soluzione non è unicamente determinata ma bisogna discutere le condizioni che garantiscono l'equilibrio, verificando la condizione  $|F_t| \leq \mu^s F_n$ . Le espressioni delle componenti normali e tangenziali della reazione vincolare agente sul blocchetto,

$$F_n = mg \cos \theta$$

$$F_t = k\Delta \ell - mg \sin \theta$$

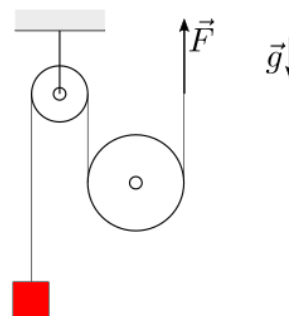
permettono di scrivere la condizione che garantisce l'equilibrio come

$$|k\Delta \ell - mg \sin \theta| \leq \mu_s mg \cos \theta$$

e quindi

$$-\mu_s mg \cos \theta + mg \sin \theta \leq k\Delta \ell \leq \mu_s mg \cos \theta + mg \sin \theta .$$

**Problema 7.** Data la massa  $m$  del blocco rosso, il raggio  $R_1$ ,  $R_2$  delle due carrucole, si chiede di determinare la forza  $\vec{F}$  da applicare nella condizione di equilibrio, nell'ipotesi di fili inestensibili e carrucole ideali e senza massa. Si chiede poi di ripetere il calcolo nell'ipotesi in cui la massa delle carrucole non sia trascurabile, ma siano  $M_1$  per la carrucola vincolata a terra, e  $M_2$  per la carrucola non vincolata a terra.



**Soluzione.**

$$0 = -mg + T_1$$

$$0 = F + T_1 - Mg$$

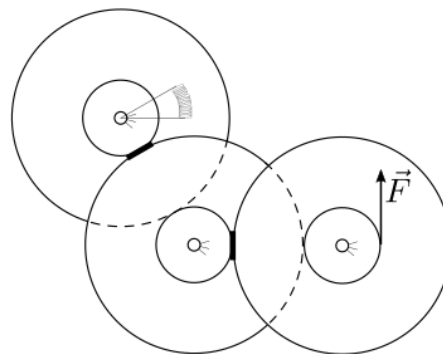
$$0 = MgR_2 + F(2R_2)$$

$$F = \frac{1}{2}Mg$$

$$T_1$$

**Problema 8.** Nel meccanismo di un orologio i 3 componenti che devono guidare il moto delle lancette dei secondi, dei minuti e delle ore, connessi "in cascata" tramite ingranaggi (con rapporto dei raggi  $1 : 60$  \*\*todo\*\* scriverlo esplicitamente?). Conoscendo la costante elastica  $k$  e la compressione  $\Delta\theta$  della molla che guida il componente che guida la lancetta delle ore, si chiede di:

1. determinare la forza necessaria da applicare alla lancetta dei secondi nel punto indicato nell'immagine, necessaria a garantire la posizione di equilibrio
2. le reazioni vincolari in corrispondenza delle cerniere che collegano a terra i 3 componenti, nell'ipotesi che non si scambino forze in direzione radiale

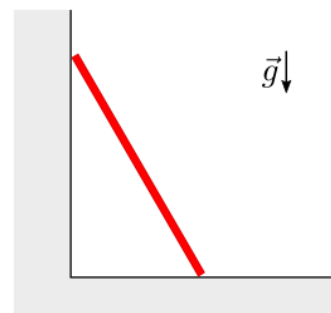


**Soluzione.**

$$\begin{aligned}FR_1 &= F_{12}R_2 \\F_{12}R_2 &= F_{23}R_3 \\F_{23}R_3 &= k\Delta\theta . \\F &= \frac{R_2}{R_1} \frac{R_3}{R_2} \frac{1}{R_3} k\Delta\theta .\end{aligned}$$

**Problema 9.** Data la lunghezza  $L$  e la massa  $m$  dell'asta rigida con distribuzione di massa uniforme e il coefficiente di attrito statico  $\mu^s$  tra asta e superficie orizzontale, si chiede di:

1. determinare la condizione limite dell'equilibrio
  2. determinare le reazioni a terra
- nell'ipotesi che l'attrito sulla superficie verticale sia trascurabile.



**Soluzione.**

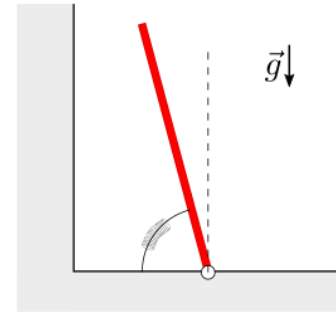
$$\begin{aligned}x : 0 &= N_1 + F_2^s \\y : 0 &= -mg + N_2 \\rot, 2 : 0 &= mg \frac{\ell}{2} \cos \theta - N_1 \ell \sin \theta\end{aligned}$$

**Problema 10.** Data la lunghezza  $L$  e la massa  $m$  dell'asta rigida incernierata a terra, e la costante elastica  $k$  della molla rotazionale, si chiede di:

1. calcolare la condizione di equilibrio

2. le reazioni vincolari sull'asta

discutendo i due casi determinati dalla condizione di appoggio dell'estremo superiore dell'asta sulla parete verticale.



**Soluzione.** Nel caso generale,

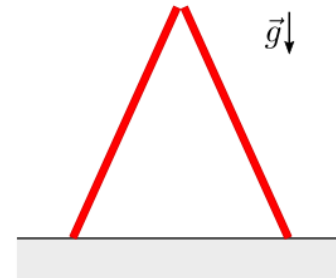
$$x : 0 = N_1 + F_{2,x}$$

$$y : 0 = -mg + F_{2,y}$$

$$\text{rot, 2} : 0 = mg \frac{\ell}{2} \cos \theta - N_1 \ell \sin \theta + k \Delta \theta$$

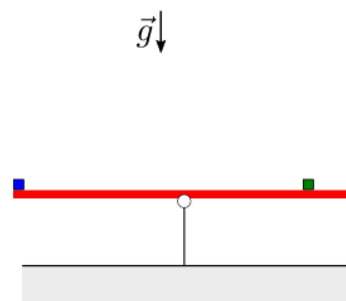
Il contatto avviene quando la rigidità della molla garantisce una condizione di equilibrio con  $\Delta \theta < \overline{\Delta \theta}$ . Se non c'è contatto,  $N_1 = 0$ ; se c'è contatto, in generale  $N_1 > 0$ .

**Problema 11.**



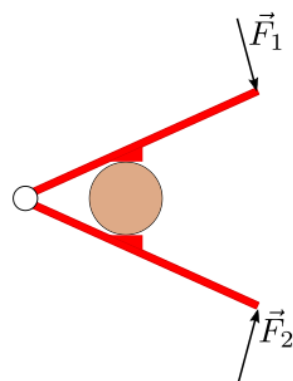
Soluzione.

Problema 12.



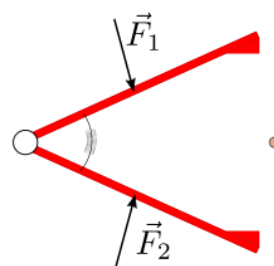
Soluzione.

Problema 13.



Soluzione.

Problema 14.



**Soluzione.**

**Problema 15.** Equilibrio di un corpo appoggiato...esempio che mostra come la retta di applicazione del peso deve cadere nella base di appoggio; qui non è possibile introdurre l'accelerazione del sistema (\*\*todo\*\* \*aggiungere esercizio nel capitolo della dinamica\*), ma si può fare un esercizio con superficie di appoggio perpendicolare e non al campo di gravità locale. L'unica cosa che conta è la direzione relativa tra superficie di appoggio e forza di massa. Rimandare all'esercizio sulla dinamica con collegamento

**Soluzione.**

**Problema 16.** Sollevamento di un peso sbilanciato, come mostrato in un \*"video virale"\*

**Soluzione.**

basics

28 nov 2024

1 min read



## 9.1 Massa e distribuzione di massa

La massa è la grandezza fisica che rappresenta la quantità di materia (**todo** *Non confonderla con la mole, definita come quantità di sostanza, una volta affermata la teoria atomica*)

In meccanica classica, la può essere definita in maniera operativa:

- tramite la sua *interazione gravitazionale* con altri corpi dotati di massa
- come una misura della resistenza di un sistema ai cambiamenti del suo stato di moto in risposta a una forza applicata, come sarà chiaro dalle equazioni della *dinamica*

## 9.2 Quantità dinamiche

Come sarà chiaro nello sviluppo delle *equazioni di moto di un sistema*, la definizione di alcune grandezze dinamiche additive risulta naturale, fornendo dei concetti utili e sintetici per la costruzione di un modello e l'interpretazione dei fenomeni fisici.

Queste grandezze dinamiche combinano la massa e la sua distribuzione con le grandezze cinematiche del sistema. In particolare, risulta utile definire tre grandezze:

- quantità di moto
- momento della quantità di moto
- energia cinetica

Le *equazioni del moto* dei sistemi rappresentano delle equazioni differenziali che mettono in relazione la variazione di queste quantità dinamiche con la causa di queste variazioni, in generale riconducibile ad *azioni* agenti sul sistema.

Sotto opportune ipotesi, queste grandezze dinamiche sono costanti del moto, come descritto dalle *leggi di conservazione*.

Le 3 grandezze dinamiche possono avere espressioni diverse, a seconda del sistema di interesse. Nel caso di corpi rigidi, queste possono essere espresse in termini di velocità di un punto materiale e della velocità angolare del corpo.

basics

28 nov 2024

0 min read

### 9.3 Inerzia e grandezze dinamiche di un punto

$$\begin{aligned}\vec{Q}_P &= m_P \vec{v}_P \\ \vec{L}_{P,H} &= m_P (P - H) \times \vec{v}_P \\ K_P &= \frac{1}{2} m_P |\vec{v}_P|^2\end{aligned}$$

basics

28 nov 2024

0 min read

### 9.4 Inerzia e grandezze dinamiche di un sistema esteso con distribuzione discreta di massa

$$\begin{aligned}\vec{Q} &= \sum_i \vec{Q}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \\ \vec{L}_H &= \sum_i \vec{L}_{i,H} = \sum_i m_i (P_i - H) \times \vec{v}_i \\ K &= \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2\end{aligned}$$

#### 9.4.1 Sistemi rigidi

Usando la definizione di centro di massa

$$mG = \sum_i m_i P_i$$

e legge del moto rigido

$$\vec{v}_i - \vec{v}_P = \vec{\omega} \times (P_i - P)$$

le quantità dinamiche possono essere espresse in funzione della velocità del punto di riferimento  $P$  e della velocità angolare del sistema, tramite la massa e le altre quantità inerziali

- la quantità di moto

$$\begin{aligned}\vec{Q} &= \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i (\vec{v}_P + \vec{\omega} \times (P_i - P)) = \\ &= m \vec{v}_P + \vec{\omega} \times m(G - P)\end{aligned}$$

- momento della quantità di moto

$$\begin{aligned}
\vec{L}_H &= \sum_i m_i (P_i - H) \times \vec{v}_i = \sum_i m_i (P_i - P + \vec{r}_P - \vec{r}_H) \times \vec{v}_i = \\
&= \sum_i m_i (P_i - P) \times \vec{v}_i + (P - H) \times \vec{Q} = \\
&= \sum_i m_i (P_i - P) \times (\vec{v}_P - (P_i - P) \times \vec{\omega}) + (P - H) \times \vec{Q} = \\
&= m(G - P) \times \vec{v}_P - \sum_i m_i (P_i - P) \times ((P_i - P) \times \vec{\omega}) + (P - H) \times \vec{Q} = \\
&= \mathbb{I}_P \cdot \vec{\omega} + m(G - P) \times \vec{v}_P + (P - H) \times \vec{Q}
\end{aligned}$$

Nel caso di moto 2-dimensionale e velocità angolare perpendicolare a questo piano, **todo**

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{i/P} &:= P_i - P = (x_i - x_P) \hat{x} + (y_i - y_P) \hat{y} \\
\vec{\omega} &= \dot{\theta} \hat{z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\vec{r}_{i/P} \times (\vec{r}_{i/P} \times \hat{\omega}) &= -(\Delta x_i \hat{x} + \Delta y_i \hat{y}) \times [(\Delta x_i \hat{x} + \Delta y_i \hat{y}) \times \dot{\theta} \hat{z}] = \\
&= -\dot{\theta} (\Delta x_i \hat{x} + \Delta y_i \hat{y}) \times (-\Delta x_i \hat{y} + \Delta y_i \hat{x}) = \\
&= (\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2) \dot{\theta} \hat{z}.
\end{aligned}$$

e l'espressione del momento della quantità di moto diventa

$$\vec{L}_H = I_P \vec{\omega} + m(G - P) \times \vec{v}_P + (P - H) \times \vec{Q}$$

con

$$I_P = \sum_i m_i [(x_i - x_P)^2 + (y_i - y_P)^2]$$

basics

28 nov 2024

0 min read

## 9.5 Inerzia e grandezze dinamiche di un sistema esteso con distribuzione continua di massa

### 9.5.1 Sistemi rigidi

basics

28 nov 2024

1 min read



La dinamica si occupa del moto dei sistemi e delle cause del moto, mettendo insieme la descrizione cinematica, l'inerzia dei sistemi a perseverare nel moto, e le cause di una variazione del moto.

**Principi della dinamica.** Vengono discussi i tre principi della dinamica di Newton e il significato della relatività galileiana.

**Equazioni cardinali della dinamica.** Vengono presentate le tre equazioni cardinali della dinamica per sistemi chiusi, che mettono in relazione la variazione delle grandezze dinamiche alle azioni, e che nel caso di moti regolari possono essere scritte in forma differenziale

$$\begin{aligned}\dot{\vec{Q}} &= \vec{R}^{ext} && \text{(bilancio quantità di moto)} \\ \dot{\vec{L}}_H + \dot{\vec{x}}_H \times \vec{Q} &= \vec{M}_H^{ext} && \text{(bilancio momento della quantità di moto)} \\ \dot{K} &= P^{tot} && \text{(bilancio energia cinetica).}\end{aligned}$$

Viene dimostrato che le equazioni di bilancio hanno la stessa forma per ogni sistema chiuso se scritti in termini di variazione di quantità di moto, momento della quantità di moto ed energia cinetica, senza esplicitare la forma particolare di queste grandezze dinamiche per i sistemi particolari presi in considerazione. Vengono forniti alcuni esempi ed esercizi svolti.

**Leggi di conservazione.** Sotto opportune ipotesi immediatamente riconoscibili dalle equazioni cardinali, vengono ricavate le leggi di conservazione validi per i sistemi meccanici,

$$\begin{aligned}\vec{R}^{ext} = \vec{0} & \rightarrow \vec{Q} = \text{const.} \\ \vec{M}_H^{ext} = \vec{0}, \dot{\vec{x}}_H \times \vec{Q} = \vec{0} & \rightarrow \vec{L}_H = \text{const.} \\ P^{tot} = \vec{0} & \rightarrow K = \text{const.}\end{aligned}$$

Nel caso in cui le azioni agenti sul sistema non abbiano potenza nulla, ma che siano forze conservative, si riconosce la legge di conservazione dell'energia meccanica  $E^{mec}$ , definita come somma dell'energia cinetica,  $K$ , e dell'energia potenziale,  $V$ ,

$$P^{tot} = -\dot{V}, \quad E^{mec} = K + V \quad \rightarrow \quad E^{mec} = \text{const.}$$

**Urti.** Viene presentato un modello di urto tra sistemi fondato unicamente sul coefficiente di restituzione,  $\varepsilon$ , per rappresentare la frazione di energia meccanica persa dal sistema durante l'urto. Vengono presentati dei problemi risolti grazie ai principi di conservazione e alle equazioni cardinali in forma incrementale.

**Moti particolari - gravitazione.** Vengono infine analizzati alcuni sistemi particolare, di interesse pratico, storico, e/o didattico **todo**

## 10.1 Principi della dinamica di Newton

La meccanica classica di Newton viene costruita assumendo valido il **principio di conservazione della massa** e i **tre principi della dinamica**.

**Principio di conservazione della massa.** In meccanica classica, il principio di Lavoisier di conservazione della massa può essere riassunto con la formula «niente si crea, niente si distrugge». Per essere più precisi, il principio di conservazione della massa postula che la massa di un sistema chiuso è costante.

**Primo principio - principio di inerzia.** Un sistema (o meglio, il baricentro di un sistema) sul quale agisce una forza esterna netta nulla, persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema di riferimento inerziale.

**Secondo principio - bilancio della quantità di moto per sistemi chiusi.** Rispetto a un sistema di riferimento inerziale, la variazione della quantità di moto  $\vec{Q}$  di un sistema chiuso è uguale all'impulso delle forze esterne  $\vec{I}^{ext}$  agenti su di esso,

$$\Delta \vec{Q} = \vec{I}^{ext}.$$

Nel caso di moto regolare, in cui la quantità di moto del sistema è una grandezza continua e differenziabile rispetto al tempo, il secondo principio può essere scritto in forma differenziale, facendo tendere a zero l'intervallo di tempo considerato

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{R}^{ext},$$

avendo indicato con  $\vec{R}^{ext}$  la risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

**Terzo principio - principio di azione-reazione.** Se un sistema  $i$  esercita una forza  $\vec{F}_{ji}$  sul sistema  $j$ , allora il sistema  $j$  esercita sul sistema  $i$  una forza  $\vec{F}_{ij}$  «uguale e contraria» - stesso valore assoluto e verso opposto,

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}.$$

### **todo Osservazioni**

- sistema di riferimento inerziale e invarianza galileiana
- sistemi aperti e sistemi chiusi: sottolineare la validità di  $\Delta \vec{Q} = \vec{I}^{ext}$  solo per sistemi chiusi, mentre per sistemi aperti è necessario un termine di flusso della quantità meccanica. Riferimento alla meccanica dei fluidi

### 10.1.1 Sistemi di riferimento inerziali e invarianza galileiana.

La formulazione dei principi della dinamica si basa sul concetto di sistema di riferimento inerziale, di cui non è stato ancora detto nulla. E' possibile dare una definizione operativa di osservatore inerziale (o sistema di riferimento inerziale? **todo**), supponendo che:

- l'osservatore sia dotato di uno strumento in grado di misurare le forze e i momenti ai quali è soggetto (**todo** ad esempio una bilancia o una combinazione di dinamometri)
- sia possibile conoscere le azioni «vere» (**todo** fare riferimento alle forze «vere» note: gravitazione - che in meccanica classica è una forza -, elettromagnetica, nucleare forte e debole; o le loro manifestazioni macroscopiche come ad esempio forze di contatto) agenti sul sistema.

**Definizione.** Un osservatore è inerziale se la lettura degli strumenti di misura in suo possesso corrisponde alle azioni «vere» agenti sul sistema. In particolare, in assenza di azioni nette gli strumenti restituiscono una misura nulla.

**Definizione quantità cinematiche.** Sia  $O$  l'origine di un sistema di riferimento coincidente con un'osservatore inerziale, la velocità di un punto  $P$  rispetto a  $O$  è la derivata del vettore posizione  $P - O$  rispetto al tempo (assoluto in meccanica classica di Newton)

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(P - O) .$$

La quantità di moto di un sistema rispetto al sistema di riferimento inerziale con origine in  $O$  è data dal prodotto della massa del sistema per la velocità del centro di massa  $G$ ,

$$\vec{Q} = m \vec{v}_G .$$

**Equivalenza di sistemi inerziali e invarianza galileiana.** Dato un sistema inerziale, ogni altro sistema in moto relativo con un moto di traslazione a velocità costante è un sistema inerziale.

**todo** *Prova.*

**Invarianza galileiana.**

- Posizione

$$P - O_0 = P - O_1 + O_1 - O_0$$

- Velocità e quantità di moto

$$\vec{v}_{P/0} = \vec{v}_{P/1} + \vec{v}_{O_1/0}$$

$$m\vec{v}_{G/0} = m\vec{v}_{G/1} + m\vec{v}_{O_1/0}$$

$$\vec{Q}_{/0} = \vec{Q}_{/1} + m\vec{v}_{O_1/0}$$

$$\text{con } \frac{d}{dt}\vec{v}_{O_1/0} = \vec{a}_{O_1/0} = \vec{0}.$$

- Accelerazione e secondo principio della dinamica

$$\vec{a}_{P/0} = \vec{a}_{P/1}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{Q}_{/0} = \frac{d}{dt}\vec{Q}_{/1} + \frac{d}{dt}(m\vec{v}_{O_1/0})$$

$$\dot{\vec{Q}}_{/0} = \dot{\vec{Q}}_{/1}$$

$$\text{essendo } \frac{d}{dt}\vec{v}_{O_1/0} = \vec{a}_{O_1/0} = \vec{0}.$$

Di conseguenza, il secondo principio della dinamica assume la stessa forma quando è riferito a un sistema di riferimento inerziale qualsiasi,

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{R}^{ext} ,$$

e mentre la regola di trasformazione delle velocità e delle posizioni rispetto ai diversi sistemi di riferimento inerziali è data dalle leggi

$$\begin{cases} \vec{v}_{P/0} = \vec{v}_{P/1} + \vec{v}_{O_1/0} \\ \vec{r}_{P/0} = \vec{r}_{P/1} + \vec{v}_{O_1/0}t + \vec{r}_{O_1/0} \end{cases}$$

che costituiscono le leggi della **relatività galileiana**, che legano due sistemi inerziali.

## 10.2 Equazioni cardinali della dinamica per sistemi chiusi

Le equazioni cardinali della dinamica mettono in relazione le variazioni delle grandezze inerziali con le azioni agenti sul sistema.

Usando i principi della meccanica di Newton e la conservazione della massa per sistemi chiusi, è possibile ricavare le equazioni cardinali della dinamica, che governano il moto di un sistema meccanico.

Per ogni sistema chiuso le equazioni cardinali assumono la stessa forma, quando vengono espresse in termini di quantità di moto, quantità del momento angolare ed energia cinetica del sistema. Questo viene qui dimostrato per un *punto materiale* per un *sistema di punti materiali*, e per un *corpo rigido con distribuzione di massa continua in un moto piano* **todo**, ma è valido per un sistema meccanico qualsiasi.

In particolare, per moti regolari e derivabili (e quindi senza urti impulsivi) le 3 equazioni cardinali del moto sono:

- **bilancio della quantità di moto:** la derivata nel tempo della quantità di moto di un sistema chiuso è uguale alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema,

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{R}^{ext} ;$$

- **bilancio del momento della quantità di moto:** la derivata nel tempo del momento della quantità di moto di un sistema chiuso rispetto a un punto  $H$ , a meno di un «termine di trasporto della quantità di moto», è uguale alla risultante dei momenti esterni rispetto al polo  $H$

$$\dot{\vec{L}}_H + \dot{\vec{x}}_H \times \vec{Q} = \vec{M}_H^{ext} ;$$

- **bilancio dell'energia cinetica:** la derivata nel tempo dell'energia cinetica di un sistema chiuso è uguale all potenza totale agente sul sistema, uguale alla somma della potenza delle azioni interne e delle azioni interne al sistema,

$$\dot{K} = P^{tot} = P^{ext} + P^{int} .$$

basics

28 nov 2024

0 min read

### 10.2.1 Equazioni cardinali della dinamica per un punto

Le equazioni cardinali della dinamica in forma differenziale,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{Q}} &= \vec{R}^{ext} && \text{(bilancio quantità di moto)} \\ \dot{\vec{L}}_H + \dot{\vec{x}}_H \times \vec{Q} &= \vec{M}_H^{ext} && \text{(bilancio momento della quantità di moto)} \\ \dot{K} &= P^{tot} && \text{(bilancio energia cinetica)} . \end{aligned}$$

vengono ricavate per un sistema puntiforme calcolando la derivata nel tempo delle grandezze dinamiche di un punto,

$$\begin{aligned} \vec{Q}_P &:= m_P \vec{v}_P && \text{(quantità di moto)} \\ \vec{L}_{P,H} &:= (\vec{r}_P - \vec{r}_H) \times \vec{Q} = m_P (\vec{r}_P - \vec{r}_H) \times \vec{v}_P && \text{(momento della quantità di moto)} \\ K &:= \frac{1}{2} m_P \vec{v}_P \cdot \vec{v}_P = \frac{1}{2} m_P |\vec{v}_P|^2 && \text{(energia cinetica)} \end{aligned}$$

utilizzando i principi della dinamica.



### Bilancio della quantità di moto

Il bilancio della quantità di moto di un punto materiale  $P$ ,  $\vec{Q}_P = m\vec{v}_P$  segue direttamente dal secondo principio della dinamica di Newton,

$$\dot{\vec{Q}}_P = \vec{R}_P^{ext}$$

### Bilancio del momento della quantità di moto

La derivata nel tempo del momento della quantità di moto viene calcolata usando la regola del prodotto,

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}}_{P,H} &= \frac{d}{dt} [m_P(\vec{r}_P - \vec{r}_H) \times \vec{v}_P] = \\ &= m \left[ (\dot{\vec{r}}_P - \dot{\vec{r}}_H) \times \vec{v}_P + m_P(\vec{r}_P - \vec{r}_H) \times \dot{\vec{v}}_P \right] = \\ &= -m_P \dot{\vec{r}}_H \times \vec{v}_P + m_P(\vec{r}_P - \vec{r}_H) \times \dot{\vec{v}}_P = \\ &= -\dot{\vec{r}}_H \times \vec{Q} + \vec{M}_H^{ext} .\end{aligned}$$

### Bilancio dell'energia cinetica.

$$\begin{aligned}\dot{K}_P &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_P \vec{v}_P \cdot \vec{v}_P \right) = \\ &= m_P \dot{\vec{v}}_P \cdot \vec{v}_P = \\ &= \vec{R}^{ext} \cdot \vec{v}_P = \\ &= \vec{R}^{tot} \cdot \vec{v}_P = P^{tot} .\end{aligned}$$

basics

28 nov 2024

2 min read

## 10.2.2 Equazioni cardinali della dinamica per sistemi di punti

Partendo dalle equazioni dinamiche per un punto, si ricavano le equazioni dinamiche per un sistema di punti,

$$\begin{aligned}\dot{\vec{Q}} &= \vec{R}^{ext} && \text{(bilancio quantità di moto)} \\ \dot{\vec{L}}_H + \dot{\vec{x}}_H \times \vec{Q} &= \vec{M}_H^{ext} && \text{(bilancio momento della quantità di moto)} \\ \dot{K} &= P^{tot} && \text{(bilancio energia cinetica)} .\end{aligned}$$

sfruttando il terzo principio della dinamica di azione/reazione. Lo sviluppo delle equazioni permette di comprendere l'origine della natura additiva delle grandezze dinamiche di sistemi composti da più componenti,

$$\begin{aligned}\vec{Q} &= \sum_i \vec{Q}_i && \text{(quantità di moto)} \\ \vec{L}_H &= \sum_i \vec{L}_{H,i} && \text{(momento della quantità di moto)} \\ K &= \sum_i K_i && \text{(energia cinetica)} .\end{aligned}$$

(quantità di moto, momento della quantità di moto, energia cinetica),

### Bilancio della quantità di moto.

E' possibile scrivere il bilancio della quantità di moto per ogni punto  $i$  del sistema, scrivendo la risultante delle forze esterne agente sul punto come la somma delle forze esterne all'intero sistema agenti sul punto e le forze interne scambiate con gli altri punti del sistema,

$$\vec{R}_i^{ext,i} = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}.$$

L'equazione di bilancio per la  $i$ -esima massa diventa quindi

$$\dot{\vec{Q}}_i = \vec{R}_i^{ext,i} = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}.$$

Sommando le equazioni di bilancio di tutte le masse, si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{\vec{Q}}_i &= \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \\ &= \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \sum_{\{i,j\}} \underbrace{(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji})}_{=\vec{0}} \end{aligned}$$

e definendo la quantità di moto di un sistema come la somma delle quantità di moto delle sue parti e la risultante delle forze esterne come somma delle forze esterne agenti sulle parti del sistema,

$$\vec{Q} := \sum_i \vec{Q}_i$$

$$\vec{R}^{ext} := \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

si ritrova la forma generale del bilancio della quantità di moto,

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{R}^{ext}.$$

### Bilancio del momento della quantità di moto

E' possibile scrivere il bilancio del momento della quantità di moto per ogni punto  $i$  del sistema, scrivendo la risultante dei momenti esterni agente sul punto come la somma dei momenti esterni all'intero sistema agenti sul punto e i momenti interni scambiati con gli altri punti del sistema,

$$\vec{M}_{H,i}^{ext,i} = \vec{M}_{H,i}^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{M}_{H,ij}.$$

Nel caso le parti del sistema interagiscano tramite forze, il momento rispetto al polo  $H$  generato dalla massa  $j$  sulla massa  $i$  vale

$$\vec{M}_{H,ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_H) \times \vec{F}_{ij}.$$

L'equazione di bilancio per la  $i$ -esima massa diventa quindi

$$\dot{\vec{L}}_{H,i} + \dot{\vec{r}}_H \times \vec{Q}_i = \vec{M}_{H,i}^{ext,i} = \vec{M}_{H,i}^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{M}_{H,ij}.$$

Sommando le equazioni di bilancio di tutte le masse, si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_i \left( \dot{\vec{L}}_i + \dot{\vec{r}}_H \times \vec{Q}_i \right) &= \sum_i \vec{M}_{H,i}^{ext} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{M}_{H,ij} = \\ &= \sum_i \vec{M}_{H,i}^{ext} + \sum_{\{i,j\}} \underbrace{(\vec{M}_{H,ij} + \vec{M}_{H,ji})}_{=\vec{0}} \end{aligned}$$

e riconoscendo la quantità di moto del sistema e definendo il momento della quantità di moto di un sistema come la somma del momento della quantità di moto delle sue parti e la risultante dei momenti esterni come somma dei momenti esterni agenti sulle parti del sistema,

$$\vec{L}_H := \sum_i \vec{L}_{H,i}$$

$$\vec{M}_H^e := \sum_i \vec{M}_{H,i}^{ext}$$

si ritrova la forma generale del bilancio del momento della quantità di moto,

$$\dot{\vec{L}}_H + \dot{\vec{r}}_H \times \vec{Q} = \vec{M}_H^{ext}.$$

### Bilancio dell'energia cinetica.

E' possibile ricavare il bilancio dell'energia cinetica del sistema, moltiplicando scalarmente il bilancio della quantità di moto di ogni punto,

$$\vec{v}_i \cdot m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{v}_i \cdot \left( \vec{F}_i^e + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right),$$

riconoscendo nel primo termine la derivata nel tempo dell'energia cinetica dell' $i$ -esimo punto,

$$\dot{K}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \right) = m_i \vec{v}_i \cdot \dot{\vec{v}}_i,$$

e sommando queste equazioni di bilancio per ottenere

$$\sum_i \dot{K}_i = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i^e + \sum_i \vec{v}_i \cdot \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}.$$

Definendo l'energia cinetica di un sistema come la somma dell'energia cinetica delle sue parti, e definendo la potenza delle forze esterne/interne agenti sul sistema come la somma della potenza di tutte le forze esterne/interni al sistema,

$$K := \sum_i K_i$$

$$P^e := \sum_i P_i^{ext} = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i^{ext}$$

$$P^i := \sum_i P_i^{int} = \sum_i \vec{v}_i \cdot \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

si ritrova la forma generale del bilancio dell'energia cinetica,

$$\dot{K} = P^{ext} + P^{int} = P^{tot}.$$

## 10.2.3 Equazioni cardinali della dinamica per un corpo rigido in moto piano

todo

basics

28 nov 2024

1 min read

## 10.3 Leggi di conservazione

Partendo dalle equazioni di bilancio,

$$\begin{aligned}\dot{\vec{Q}} &= \vec{R}^{ext} && \text{(bilancio quantità di moto)} \\ \dot{\vec{L}}_H + \dot{\vec{x}}_H \times \vec{Q} &= \vec{M}_H^{ext} && \text{(bilancio momento della quantità di moto)} \\ \dot{K} &= P^{tot} && \text{(bilancio energia cinetica)}\end{aligned}$$

sotto opportune ipotesi, si ottengono alcune leggi di conservazione di quantità meccaniche.

**Conservazione della quantità di moto.** L'equazione di bilancio della quantità di moto di un sistema chiuso garantisce che la quantità di moto di un sistema chiuso è costante se la risultante delle forze esterne sul sistema è nulla,

$$\vec{R}^{ext} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{Q} = \text{const.}$$

**Conservazione del momento della quantità di moto.** L'equazione di bilancio del momento della quantità di moto di un sistema chiuso garantisce che il momento della quantità di moto di un sistema chiuso è costante se la risultante dei momenti esterni sul sistema è nulla, ed è nullo il termine di trasporto,

$$\vec{M}_H^{ext} = \vec{0}, \quad \dot{\vec{x}}_H \times \vec{Q} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{L}_H = \text{const.}$$

---

### Example 9.3.1 (Rotazione di una ballerina)

---

**Conservazione del momento dell'energia cinetica.** L'equazione di bilancio dell'energia cinetica di un sistema chiuso garantisce che il momento della quantità di moto di un sistema chiuso è costante se la risultante della potenza di tutte le azioni agenti sul sistema è nulla,

$$P^{tot} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad K = \text{const.}$$

**Conservazione del momento dell'energia meccanica.** Se le azioni agenti su un sistema sono conservative, la loro potenza può essere scritta come derivata nel tempo di un'energia potenziale,  $P^{tot} = -\dot{V}$ . Se si definisce **energia meccanica** la somma dell'energia cinetica del sistema e dell'energia potenziale delle azioni agenti sul sistema,  $E^{mec} := K + V$ , segue immediatamente che, in assenza di azioni non-conservative l'energia meccanica di un sistema è costante,

$$P^{tot} = -\dot{V} \quad \rightarrow \quad E^{mec} = \text{const.}$$

## 10.4 Equazioni cardinali della dinamica per sistemi aperti

Nelle sezioni precedenti, i *principi della dinamica*, le *equazioni cardinali* e le *leggi di conservazione* sono state presentate per i **sistemi chiusi**, che non scambiano massa con l'ambiente esterno.

In questa sezione si presentano i bilanci di massa, quantità di moto e energia cinetica per sistemi aperti; pur non potendo dare una dimostrazione rigorosa, si mostra il procedimento generale per ricavare un bilancio per un sistema aperto dal corrispondente bilancio per un sistema chiuso.

## 10.4.1 Esempi

### Example 9.4.1 (Sistemi discreti - Moto di una barca per reazione)

Una barca di massa  $M$  è stata caricata con  $N$  palle di cannone, ciascuna di massa  $m$ , così che la massa totale è  $M = M_0 + Nm$ . La barca si muove lungo una traiettoria rettilinea, inizialmente con velocità  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{x}$ . Sulla barca è presente un cannone in grado di sparare i proiettili esattamente nella stessa direzione della traiettoria, con un a velocità relativa di  $\vec{v}_p - \vec{v}^- = \vec{v}_p^{rel,-} = -v^{rel} \hat{x}$ , con  $v^{rel} > 0$ , rispetto alla velocità della barca **prima dello sparo**,  $\vec{v}^-$ .

Viene chiesto di determinare la velocità della barca dopo  $n \leq N$  spari. **todo** e di determinare dopo quanti spari, i proiettili vengono sparati nella stessa direzione «assoluta» in cui si muove la barca

**Soluzione.**

### Approccio 1. Conservazione della quantità di moto di un sistema chiuso costituito dalla barca e dalla palla di cannone sparata.

Non agendo altre forze nette sul sistema, la quantità di moto del sistema chiuso è conservata tra un istante di tempo precedente e successivo allo sparo  $n$ -esimo.

$$\begin{aligned} M_n v_n &= M_{n+1} v_{n+1} + m v_{p,n+1} \\ &= (M_n - m) v_{n+1} + m (v_n + v_p^{rel}) \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{m}{M_n - m} v_p^{rel} = \\ &= \frac{m}{M_0 + (N - n)m - m} v_p^{rel} = \\ &= \frac{m}{M - (1 + n)m} v_p^{rel} \end{aligned}$$

La velocità  $v_{n+1}$  può quindi essere riportata alla velocità  $v_0$  sommando gli  $n$  contributi  $v_{n+1} - v_n, v_n - v_{n-1}, \dots$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_0 &= v_{n+1} - v_n + v_n - v_{n-1} + \dots + v_1 - v_0 = \\ &= \frac{m}{M - (1 + n)m} v_p^{rel} + \frac{m}{M - nm} v_p^{rel} + \dots + \frac{m}{M - m} v_p^{rel} = \\ &= \frac{m}{M} v_p^{rel} \sum_{k=0}^n \frac{1}{1 - (1 + k) \frac{m}{M}}. \end{aligned}$$

**oss.** L'equazione ... può essere riscritta mettendo in evidenza le variazioni delle grandezze fisiche velocità e massa

$$\Delta v_{n+1} = v_{n+1} - v_n, \Delta M_{n+1} = M_{n+1} - M_n$$

$$\Delta v_{n+1} = -\frac{\Delta M_{n+1}}{M_{n+1}} v_p^{rel}.$$

### Approccio 2. Conservazione della quantità di moto di un sistema aperto costituito dalla barca.

$$\Delta \vec{Q} + \Delta t \Phi(\rho \vec{v}) = \vec{0},$$

$$\begin{aligned} \vec{0} &= M_{n+1} \vec{v}_{n+1} - M_n \vec{v}_n + m \vec{v}_p = \\ &= M_{n+1} \vec{v}_{n+1} - M_n \vec{v}_n + m (\vec{v}_p^{rel} + \vec{v}_n) \end{aligned}$$

$$\vec{v}_{n+1} - \vec{v}_n = \frac{m}{M_{n+1}} \vec{v}_p^{rel}.$$

#### Example 9.4.2 (Sistemi discreti - Moto di una giostra per reazione)

Una giostra è libera di ruotare attorno al suo centro, grazie a una cerniera cilindrica. Sulla giostra, sono state caricate delle palline di massa  $m$ , posizionate al bordo della giostra, che vengono lanciate in direzione tangenziale alla giostra da un marchingegno che riesce a fornire alle palline una velocità relativa rispetto alla velocità prima del lancio uguale a  $v_p^{rel}$ . La giostra ha raggio  $R$  e massa  $M$ .

Viene chiesto di determinare la velocità angolare della giostra dopo  $n \leq N$  lanci. **todo** e di determinare dopo quanti lanci, le palline vengono sparate nella stessa direzione «assoluta» in cui gira la giostra

**todo** Ripetere l'esercizio con le palline inizialmente posizionate sull'asse, poi trasportate sul bordo della giostra prima di essere lanciate. Primo trasferimento usando la conservazione del momento della quantità di moto, come una ballerina che cambia  $I$ , poi lancio...

**Approccio 1. Conservazione della quantità di moto di un sistema chiuso costituito dalla giostra e dalla palla.**

**Approccio 2. Conservazione della quantità di moto di un sistema aperto costituito dalla giostra.**

Il bilancio del momento della quantità di moto rispetto al centro della giostra attorno all'asse di rotazione è

$$\Delta L_{0,z} + \Delta t \Phi(\rho \vec{r} \times \vec{v}) = \vec{0}$$

Poichè il momento di inerzia tra un lancio e un altro diminuisce di una quantità costante dovuta al lancio di una pallina,  $I_{z,n+1} = I_{z,n} - mR^2$ , si può riscrivere l'equazione di bilancio

$$\begin{aligned} 0 &= I_{z,n+1} \Omega_{n+1} - I_{z,n} \Omega_n + mRv_p = \\ &= I_{z,n+1} \Omega_{n+1} - I_{z,n} \Omega_n + mR(R\Omega_n + v_p^{rel}) \\ &= I_{z,n+1} \Omega_{n+1} - I_{z,n+1} \Omega_n + mRv_p^{rel} \end{aligned}$$

per ricavare una relazione che lega la variazione di velocità angolare alla variazione di inerzia e al numero di palle lanciate,

$$\begin{aligned} \Omega_{n+1} - \Omega_n &= \frac{mR}{I_{z,n+1}} v_p^{rel} = \\ &= -\frac{\Delta I_z}{I_{z,n+1}} \frac{v_p^{rel}}{R} = \\ &= \frac{mR}{I - (n+1)mR^2} v_p^{rel} = , \end{aligned}$$

essendo  $I = I_0 + NmR^2$  l'inerzia iniziale dell'intero sistema.

#### Example 9.4.3 (Sistemi continui - Equazione della spinta per i razzi - Tsiolkovski)

L'equazione della spinta per i razzi - di Tsiolkovski **todo** un po' di storia? riferimento all'astronomia? riferimenti alla dinamica gravitazionale? - è una prima approssimazione del moto di un razzo a reazione, cioè che usa lo scarico di gas ad alta velocità come mezzo di spinta. Il sistema formato dalla struttura del razzo e il contenuto di combustibile e gas all'interno della struttura del razzo è un sistema aperto, che può scambiare materia attraverso la sezione dell'ugello. L'equazione permette di ricavare la velocità del razzo in funzione dell'espulsione della massa e della velocità effettiva,

relativa, di espulsione dei gas dal razzo. L'equazione può essere ricavata usando i bilanci di massa e di quantità di moto per sistemi aperti,

$$\frac{dM_{v(t)}}{dt} + \Phi_{\partial v(t)}(\rho) = 0$$

$$\frac{d\vec{Q}_{v(t)}}{dt} + \vec{\Phi}_{\partial v(t)}(\rho\vec{v}) = \vec{R}_{v(t)}^{ext}$$

applicando alcune semplificazioni ragionevoli per un modello di prima approssimazione. Assumendo che le proprietà (densità, velocità) siano uniformi sulla superficie dell'ugello, i flussi uscenti di massa e quantità di moto possono essere scritti nei termini del flusso di massa  $\dot{m}_e$  attraverso l'ugello,

$$\Phi_{\partial v(t)}(\rho) = \dot{m}_e, \quad \vec{\Phi}_{\partial v(t)}(\rho\vec{v}) = \dot{m}_e\vec{v},$$

Usando l'equazione della massa, segue immediatamente  $\dot{M}_{v(t)} = -\dot{m}_e$ . La quantità di moto del sistema al tempo  $t$  può essere scritta come prodotto della massa  $M_{v(t)}(t)$  e la velocità del baricentro  $\vec{v}_G(t)$  del sistema contenuto nel volume  $v(t)$ . La risultante delle forze è la somma delle forze di volume, tipicamente il peso, e le forze agenti sulla superficie del volume  $v(t)$ , tipicamente le forze aerodinamiche. L'equazione della quantità di moto può quindi essere riscritta come

$$\dot{M}\vec{v} + M\dot{\vec{v}} + \dot{m}_e\vec{v}_e = M(t)\vec{g} + \vec{F}^{aero}.$$

Scrivendo la velocità di efflusso come somma della velocità del baricentro e della velocità relativa al baricentro,  $\vec{v}_e = \vec{v} + \vec{v}_e^{rel}$ , usando l'equazione della massa  $\dot{m}_e = -\dot{M}$ , si può riscrivere l'equazione

$$M\dot{\vec{v}} = \dot{M}\vec{v}_e^{rel} + M(t)\vec{g} + \vec{F}^{aero},$$

e riconoscere il termine  $\dot{M}\vec{v}_e^{rel}$  come la spinta generata sul razzo dall'efflusso dei gas.

Nel caso in cui si possano trascurare le forze esterne agenti sul sistema rispetto alla spinta, l'equazione di moto fornisce una relazione differenziale tra la massa  $M(t)$  e la velocità  $\vec{v}$  del sistema,

$$M\dot{\vec{v}} = \dot{M}\vec{v}_e^{rel}.$$

Spostando tutto da una parte dell'uguale, e dividendo per la massa  $M$ , e ricordando che  $\frac{d}{dt} \ln x(t) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$ , assumendo che la velocità relativa di efflusso sia costante, si può riscrivere l'equazione in termini di una derivata in tempo nulla,

$$0 = \dot{\vec{v}} - \frac{\dot{M}}{M}\vec{v}_e^{rel} = \frac{d}{dt} \left( \vec{v} - \vec{v}_e^{rel} \ln \frac{M}{M_0} \right),$$

che implica la costanza della funzione derivata,

$$\vec{v}_2 - \ln \frac{M_2}{M_0} \vec{v}_e^{rel} = \vec{v}_1 - \ln \frac{M_1}{M_0} \vec{v}_e^{rel},$$

che può essere riscritta come

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_e^{rel} \ln \frac{M_2}{M_1}.$$

## 10.5 Collisioni

Una descrizione dettagliata delle collisioni tra sistemi qualsiasi va ben al di là dello scopo di un primo approccio alla meccanica.

Qui, ci si limiterà allo studio di collisioni che:

- possono essere caratterizzate unicamente da un *coefficiente di ritorno*,  $\varepsilon$  **todo**
- avvengono in intervalli di tempo ridotti, al limite nulli

Questi urti comportano delle variazioni finite delle quantità dinamiche in intervalli di tempo finiti, vengono definiti **urti impulsivi** (**todo verificare**) e rappresentano un esempio di moto «non regolare», per il quale le equazioni cardinali della dinamica devono essere scritte in forma incrementale.

**todo** approfondimento su forze impulsive e delta di Dirac?

Tra due istanti temporali immediatamente precedente e immediatamente successivo all'urto tra due sistemi possono essere trascurate tutte le azioni agenti sul sistema complessivo tranne quelle **impulsive** dovute all'**urto**, e ad eventuali **reazioni vincolari** (vedi esercizi),

$$\begin{aligned}\vec{I}^{ext} &= \Delta \vec{Q} \\ \vec{J}_H^{ext} &= \Delta \vec{\Gamma}_H + \Delta \vec{x}_H \times \vec{Q} = \Delta \vec{\Gamma}_H \\ L^{ext} + L^{int} &= \Delta K,\end{aligned}$$

con  $\vec{I}^{ext}$  l'impulso delle forze esterne durante l'urto,  $\vec{J}^{ext}$  l'impulso dei momenti esterni durante l'urto,  $L^{ext}$ ,  $L^{int}$  il lavoro delle forze esterne e interne durante l'urto.

E' bene osservare che in assenza di forze e momenti impulsivi esterni - anche dovuti a eventuali vincoli - ai due sistemi che collidono, la quantità di moto e il momento della quantità di moto del sistema complessivo si conservano in un urto. Al contrario, in generale, l'**energia cinetica non si conserva** poiché dipende anche dal lavoro delle azioni interne che includono quelle impulsive scambiate durante l'urto.

Il **coefficiente di restituzione**  $\varepsilon \in [0, 1]$  caratterizza il tipo di urto e ha una facile interpretazione se l'urto viene studiato usando un sistema di riferimento con origine il centro di massa del sistema,  $Q$ . Le quantità riferite a questo sistema vengono indicate qui con l'apice.

Poiché si è scelto come riferimento il centro di massa, in assenza di forze impulsive esterne,

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \vec{p}^- = \vec{p}^+ \\ \vec{0} &= \vec{p}^- = \vec{p}_1^- + \vec{p}_2^- \\ \vec{0} &= \vec{p}^+ = \vec{p}_1^+ + \vec{p}_2^+\end{aligned}$$

**todo** distinguere tra componente normale e tangenziale

Il coefficiente di restituzione viene definito come l'opposto del rapporto tra il valore assoluto (**todo** dovrebbe essere la componente normale, assunto che la componente tangenziale si conservi - oppure trovare anche un modello per la componente tangenziale, dovuta ad attrito) della quantità di moto di uno dei due corpi dopo e prima dell'urto,

$$\varepsilon := -\frac{|\vec{p}_1^{+'}|}{|\vec{p}_1^{-'}|} = -\frac{|\vec{p}_2^{+'}|}{|\vec{p}_2^{-'}|}$$

In termini di energia cinetica, nel sistema di riferimento del centro di massa

$$\begin{aligned}K^{+'} &= \frac{1}{2m_1} \vec{p}_1^{+'} \cdot \vec{p}_1^{+'} + \frac{1}{2m_2} \vec{p}_2^{+'} \cdot \vec{p}_2^{+'} = \\ &= \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2m_1} \vec{p}_1^{-'} \cdot \vec{p}_1^{-'} + \frac{1}{2m_2} \vec{p}_2^{-'} \cdot \vec{p}_2^{-'} \right] = \varepsilon^2 K^{-'}\end{aligned}$$



### 10.5.1 Problemi

Collisione tra blocchi su piano orizzontale liscio Date le masse di due blocchi che scivolano su un piano orizzontale liscio, e le velocità iniziali dei due blocchi, e il coefficiente di restituzione dell'urto, viene chiesto di determinare le velocità dei due blocchi dopo l'urto.



#### Soluzione.

##### todo

Collisione tra blocchi su piano orizzontale scabro Date le masse di due blocchi che scivolano su un piano orizzontale scabro, le velocità e la distanza iniziale tra i due blocchi, il coefficiente di restituzione dell'urto, il coefficiente di attrito dinamico  $\mu^d$  tra i due blocchi e il piano orizzontale, viene chiesto di determinare:

- le condizioni affinché avvenga l'urto
- in caso di urto:
  - le velocità immediatamente dopo l'urto
  - la posizione finale delle due masse

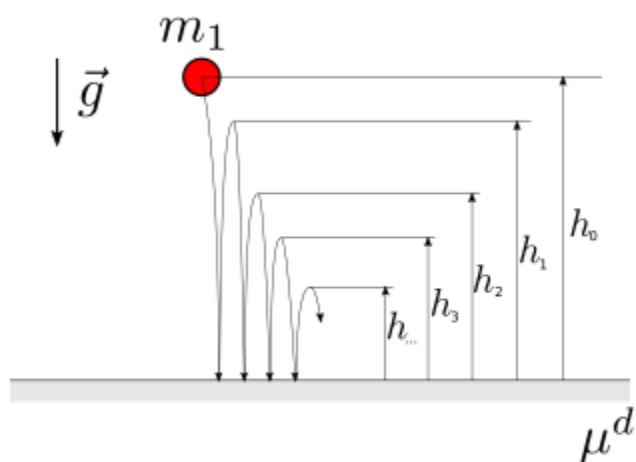


**Soluzione.**

**todo**

Rimbalzo di una palla Dato il coefficiente di restituzione degli urti tra la palla di massa  $m_1$  nota e il piano orizzontale, viene chiesto di determinare la distanza verticale percorsa dalla palla durante i rimbalzi.

**Oss.** Il numero di rimbalzi è infinito, ma il risultato si ottiene da una serie infinita convergente.

**Soluzione.****todo**

Collisione di un sistema massa-molla con una parete Data la configurazione iniziale del sistema massa-molla, con lunghezza a riposo nulla  $\ell_0$  e allungamento iniziale  $x_0$ , viene chiesto di descrivere l'evoluzione del sistema in funzione del coefficiente di restituzione  $\varepsilon$  degli urti tra la massa e la parete rigida verticale. In particolare, si chiede di distinguere il caso di urto elastico dai casi di urto parzialmente elastico.



**Soluzione.**

**todo**

Collisioni tra due blocchi e una parete rigida Nel caso di urti perfettamente elastici tra i due blocchi e con la parete, viene chiesto di determinare il numero di urti tra i due blocchi.

**Soluzione.****todo**

Proiettile su pendolo con massa concentrata Un proiettile colpisce un pendolo. In funzione del coefficiente di restituzione  $\varepsilon$ , viene chiesto di determinare:

- le condizioni immediatamente successive all'urto
- l'angolo massimo raggiunto dal pendolo

Si calcolino poi le reazioni vincolari a terra, prima, durante e dopo l'urto.



### Soluzione.

#### todo

Proiettile su pendolo con massa distribuita Un proiettile colpisce un pendolo. In funzione del coefficiente di restituzione  $\varepsilon$ , viene chiesto di determinare:

- le condizioni immediatamente successive all'urto
- l'angolo massimo raggiunto dal pendolo.

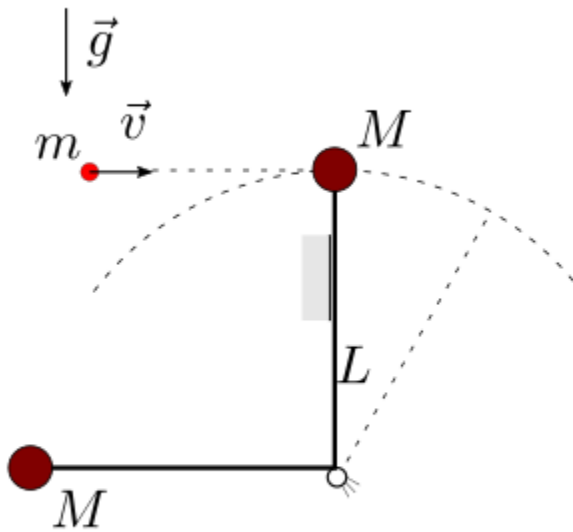
Si calcolino poi le reazioni vincolari a terra, prima, durante e dopo l'urto.

**Soluzione.****todo**

Proiettile su bersaglio di poligono di tiro Un proiettile colpisce il bersaglio di un poligono, inizialmente appoggiato alla parete verticale. In funzione del coefficiente di restituzione  $\varepsilon$ , viene chiesto di determinare:

- le condizioni immediatamente successive all'urto
- la velocità minima del proiettile prima dell'urto che garantisce di abbattere il bersaglio.

Si calcolino poi le reazioni vincolari a terra, prima, durante e dopo l'urto.



### Soluzione.

#### todo

Collisione su sistema libero rigido di masse concentrate Un proiettile colpisce un sistema rigido di due masse concentrate, libero e inizialmente in quiete. Si chiede di determinare il moto dei sistemi dopo l'urto, in funzione del coefficiente di restituzione.



**Soluzione.****todo**

Collisione su sistema libero rigido a massa distribuita Un proiettile colpisce un sistema rigido di due masse concentrate, libero e inizialmente in quiete. Si chiede di determinare il moto dei sistemi dopo l'urto, in funzione del coefficiente di restituzione.



**Soluzione.**

**todo**

basics

28 nov 2024

3 min read

## 10.6 Gravitazione

### 10.6.1 Legge di gravitazione universale

$$\vec{F}_{10} = G m_0 m_1 \frac{\vec{r}_{01}}{|\vec{r}_{01}|^3}$$

### 10.6.2 Problema dei due corpi

In meccanica classica, il problema dei due corpi si riferisce alla dinamica di un sistema formato da due corpi puntiformi soggetti unicamente alla mutua interazione gravitazionale, descritta dalla legge di gravitazione universale di Newton.

Il sistema formato dai due punti è un sistema chiuso e isolato, sul quale non agiscono azioni esterne. La quantità di moto rispetto a un sistema di riferimento inerziale rimane quindi costante. Rimane quindi costante la velocità del centro di massa  $G$ ,

$$G = \frac{m_0 P_0 + m_1 P_1}{m_0 + m_1},$$

ed è possibile definire un sistema di riferimento inerziale con origine nel centro di massa del sistema. Il raggio vettore tra i due corpi può quindi essere riscritto,

$$P_1 - G = P_1 - \frac{m_0 P_0 + m_1 P_1}{m_0 + m_1} = \frac{-m_0 P_0 + m_0 P_1}{m_0 + m_1} = \frac{m_0}{m_0 + m_1} (P_1 - P_0).$$

L'equazione del moto per il corpo 1 nel sistema di riferimento inerziale con origine in  $G$  segue il secondo principio della dinamica. L'equazione del moto può essere scritto in termini del raggio vettore tra corpo 1 e centro di massa,

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2}{dt^2} (P_1 - G) &= -G m_0 m_1 \frac{P_1 - P_0}{|P_1 - P_0|^3} = \\ &= -G \frac{(m_0 + m_1)^2}{m_0} m_1 \frac{P_1 - G}{|P_1 - G|^3} \end{aligned}$$

o in termini del raggio vettore tra i due corpi  $P_1 - P_0$

$$\begin{aligned} \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \frac{d^2}{dt^2} (P_1 - P_0) &= -G m_0 m_1 \frac{P_1 - P_0}{|P_1 - P_0|^3} \\ m_1 \frac{d^2}{dt^2} (P_1 - P_0) &= -G (m_0 + m_1) m_1 \frac{P_1 - P_0}{|P_1 - P_0|^3} \end{aligned}$$

Le equazioni del moto in questi due sistemi di riferimento possono essere scritte nella forma

$$m_1 \ddot{\vec{r}} = -GM m_1 \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

### Traiettorie, coniche, ed energia

E' possibile dimostrare che il moto di ognuno dei due corpi è un moto piano, e che la traiettoria avviene descrive una conica.

- **todo** Dimostrare che il moto è piano
- **todo** Dimostrare che la traiettoria è una conica

Il tipo di curva conica dipende da una grandezza scalare che può essere ricondotta a un'energia. Il prodotto scalare della velocità  $\dot{\vec{r}}$  con l'equazione del moto, permette di ricavare un principio di conservazione dell'energia,

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\vec{r}} \cdot \left( m \ddot{\vec{r}} + GM m \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m |\dot{\vec{r}}|^2 - GM m \frac{1}{r} \right) = \frac{dE^{mec}}{dt} \end{aligned}$$

Usando il sistema di coordinate polari, e la costanza della velocità angolare  $\Omega = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ , si può scrivere

$$\begin{aligned}\frac{E^{mec}}{m} &= \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r} = \\ &= \frac{1}{2}\dot{r}^2 + 2\frac{\Omega^2}{r^2} - \frac{GM}{r} = \\ &= \frac{1}{2}\dot{r}^2 + v_r(r) .\end{aligned}$$

Poiché  $\frac{1}{2}\dot{r}^2 \geq 0$ , il moto è possibile per tutti i valori di  $r$  tali che  $\frac{E}{m} \geq v_r(r)$ . Il valore di  $E$  identifica le traiettorie. **todo aggiungere grafici**

- esiste un valore minimo di  $E$ : questo valore è associato a un'orbita circolare
- per  $E_{min} \leq E \leq 0$  esistono due soluzioni dell'equazione  $\frac{E}{m} - v_r(r) = 0$ : orbite chiuse, ellittiche o circolari (per  $E = E_{min}$ )
- $E = 0$  è un caso limite che separa le orbite chiuse e le orbite aperte: a  $E = 0$  è associata un'orbita parabolica
- per  $E > 0$  le orbite aperte sono iperboliche

## Traiettorie chiuse e leggi di Keplero

**Prima legge.** Un pianeta descrive un'orbita ellittica attorno al Sole, che si trova in uno dei due fuochi.

**Seconda legge legge.** Considerando l'area descritta dal moto del pianeta attorno al Sole, la velocità angolare è costante lungo la traiettoria.

**Terza legge.** In un sistema di pianeti, il quadrato del periodo delle orbite descritte dai pianeti è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della traiettoria,  $T^2 \propto a^3$ .

**todo** rispetto a quale sistema di riferimento? Serve l'approssimazione che la massa del Sole sia  $\gg$  delle masse dei pianeti, se si considera inerziale un sistema di coordinate con origine nel Sole? O bisogna/si può usare un sistema inerziale con origine nel centro di massa del sistema (considerato isolato)

**Moto piano.** Siano  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  la posizione e la velocità del pianeta rispetto al Sole. La forza di gravità agente sul pianeta è

$$\vec{F} = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3} .$$

E' facile dimostrare che il moto è piano, cioè che la posizione e la velocità del pianeta sono sempre ortogonali a una direzione costante.

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=\vec{0}} + \vec{r} \times \vec{a} = -GMm\vec{r} \times \underbrace{\frac{\vec{r}}{r^3}}_{=\vec{0}} = \vec{0} .$$

Poiché il vettore  $\vec{r} \times \vec{v} =: \frac{L}{m}\hat{k}$  è costante, è costante sia il suo valore assoluto sia la sua direzione: affinché  $\vec{r} \times \vec{v}$  sia allineato con  $\hat{k}$ , i vettori  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  devono essere ortogonali a  $\hat{k}$ .

**Coordinate polari.** Per descrivere il moto piano di un punto, si può usare un sistema di coordinate 2-dimensionale. Si sceglie un sistema di coordinate polari con origine coincidente con il Sole. La posizione del pianeta è identificata dal raggio vettore

$$\vec{r} = r \hat{r} ,$$

e la derivate dei versori radiale e azimuthale valgono

$$\begin{aligned}\dot{\hat{r}} &= \dot{\theta}\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\dot{\theta}\hat{r}\end{aligned}$$

La posizione, la velocità e l'accelerazione del pianeta possono essere scritte come

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r \hat{r} \\ \vec{v} &= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} \\ \vec{a} &= [\ddot{r} - r \dot{\theta}^2] \hat{r} + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}] \hat{\theta}\end{aligned}$$

La **velocità areolare**,  $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$  è costante e uguale a

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \frac{L}{m} \hat{k} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \hat{k}.$$

Dall'espressione della velocità angolare costante, si può ricavare il legame tra  $\dot{\theta}$  ed  $r$ ,

$$\dot{\theta} = \frac{\Omega}{r^2}.$$

Usando le coordinate polari, l'equazione del moto  $m\ddot{\vec{r}} = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3}$  viene scritta in componenti,

$$\begin{aligned}r : m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -GMm\frac{1}{r^2} \\ \theta : m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) &= 0\end{aligned}$$

**Traiettoria**,  $r(\theta)$ . Inserendo l'espressione  $\dot{\theta} = \frac{\Omega}{r^2}$  nella componente radiale, e definendo la funzione  $z = \frac{1}{r}$ , le derivate nel tempo della coordinata radiale possono essere riscritte come

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{d\theta} \dot{\theta} = -\Omega \frac{dz}{d\theta} \\ \ddot{r} &= \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \left( -\Omega \frac{dz}{d\theta} \right) = -z^2 \Omega^2 z''(\theta)\end{aligned}$$

e la componente radiale dell'equazione di moto,

$$\begin{aligned}-z^2 \Omega^2 z'' - z^3 \Omega^2 &= -GMz^2 \\ z'' + z &= \frac{GM}{\Omega^2} \\ z(\theta) &= \frac{GM}{\Omega^2} + A \cos(\theta) + B \sin(\theta).\end{aligned}$$

e quindi

$$r(\theta) = \frac{\Omega^2}{GM} \frac{1}{1 + A \frac{\Omega^2}{GM} \cos \theta + B \frac{\Omega^2}{GM} \sin \theta}$$

Scelta della direzione di riferimento: direzione del perielio:  $r(\theta = 0) = \min r$ ,  $B = 0$ ,

Scelte diverse si ottengono da una trasformazione di coordinate con una rotazione dell'asse di riferimento:  $\theta_1 = \theta - \theta_0$ , e quindi

$$r(\theta) = \frac{\Omega^2}{GM} \frac{1}{1 + \frac{A\Omega^2}{GM} \cos \theta} = \frac{\Omega^2}{GM} \frac{1}{1 + \frac{A\Omega^2}{GM} \cos(\theta_1 + \theta_0)} = \frac{\Omega^2}{GM} \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{A\Omega^2}{GM} \cos \theta_0}_{=A_1} \cos \theta_1 - \underbrace{\frac{A\Omega^2}{GM} \sin \theta_0}_{=B_1} \sin \theta_1}$$

Il confronto con l'equazione delle coniche in coordinate polari, permette di riconoscere l'eccentricità,  $e$  e il prodotto  $eD$  dell'eccentricità per la distanza  $D$  tra fuoco e direttrice,

$$e = \frac{A\Omega^2}{GM}, \quad eD = \frac{\Omega^2}{GM}$$

$$r(\theta) = \frac{\Omega^2}{GM} \frac{1}{1 + \frac{A\Omega^2}{GM} \cos \theta}$$

$$r(\theta) = \frac{e D}{1 + e \cos \theta}$$

Poiché la velocità areolare è costante, il periodo dell'orbita è uguale al rapporto tra l'area dell'ellisse e la velocità areolare,

$$T = \frac{\pi ab}{\Omega} = \pi \frac{a^2 \sqrt{1 - e^2}}{\Omega} =$$

$$1 - e^2 = 1 - \left( \frac{A\Omega^2}{GM} \right)^2 = \frac{\Omega^2}{GM a}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{GM} \sqrt{a}}$$

$$\rightarrow T = \pi \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}$$

$$2a = \frac{\Omega^2}{GM + A\Omega^2} + \frac{\Omega^2}{GM - A\Omega^2} = \Omega^2 \frac{2GM}{(GM)^2 - A^2\Omega^4}$$

$$A^2\Omega^4 = (GM)^2 - \frac{GM \Omega^2}{a}$$

$$\frac{\Omega^2}{GM} \frac{1}{a} = 1 - \left( \frac{A\Omega^2}{GM} \right)^2$$

$$\frac{1}{a} = \left( 1 - \left( \frac{A\Omega^2}{GM} \right)^2 \right) \frac{GM}{\Omega^2}$$

**Parte IV**

**Termodinamica**





---

## Introduzione alla termodinamica

---

La termodinamica è la branca della fisica che si occupa dell'energia, della trasformazione tra le varie forme di energia e dei meccanismi che permettono di variare l'energia di un sistema.

La termodinamica classica fornisce una descrizione macroscopica, media, di sistemi complessi costituiti da un gran numero di componenti elementari a livello microscopico: un **modello atomistico** della materia fornisce una descrizione di dettaglio a livello microscopico, questo modello contiene molte più informazioni di quelle necessarie in molti ambiti, e risulta non pratico; la **termodinamica classica** fornisce una descrizione macroscopica, la **meccanica statistica** fornisce il ponte tra le due descrizioni

### Feynman e la teoria atomica

La prima lezione<sup>1</sup> di fisica delle lezioni di fisica di Feynman, *The Feynman Lectures on Physics, Volume I*<sup>2</sup> riguarda la teoria atomica. Feynman riconosce il ruolo fondamentale della teoria atomica nella scienza,

If, in some cataclysm, all of scientific knowledge were to be destroyed, and only one sentence passed on to the next generations of creatures, what statement would contain the most information in the fewest words? I believe it is the atomic hypothesis (or the atomic fact, or whatever you wish to call it) that all things are made of atoms—little particles that move around in perpetual motion, attracting each other when they are a little distance apart, but repelling upon being squeezed into one another. In that one sentence, you will see, there is an enormous amount of information about the world, if just a little imagination and thinking are applied.

La termodinamica classica costituisce una teoria fisica macroscopica per sistemi complessi in equilibrio statistico, almeno locale, in termini di grandezze fisiche macroscopiche:

- come ad esempio pressione, temperatura, energia interna, calore, entropia,... che possano essere facilmente misurate
- che permettano di descrivere lo stato macroscopico di un sistema con un numero ristretto di variabili
- che permettano di formulare una teoria matematica consistente, partendo da alcuni principi fondamentali in accordo con l'esperienza sperimentale

---

<sup>1</sup> [https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I\\_01.html](https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_01.html)

<sup>2</sup> [https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I\\_toc.html](https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_toc.html)

### Contenuti.

Questa **introduzione** alla materia presenta parte da una *breve cronologia* delle esperienze rilevanti per lo sviluppo della termodinamica classica; segue la discussione in dettaglio alcune di queste *esperienze*, utili poi per formulare la teoria e i modelli; una breve descrizione del *modello atomico* della materia conclude l'introduzione.

Le sezioni successive entrano nei dettagli:

- principi della termodinamica classica (conservazione massa, bilancio di energia totale, irreversibilità,...); sviluppo di una teoria matematica (Gibbs)
  - modelli dei sistemi: equazioni di stato
  - applicazioni tecniche: cicli termodinamici e macchine termiche
  - meccanismi di trasmissione del calore
- 

## 11.1 Breve storia della termodinamica

La termodinamica ha avuto uno sviluppo non lineare, dovuto al contributo di molti studiosi in ambiti diversi, nel corso di più di un paio di secoli.

**Brevissima storia della termodinamica.** Durante la rivoluzione scientifica del XVI-XVII secolo, la progettazione di strumenti di misura basati sulla dilatazione delle sostanze e la diffusione del metodo sperimentale in ambito scientifico hanno permesso di introdurre le grandezze fisiche di pressione e temperatura; la misura della massa delle sostanze negli esperimenti di chimica ha permesso a Lavoisier di formulare il principio di conservazione della massa, e formulare l'ipotesi atomistica della struttura della materia, usata da Bernoulli per formulare la teoria cinetica dei gas; le attività di Black sul cambiamento di fase delle sostanze permettono di chiarire la differenza tra temperatura e calore; la macchina a vapore strutta il calore come fonte di lavoro meccanico, svolgendo un ruolo fondamentale nella rivoluzione industriale del XVIII secolo; l'indagine sulle reazioni chimiche e sui gas fornisce nuovi dettagli sulla natura della materia e ulteriori argomenti a supporto della "ipotesi atomistica; l'analisi teoria di Carnot sulle macchine termiche e sul loro rendimento conduce ai risultati di equivalenza di Joule sull'equivalenza lavoro-calore nel bilancio di energia di un sistema, che porta a formulare il primo principio della termodinamica. L'equivalenza tra calore e lavoro non è però perfetta, come evidenziato dal secondo principio della termodinamica enunciato da Clausius, che riassume le tendenze naturali nella trasmissione del calore e della dissipazione del lavoro meccanico in calore introducendo il concetto di entropia. Verso la fine del XIX secolo, Gibbs elabora una formalizzazione matematica rigorosa della termodinamica classica, usata in gran parte ancora oggi: grazie i concetti di energia interna di un sistema, potenziali termodinamici e stato termodinamico di un sistema, la teoria di Gibbs fornisce un modello macroscopico rigoroso per l'analisi di sistemi termodinamici che coinvolgono trasformazioni e trasferimenti di energia, tramite lavoro, calore o reazioni chimiche. Gibbs, Maxwell, Boltzmann e la nascita della meccanica statistica...

**Dalle esperienze alla comprensione.** Dalla sensazione di caldo-freddo,..., a un modello...

**Indagine scientifica: natura materia.** Rivoluzione scientifica del XVI-XVII secolo. Costruzione di strumenti

- Torricelli, discepolo di Galileo:
  - il barometro;
  - la misura del peso dell'aria: **pressione** atmosferica;
  - «vuoto» al di sopra della colonnina di Hg: argomento che rilancia la tesi atomistica
- Boyle, «primo chimico»; tra i fondatori della Royal Society; preciso sperimentatore (descrizione dettagliata per permettere replica), grazie agli strumenti progettati e realizzati da Robert Hooke:

- contributi alla chimica
- legge di Boyle sui gas: l'aria si comporta come una molla,  $PV = \text{cost}$  a  $T$  cost. Comportamento elastico, come i solidi studiati da Hooke (legge costitutiva lineare elastica): modello dei gas come costituiti da particelle elementari, collegati da molle
- D.Bernoulli, *Hydrodynamica*, 1738:
  - primo modello matematico nella teoria cinetica dei gas: gas costituiti da particelle libere di muoversi: la pressione è il risultato degli urti delle particelle sulle pareti del contenitore.
- J.Black, 1750-1760: studi di calorimetria: calore specifico e calore latente
- A.Lavoisier, fine "700, uno dei più influenti chimici della storia:
  - misura del peso nelle indagini di chimica: **conservazione della massa** in fisica classica
  - altro valido argomento a sostegno della teoria atomistica: le sostanze sono formate da particelle elementari che si combinano a formare diverse sostanze; nelle reazioni chimiche, reagenti e prodotti hanno la stessa massa ( $HgO \rightarrow Hg + \frac{1}{2}O_2$ )
- Composizione sostanze è ben definita?
  - Berthollet: no, contrario alla teoria atomica, es. bronzo (lega!): la composizione di una sostanza dipende dal processo con il quale viene prodotto;
  - Proust: carbonato basico di *Cu*. I campioni provenienti da diverse parti, trovate sia in natura sia sintetizzate in laboratorio, hanno esattamente la stessa composizione in massa;
  - Dalton: sostenitore teoria atomica, dopo aver formulato la legge delle proporzioni multiple; pessimo sperimentatore; gli atomi sono indivisibili, ma non pensa che le sostanze possano avere molecole con più atomi; le sue conclusioni sulla composizione dell'acqua saranno causa di grande confusione negli anni successivi
- Gay-Lussac, 1808, discepolo di Berthollet
  - leggi dei gas
  - studi con controllo del volume: osserva che  $V$ ,  $n$  sono proporzionali a pressione e temperatura costanti; non formula una spiegazione fondata sulla teoria atomica, forse per timore del giudizio di Berthollet, più probabilmente per il disaccordo con le conclusioni sbagliate di Dalton sulla composizione dell'acqua
- Avogadro, 1811:
  - volumi di gas uguali nelle stesse condizioni di  $T$ ,  $P$  contengono lo stesso numero di molecole, anche tipi di gas diverso
- Berzelius, 1813
- Cannizzaro, 1860 *Sunto di un corso di filosofia chimica*

**Indagine scientifica - Calore e temperatura.** Muovere sopra, prima dell'indagine dei chimici? Fare un paragrafo introduttivo su pressione/temperatura, strumenti per la misura, e scale di misura? Non rispetta un ordine cronologico, ma permette di non spezzettare troppo il racconto»

- strumenti e scale di temperatura
- equilibrio termico, e tendenza naturale nell'evoluzione della temperatura
- calore latente, J.Black
- Fourier: equazione per la conduzione
- ...

**Indagine scientifica - Macchine termiche: energia, lavoro e calore.**

- L'invenzione della macchina a vapore e i motori termici dà il via alla rivoluzione industriale

- Indagini teoriche sul funzionamento delle macchine termiche, sulla trasmissione di calore e la generazione di lavoro
  - 1824, **S.Carnot** *riflessioni sulla forza motrice del fuoco*:
    - \* analisi teorica delle macchine termiche, macchina ideale e rendimento massimo
    - \* critica della *teoria calorica*: se il calore fosse materia, questo dovrebbe essere creato dal movimento...
  - Joule: equivalenza lavoro-calore (porterà al I principio)
  - **Clausius**:
    - \* irreversibilità, in termini di entropia (II principio)
  - **Gibbs**: formalizzazione di una teoria termodinamica «macroscopica», con un approccio geometrico:
    - \* variabili di stato, spazio delle fasi, regola delle fasi
    - \* energia libera

### Indagine scientifica - Meccanica statistica: il microscopico.

- Clausius
- Maxwell:
  - ...
- Gibbs
- **Boltzmann**
  - ...

## 11.2 Esperienze ed esperimenti

### 11.2.1 Esperienza di Torricelli

Torricelli dimostra che<sup>1</sup>

«viviamo sul fondo di un oceano d'aria, la quale [...] si sa che pesa, e tanto»

In particolare, l'esperienza di Torricelli permette di misurare il peso dell'aria nell'atmosfera ed esprimerlo in termini di pressione atmosferica.

**todo** dettagli dell'esperimento

L'esperienza di Torricelli:

- introduce il concetto di **pressione** atmosferica e nei gas in generale, come forza per unità di superficie che un gas esercita sulle pareti di un contenitore, o di una superficie esposta al gas;
- introduce il **manometro di Torricelli** come strumento per la misura della pressione atmosferica e nei gas in generale;
- è una delle prime esperienze dell'esistenza del **vuoto**, in contrasto con l'*"horror vacui"* aristotelico, principio secondo il quale la natura rifugge il vuoto, riempiendolo costantemente

---

<sup>1</sup> Lettera a Michelangelo Ricci, 2 giugno 1664, in Prefazione alle *Lezioni accademiche* di E.Torricelli

### 11.2.2 Prime esperienze sui gas - esperimento di Boyle

L'indagine di Boyle e Hooke su gas sufficientemente rarefatti produce come risultato la legge di Boyle,

$$PV = \text{const}$$

valida per un sistema chiuso a temperatura  $T$  costante. Al tempo delle attività sperimentali di Boyle, il manometro di Torricelli era uno strumento disponibile per una misura sufficientemente accurata della pressione, mentre non erano ancora disponibili strumenti accurati per la misura della temperatura del gas contenuto all'interno del sistema. Le attività di Boyle assumevano quindi una stabilità sufficiente della temperatura dell'ambiente all'interno della quale era svolto l'esperimento, insieme all'equilibrio termico tra sistema e ambiente.

**todo** dettagli dell'esperimento

---

#### Example 10.2.1 (todo Esercizi su manometro di Torricelli)

---



---

#### Example 10.2.2 (todo Esercizi su legge di Boyle)

---

### 11.2.3 Dilatazione sostanze

Con le esperienze discusse fino ad ora non è ancora possibile associare nessuna grandezza fisica alla percezione comune di caldo o freddo. Confusione temperatura-calore **todo ref**

E' però possibile osservare la variazione delle dimensioni di sistemi formati da sostanze diverse, in occasione della variazione di questa percezione. In particolare, si prendono  $N$  oggetti di sostanze diverse e si valuta la variazione delle loro dimensioni tra condizioni diverse, associabili qualitativamente alla percezione di caldo-freddo, ed etichettate con l'indice  $t$ . Si valuta quindi la variazione della dimensione lineare  $L_i$  dell'oggetto  $i$  nella condizione identificata dall'indice  $t$ , rispetto alla condizione di riferimento identificata dall'indice 0. Per la maggioranza delle sostanze, confrontando due sostanze  $i, k$  si osserva che

$$\frac{L_{i,t} - L_{i,0}}{L_{i,0}} \frac{L_{k,0}}{L_{k,t} - L_{k,0}} = \alpha_{ik} = \text{const}.$$

Questa osservazione permette quindi di introdurre per ogni sostanza  $i$  una relazione lineare tra la variazione relativa delle sue dimensioni lineari rispetto alle dimensioni di riferimento  $\frac{\Delta L_{i,0t}}{L_{i,0}}$  e la variazione di una grandezza fisica  $T$ , il cui valore  $T_t$  descrive la condizione  $t$  comune a tutti i sistemi oggetto di indagine e associata alla percezione di caldo-freddo del sistema,

$$\frac{L_{i,t} - L_{i,0}}{L_{i,0}} = \alpha_i (T_t - T_0)$$

Questo procedimento consente quindi di introdurre i concetti e le relative grandezze fisiche per il **coefficiente di dilatazione termica**  $\alpha_i$  dei materiali, qui ipotizzato costante nell'intervallo di condizioni analizzate, e la **temperatura**  $T$ . Queste due grandezze fisiche sono qui definite a meno di due valori, una temperatura di riferimento e un'unità di misura. **todo** dire due parole, e collegare con le scale di temperatura

**todo** costruzione termometro; equilibrio termico

**todo** dilatazione lineare, volumetrica; collegamento con qualche paragrafo?

---

**Nota:** Perché la relazione è lineare? La relazione non è lineare in generale, ma lo è per un gran numero di sostanze in un intervallo moderato di condizioni. Questo è spiegabile tramite l'espansione in **serie di Taylor** di una funzione: se

si considera un intervallo sufficientemente piccolo rispetto alla rapidità di variazione di una funzione attorno alla condizione di riferimento considerata, l'approssimazione lineare è una buona approssimazione della funzione nell'intervallo considerato,

$$f(T) = f(T_0) + f'(T_0)(T - T_0) + o(T - T_0) \sim f(T_0) + f'(T_0)(T - T_0).$$

Possiamo quindi interpretare l'esperienza riguardo alla dilatazione lineare delle sostanze in funzione della temperatura, considerando che la nostra esperienza quotidiana avviene in un intervallo limitato di condizioni rispetto a quelle disponibili in natura: limitandoci all'intervallo di temperatura anche se non sono ancora state introdotte le scale di temperatura, ma supponendo di avere una minima familiarità almeno con la scala centigrada Celsius, tanto da sapere che la temperatura del corpo umano è circa  $36^\circ\text{C}$ , l'acqua bolle attorno ai  $100^\circ\text{C}$  e ghiaccia attorno agli  $0^\circ\text{C}$ , limitandoci all'intervallo di temperatura, gran parte delle nostre esperienze nella vita quotidiana si svolge in un intervallo tra i  $-20^\circ\text{C}$  del frigorifero di casa ai  $100^\circ\text{C}$  dell'acqua che bolle in pentola; la temperatura minima raggiungibile è  $-273.15^\circ\text{C}$ , la temperatura di un metallo fuso è dell'ordine di  $1000^\circ\text{C}$ , i corpi celesti possono raggiungere temperature dell'ordine dei  $10^4 - 10^{12}^\circ\text{C}$ .

### 11.2.4 Scale di temperatura

**Scale di temperatura empiriche.** Le esperienze sulla dilatazione dei corpi conducono alla definizione delle **scale empiriche** di temperatura: assunta la linearità del fenomeno, una scala di temperatura viene definita da due condizioni facilmente replicabili in laboratorio per la costruzione/taratura degli strumenti, e che permettono di determinare una temperatura di riferimento da usare come origine e un'unità di misura che determini l'ampiezza del grado della scala di temperatura.

**Scala termodinamica della temperatura assoluta.** Mentre le scale di temperatura empiriche vengono sviluppate nella prima metà del XVIII secolo, nel XIX secolo un'approfondita comprensione della materia permette di definire una **scala termodinamica** per la **temperatura assoluta** come una grandezza fisica e manifestazione macrosopica dello stato «di agitazione» a livello microscopico dei componenti elementari della materia.

spostare termodinamica e teoria atomica all'inizio dell'introduzione, ~ Feynman?

#### Scale empiriche

Una scala empirica di temperatura viene definita usando due condizioni facilmente replicabili in laboratorio per definire l'origine della scala e l'ampiezza del grado. Così, nella prima metà del XVIII secolo vennero definite alcune scale di temperatura. Le definizioni originali subirono spesso modifiche in seguito a cambi di scelte delle condizioni di riferimento, producendo come risultato delle scale con origine e ampiezza del grado diverse formule di conversione

**1702, Romer.** La definizione originale usava:

- estremo inferiore,  $0^\circ\text{Ro}$ : temperatura eutettica del cloruro di ammonio, temperatura caratteristica di una sostanza molto comune nei laboratori dell'epoca;
- estremo superiore,  $60^\circ\text{Ro}$ : temperatura di ebollizione dell'acqua a pressione ambiente

L'originale suddivisione in 60 intervalli fu probabilmente dettata dall'elevato numero di divisori interi di 60. Successivamente la definizione della scala fu modificata per evitare di usare il cloruro di ammonio, rendere più facile la taratura dello strumento, e per uniformarsi alle scelte fatte da altri, accortosi che la solidificazione dell'acqua avveniva circa a  $7.5^\circ\text{Ro}$  si decise di usare questa condizione per definire l'estremo inferiore: l'estremo inferiore della scala Romer,  $7.5^\circ\text{Ro}$ , corrisponde alla solidificazione dell'acqua a pressione ambiente.

**1709-15, Fahrenheit.** Dopo aver fatto visita a Romer, si dedicò alla progettazione e alla realizzazione di strumenti di misura di pressione e temperatura. La definizione originale della scala usava:

- estremo inferiore,  $0^\circ\text{F}$ : temperatura eutettica del cloruro di ammonio; le malelingue sostengono la temperatura più bassa registrata negli inverni di Danzica, città allora prussiana in cui viveva mentre metteva a punto gli strumenti

- estremo superiore, 96 °F: temperatura media del corpo umano

Le scelte rocambolesche e definite in maniera imprecisa non costituivano delle condizioni facilmente replicabili per la costruzione e/o taratura di nuovi strumenti. Vennero scelte quindi le condizioni di solidificazione, 32 °F, e di evaporazione, 212 °F, dell'acqua a pressione ambiente al livello del mare, in modo tale da suddividere tale intervallo in 180 sotto-intervalli (in analogia con la scelta di 60, per avere un numero elevato di divisori interi).

**1731, de Réaumur.** La definizione usa:

- estremo inferiore, 0 °Re: temperatura di solidificazione dell'acqua a pressione ambiente
- estremo superiore, 80 °Re: temperatura di ebollizione dell'acqua a temperatura ambiente. Perché 80 intervalli tra queste due condizioni? Perché il termometro costruito da Reaumur usava come principio fisico la dilatazione termica dell'etanolo, e il volume dell'etanolo varia dell'8% tra le due condizioni di riferimento scelte.

**1742, Celsius.** E' la scala di temperatura empirica usata attualmente in tutto il mondo, ad eccezione degli Stati Uniti, la Liberia e le Isole Cayman che usano la scala Fahrenheit. Poteva forse la definizione originale coincidere con quella usata attualmente? Ovviamente no. La definizione originale di Celsius era invertita rispetto a quella attuale, e a tutte le scale usate allora (perché? Perché no, si potrebbe rispondere. Fatevi voi la vostra scala di temperatura!), ed usava:

- estremo inferiore, 0 °C: temperatura di evaporazione dell'acqua a pressione ambiente
- estremo superiore, 100 °C: temperatura di solidificazione dell'acqua a pressione ambiente.

Per rendere più pratica la misura e adeguarsi al verso delle altre scale, un anno dopo la morte di Celsius, la scala fu invertita da **Linneo** (lo stesso Linneo, biologo, che si dilettava con la classificazione di piante e animali, padre della classificazione scientifica degli organismi viventi, usata tuttora).

### Scala termodinamica

Scala di temperatura assoluta

- Esperimenti sui gas, estrapolando i dati sperimentali delle *leggi di Charles* e di *Gay-Lussac*
- 1848, Kelvin *On an Absolute Thermometric Scale*

---

**Nota:** Evaporazione ed ebollizione dell'acqua in funzione della pressione. Quanto cambia in funzione della pressione?

---

---

#### Example 10.2.3 (Anello di Gravesande)

---

---

#### Example 10.2.4 (Giunzione binari e ponti)

---

---

#### Example 10.2.5 (Pendolo)

---

## 11.2.5 Equilibrio termico

**todo** Qui? Prima?

## 11.2.6 Teoria cinetica dei gas

Nel 1738, D.Bernoulli pubblica la sua *Hydrodynamica* dove discute il moto dei fluidi e presenta un modello atomistico per la dinamica microscopica delle molecole di un gas, che costituisce uno dei primi contributi allo sviluppo della teoria cinetica dei gas e alla meccanica statistica, fornendo un legame tra la dinamica microscopica delle molecole del gas e le grandezze fisiche tipiche di una descrizione macroscopica del sistema, pressione e temperatura **todo anche la temperatura?**

dettagli

## 11.2.7 Calorimetria: calore latente e calore specifico

Gli studi di **J.Black** attorno alla metà del XVIII secolo sul raggiungimento dell'equilibrio termico e sulle transizioni di fase aiutano a distinguere i concetti di temperatura e di calore, sui quali c'era ancora confusione e nessuna teoria affermata soddisfacente.

- sistemi fisici sul quale non viene compiuto lavoro, scambiano tra di loro calore per raggiungere l'equilibrio termico
  - la quantità di calore «entrante» in un sistema, ne fa variare la temperatura. La variazione di temperatura nel sistema è inversamente proporzionale alla sua massa,

$$m c_x dT = \delta Q ,$$

la costante di proporzionalità è definita **calore specifico**. **todo controllare commenti su stato termodinamico**  
 $\cdot_x$  del sistema

- la quantità di calore scambiata tra due sistemi è uguale e opposta:  $dQ_{ij} = -dQ_{ji}$ . Mettendo a contatto due sistemi che non manifestano cambiamenti di fase, isolati dall'ambiente, si ottiene quindi

$$\begin{cases} dE_i = m_i c_i dT_i = \delta Q_{ij} \\ dE_j = m_j c_j dT_j = \delta Q_{ji} = -\delta Q_{ij} \end{cases}$$

$$\rightarrow 0 = dE_i + dE_j = m_i c_i dT_i + m_j c_j dT_j$$

**todo definire energia interna e aggiungere riferimento alla sezione «Principi della termodinamica»**

- i cambiamenti di fase avvengono a temperatura costante. Ad esempio, l'apporto di calore a un sistema in equilibrio contenente ghiaccio alla temperatura di solidificazione non ne fa aumentare la temperatura, ma la massa liquida. L'aumento della temperatura. Una volta completata la trasformazione di fase, l'apporto di calore causa una variazione di temperatura,

$$\delta Q = \begin{cases} dm_l L_{sl} & , \quad dm_l < m \\ m_l L_{sl} + m c dT & , \quad dm_l = m . \end{cases}$$

Viene definito **calore latente di fusione** il coefficiente  $L_{sl}$  di proporzionalità tra il calore entrante nel sistema durante la trasformazione di fase e la quantità di massa liquefatta  $\delta m_l$ .

---

### Example 10.2.6 (Esercizi calorimetria - ...)

---



---

### Example 10.2.7 (Caldo-freddo: temperatura e calore)

---



### 11.2.8 Esperienze sui gas, ed equazione di stato dei gas perfetti

- Boyle:  $PV = \text{const.}$
- Charles:  $V \propto T$
- Gay-Lussac:  $P \propto T$
- Avogadro:  $V \propto n$

L'equazione di stato dei gas perfetti riassume questi risultati

$$\frac{PV}{Tn} = R = \text{const.}$$

### 11.2.9 Lavoro, ... todo

- Rivoluzione industriale
- 1798, B.Thompson, *An Inquiry Concerning the Source of the Heat Which is Excited by Friction*, oggi può essere interpretato come un lavoro che identificava l'attrito come fenomeno di dissipazione dell'energia meccanica «utile»/»macroscopica» e della sua conversione in calore;
- 1824, S.Carnot, *Riflessioni sulla forza motrice del fuoco*
- 1840-42, J.von Meyer, medico, chimico e fisico, intuisce il principio di conservazione dell'energia, «che non può essere né creata né distrutta» **ref** *Remarks on the Forces of Nature*, 1841
- 1842-45, J.P.Joule *The Mechanical Equivalent of Heat*
- 1850, R.Clausius

### 11.2.10 Formalismo e principi della termodinamica classica

todo

- usando il formalismo di Gibbs:
  - funzioni di stato (energia interna,...), regola delle fasi, spazio di fase,...
- si possono formulare i principi della termodinamica

### 11.2.11 Meccanica statistica

- Maxwell
  - Gibbs
  - Boltzmann
-

## 11.3 Termodinamica e teoria atomica

### 11.3.1 Stati della materia

### 11.3.2 Cambiamenti di stato

### 11.3.3 Variabili di stato

## 11.4 Concetti in termodinamica

### 11.4.1 Grandezze fisiche

- **Energia.** Capacità di compiere lavoro
- **Lavoro.**
- **Calore.**
- **Temperatura.**
- **Pressione.**
- **Massa.**
- **Entropia.**
- ...

### 11.4.2 Grandezze intensive, estensive, specifiche

Una **variabile intensiva** è indipendente dalla dimensione del sistema. Una **variabile estensiva** è additiva per i sottosistemi (**todo** *controllare l'equivalenza estensiva  $\equiv$  additiva*). Se una variabile può essere espressa come funzione di una serie di variabili indipendenti intensive  $\{a_i\}$  ed estensive  $\{A_k\}$ , una variabile intensiva è rappresentata da una funzione omogena di grado 0

$$F(\{a_i\}, \{\lambda A_k\}) = F(\{a_i\}, \{A_k\})$$

mentre una variabile estensiva è rappresentata da una funzione omogenea di grado 1 rispetto alle variabili estensive  $A_k$

$$F(\{a_i\}, \{\lambda A_k\}) = \lambda F(\{a_i\}, \{A_k\})$$

Alcuni esempi di variabili intensive ed estensive:

- intensive: temperatura, pressione, sforzo, potenziale chimico, potenziale elettrico, magnetizzazione,...
- estensive: quantità di sostanza (moli), massa, volume, energia, carica elettrica, momento magnetico,...

Le **variabili specifiche** sono ricavate come rapporto tra due variabili estensive. Come casi comuni, il denominatore è la massa del sistema o il volume del sistema. Le variabili specifiche sono variabili intensive. Alcuni esempi di variabili specifiche sono: volume specifico (inverso della densità), energia specifica, entropia specifica, capacità termica specifica,...

### 11.4.3 Sistema, ambiente esterno

- **Sistema.** Oggetto di interesse del problema
- **Ambiente esterno.** Tutto quello che non fa parte del sistema di interesse, e che può interagire con esso.

### 11.4.4 Sistema aperto/chiuso, isolato,...

- **Sistema aperto.** Sistema che può scambiare massa con l'ambiente esterno
- **Sistema chiuso.** Sistema che non può scambiare massa con l'ambiente esterno
- **Sistema isolato.** Sistema che non può scambiare energia con l'ambiente esterno né tramite lavoro né tramite flusso di calore
- **Sistema adiabatico.** Sistema che non può scambiare calore con l'ambiente esterno

### 11.4.5 Equilibrio termodinamico

...

### 11.4.6 Sistema semplice/composto

- **Sistema semplice**
- **Sistema composto**



---

Principi della termodinamica

---

In questo capitolo vengono presentati i principi della termodinamica classica, i concetti e il formalismo matematico utili per formularli. I principi della termodinamica vengono introdotti per **sistemi chiusi**, e successivamente estesi ai sistemi aperti.

Il *principio di conservazione della massa - di Lavoisier* valido in meccanica classica, riassumibile con la formula «*nulla si crea, nulla si distrugge, ma tutto si trasforma*», asserisce che in un sistema chiuso la massa è costante,

$$dM = 0 .$$

Il *primo principio della termodinamica* fornisce la forma generale del bilancio dell'energia *totale* di un sistema chiuso, riconoscendo il lavoro delle forze esterne  $\delta L^{ext}$  e il calore  $\delta Q^{ext}$  scambiato dal sistema con l'ambiente esterno come le cause della variazione dell'energia totale del sistema.

$$dE^{tot} = \delta L^{ext} + \delta Q^{ext} .$$

L'opera di **Gibbs** fornisce *i concetti necessari e una formalizzazione matematica* rigorosa della termodinamica classica. Vengono introdotti i concetti di energia interna, variabile di stato, la regola delle fasi di Gibbs; vengono poi presentati alcuni *diagrammi di fase* per la rappresentazione dello stato di un sistema e le trasformazioni termodinamiche e che verranno utilizzati nei capitoli successivi.

Il *secondo principio della termodinamica* traduce le tendenze naturali: la dissipazione dell'energia meccanica macroscopica e la trasmissione del calore da un corpo caldo a un corpo freddo, in un principio formulabile in termini di **entropia**,

$$dS \leq \frac{\delta Q}{T} .$$

Infine, i bilanci delle quantità fisiche per *sistemi aperti* vengono ricavati modificando i bilanci per sistemi chiusi, introducendo i termini di **flusso delle grandezze fisiche dovuti al trasporto di materia** attraverso la frontiera del sistema.

## 12.1 Principio di Lavoisier

Nell'ambito della meccanica classica, il principio di conservazione della massa - o di Lavoisier - afferma che la massa  $M$  di un sistema chiuso è costante,

$$dM = 0 ,$$

ossia «*nulla si crea, nulla si distrugge, tutto si trasforma*».

- principio trovato dai primi chimici, grazie alla misura della massa di prodotti e reagenti negli esperimenti sulle reazioni chimiche
- questo principio cessa di valere nell'ambito della relatività di Einstein, che riconosce l'equivalenza massa-energia: massa ed energia sono due rappresentazioni di un'unica grandezza fisica e sono coinvolte in un'equazione di bilancio, che nel caso particolare di un corpo in quiete si riduce alla celebre espressione  $E = mc^2$

### 12.1.1 Densità

- massa quantità estensiva  $M$
- densità quantità specifica/intensiva  $\rho = \frac{\Delta M}{\Delta V}$  (massa, volume sono quantità estensive)

---

#### Exercise 11.1.1

---

---

#### Exercise 11.1.2

---

## 12.2 Primo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica è il bilancio di energia totale per sistemi chiusi. La variazione di energia totale  $dE^{tot}$  di un sistema chiuso è dovuta al lavoro  $\delta L^{ext}$  svolto sul sistema dalle azioni macroscopiche esterne e dal calore  $\delta Q^{ext}$  trasmesso al sistema dall'esterno,

$$dE^{tot} = \delta L^{ext} + \delta Q^{ext} .$$

La termodinamica classica fornisce una descrizione macroscopica media della dinamica microscopica di un numero elevato di componenti elementari (**todo teoria atomica**). L'energia totale del sistema può quindi essere interpretata come somma di un contributo cinetico macroscopico e di un contenuto microscopico, cinetico e potenziale; il calore può essere interpretato come il lavoro svolto sul sistema da parte di azioni microscopiche,

## 12.3 Gibbs: energia interna, regola delle fasi e funzioni multi-variabili

Seguendo il lavoro di Gibbs, in questa sezione vengono introdotti alcuni concetti come quello di *variabile di stato* ed *energia interna*, e la *regola delle fasi di Gibbs*. Successivamente, il *primo principio della termodinamica viene riformulato* utilizzando il formalismo introdotto da Gibbs che permette di identificare lo stato di un sistema con un numero limitato di variabili stato indipendenti e di esprimere le altre variabili (dipendenti) di stato come funzioni di più variabili.

### 12.3.1 Variabili di stato

---

**Definition 11.3.1 (Variabile di stato)**

Una variabile di stato di un sistema è una proprietà fisica del sistema che dipende esclusivamente dallo stato corrente del sistema.

---

---

**Example 11.3.1 (Variabili di stato e non)**

Sono variabili di stato la temperatura, la pressione, l'energia interna, l'entropia, ... Non sono variabili di stato il lavoro o il calore scambiato dal sistema. **todo**

---

### 12.3.2 Energia interna

---

**Definition 11.3.2 (Energia interna)**

L'energia interna di un sistema viene definita come la differenza dell'energia totale e l'energia cinetica macroscopica del sistema,

$$E = E^{tot} - K .$$

---

E' possibile ricavare un bilancio per l'energia interna di un sistema chiuso sottraendo il bilancio dell'energia cinetica descritto dal teorema dell'energia cinetica al bilancio dell'energia totale fornito dal primo principio della termodinamica,

$$\begin{aligned} dE^{tot} &= \delta L^{ext} + \delta Q^{ext} \\ dK &= \delta L^{ext} + \delta L^{int} , \end{aligned}$$

Il bilancio dell'energia interna per un sistema chiuso diventa quindi

$$dE = \delta Q^{ext} - \delta L^{int} .$$

### 12.3.3 Regola delle fasi di Gibbs

---

**Proposition 11.3.1 (Regola delle fasi di Gibbs)**

Lo stato termodinamico (di equilibrio) di un sistema è identificato da un numero  $F$  di variabili di stato **intensive** indipendenti, determinato dalla **regola delle fasi di Gibbs**,

$$F = C - P + 1 + W ,$$

cioè il numero di variabili intensive indipendenti (o gradi di libertà),  $F$ , di un sistema è una funzione del numero di componenti indipendenti  $C$  di un sistema, il numero di fasi  $P$  e il numero  $W$  di modi del sistema di manifestare lavoro interno, come ad esempio:

- sforzi meccanici interni
  - contributo della tensione superficiale
  - energia dei legami delle molecole dei componenti
  - contributo del campo elettromagnetico
-

## Discussione della regola delle fasi di Gibbs

Lo stato di equilibrio di un sistema è definito dal valore delle variabili di stato, che per un sistema gassoso non elettricamente carico sono: temperatura  $T$ , pressione  $p$  e concentrazioni  $C_{c,\phi}$  dei singoli componenti  $c = 1 : C$  nelle singole fasi  $\phi = 1 : P$  all'interno del sistema.

Lo stato del sistema è quindi determinato dal valore delle  $1 + W$  variabili termodinamiche intensive, qui  $W + 1 = 2$   $T$ ,  $p$ , e dalle  $C P$  frazioni  $n_{c,\phi}$  (molari o di massa), per un totale di  $N P + W + 1$  variabili. In genere, queste variabili sono legate da alcune condizioni:

- $C(P - 1)$  condizioni di equilibrio delle fasi di ogni singolo componente, descritte dall'uguaglianza dei potenziali chimici

$$\mu_{c,\phi_1}(T, p) = \mu_{c,\phi_2}(T, p) = \dots = \mu_{c,\phi_P}(T, p)$$

- $P$  condizioni di unitarietà delle frazioni

$$\sum_c n_{c,\phi} = 1$$

Quindi, con  $C P + W + 1$  variabili e  $P + C(P - 1) = C P - C + P$  equazioni, si scopre che il problema può essere determinato da

$$C P + W + 1 - C P + C - P = C - P + W + 1 = F,$$

variabili indipendenti.

### todo

- Fare esempi che chiariscano la definizione di fase (es: solidi o liquidi puri rappresentano fasi a sé stanti), e di componente indipendente (es: reazioni chimiche, senza componenti in eccesso, determinano dei vincoli che riducono il numero di sostanze indipendenti, grazie ai rapporti stechiometrici tra le sostanze)
- discutere il ruolo delle frazioni di fase di un singolo componente e il fatto che non sono variabili di stato; esempio passaggio di fase liquido-vapore: l'equilibrio è determinato dal valore di  $P$  (o di  $T$ ), la frazione di vapore è una conseguenza di altre variabili estensive del sistema.

---

### Example 11.3.2 (Sistema chiuso contenente un monocomponente (o non-reagente), monofase, elettricamente neutro (o non-soggetto a campo elettromagnetico))

In un sistema composto da un gas comprimibile, monocomponente e monofase (gassosa), elettricamente neutro, **todo** altro?, l'unica forma di lavoro interno è quello legato alla compressione,  $\delta L^{int,rev} = PdV$ , e quindi  $W = 1$ . Per questo sistema servono quindi,

$$F = C - P + 1 + W = 1 - 1 + 1 + 1 = 2,$$

variabili di stato per definire lo stato del sistema.

---

### Example 11.3.3 (Sistema aperto contenente un monocomponente (o non-reagente), monofase, elettricamente neutro (o non-soggetto a campo elettromagnetico))

In un sistema aperto, la variazione di energia del sistema dipende anche dalla variazione della quantità di gas contenuto in esso. Quindi, in generale esistono  $W = 2$  modi per far variare l'energia del sistema: tramite il lavoro di compressione, o tramite un flusso di materia all'interno del sistema. Servono quindi  $F = 3$  variabili di stato per definire lo stato del sistema.



**Example 11.3.4 (Miscela reattiva di gas in un sistema chiuso)**

In una miscela reattiva di gas formata dai due composti  $A$ ,  $B$  in equilibrio secondo la reazione di equilibrio



l'energia del sistema dipende dal lavoro meccanico di compressione della miscela dei gas, e dalla quantità dei 3 composti presenti nel gas. La variazione di questi composti non è però indipendente ma determinata dalla reazione di equilibrio. In particolare,

$$\begin{aligned} dn_B &= dn_A \frac{n_b}{n_a} \\ dn_{A_a B_b} &= -dn_A \frac{n}{n_a} \end{aligned}$$

La reazione è quindi determinata da 1 solo parametro. La variazione di energia del sistema è quindi determinata da  $W = 2$  processi: dal lavoro di compressione fatto sul sistema, e dallo stato della reazione. Per determinare lo stato del sistema servono quindi  $F = 3$  variabili di stato indipendenti, come ad esempio **todo**  $T$ ,  $P$ ,  $n_A$ ? Non servono i potenziali chimici  $\mu_A$ ,  $\mu_B$ ,  $\mu_{A_a B_b}$ ? Sono unicamente determinati?

**Example 11.3.5 (Sistema monocomponente durante una transizione di fase)**

**Transizione di fase del primo ordine.** Durante una transizione di fase del primo ordine, sono simultaneamente presenti nel sistema  $P = 2$  fasi. Secondo la regola delle fasi di Gibbs, lo stato del sistema è determinato da

$$F = C - P + 1 + W = 1 - 2 + 1 + 1 = 1 ,$$

variabile di stato.

**Punto critico.** Il punto critico nel piano delle fasi di un sistema mono-componente definisce la condizione in cui sono simultaneamente presenti nel sistema  $P = 3$  fasi. Secondo la regola delle fasi di Gibbs, lo stato del sistema è determinato da  $F = 0$  variabili di stato: lo stato del sistema nel punto critico è univocamente definito, senza alcun grado di libertà.

**Example 11.3.6 (Solido)**

In assenza di altri fenomeni fisici, l'unica forma di lavoro in un solido è quella legata al lavoro di deformazione,  $\delta L^{int,rev} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV$ . Il tensore di deformazione è del secondo ordine e simmetrico, e ha quindi 6 componenti indipendenti nello spazio 3-dimensionale, e quindi  $W = 6$

**Example 11.3.7 (Miscele solide)**

- Fasi nelle miscele solide **todo**

**Example 11.3.8 (Influenza del campo elettromagnetico)**

- Campo elettrico e magnetizzazione **todo**

### 12.3.4 Primo principio in termini delle variabili di stato

L'energia interna è una variabile estensiva di un sistema termodinamico. In generale, può essere scritta come una funzione di ... variabili estensive che rappresentano i modi del sistema di manifestare la sua energia interna (**todo** sia dovuta al lavoro svolto su di esso, sia al calore apportato al sistema, sia alla sua composizione chimica e quindi all'energia contenuta nei legami)

$$E(S, X_k),$$

avendo indicato con  $X_k$  tutte le variabili di stato la cui variazione è associata a un lavoro interno reversibile, ed  $S$  la variabile di stato la cui variazione è associata al calore scambiato con l'ambiente esterno e alle azioni interne dissipative. **todo** facendo riferimento al capitolo sulle funzioni e sul calcolo multivariabile

Assumendo che la funzione  $E$  sia continua e differenziabile, almeno a tratti, si può scrivere il differenziale - esatto - dell'energia interna in funzione degli incrementi delle variabili indipendenti,

$$\begin{aligned} dE &= \left. \frac{\partial E}{\partial S} \right|_{\mathbf{x}} dS + \left. \frac{\partial E}{\partial X_k} \right|_S dX_k = \\ &= T dS + \sum_k F_k dX_k, \end{aligned}$$

avendo definito  $F_k$  le forze generalizzate associate agli spostamenti generalizzati  $dX_k$  e introdotto la definizione delle variabili  $T$  ed  $S$  di cui sarà chiaro il significato a breve.

L'espressione del differenziale dell'energia interna può essere confrontata con il bilancio dell'energia interna scritto in termini del calore apportato al sistema e del lavoro interno,

$$\begin{aligned} dE &= \delta Q^{ext} - \delta L^{int} = \\ &= \delta Q^{ext} + \delta^+ D - \delta L^{int,rev}. \end{aligned}$$

avendo riconosciuto il lavoro interno  $\delta L^{int}$  come somma di un contributo reversibile e un contributo di dissipazione, mai negativo,  $\delta L^{int} = \delta L^{int,rev} - \delta^+ D$ .

Poiché  $dE$  è un differenziale esatto e  $\delta L^{int,rev}$  è un contributo reversibile, segue che la somma dei due contributi in generale non reversibili,  $\delta U := \delta Q^{ext} + \delta^+ D$ , è un contributo reversibile. Confrontando le due espressioni del differenziale dell'energia interna, si può associare il lavoro interno reversibile alla somma dei lavori formati come prodotto delle forze generalizzate  $F_k$  e le variazioni delle variabili di stato  $X_k$ , e il termine  $\delta U$  al prodotto  $T dS$ ,

$$\begin{cases} -\delta L^{int,rev} &= \sum_k F_k dX_k \\ \delta U &= T dS \end{cases}$$

#### Temperatura, $T$ , ed entropia, $S$

In assenza di lavoro esterno compiuto sul sistema, e in assenza di dissipazione  $\delta^+ D = 0$ , segue che

$$\begin{aligned} dE^{tot} &= dE = \delta Q^{ext} \\ dS &= \frac{\delta Q^{ext}}{T} \end{aligned}$$

Si considera un sistema chiuso e isolato formato da due sistemi in equilibrio al loro interno, che possono scambiare tra di loro calore ma non lavoro.

L'energia totale del sistema è costante,  $E = E_1 + E_2$ . Se i due sottosistemi non sono a temperatura iniziale uguale, si osserva un flusso di energia nella forma di calore dal sistema più caldo a quello più freddo, che soddisfa la disuguaglianza

$$\frac{\delta Q_{12}}{T_1} + \frac{\delta Q_{21}}{T_2} \geq 0 \quad \rightarrow \quad dS_1 + dS_2 \geq 0$$

La quantità  $S = S_1 + S_2$  è non decrescente.

Nel caso generale di un sistema semplice usando la definizione  $dS = \frac{\delta U}{T} = \frac{\delta Q^{ext} + \delta^+ D}{T}$  e ricordando che la dissipazione è non negativa,  $\delta^+ D \geq 0$ , segue che

$$dS \geq \frac{\delta Q^{ext}}{T}.$$

Da L.E. Reichl, A Modern Course in Statistical Physics, con qualche incoerenza **todo** controllare!

$$\delta W = -PdV + JdL + \sigma dA + V(\vec{e} \cdot d\vec{p} + \vec{h} \cdot d\vec{m}) + \phi dq$$

- con  $J, \sigma$  tensioni per unità di lunghezza e di area,  $dL, dA$  variazione di lunghezza o di area,
- con  $\vec{e}, \vec{h}$  campi elettrico e magnetico,  $\vec{p}, \vec{m}$  polarizzazione e magnetizzazione
- $\phi$  potenziale elettrico,  $q$  carica elettrica (per sistemi aperti, altrimenti o  $dq \equiv 0$  o si starebbe creando carica elettrica netta!)

### Example 11.3.9 (Sistema gassoso chiuso monocomponente)

L'energia del sistema,  $E(S, V)$

$$dE = T dS - P dV$$

### Example 11.3.10 (Sistema gassoso aperto monocomponente)

L'energia del sistema,  $E(S, V, N)$

$$dE = T dS - P dV + \mu dN$$

### Example 11.3.11 (Miscela reattiva di gas in un sistema chiuso)

L'energia del sistema

$$\begin{aligned} dE &= T dS - P dV + \mu_k dN_k = \\ &= T dS - P dV + (\mu_k n_k) dN \end{aligned}$$

avendo indicato con  $n_k$  i coefficienti stechiometrici (con segno) della reazione, e con  $N$  una quantità che identifica l'equilibrio della reazione, in maniera tale da poter scrivere la variazione di ogni componente come  $dN_k = n_k dN$ .

### Example 11.3.12 (Miscela monocomponente durante una transizione di fase)

**todo** come trattare la frazione delle fasi?

### Example 11.3.13 (Solido)

Sistema solido di volume iniziale  $V$  con stato di sforzo e deformazione uniforme, e piccole deformazioni

$$dE = T dS - V \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

**Example 11.3.14 (Miscele solide)****todo**

---

**Example 11.3.15 (Influenza del campo magnetico)**

$$dE = T dS - P dV + H dM$$

**todo**

---

## 12.4 Diagrammi termodinamici

I diagrammi di fase forniscono degli strumenti per una rappresentazione grafica-geometrica dello stato e delle trasformazioni di un sistema termodinamico. A seconda del sistema considerato e delle condizioni alle quali è sottoposto, è utile usare un insieme specifico di variabili di stato indipendenti per rappresentare lo stato del sistema. Così, ad esempio:

- per sistemi impiegati nell'ambito delle macchine termiche a fluido, in generale determinati da  $F = 2$  variabili di stato indipendenti, risulta utile rappresentare lo stato del sistema usando come coppia di variabili indipendenti  $P, T$  (piano di Clapeyron) o  $T, S$  (piano entropico), nei quali risultano evidenti per sistemi chiusi rispettivamente il lavoro o il calore scambiato con l'ambiente esterno;
- per l'aria umida e lo studio di sistemi di condizionamento o metereologia, determinati da  $F = 3$  variabili di stato indipendenti, ma con  $P$  circa costante in un gran numero di applicazioni, risulta conveniente usare la coppia di variabili  $H, x$  (diagramma di Mollier) per valori di pressione  $P_0$  dati;
- ...**todo** piano per reazioni chimiche...
- ...**todo** piano delle fasi in metallurgia, con fasi solide...

Questa sezione si concentra su sistemi gassosi non reagenti monofase e sulla rappresentazione dello stato di tali sistemi nei piani di Clapeyron  $P - V$  e nel piano entropico  $T - S$ . L'uso del diagramma di Mollier viene rimandato alla sezione sull'*aria umida*, dopo aver introdotto i potenziali termodinamici per i gas, e le miscele?

### 12.4.1 Diagramma di stato di un sistema mono-componente gassoso

Si consideri un sistema ad un componente, in grado di scambiare calore e con un unico modo di manifestare il lavoro reversibile interno al sistema, quello meccanico dovuto a un'espansione isotropa del volume,  $\delta L^{int,rev} = P dV$ .

Un sistema chiuso monofase formato da un gas non reagente, ha un unico modo  $W = 1$  di manifestare lavoro interno reversibile, il lavoro meccanico di compressione,  $\delta L^{int,rev} = P dV$ , in assenza di carica elettrica o altri meccanismi per compiere lavoro. Come conseguenza della *regola delle fasi di Gibbs*,

$$F = C - P + W - 1 = 1 - 1 + 1 + 1 = 2,$$

il sistema ha due gradi di libertà,  $F = 2$ , cioè il suo stato è determinato da due variabili intensive indipendenti. Lo stato del sistema può quindi essere completamente rappresentato in uno spazio dimensionale, cioè in un piano di stato. Le due scelte discusse qui sono il piano di Clapeyron e il piano entropico.

## Piano di Clapeyron, P-V

**Lavoro.** Nel caso di **sistemi chiusi** e **processi ideali**, il primo principio della termodinamica viene scritto

$$\begin{aligned} dE &= -\delta L^{int,rev} + \delta Q^{ext} = \\ &= -P dV + T dS . \end{aligned}$$

Nel caso in cui il contributo dell'**energia cinetica sia trascurabile**, il lavoro compiuto dal sistema sull'ambiente esterno coincide con

$$\delta L^{done} = -\delta L^{ext} = -dK + \delta L^{int} \approx \delta L^{int} \approx \delta L^{int,rev} = P dV$$

Un sistema che compie una trasformazione termodinamica descritta dalla curva  $\gamma$  nel piano  $P - V$  di Clapeyron, compie un lavoro verso l'ambiente esterno che è uguale alla somma dei contributi elementari - e quindi l'integrale

$$L^{done} = \int_{\gamma} \delta L^{done} \approx \int_{\gamma} P dV ,$$

che ha l'immediata rappresentazione grafica corrispondente all'area (con segno) tra il grafico della trasformazione e l'asse delle ascisse,  $P = 0$ .

**Esempi di trasformazioni.** ...

## Piano entropico, T-S

Nel caso di trasformazioni ideali, il calore entrante nel sistema può essere identificato con il termine

$$\delta Q^{ext} = T dS - \underbrace{\delta^+ D}_{=0 \text{ ideal, rev.}} = T dS ..$$

Un sistema chiuso che compie una trasformazione termodinamica descritta dalla curva  $\gamma$  nel piano  $P - V$  di Clapeyron, assorbe calore dall'ambiente esterno che è uguale alla somma dei contributi elementari - e quindi l'integrale

$$Q^{ext} = \int_{\gamma} \delta Q^{ext} \approx \int_{\gamma} T dS ,$$

che ha l'immediata rappresentazione grafica corrispondente all'area (con segno) tra il grafico della trasformazione e l'asse delle ascisse,  $T = 0$ .

# 12.5 Secondo principio della termodinamica

## 12.5.1 Enunciato di Clausius

L'enunciato di Clausius del secondo principio della termodinamica può essere formulato in maniera abbastanza naturale con il formalismo introdotto.

### Sistemi semplici

La variazione elementare di entropia  $dS$  di un sistema semplice chiuso a temperatura uniforme  $T$  è maggiore o uguale al rapporto tra il flusso di calore elementare introdotto nel sistema e la temperatura del sistema stesso,

$$dS = \underbrace{\frac{\delta^+ D}{T}}_{\geq 0} + \frac{\delta Q^{ext}}{T} \geq \frac{\delta Q^{ext}}{T} .$$

Questo è l'enunciato di Clausius del secondo principio della termodinamica per sistemi semplici con temperatura omogenea.

## Sistemi composti

**todo** definizione di sistema composto. Avviene conduzione tra i sotto-sistemi.

L'entropia in termodinamica classica è una grandezza fisica estensiva: l'entropia di un sistema composto da  $N$  sotto-sistemi semplici è la somma dell'entropia dei sotto-sistemi,

$$S = \sum_{n=1:N} S_n .$$

Il bilancio dell'entropia del singolo sotto-sistema che scambia calore con gli altri sotto-sistemi e l'ambiente esterno viene scritto come

$$\begin{aligned} dS_i &= \frac{\delta Q_i^{ext,i}}{T_i} - \frac{\delta D_i}{T_i} = \\ &= \frac{\delta Q_i^{ext}}{T_i} + \frac{\sum_{k \neq i} \delta Q_{ik}}{T_i} - \frac{\delta D_i}{T_i} \geq \\ &\geq \frac{\delta Q_i^{ext}}{T_i} + \frac{\sum_{k \neq i} \delta Q_{ik}}{T_i} . \end{aligned}$$

Il bilancio dell'entropia dell'intero sistema viene ricavato sommando i bilanci dell'entropia dei singoli sotto-sistemi,

$$\begin{aligned} dS &= \sum_i dS_i \geq \\ &\geq \sum_i \left\{ \frac{\delta Q_i^{ext}}{T_i} + \frac{\sum_{k \neq i} \delta Q_{ik}}{T_i} \right\} = \\ &= \sum_i \frac{\delta Q_i^{ext}}{T_i} + \underbrace{\sum_{\{i,k\}} \delta Q_{ik} \left( \frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_k} \right)}_{\geq 0} \geq \\ &\geq \sum_i \frac{\delta Q_i^{ext}}{T_i} . \end{aligned}$$

avendo usato la relazione che rappresenta la tendenza naturale della trasmissione del calore «da un sistema a temperatura maggiore a un sistema a temperatura minore»,

$$\delta Q_{ik} \left( \frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_k} \right) \geq 0 .$$

**todo** aggiungere riferimento alla tendenza naturale nella trasmissione del calore

### 12.5.2 Aumento dell'entropia nell'universo

Se consideriamo l'universo come il sistema chiuso e isolato (ma sarà vero? E chi lo sa? Forse è sensato che lo sia, ma tante cose che sembrano sensate oggi saranno fregnacce tra qualche anno) formato da un sistema di interesse *sys* e dall'ambiente esterno *env*.

La variazione dell'entropia dell'universo è la somma della variazione nel sistema e nell'ambiente esterno. Si indica con  $\delta Q_{sys,env}$  il flusso di calore che, se positivo, fa aumentare l'energia del sistema e diminuire quella dell'ambiente esterno.

Assumendo che i due sotto-sistemi siano internamente omogenei,

$$\begin{aligned}
 dS^{univ} &= dS^{sys} + dS^{env} = \\
 &= \frac{\delta Q_{sys,env}}{T^{sys}} + \frac{\delta Q_{env,sys}}{T^{env}} = \\
 &= \frac{\delta Q_{sys,env}}{T^{sys}} - \frac{\delta Q_{sys,env}}{T^{env}} = \\
 &= \delta Q_{sys,env} \left( \frac{1}{T^{sys}} - \frac{1}{T^{env}} \right) \geq 0 ,
 \end{aligned}$$

si ottiene la relazione

$$dS^{univ} \geq 0 ,$$

che prevede la «non-diminuzione» dell'entropia dell'universo.

## 12.6 Sistemi aperti

In generale, l'equazione di bilancio di una grandezza fisica per un sistema aperto si ricava partendo dal bilancio della stessa grandezza fisica per un sistema chiuso e aggiungendo il contributo dei termini di flusso della grandezza fisica desiderata, attraverso la frontiera del sistema. Così, se il bilancio della grandezza fisica  $F$  per il sistema chiuso all'interno del volume  $V_t$  può essere scritto come

$$\frac{d}{dt} F_{V_t} = R_{V_t}^e ,$$

il bilancio della stessa grandezza fisica per un sistema aperto identificato dal volume (geometrico)  $v_t$  può essere scritto come

$$\frac{d}{dt} F_{v_t} = R_{v_t}^e - \Phi_{\partial v_t}(f) ,$$

avendo definito  $f$  come la grandezza specifica di  $F$  per unità di massa. Il termine di flusso attraverso la frontiera  $\partial v_t$  può essere scritto come la somma dei contributi di flusso attraverso porzioni  $s_{k,t}$  della superficie  $\partial v_t = \cup_k s_{k,t}$ ,

$$\Phi_{\partial v_t}(f) = \sum_{s_{k,t}} \dot{m}_k f_k ,$$

avendo definito  $\dot{m}_k = \rho_k v_{n,k}^{rel}$  il flusso di massa attraverso la superficie  $s_{k,t}$  e assumendo che la grandezza  $f_k$  sia costante sulla superficie  $s_{k,t}$ , o che sia stato considerato il valore medio sulla superficie.

---

**Nota:** Nel caso la grandezza  $f$  non sia uniforme sulla frontiera del dominio e che vari con continuità, il termine di flusso può essere scritto al limite come sommatoria di infiniti termini attraverso superfici la cui area tende a zero, tramite un integrale di superficie, seguendo la definizione di integrale di Riemann.

---



---

**Nota:** Un'equazione di bilancio di una grandezza fisica per un sistema aperto include anche l'equazione di bilancio della stessa grandezza fisica per un sistema aperto come caso particolare in cui il flusso di massa è nullo attraverso la frontiera del dominio,  $\dot{m}_k = 0$ .

---

Si considerano qui i bilanci (integrali, globali di un sistema) di alcune grandezze fisiche fondamentali in meccanica classica: massa, quantità di moto, momento della quantità di moto, energia totale.

### 12.6.1 Bilancio di massa

Il bilancio di massa,  $F = M$ ,  $f = 1$ , per un sistema aperto è

$$\frac{d}{dt}M_{v_t} = - \sum_k \dot{m}_k$$

### 12.6.2 Bilancio della quantità di moto

*todo riferimento da o a meccanica classica*

### 12.6.3 Bilancio del momento della quantità di moto

*todo riferimento da o a meccanica classica*

### 12.6.4 Bilancio dell'energia totale

Il bilancio di energia totale  $F = E^{tot} = E + K$ ,  $f = e^{tot} = e + \frac{|\vec{v}|^2}{2}$ ,

$$\frac{d}{dt}E_{v_t}^{tot} = P_{v_t}^{ext} + \dot{Q}_{v_t}^{ext} - \sum_k \dot{m}_k e_k^{tot}.$$

La potenza delle azioni esterne  $P_{v_t}^{ext}$  può essere scritta come somma dei contributi sulle superfici della frontiera del sistema attraverso le quali c'è flusso di massa, e le superfici impermeabili che possono essere utilizzate per estrarre lavoro dal sistema. Nel caso si possano trascurare gli effetti degli sforzi viscosi sulle superfici attraverso le quali c'è flusso di massa, la potenza delle azioni agenti sul sistema può essere scritta come

$$\begin{aligned} P^{ext} &= P^{ext, mech} + P^{ext, \Phi} = \\ &= P^{ext, mech} - \sum_k \dot{m}_k \frac{P_k}{\rho_k}, \end{aligned}$$

e il bilancio di energia totale del sistema diventa

$$\frac{d}{dt}E_{v_t}^{tot} = P_{v_t}^{ext, mech} + \dot{Q}_{v_t}^{ext} - \sum_k \dot{m}_k h_k^{tot},$$

avendo introdotto la definizione di entalpia totale specifica,  $h^{tot} = e^{tot} + \frac{P}{\rho} = e + \frac{P}{\rho} + \frac{|\vec{v}|^2}{2}$ .

---

#### Example 11.6.1 (Turbina)

---

---

#### Example 11.6.2 (Compressore)

---

---

#### Example 11.6.3 (Camera di combustione)

---



**Gas ideali.** Leggi sperimentali; legge dei gas perfetti; teorica cinetica dei gas

**Miscele di gas.** Miscele ideali di gas; aria umida

**Solidi elastici.**

### 13.1 Gas ideali

Il modello di gas ideale rappresenta un gas in cui

- le molecole hanno volume trascurabile rispetto al volume disponibile
- le molecole non interagiscono tra di loro e interagiscono le pareti solide di un contenitore con urti perfettamente elastici; è possibile rilassare l'ipotesi di assenza di interazioni tra le particelle con l'ipotesi di interazioni perfettamente elastiche
- le molecole sono identiche
- il moto delle molecole è casuale e isotropo, cioè non esistono direzioni preferenziali del moto

Il modello di gas ideale può essere un buon modello per gas:

- **alta temperatura e molecole semplici:** l'energia cinetica delle molecole rende trascurabile l'energia delle forze intermolecolari tra molecole distanti; l'interazione tra molecole semplici o non-polari è debole se confrontata rispetto a molecole complesse o polari
- **bassa pressione e bassa densità:** la bassa concentrazione di molecole rende le loro interazioni rare.

### 13.1.1 Esperimenti

**todo** Aggiungere immagini e grafici dei dati sperimentali per le leggi di Charles e Gay-Lussac con estrapolazione verso lo zero assoluto.

#### Esperimenti e leggi

##### Legge di Boyle

Per gas semplici, a temperatura sufficientemente elevata, e pressione sufficientemente ridotta

$$T, n \text{ const} \rightarrow PV = \text{const}$$

##### Legge di Charles

Per gas semplici, a temperatura sufficientemente elevata, e pressione sufficientemente ridotta

$$P, n \text{ const} \rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta T} = V_0 \alpha_P = \text{const}$$

$$V = V_0 (1 + \alpha_P T),$$

avendo indicato con  $\alpha_0$  il coefficiente di dilatazione termica a pressione costante.

I dati sperimentali misurati mostrano un andamento lineare, e la loro estrapolazione verso il valore limite del volume  $V = 0$  porta a un valore di temperatura  $T = -273.15^\circ\text{C}$ .

##### Legge di Gay-Lussac

Per gas semplici, a temperatura sufficientemente elevata, e pressione sufficientemente ridotta

$$V, n \text{ const} \rightarrow \frac{\Delta P}{\Delta T} = P_0 k_V = \text{const}$$

$$P = P_0 (1 + k_V T),$$

I dati sperimentali misurati mostrano un andamento lineare, e la loro estrapolazione verso il valore limite del volume  $P = 0$  porta allo stesso valore di temperatura  $T = -273.15^\circ\text{C}$  trovato nell'esperimento di Charles.

#### Scala di temperatura assoluta

Questa osservazione porta alla scelta di una nuova scala di temperatura, quella che diverrà la scala di temperatura termodinamica, o assoluta, di Kelvin:

- viene definito il punto a temperatura,  $0 \text{ K} = -273.15^\circ\text{C}$
- viene mantenuta l'ampiezza del grado,

così che la legge di conversione tra il valore numerico della misura di temperatura con la scala Celsius e la scala Kelvin è

$$T[\text{K}] = T[^\circ\text{C}] + 273.15.$$

Usando la scala di temperatura assoluta, le leggi di Charles e di Gay-Lussac possono essere riscritte come **todo** (*evitare singolarità*)

$$\begin{aligned} V &\propto T && \text{se } P, n \text{ const.} \\ P &\propto T && \text{se } T, n \text{ const.} \end{aligned}$$

## Legge di Avogadro

Per gas semplici, a temperatura sufficientemente elevata, e pressione sufficientemente ridotta

$$P, T \text{ const} \rightarrow \frac{n}{V} = \text{const}$$

## Legge dei gas ideali

La legge dei gas ideali permette di riassumere le quattro leggi di Boyle, Charles, Gay-Lussac, Avogadro in un'unica equazione di stato,

$$\frac{PV}{nT} = R,$$

avendo introdotto  $R \approx 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$  la **costante universale dei gas**.

### 13.1.2 Espressioni diverse dell'equazione di stato dei gas perfetti

Formule alternative dell'equazione di stato dei gas perfetti

- $n$  numero di moli,  $R$  costante universale dei gas

$$PV = nRT$$

- il numero di moli  $n$  può essere scritto come rapporto della massa  $m$  del sistema e la massa molare  $M_m$  del gas considerato,

$$m = M_m n$$

Usando questa espressione per sostituire  $n$  nella legge dei gas perfetti, e dividendo per  $V$  si può trovare una nuova espressione dell'equazione di stato di un gas perfetto,

$$P = \frac{m}{V} \frac{R}{M_m} T = \rho R_g T,$$

avendo riconosciuto la densità come rapporto tra massa e volume del sistema  $\rho = \frac{m}{V}$  e definito la costante del gas specifica per il gas considerato come rapporto della costante universale e la massa molare,  $R_g = \frac{R}{M_m}$

- la relazione di Avogadro lega il numero di moli  $n$  e il numero di molecole  $N$  (**todo** \*può essere solo una comoda unità di conto? Da dove arriva?...),

$$N = N_A n,$$

essendo  $N_A \approx 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  il **numero di Avogadro**. La legge di stato dei gas perfetti può quindi essere riscritta come

$$PV = N \frac{R}{N_A} T = N k_B T,$$

dove è stata introdotta la costante di Boltzmann,  $k_B = \frac{R}{N_A} \approx 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ .

La costante di Boltzmann (**todo** introdotta da Planck e da lui dedicata a Boltzmann) è il fattore di conversione tra l'energia dovuta all'agitazione termica del sistema e la sua temperatura, come mostrato nella sezione dedicata alla *teoria cinetica dei gas*.

### 13.1.3 Teoria cinetica dei gas

Nel 1738, Daniel Bernoulli pubblica il *Hydrodynamica* nel quale fornisce un primo modello microscopico di un gas, pensato come un insieme di un numero enorme **todo** di particelle elementari (molecole), e il legame tra le grandezze macroscopiche e la media delle grandezze microscopiche.

Considerando: **todo**

- un volume retto di lati  $\Delta L_x, \Delta L_y, \Delta L_z, \Delta V = \Delta L_x \Delta L_y \Delta L_z$
- che contiene un numero  $\Delta N$  di particelle identiche che non interagiscono tra di loro ma solo con urti elastici con le pareti rigide del volume

La forza sulla parete del volume con normale in direzione  $x$ , può essere calcolata come rapporto tra l'impulso esercitato dalla parete e l'intervallo di tempo tra 2 urti della stessa molecola con la stessa parete,

$$\Delta F_{x,i} = -\frac{\Delta I_{x,i}}{\Delta t_i} = \frac{2m_m v_{x,i}}{\frac{2\Delta L_x}{v_{x,i}}} = m_m \frac{v_{x,i}^2}{\Delta L_x}$$

La forza media per unità di superficie sulla parete è

$$\frac{\Delta F_{x,i}}{\Delta S_x} = \frac{\Delta F_{x,i}}{\Delta L_y \Delta L_z} = \frac{m_m v_{x,i}^2}{\Delta L_x \Delta L_y \Delta L_z} = \frac{m_m v_{x,i}^2}{\Delta V}$$

L'energia cinetica della  $i$ -esima particella è

$$K_i = \frac{1}{2} m_m |\vec{v}_i|^2 = \frac{1}{2} m_m (v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2 + v_{z,i}^2) =$$

L'energia dell'insieme delle particelle contenute nel volume è uguale alla somma delle loro energie cinetiche

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_m (v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2 + v_{z,i}^2) .$$

Assumendo che la velocità delle particelle abbia una distribuzione isotropa nello spazio, ossia che non ci siano direzioni preferenziali, la media dei quadrati delle singole componenti cartesiane è uguale

$$\langle \Delta K \rangle = \langle K_1 \rangle \Delta N = \Delta N \frac{3}{2} m_m v_{rms}^2 .$$

**todo** L'energia cinetica può essere scritta in funzione della temperatura,  $T$ ,

$$\frac{\langle \Delta K \rangle}{\Delta N} = \frac{3}{2} m_m v_{rms}^2 = \frac{3}{2} k_B T ,$$

questa espressione prevede che l'energia cinetica di una molecola sia direttamente proporzionale alla temperatura e al numero di gradi di libertà della particella, qui  $f = 3$ , tramite la costante di proporzionalità  $k_B = \dots$ , la **costante di Boltzmann**.

La forza media esercitata dalle  $\Delta N$  molecole sulla superficie con normale  $x$  può essere quindi scritta come

La **costante di Avogadro** (**todo** da dove arriva? Esperimenti sui gas a pari volume e condizioni TD, fatti da?? Gay-Lussac?? Charles?? Controllare video di Bressanini e altre fonti) permette di convertire il numero di molecole  $N$  nel numero di moli  $n$ ,  $\Delta N = N_A \Delta n$ , e calcolare la massa di una mole, la massa molare, una volta nota la massa di una molecola  $M_m = N_A m_m$

$$\begin{aligned} P &= \frac{\Delta N}{\Delta V} m_m v_{rms}^2 = \\ &= \frac{\Delta N}{\Delta V} k_B T = \frac{\Delta n}{\Delta V} \underbrace{N_A k_B}_{=R_u} T \\ &= \frac{m_m \Delta N}{\Delta V} \frac{k_B}{m_m} T = \frac{\Delta m}{\Delta V} \frac{k_B}{m_m} T = \frac{\Delta m}{\Delta V} \underbrace{\frac{N_A k_B}{M_m}}_{=\frac{R_u}{M_m}=R} T , \end{aligned}$$

avendo introdotto la definizione della **costante universale**  $R_u = N_A k_B$  come prodotto del numero di Avogadro e la costante di Boltzmann, e una costante del gas considerato come rapporto tra la costante universale e la sua massa molare,  $R = \frac{R_u}{M_m}$ .

Valori numerici; cenni storici

### 13.1.4 Caratteristiche dei gas perfetti

#### Legge di stato

$$PV = N k_B T \quad (N = N_A n, N_A k_B = R)$$

$$PV = n R T \quad \left( m = M_m n, R_g = \frac{R}{M_m} \right)$$

$$PV = m R_g T \quad (m = \rho V)$$

$$P = \rho R_g T$$

#### Primo principio della termodinamica

Per un gas comprimibile monocomponente, il lavoro interno meccanico reversibile è

$$\delta L^{int,rev,mech} = P dV$$

In assenza di altre interazioni di lavoro, il bilancio di energia interna per un gas comprimibile diventa

$$\begin{aligned} dE &= \delta Q^{ext} + \delta^+ D - \delta L^{int,rev} = \\ &= T dS - P dV. \end{aligned}$$

#### Energia interna, entalpia e calori specifici

**Energia interna.** Seguendo le conclusioni del modello di gas ideale fornito dalla *teoria cinetica dei gas*, l'espressione dell'energia interna di un gas perfetto può essere scritta come,

$$E = \frac{f}{2} N k_B T = \frac{f}{2} n R T = m \frac{f}{2} R_g T.$$

**Entalpia.** Usando la definizione di entalpia  $H = E + F_i X_i = E + P V$ , l'equazione di stato e l'espressione dell'energia interna dei gas perfetti, l'entalpia di un gas perfetto può essere scritta come

$$H = \left( \frac{f}{2} + 1 \right) N k_B T = \left( \frac{f}{2} + 1 \right) n R T = m \left( \frac{f}{2} + 1 \right) R_g T.$$

**Calore specifico a volume costante.** Se il volume del sistema è costante, il lavoro interno è nullo (**todo** complessivo, reversibile, aggiungere ipotesi di stato di equilibrio una volta per tutte?),  $\delta L = 0$ ,  $dE = \delta Q^{ext} = T dS$

$$m c_v dT := \delta Q^{ext}|_v = dE|_v = m \frac{f}{2} R_g dT \quad \rightarrow \quad c_v = \frac{f}{2} R_g.$$

**Calore specifico a pressione costante.** Il differenziale dell'entropia a pressione costante,

$$dH|_P = d(E + P V)|_P = dE|_P + \underbrace{dP}_=0 V + P dV|_P,$$

può essere utilizzato per riscrivere il bilancio di energia interna a pressione costante,

$$dH|_P = dE|_P + P dV|_P = \delta Q^{ext}|_P + \delta^+ D|_P.$$

Nell'ipotesi che la dissipazione sia nulla, (**todo** aggiungere ipotesi di stato di equilibrio una volta per tutte?), si può quindi legare la variazione di entalpia del sistema all'apporto di calore al sistema, e al calore specifico a pressione costante,

$$m c_P dT := \delta Q^{ext}|_P = dH|_P = m \left( \frac{f}{2} + 1 \right) R_g dT \quad \rightarrow \quad c_P = \left( \frac{f}{2} + 1 \right) R_g.$$

**Esempi: calcolo del calore specifico di gas**

### Idrogeno molecolare, $H_2$

Assumendo che l'idrogeno,  $H_2$ , con massa molare  $M_m = 2.0 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$ , si comporti come un gas perfetto nella condizione di interesse, la costante specifica dell'idrogeno molecolare vale

$$R_g = \frac{R}{M_m} = \frac{8314 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}}{2 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} = 4157 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}.$$

e i calori specifici

$$c_v = \frac{5}{2} R_g = \frac{5}{2} 4157 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 10392.5 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$c_P = \frac{7}{2} R_g = \frac{7}{2} 4157 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 14549.5 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

### Elio, He

Assumendo che l'elio, He, con massa molare  $M_m = 4 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$ , si comporti come un gas perfetto nella condizione di interesse, la costante specifica dell'idrogeno molecolare vale

$$R_g = \frac{R}{M_m} = \frac{8314 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}}{4 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} = 2078.5 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}.$$

e i calori specifici

$$c_v = \frac{3}{2} R_g = \frac{3}{2} 2078.5 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 3117.8 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$c_P = \frac{5}{2} R_g = \frac{5}{2} 2078.5 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 5196.2 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

## Aria, miscela di gas

L'aria è una miscela di gas (**todo riferimento a miscele?**) composta da  $N_2$ ,  $O_2$ ,... la cui massa molare è la media pesata delle masse molari dei suoi componenti,  $M_m = 28.97 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$ . La costante specifica dell'aria è quindi

$$R_g = \frac{R}{M_m} = \frac{8314 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}}{28.97 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}.$$

Essendo composta da molecole di gas biatomiche, i gradi di libertà della singola molecola sono  $f = 5$  (3 legati alla traslazione, 2 alla rotazione; manca la rotazione attorno all'asse della molecola, assumendo trascurabile l'inerzia attorno a quell'asse). I calori specifici valgono quindi

$$c_v = \frac{5}{2} R_g = \frac{5}{2} 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 717.5 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$c_P = \frac{7}{2} R_g = \frac{7}{2} 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 1004.5 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

## Variazioni di entropia

La variazione dell'entropia di un gas perfetto può essere scritta in diverse forme partendo dal primo principio della termodinamica e usando l'espressione dell'energia interna e la legge di stato dei gas perfetti per cambiare le variabili indipendenti,

$$\begin{aligned} ds &= \frac{1}{T} \left( de + \frac{P}{\rho^2} d\rho \right) = \\ &= c_v \frac{dT}{T} + R_g \frac{d\rho}{\rho} = \\ &= c_P \frac{dT}{T} + R_g \frac{dP}{P} = \\ &= c_P \frac{d\rho}{\rho} + c_v \frac{dP}{P}. \end{aligned}$$

## 13.2 Aria umida

### 13.2.1 Definizioni

L'**aria atmosferica** può essere pensata come una miscela di aria secca (a sua volta miscela di gas  $N_2$  al 78%,  $O_2$  al 21%, Ar circa all'1%, e altre tracce di gas) i cui rapporti rimangono inalterati in intervalli ragionevoli di condizioni termodinamiche) e di vapore acqueo, acqua allo stato di vapore.

Viene definita **pressione parziale**,  $p_i$ , dovuta a un componente  $i$  di una miscela, la pressione che ci sarebbe nel sistema se ci fosse solo il componente scelto nell'intero volume del sistema. La **legge di Dalton** sulle pressioni parziali afferma che la pressione in una miscela di gas è la somma delle pressioni parziali dei suoi componenti,

$$p = \sum_i p_i$$

Le quantità estensive possono essere scritte come somma delle quantità riferite a ogni singolo componente (nell'**ipotesi** che non ci siano interazioni? Ad esempio, l'energia della miscela di 2 componenti è uguale alla somma dei contributi di energia associati ai singoli componenti)

$$E = \sum_i E_i \quad , \quad H = \sum_i H_i \quad , \quad \dots$$

### 13.2.2 Aria secca e vapore acqueo

Nell'ipotesi che i componenti in fase gassosa possano essere modellati con la legge dei gas ideali.

La massa molare media dell'aria secca  $M_m^{a.s.}$  e la costante specifica del gas  $R^{a.s.}$  sono

$$\begin{aligned} M_m^{a.s.} &= 0.78 M_{m,N_2} + 0.21 M_{m,O_2} + 0.01 M_{m,Ar} = \\ &= 0.78 \cdot 28 \frac{kg}{kmol} + 0.21 \cdot 32 \frac{kg}{kmol} + 0.01 \cdot 40 \frac{kg}{kmol} = 28.96 \frac{kg}{kmol} \\ R^{a.s.} &= \frac{R}{M_m^{a.s.}} = \frac{8314 \frac{J kmol}{K}}{28.96 \frac{kg}{kmol}} = 287.1 \frac{J}{kg K} \end{aligned}$$

La massa molare media del vapore acqueo  $M_m^v$  e la costante specifica del gas  $R^v$  sono

$$\begin{aligned} M_m^v &= M_{m,H_2O} = 2 \cdot 1 \frac{kg}{kmol} + 16 \frac{kg}{kmol} = 18 \frac{kg}{kmol} \\ R^v &= \frac{R}{M_m^v} = \frac{8314 \frac{J kmol}{K}}{18 \frac{kg}{kmol}} = 461.9 \frac{J}{kg K} \end{aligned}$$

### 13.2.3 Regola delle fasi di Gibbs

La regola delle fasi di Gibbs prevede che un sistema con  $C = 2$  componenti indipendenti, aria secca e vapore acqueo, e  $P$  fasi è determinato dal valore di

$$F = C - P + 2 = 4 - P$$

variabili intensive. Nel caso ci sia una fase sola,  $P = 1$ , il sistema è determinato da  $F = 3$  variabili intensive indipendenti, come ad esempio pressione, temperatura e composizione; nel caso coesistano  $P = 2$  fasi, il sistema è determinato da  $F = 2$  variabili intensive indipendenti, poiché si aggiunge un vincolo tra pressione e temperatura in condizioni di equilibrio di più fasi, che può essere scritto come uguaglianza tra i potenziali chimici del componente nelle due fasi,

$$\mu_l(P, T) = \mu_v(P, T) .$$

### 13.2.4 Misure di umidità

#### Umidità specifica o titolo, $x$

Rapporto tra frazione di vapore acqueo e aria secca nello stesso volume di aria umida,

$$x = \frac{m_v}{m_a}$$

Assumendo che la fase gassosa si comporti come miscela di gas ideali, si può scrivere

$$x = \frac{m_v}{m_a} = \frac{\rho_v}{\rho_a} = \frac{R_a T}{p_a} \frac{p_v}{R_v T} = \frac{287.1}{461.9} \frac{p_v}{p_a} = 0.622 \frac{p_v}{p_a} = 0.622 \frac{p_v}{p - p_v} ,$$

ricordando che  $p = p_v + p_a$



## Umidità relativa

L'umidità relativa è il rapporto tra la massa di vapore  $m_v$  contenuta nell'aria umida rispetto alla massa di vapore  $m_{v,sat}$  che sarebbe contenuta nel sistema nella condizione di saturazione alla stessa temperatura,

$$\varphi = \frac{m_v}{m_{v,sat}}$$

$$\varphi = \frac{m_v}{m_{v,sat}} = \frac{\rho_v}{\rho_{v,sat}} = \frac{R_v T}{p_{v,sat}} \frac{p_v}{R_v T} = \frac{p_v}{p_{v,sat}},$$

e quindi

$$x = 0.622 \frac{p_v}{p - p_v} = 0.622 \frac{\varphi p_{v,sat}}{p - \varphi p_{v,sat}}$$

### 13.2.5 Entalpia dell'aria umida

Nell'ipotesi che l'aria umida si comporti come miscela ideale, la sua entalpia è la somma dell'entalpia di aria secca e vapore acqueo,

$$H = \sum_i H_i = H_{as} + H_v = m_{as} h_{as} + m_v h_v = m_{as} \left( h_{as} + \frac{m_v}{m_{as}} h_v \right) = m_{as} (h_{as} + x h_v)$$

Nell'ipotesi di gas ideale biatomico (come  $N_2$  e  $O_2$  di cui è composta al 99%), l'entalpia specifica dell'aria secca è proporzionale alla temperatura,

$$h_a = c_{p,a} T,$$

$$\text{con } c_{p,a} = \frac{7}{2} R^{a.s.} = \frac{7}{2} 287.1 \frac{J}{kg K} = 1005 \frac{J}{kg K}.$$

L'entalpia del vapore temperatura  $T$  è l'energia necessaria a pressione  $P$  costante a vaporizzare un kg di acqua satura alla temperatura di  $T_{l,sat}(P)$  e del calore necessario a portare il vapore alla temperatura  $T$

$$H_v = m_v (r(P) + c_{p,v} (T - T_{l,sat}(P))),$$

essendo  $r$  il calore latente di vaporizzazione alla pressione  $P$ , e  $c_{p,v}$  il calore specifico a pressione costante del vapore d'acqua.

Ad esempio, a  $T = 0^\circ C$ , il calore latente di fusione e il calore specifico a pressione costante valgono  $r(T = 0^\circ C) = 2501 \frac{kJ}{kg}$  e  $c_{p,v} = 1875 \frac{J}{kg K}$  a  $T = 0^\circ C$ .

**todo controllare!** *Errore? Esistono tabelle con valori tabulati che descrivono il comportamento non-ideale?* Nel caso il vapore d'acqua si comportasse come un gas ideale con una molecola tri-atomica con atomi non allineati, con  $f = 6$  gradi di libertà rigidi che contribuiscono all'energia interna, si avrebbe  $c_{v,v} = 3R^v$ ,  $c_{p,v} = 4R^v = 4 \cdot 461.9 \frac{J}{kg K} = 1847.6 \frac{J}{kg K}$ .

### 13.2.6 Tabelle

- delle condizioni di saturazione,  $T$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $h$ ,  $s$ , in condizioni di liquido o vapore saturo
- del vapore surriscaldato
- del liquido sottoraffreddato

### 13.2.7 Diagrammi

- diagramma di Mollier, o psicrometrico: assi  $x$ ,  $h$ , solitamente costruito alla pressione  $P_0 = 1 \text{ atm}$
- diagramma ASHRAE: assi  $T$  di bulbo secco,  $x$

### 13.2.8 Temperature e misure di umidità

- Temperatura di bulbo secco
- Temperatura di rugiada: temperatura di saturazione, attraverso un processo di raffreddamento a  $p$  e  $x$  costanti
- Temperatura di bulbo bagnato: temperatura alla quale si porta l'acqua in condizioni di scambio di calore convettivo forzato ( $v \in [3, 40] \text{ m/s}$ ) con l'aria; l'aria lambisce la garza, l'acqua tende a evaporare assorbendo calore (dall'aria?); all'equilibrio, l'acqua è a  $T_{H_2} < T_a$
- Temperatura di saturazione adiabatica: coincide con la temperatura di bulbo bagnato?

### 13.2.9 Trasformazioni dell'aria umida

- Miscelamento adiabatico di due portate di aria umida
  - Sistema aperto in regime stazionario, senza lavoro o calore apportato al sistema; bilanci di:
    - \* massa a.s.
    - \* massa v
    - \* energia (flussi di entalpia)
- Riscaldamento sensibile di una portata di aria umida
- Raffreddamento sensibile di una portata di aria umida
  - Sistema aperto in regime stazionario, con scambi di calore
    - \* bilancio massa è banale
    - \* bilancio energia  $\dot{Q} = \dot{m}\Delta h$
- Raffreddamento con deumidificazione
  - Sistema aperto in regime stazionario, con scambi di calore;  $\dot{m}_L$  di solito trascurabile
    - \* bilancio di massa, e approssimazioni  $0 = \dot{m}_1 + \dot{m}_L - \dot{m}_2$ ,  $\dot{m}_1 \sim \dot{m}_2$
    - \* bilancio di energia  $Q_{12} = \dot{m}(h_2 - h_1) + \dot{m}_L h_L$
- Umidificazione dell'aria per iniezione di acqua
  - Sistema aperto in regime stazionario, con scambi di calore
    - \* approssimazione della massa di aria secca  $\sim$  massa aria umida:  $m_i = m_{i,a} + m_{i,v} \sim m_{i,a}$
    - \* massa volume:  $\dot{m}_{v,1} + \dot{m}_v = \dot{m}_{v,2}$
    - \* massa aria:  $\dot{m}_{a,1} = \dot{m}_{a,2}$
    - \* bilancio di energia:  $\dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_v h_v = \dot{m}_2 h_2$

### 13.2.10 Esercizi

- Evaporazione di una pozzanghera; evapo-traspirazione: metodi di Penman-Monteith,...
- Applicazioni di condizionamento

## 13.3 Solidi elastici

### 13.3.1 Solido elastico lineare 1-dimensionale

**Legge costitutiva lineare con espansione termica.** Sia data la legge costitutiva elastica che esprime la lunghezza della trave  $L$  in funzione dell'azione assiale  $f$  e della differenza di temperatura  $T - T_0$  rispetto alla temperatura di riferimento  $T_0$ ,

$$L(f, T) - L_0 = \frac{1}{K} f + \alpha L_0 (T - T_0) ,$$

assumendo che la costante elastica isoterma  $K$ , e il coefficiente di dilatazione termica a carico costante  $\alpha$  siano costanti, parametri caratteristici del materiale e della configurazione di riferimento. Sotto queste ipotesi, è possibile invertire la relazione per scrivere l'azione assiale in funzione dell'allungamento e della temperatura,

$$f(\Delta L, \Delta T) = K \Delta L - \alpha L_0 K \Delta T .$$

**Potenziali termodinamici.**

$$dE = T dS + f dL \quad , \quad \text{energia interna}$$

$$dH = T dS - L df \quad , \quad \text{entalpia, } H = E - f L$$

$$dF = -S dT + f dL \quad , \quad \text{Helmholtz, } F = E + T S$$

$$dG = -S dT - L df \quad , \quad \text{Gibbs, } G = H + T S$$

**Energia libera di Helmholtz.**

$$dE = \delta Q^{ext} - \delta L^{int} = T dS + f dL$$

La variazione dell'energia libera di Helmholtz,  $F := E - T S$ ,

$$dF = dE - T dS - S dT = f dL - S dT ,$$

permette di riconoscere l'azione assiale e l'entropia come le derivate parziali di  $F$ ,

$$f = \left( \frac{\partial F}{\partial L} \right)_T \quad , \quad S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_L$$

Integrando la relazione dell'azione assiale, si ottiene

$$F(\Delta L, \Delta T) = \frac{1}{2} K \Delta L^2 - \alpha L_0 K \Delta T \Delta L + F_0(T) ,$$

avendo introdotto la funzione  $F_0(T)$ , dipendente al massimo dalla temperatura  $T$ , come risultato dell'integrazione in  $L$ . Dall'espressione dell'energia libera di Helmholtz si può poi ricavare l'espressione dell'entropia

$$S(\Delta L, \Delta T) = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_L = \alpha L_0 K \Delta L - F'_0(T) .$$

**Calori specifici.** Il calore specifico a lunghezza costante viene calcolato direttamente usando l'espressione dell'entropia,

$$C_L = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_L = -T F_0''(T) .$$

Assumendo che il calore specifico  $C_L$  sia costante, l'integrazione ci fornisce un'espressione della funzione  $F_0'(T)$ ,

$$F_0'(T) - F_0'(T_0) = -C_L \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) ,$$

che consente di esprimere l'entropia in funzione del calore specifico,

$$S(\Delta L, \Delta T) = \alpha L_0 K \Delta L + C_L \ln \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) + S_0$$

Usando la legge costitutiva per esprimere l'allungamento in funzione dell'azione assiale e dell'incremento di temperatura,

$$S(f, \Delta T) = \alpha L_0 K \left( \frac{1}{K} f + \alpha L_0 \Delta T \right) + C_L \ln \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) + S_0 ,$$

è possibile calcolare il calore specifico a carico costante,

$$\begin{aligned} C_f &= T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_f = \\ &= T \left[ K (\alpha L_0)^2 + \frac{C_L}{T} \right] \\ &= T K (\alpha L_0)^2 + C_L . \end{aligned}$$

**Coefficienti termodinamici: costanti elastiche, coefficiente di dilatazione.** Dall'espressione della legge costitutiva, si definiscono la costante elastica isoterma

$$\frac{1}{K} := \left( \frac{\partial L}{\partial f} \right)_T ,$$

e il coefficiente di dilatazione termica a carico costante

$$\alpha_f := \frac{1}{L_0} \left( \frac{\partial L}{\partial T} \right)_f .$$

La costante elastica adiabatica,

$$\frac{1}{K_{ad}} := \left( \frac{\partial L}{\partial f} \right)_S ,$$

può essere calcolata derivando la funzione che esprime la lunghezza  $L$  in funzione delle variabili indipendenti  $f, S$  che si può ricavare sostituendo il legame  $\Delta T(\Delta L, F)$  della relazione costitutiva nell'espressione dell'entropia, per ottenere

$$S = \alpha L_0 K \Delta L + C_L \ln \left( 1 + \frac{1}{T_0} \frac{1}{\alpha L_0 K} (K \Delta L - f) \right) + S_0$$

la cui derivata  $\frac{\partial}{\partial f} \Big|_S$  vale

$$0 = \alpha L_0 K \left( \frac{\partial L}{\partial f} \right)_S + C_L \frac{1}{1 + \frac{K \Delta L - f}{\alpha T_0 L_0 K}} \frac{1}{\alpha L_0 K T_0} \left( K \left( \frac{\partial L}{\partial f} \right)_S - 1 \right) .$$

Introducendo la definizione della costante elastica in condizioni adiabatiche,  $K_{ad}(T; K, \alpha)$ ,

$$\frac{K}{K_{ad}} \left[ \frac{(\alpha L_0)^2 T K}{C_L} + 1 \right] = 1$$

si trova la relazione tra le costanti elastiche isoterma e adiabatica,

$$K_{ad} = K \left( 1 + \frac{(\alpha L_0)^2 T K}{C_L} \right) = K \frac{1}{1 - \frac{(\alpha L_0)^2 K T}{C_f}} .$$

**Energia interna.** L'energia interna del sistema può essere ricavata da  $E = F + T S$ ,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} K \Delta L^2 - \alpha L_0 K \Delta T \Delta L + F_0(T) + T \left( \alpha L_0 K \Delta L + C_L \ln \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) + S_0 \right) = \\ &= \frac{1}{2} K \Delta L^2 + F_0(T) + T C_L \ln \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) + T S_0 . \end{aligned}$$

E'' quindi possibile riconoscere  $E_0 := E(\Delta L = 0, \Delta T = 0) = F_0(T_0) + T_0 S_0$ . La variazione di quest'ultima relazione nei confronti delle variabili  $\Delta L, \Delta T$ ,

$$\begin{aligned} dE &= K \Delta L dL + \underbrace{F'_0(T)}_{-C_L \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - S_0} dT + C_L dT \left[ \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + 1 \right] + S_0 dT = \\ &= K \Delta L dL + C_L dT \end{aligned}$$

può essere espressa in funzione degli incrementi  $dL, dS$ , grazie all'incremento della relazione che lega le tre variabili  $S, L, T$ ,

$$dS = \alpha L_0 K dL + \frac{C_L}{T} dT ,$$

in

$$\begin{aligned} dE &= K \Delta L dL + C_L dT = \\ &= K \Delta L dL + T (dS - \alpha L_0 K dL) = \\ &= (K \Delta L - K \alpha L_0 T) dL + T dS . \end{aligned}$$

**todo** Controllare! Non torna l'espressione della forza: c'è solo la temperatura, ma ci dovrebbe essere la differenza di temperatura rispetto a quella di riferimento?



### **Storia.**

- rivoluzione industriale
- ...
- macchine termiche oggi: motori a combustione interna, motori aeronautici, centrali di generazione di energia elettrica (conversione di forme di energia),...
- ...

### **Classificazione.**

- Combustione: interna/esterna
- Funzionamento: in fasi (o volumetrico; a sua volta alternativo/rotativo)/continuo

### **Componenti.**

- trasformazioni TD e componenti (turbine, compressori, scambiatori di calore,...)
- cicli termodinamici e macchine termiche
  - macchina ideale di Carnot: efficienza massima, formulazioni equivalenti del *secondo principio della TD* per le macchine termiche (Planck, Kelvin)
  - macchine reali

## 14.1 Cicli termodinamici

Un ciclo termodinamico è una sequenza di trasformazioni termodinamiche che riportano il sistema al suo stato di partenza. In un piano termodinamico, un ciclo termodinamico è rappresentato da una curva chiusa.

- **todo.** Sistemi aperti/sistemi chiusi

Per un **sistema chiuso**, il primo principio della termodinamica

$$dE^{tot} = \delta Q^e + \delta L^e$$

Nell'ipotesi di regime periodico dello stato del sistema descritto da un ciclo termodinamico, alla fine del ciclo

$$0 = \oint_{\gamma} dE^{tot} = \oint_{\gamma} \delta Q^e + \oint_{\gamma} \delta L^e ,$$

e da questo segue che il lavoro netto fatto dal sistema  $-L^e$  è uguale al calore netto entrato nel sistema  $Q^e$ ,

$$-L^e = Q^e .$$

**todo** In un sistema in cui sia trascurabile l'energia cinetica del sistema sia trascurabile rispetto alla variazione di energia interna, si può approssimare  $E^{tot} = K + E \approx E$

## 14.2 Macchina termica di Carnot

$$dE^{tot} = \delta Q^{ext} + \delta L^{ext} ,$$

$$dS = \frac{\delta Q^{ext}}{T} + \frac{\delta^+ D}{T} \geq \frac{\delta Q^{ext}}{T} .$$

$$0 = \oint_{\gamma} dE^{tot} = \oint_{\gamma} \delta Q^{ext} + \oint_{\gamma} \delta L^{ext}$$

Il lavoro fatto in un ciclo è

$$\Delta L^{1-cycle} = -\Delta L^{ext} = \Delta Q^{ext} .$$

**Ciclo di Carnot.** Due adiabatiche ideali e due isoterme ideali.

**Principio di Carnot.** Il rendimento massimo di una macchina termica che scambia calore con due sorgenti di calore a temperatura costante  $T_1, T_2 < T_2$  è

$$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1} .$$

## 14.3 Secondo principio della termodinamica per cicli termodinamici

Esistono due enunciati equivalenti del secondo principio della termodinamica per una macchina termica che realizza un ciclo termodinamico.

**Enunciato di Kelvin.** Una macchina termodinamica non può trasformare in lavoro tutto il calore assorbito da una sorgente a temperatura costante.

$$dE^{tot} = \delta Q^{ext} + \delta L^{ext} = \delta Q^{ext} - \delta L$$



$$\begin{aligned}
0 &= \oint_{\gamma} \frac{dE^{tot}}{T_1} = \\
&= \oint_{\gamma} \frac{\delta Q^{ext}}{T_1} - \oint_{\gamma} \frac{\delta L}{T_1} \leq \delta Q^{ext} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T} \right) \leq 0 \\
&\leq \oint_{\gamma} \frac{\delta Q^{ext}}{T} - \frac{L}{T_1} \leq \\
&\leq \underbrace{\oint_{\gamma} dS}_{=0} - \frac{L}{T_1},
\end{aligned}$$

che implica

$$L \leq 0,$$

cioè che una macchina termica che scambia calore unicamente con una sorgente a temperatura costante produce un lavoro negativo, ossia assorbe lavoro esterno, e cede calore.

**Enunciato di Planck.** Non è possibile trasferire calore da una sorgente a temperatura  $T_2$  a una sorgente a temperatura maggiore  $T_1 > T_2$  con una macchina termica che non assorba lavoro.

**todo** dim

## 14.4 Ciclo Otto

**Storia e applicazioni.**

### 14.4.1 Ciclo Otto reale

...

### 14.4.2 Ciclo Otto ideale

Un modello ideale del ciclo Otto è formato da:

- $0 \rightarrow 1$  aspirazione a pressione costante,  $P_1$ . Durante l'aspirazione, il sistema è aperto: le valvole di aspirazione sono aperte per far entrare l'aria in camera di combustione. Alla fine dell'aspirazione, le valvole vengono chiuse e il sistema di interesse è un sistema chiuso
- $1 \rightarrow 2$  compressione adiabatica in sistema chiuso
- $2 \rightarrow 3$  combustione a volume costante: la combustione avviene in maniera sufficientemente veloce da poter essere modellata come una trasformazione termodinamica a volume costante, in corrispondenza del punto morto superiore; in prima approssimazione, si può trascurare il flusso di massa del combustibile e la variazione delle proprietà chimico-fisiche del fluido di lavoro; la reazione di combustione produce il calore in ingresso al sistema
- $3 \rightarrow 4$  espansione adiabatica
- $4 \rightarrow 1$ ,  $1 \rightarrow 0$  scarico libero e scarico forzato. **todo** in prima approssimazione, la parte di scarico al punto morto inferiore non produce lavoro poiché  $\Delta V_{14} = 0$  e la fase di scarico forzata è equilibrata dalla fase di aspirazione.

### 14.4.3 Rendimento del ciclo Otto

$$\eta = 1 + \frac{\Delta Q_{41}}{\Delta Q_{23}} = 1 + \frac{m c_V (T_1 - T_4)}{m c_V (T_3 - T_2)} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$$

Usando le condizioni, **todo** usare direttamente le espressioni delle adiabatichie ideali ricavate nella sezione delle trasformazioni termodinamiche con gas ideali

$$V_2 = V_3 \quad , \quad V_1 = V_4$$

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

$$P_3 V_3^\gamma = P_4 V_4^\gamma$$

e la legge dei gas ideali,  $PV = mRT$ , assumendo che sia un'equazione di stato adatta a descrivere il fluido di lavoro, per riscrivere l'equazione delle trasformazioni adiabatichie

$$\begin{aligned} T_1 V_1^{\gamma-1} &= T_2 V_2^{\gamma-1} & \rightarrow & (T_4 - T_1) V_1^{\gamma-1} = (T_3 - T_2) V_2^{\gamma-1} \\ T_3 V_3^{\gamma-1} &= T_4 V_4^{\gamma-1} & \rightarrow & \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = \frac{1}{\beta^{\gamma-1}} \end{aligned}$$

è possibile riscrivere l'espressione del rendimento del ciclo Otto in funzione unicamente del rapporto di compressione volumetrico  $\beta := \frac{V_1}{V_2}$ ,

$$\eta = 1 - \frac{1}{\beta^{\gamma-1}} .$$

### 14.4.4 Funzionamento di un motore a combustione interna

**todo**

### 14.4.5 Esempio

**todo**

## 14.5 Ciclo Diesel

### 14.5.1 Ciclo Diesel reale

- aspirazione
- compressione adiabatichia
- combustione
- espansione adiabatichia
- scarico

## 14.6 Ciclo Joule-Brayton

**Storia e applicazioni.** Il ciclo Joule-Brayton rappresenta il ciclo termodinamico ideale per il funzionamento a ciclo continuo delle macchine a gas.

Nelle moderne applicazioni, le turbine a gas possono operare

- a ciclo aperto: motori a getto, ad esempio per propulsione aeronautica
- ciclo chiuso: turbine con rigenerazione
- cicli combinati

Entrambe le configurazioni sono realizzate con macchine termiche continue, che sono **sistemi aperti** *todo scrivere la sezione per i sistemi aperti e aggiungere riferimento*

### 14.6.1 Ciclo Joule-Brayton aperto

### 14.6.2 Ciclo Joule-Brayton chiuso

Un modello ideale del ciclo Joule-Brayton è formato da:

- 1 → 2 compressione adiabatica in compressore, tipicamente dinamico assiale - sistema aperto
- 2 → 3 combustione a pressione costante: la combustione avviene in camera di combustione aperta e viene modellata come una trasformazione termodinamica a pressione costante; in prima approssimazione, si può trascurare il flusso di massa del combustibile e la variazione delle proprietà chimico-fisiche del fluido di lavoro; la reazione di combustione produce il calore in ingresso al sistema
- 3 → 4 espansione adiabatica in turbina - sistema aperto
- 4 → 1, raffreddamento a pressione costante

### 14.6.3 Rendimento del ciclo Joule-Brayton

$$\eta = 1 + \frac{\dot{Q}_{41}}{\dot{Q}_{23}} = 1 + \frac{\dot{m} c_P (T_1 - T_4)}{\dot{m} c_P (T_3 - T_2)} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$$

Usando le condizioni, **todo** usare direttamente le espressioni delle adiabatichie ideali ricavate nella sezione delle trasformazioni termodinamiche con gas ideali

$$P_2 = P_3 \quad , \quad P_1 = P_4$$

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

$$P_3 V_3^\gamma = P_4 V_4^\gamma$$

e la legge dei gas ideali,  $PV = mRT$ , assumendo che sia un'equazione di stato adatta a descrivere il fluido di lavoro, per riscrivere l'equazione delle trasformazioni adiabatichie

$$\begin{aligned} P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma &= P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma & \rightarrow & (T_4 - T_1) P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = (T_3 - T_2) P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ P_3^{1-\gamma} T_3^\gamma &= P_4^{1-\gamma} T_4^\gamma & \rightarrow & \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1}{\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \end{aligned}$$

è possibile riscrivere l'espressione del rendimento del ciclo Otto in funzione unicamente del rapporto di compressione

$$\beta := \frac{P_2}{P_1},$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}.$$

### 14.6.4 Esempio

todo

## 14.7 Ciclo Rankine

Il ciclo Rankine rappresenta il ciclo termodinamico ideale per il funzionamento a ciclo continuo delle macchine a vapore.

Il sistema sfrutta il cambio di fase tra liquido e vapore di un fluido di lavoro, di solito acqua, oggi anche ORC

- ciclo aperto nelle applicazioni storiche, come nelle prime locomotive
- ciclo chiuso nelle moderne applicazioni nelle centrali elettriche

Nelle moderne applicazioni, alcune modifiche/miglioramenti:

- con surriscaldamento
- con rigenerazione
- cicli combinati

## 14.8 Problemi

Problema 1. Testo...

**Soluzione.**

Problema 2. Testo...

**Soluzione.**

## CAPITOLO 15

---

### Meccanismi di trasmissione del calore

---



**Parte V**

**Elettromagnetismo**





---

## Introduzione all'elettromagnetismo

---

### 16.1 Breve storia dell'elettromagnetismo

todo ...

#### Applicazioni.

- trasferimento energia:
- trasferimento informazione:
  - studi primordiali di Lesage, 1774
  - telegrafo
  - onde EM
- Antichità: ...
- Primi esperienze e strumenti:
  - elettrizzazione
  - macchine elettrostatiche, bottiglia di Leida
  - ...
- 1747, B.Franklin intuisce la legge di conservazione della carica elettrica, *«not created by the the friction, but collected»*
- 1784, C.A.Coulomb formula la legge di Coulomb usando una bilancia a torsione
- 1800, A.Volta: pila. Conversione di energia chimia in energia elettrica.
  - **todo** principi di funzionamento ed esercizio
- 1806: H.Davy dà origine all'elettrochimica, usando una pila per scomporre sostanze. **todo** *negli anni successivi, conclusioni su natura elettricità prodotta in maniera differente, ed energia*
- Elettromagnetismo:

- 1820, Oersted
- 1820-27, Ampère
- 1831-55, Faraday:
  - \* induzione EM
  - \* ...
- Applicazioni e sviluppi della matematica in fisica, «nascita della fisica matematica»:
  - Poisson
  - 1828, Green *An Essay on the Application on Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*
  - 1884, O.Heaviside riformula le equazioni di Maxwell nella forma attualmente conosciuta, usando gli strumenti del calcolo differenziale
- Strumenti:
  - 1822-37, galvanometri: Schweigger, Weber + Gauss; galvanometro a riflessione?
- Eletticità e termodinamica:
  - 1821, Seeback
  - 1827, Ohm
  - 1834, Peltier
- 1850, Kirchhoff e leggi sui circuiti
- Primi generatori/motori elettrici; circuiti in AC
- **Maxwell**
  - correzione e formalizzazione delle equazioni dell'elettromagnetismo
  - onde EM: velocità di propagazione del campo EM ~ velocità della luce
- Hertz e onde EM
- Elettromagnetismo negli ultimi anni del XIX secolo
- Elettromagnetismo all'inizio del XX secolo:
  - crisi e nuove teorie

## 16.2 Esperienze ed esperimenti

### 16.2.1 Elettrizzazione

...

## 16.2.2 Conservazione della carica

Conservazione della carica, e corrente elettrica

## 16.2.3 Coulomb

Legge di Coulomb

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{r}_{21} ,$$

avendo definito il vettore  $\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ .

- bilancia a torsione
- esercizi
  - bilancia a torsione
  - bilancia lineare
  - pendolo ...

## 16.2.4 Campo elettrico ed energia del campo elettrico

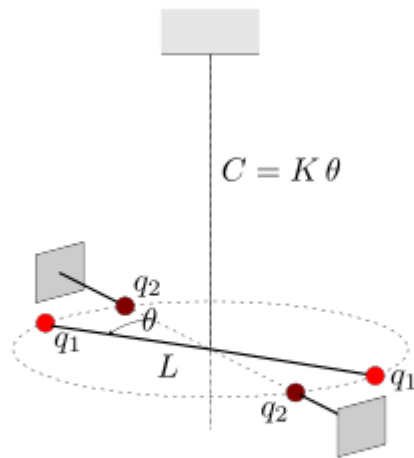
...

## 16.2.5 Pila di Volta

... applicazione delle leggi della termodinamica ...

16.2.6 ...

16.3 Problemi



Problema ... Bilancia a torsione

**Soluzione.**



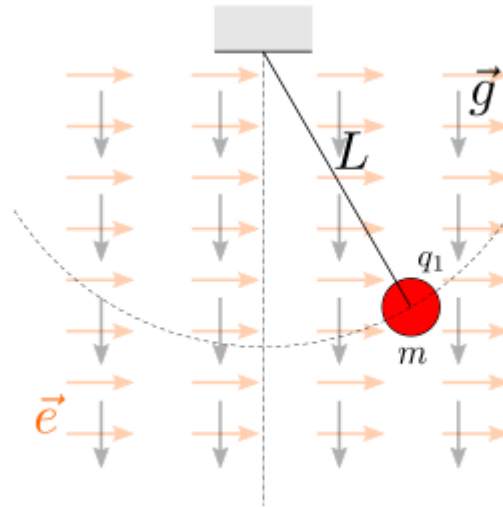
Problema ...

**Soluzione.**



Problema ...

**Soluzione.**



Problema ...

**Soluzione.**

---

Fondamenti di elettromagnetismo

---

In questa sezione vengono ripresi i concetti e le esperienze fondamentali per formulare i **principi** dell'elettromagnetismo:

- principio di conservazione della carica elettrica
- equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico
- forza di Lorentz, agente su cariche elettriche in un campo magnetico

Lo sviluppo della materia include dei cenni sul comportamento dei materiali sottoposti a fenomeni elettromagnetici, riassumibile con le equazioni costitutive del materiale, e alcune applicazioni.

La presentazione degli argomenti segue qualitativamente un'ordine cronologico e di complessità della descrizione dei fenomeni coinvolti.

**Elettrostatica.** Partendo dalla *forza di Coulomb* scambiata tra due cariche puntiformi in quiete nello spazio, viene introdotto il concetto di *campo elettrico* tramite una sua definizione operativa. Il campo elettrico è *conservativo in regime stazionario* ed è quindi possibile introdurre un' *energia potenziale* e un *potenziale elettrico*. Viene descritto la risposta in un campo elettrico di materiali suscettibili alla *polarizzazione*. Vengono riassunte le proprietà del campo elettrico in regime stazionario in termini di *flusso* e *circuitazione*, con quelle che saranno le prime due equazioni di Maxwell: la *legge di Gauss per il campo elettrico* e la *legge di Faraday* in regime stazionario. Infine vengono analizzati modelli ideali di *condensatore*, componente elementare di molti circuiti elettrici.

**Corrente elettrica.** Viene introdotto il concetto di *corrente elettrica*, partendo da una descrizione microscopica del moto di cariche elementari discrete. Viene formulato il *principio di conservazione della carica elettrica*. Infine viene discusso il fenomeno della conduzione elettrica in diversi materiali: viene descritto il modello ideale di *resistenza elettrica (di Ohm)*, componente elementare di molti circuiti elettrici; la conduzione elettrica nei gas permette di discutere dei primi esperimenti sulla natura della materia; l'analisi dei semiconduttori permette di discutere materiali e componenti elettrici fondamentali per l'elettronica contemporanea.

**Magnetismo ed elettromagnetismo stazionario.** Vengono introdotti i fenomeni magnetici. Con le esperienze di Faraday, Oersted e Ampère, viene descritto il legame «monodirezionale» in regime stazionario tra fenomeni elettrici e fenomeni magnetici: la corrente elettrica produce un magnetico, descritto dalla *legge di Biot-Savart*. I risultati dell'esperienza di Faraday permettono la descrizione di versioni rudimentali degli strumenti di misura della corrente e della differenza di potenziale. Le proprietà del campo magnetico vengono riassunte in termini di *flusso* e *circuitazione* con quelle che saranno altre due equazioni di Maxwell: la *legge di Gauss per il campo magnetico* e la *legge di Ampère*. Queste leggi fisiche vengono utilizzate per l'analisi di modelli ideali di *induttore*, componente elementare di molti circuiti elettrici, elettromagnetici

ed elettromeccanici. Viene presentata infine la *correzione di Maxwell* della legge di Ampère con l'aggiunta del termine non-stazionario che la rende compatibile con l'equazione di conservazione della carica elettrica: la versione corretta viene infine applicata al processo di carica di un condensatore.

**Elettromagnetismo.** Con la *legge di induzione di Faraday*, viene introdotto l'accoppiamento inverso a quello descritto nella sezione precedente: un flusso di campo magnetico variabile nel tempo, induce un campo elettrico.

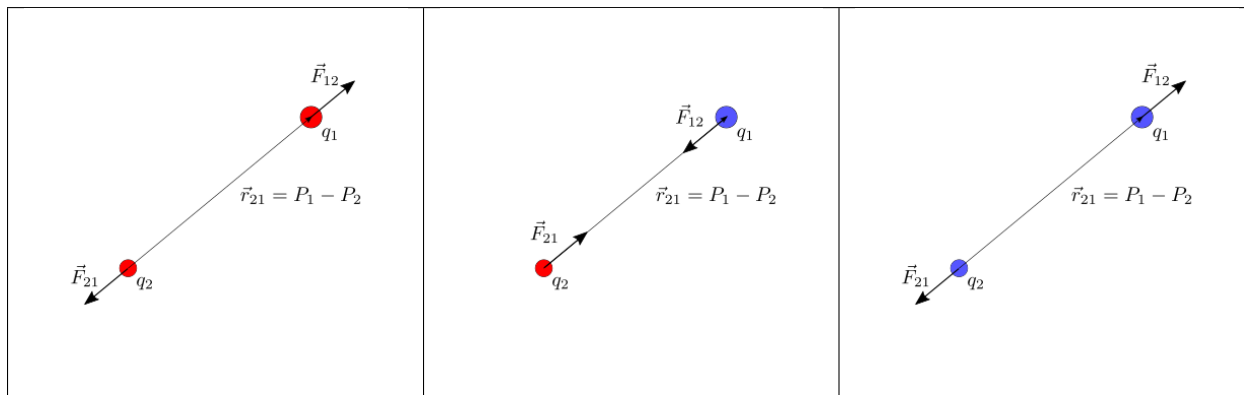
## 17.1 Elettrostatica

### 17.1.1 Legge di Coulomb

Date due cariche elettriche puntiformi  $q_1, q_2$ , nella posizione  $P_1, P_2$  nello spazio, la forza

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{r}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{r}_{21}$$

essendo  $\vec{r}_{21}$  il vettore che congiunge il punto  $P_2$  con il punto  $P_1$ ,  $\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ .



La scelta della definizione della costante di proporzionalità,  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$ , viene fatta per ottenere un'espressione della *legge di Gauss per il campo elettrico* senza fattori numerici.

La costante  $\epsilon$  viene definita costante dielettrica del mezzo. Per cariche elettriche posizionate nello spazio «vuoto» (di materia ma non di proprietà fisiche), nell'espressione della legge di Coulomb compare la **costante dielettrica nel vuoto**,

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}.$$

Materiali isotropi lineari non dispersivi possono essere caratterizzati da una sola costante, la costante dielettrica del materiale. Questa caratteristica del materiale viene di solito definita come multiplo della costante dielettrica del vuoto, tramite la costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ ,

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0.$$

Vale il **principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti**. In presenza di 3 cariche puntiformi,  $q_1, q_2, q_3$ , la forza totale agente sulla carica  $q_1$  è uguale alla somma delle forze dovute a  $q_2$  e  $q_3$ ,

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2}.$$





### Misura della carica elettrica

Un elettrometro è uno strumento di misura della carica elettrica. Una versione rudimentale di un elettrometro è la bilancia di torsione usata da Coulomb nei suoi esperimenti.

Il momento generato dalla forza di Coulomb sulla carica elettrica incognita  $q_1$  dalla carica elettrica  $q_2$  equilibria il momento elastico della bilancia di torsione. Se la struttura ha una equazione costitutiva il momento strutturale è proporzionale alla rotazione,  $M_z = K \theta$ .

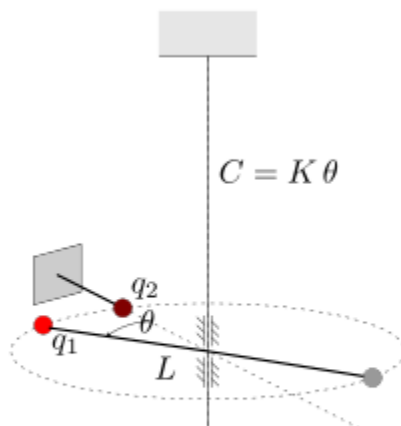
**todo** svolgere conti qui o rimandare a esercizi?

### 17.1.2 Il campo elettrico

Data una distribuzione di cariche nello spazio, è possibile descriverla tramite l'effetto che avrebbe su una carica qualsiasi posta in un punto arbitrario dello spazio, introducendo la definizione di campo elettrico.

Viene data qui una **definizione operativa** del campo elettrico. Data una distribuzione di cariche,  $q_i$ , nei punti dello spazio  $P_i$ , si prende una carica test - di prova - di intensità nota  $q^{test}$ , che può essere posizionata in ogni punto  $P$  dello spazio. E' inoltre possibile misurare la forza  $\vec{F}(P; q^{test})$  agente sulla carica di prova dovuta all'interazione con la distribuzione di cariche in esame,

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{test}(P, q^{test}) &= \sum_i \vec{F}_{test,i}(P) = \\
 &= \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_i q^{test}}{|\vec{r}_{i,test,i}|^2} \hat{r}_{i,test} = \\
 &= q^{test} \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_i}{|\vec{r}_{i,test,i}|^2} \hat{r}_{i,test} = \\
 &= q^{test} \vec{e}(P; q_i, P_i) .
 \end{aligned}$$



Poichè la forza sulla carica di prova è proporzionale alla sua carica elettrica, è possibile descrivere l'effetto della distribuzione nota di cariche nello spazio con la funzione  $\vec{e}(P; q_i, P_i)$ . Questa funzione viene definita **campo elettrico** della distribuzione delle cariche.

Viceversa, noto il campo elettrico di una distribuzione di cariche, la forza agente su una carica elettrica  $q$  posta nel punto  $P$  dello spazio è

$$\vec{F} = q \vec{e}(P) .$$

- **todo** Poichè il PSCE vale per la forza, il **PSCE** vale per il campo elettrico

### Campo conservativo

Come mostrato (**todo** ah sì? fare riferimenti qui?) per il campo gravitazionale, anche il campo elettrostatico è un campo conservativo.

Il lavoro fatto dal campo su una carica che descrive una traiettoria  $\gamma$ , con estremi  $A, B$  è uguale a

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma} \vec{F}(P) \cdot d\vec{r} = - \int_{\gamma} \nabla U(P) \cdot d\vec{r} = -\Delta U = U(A) - U(B) \\ &= q \int_{\gamma} \vec{e}(P) \cdot d\vec{r} = -q \int_{\gamma} \nabla V(P) \cdot d\vec{r} = -q \Delta V = q (V(A) - V(B)) \end{aligned}$$

avendo definito l'**energia potenziale**  $U(P)$  del sistema di cariche che produce il campo elettrico  $\vec{e}(P)$  e il **potenziale elettrico**  $V(P)$  come l'energia potenziale per unità di carica  $q$ . Sia l'energia potenziale sia il potenziale sono definiti a meno di una costante additiva.

Il potenziale generato da una carica  $q_i$  posizionata punto «potenziante»  $P_i$  nel punto «potenziato»  $P$

$$V_i(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_i}{|\vec{r}_i|} ,$$

con  $\vec{r}_i = P - P_i$ . Poichè il PSCE vale per la forza e il campo elettrico, il **PSCE** vale per il potenziale, e quindi il potenziale elettrico generato da un sistema di cariche è la somma del potenziale elettrico generato dalle singole cariche,

$$V_i(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}_i|}$$

### Energia potenziale di una distribuzione di cariche

L'energia potenziale di un sistema di cariche è uguale al lavoro (delle forze esterne = - lavoro forza elettrica) fatto per costruire tale distribuzione. Poiché in meccanica classica l'energia è definita a meno di una costante additiva arbitraria, si può considerare la condizione di riferimento con le cariche poste all'«infinito» o, meglio, infinitamente distanti una dalle altre.

Per un sistema di cariche puntiformi, l'energia potenziale del sistema è uguale alla somma dell'energia potenziale tra le singole coppie di cariche

$$E^{pot} = \sum_{\{i,j\}, i \neq j} V_{ij} = \sum_{\{i,j\}, i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_i q_j}{r_{ij}},$$

senza ripetere la sommatoria sulle coppie con gli elementi invertiti.

Seguono due dimostrazioni di questa formula, ottenute costruendo il sistema di cariche dall'infinito in due maniere diverse.

**todo**

### Posizionando una carica alla volta

$$\begin{aligned} L_1^{ext} &= 0 \\ L_2^{ext} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \\ L_3^{ext} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \\ &\dots \\ L_n^{ext} &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_n}{r_{1n}} \\ E^{pot} = L^{ext} &= \sum_i L_i^{ext} = \sum_{\{i,j\}, i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \end{aligned}$$

### Posizionando le cariche contemporaneamente

Posizionando tutte le cariche contemporaneamente con una «scalatura» delle distanze,  $\vec{r}_i(\alpha) = \frac{\vec{r}_i}{\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ , il lavoro delle forze elettriche è

$$\begin{aligned} dL_i(\alpha) &= \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}(\alpha) \cdot d\vec{r}_i(\alpha) = \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\left| \frac{\vec{r}_i}{\alpha} - \frac{\vec{r}_j}{\alpha} \right|^2} \hat{r}_{ji} \cdot \left( -\frac{\vec{r}_i}{\alpha^2} \right) d\alpha = \\ &= - \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon} \frac{\hat{r}_{ji} \cdot \vec{r}_i}{\left| \vec{r}_i - \vec{r}_j \right|^2} d\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dL(\alpha) &= \sum_i dL_i = \\
 &= - \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon} \frac{\hat{r}_{ji} \cdot \vec{r}_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} d\alpha = \\
 &= - \sum_{\{i,j\}, i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon} \frac{\hat{r}_{ji} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} d\alpha = \\
 &= - \sum_{\{i,j\}, i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_{ij}} d\alpha,
 \end{aligned}$$

e il lavoro diventa

$$L = \int_{\alpha=0}^1 dL(\alpha) = - \int_{\alpha=0}^1 \sum_{\{i,j\}, i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_{ij}} d\alpha = - \sum_{\{i,j\}, i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_{ij}}.$$

### 17.1.3 Campo elettrico nei materiali

- polarizzazione...

Per materiali lineari isotropi,

$$\vec{d} := \epsilon \vec{e} = \epsilon_0 \vec{e} + \vec{p}$$

**todo** polarizzazione, cariche libere e cariche «vincolate»

### 17.1.4 Verso le equazioni di Maxwell

#### Legge di Gauss per il flusso del campo elettrico

$$\Phi_{\partial V}(\vec{d}) = Q_V$$

#### Dimostrazione della legge di Gauss

**Dimostrazione per una carica puntiforme e una superficie sferica.** Il calcolo diretto del flusso del campo elettrico generato da una carica puntiforme attraverso una superficie sferica di raggio  $r$  centrata nella carica

$$\Phi_{S_{sphere}}(\vec{d}) = \oint_{S_{sphere}} \vec{d} \cdot \hat{n} = \oint_{S_{sphere}} \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{r}}_{=1}.$$

L'integranda è costante, essendo  $r$  costante sulla superficie sferica, e quindi si riduce al prodotto della funzione integranda per l'estensione del dominio di integrazione, qui la superficie esterna della sfera. Ricordando che la superficie di una superficie sferica di raggio  $r$  è  $S = 4\pi r^2$ , si ottiene l'espressione della legge di Gauss per il campo elettrico di una carica puntiforme attraverso una superficie sferica,

$$\Phi_{S_{sphere}}(\vec{d}) = 4\pi r^2 \frac{1}{4\pi r^2} q = q.$$

**todo** obs: andamento del campo come  $r^{-2}$  implica andamento del flusso costante attraverso superfici che sottengono lo stesso **angolo solido**

**todo** ... altra osservazione che ora non ricordo...

**Dimostrazione per una carica puntiforme e per una superficie arbitraria.** Usando l'osservazione sull'andamento del campo, e la definizione di angolo solido

$$\oint_S \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r} \cdot \hat{n} dS = \oint_\Omega \frac{q}{4\pi} d\Omega = q$$

**Dimostrazione per una distribuzione di carica qualsiasi e superficie arbitraria.** Avendo dimostrato la legge di Gauss per una carica puntiforme attraverso una superficie arbitraria, la legge di Gauss per il campo  $\vec{d}$  generato da una distribuzione di carica qualsiasi segue immediatamente, ricordando che vale il PSCE

$$\begin{aligned}\Phi_{\partial V}(\vec{d}_i) &= q_i \\ \sum_i \Phi_{\partial V}(\vec{d}_i) &= \Phi_{\partial V} \left( \sum_i \vec{d}_i \right) = \sum_i q_i \\ \Phi_{\partial V}(\vec{d}) &= Q_V\end{aligned}$$

### Legge di Faraday, in elettrostatica

- La legge di Faraday in elettrostatica è una diretta conseguenza della conservatività del campo elettrico

$$\Gamma_\ell(\vec{e}) = \oint_\ell \vec{e} \cdot \hat{t} = 0.$$

- Questa equazione è valida **solo** in un regime elettrostatico: la forma generale dell'equazione di Faraday prevede un termine dipendente dal tempo, che è identicamente nullo nel regime elettrostatico.

### Dimostrazione della legge di Faraday

**Dimostrazione per una carica puntiforme e un percorso circolare.** Il calcolo diretto della circuitazione del campo elettrico generato da una carica puntiforme lungo un percorso circolare di raggio  $r$  centrato nella carica

$$\Gamma_{\ell^{circle}}(\vec{e}) = \oint_{\ell^{circle}} \vec{e} \cdot \hat{t} = \oint_{S^{sphere}} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{t}}_{=0} = 0,$$

poiché il versore tangente al percorso circolare è ortogonale al campo elettrico, diretto in direzione radiale.

**Dimostrazione per una carica puntiforme e un percorso arbitrario.**

**Dimostrazione per una distribuzione di carica qualsiasi e percorso arbitrario.** Avendo dimostrato la legge di Faraday nel caso stazionario per una carica puntiforme lungo un percorso arbitrario, la legge di Faraday in regime stazionario per il  $\vec{e}$  generato da una distribuzione di carica qualsiasi segue immediatamente, ricordando che vale il PSCE

$$\begin{aligned}\Gamma_{\partial S}(\vec{e}_i) &= 0 \\ \sum_i \Gamma_{\partial S}(\vec{e}_i) &= \Gamma_{\partial S} \left( \sum_i \vec{e}_i \right) = 0 \\ \Gamma_{\partial S}(\vec{e}) &= 0\end{aligned}$$

### 17.1.5 Moto di una carica in un campo elettrico

Il moto di una corpo puntiforme di massa  $m$  e carica elettrica  $q$  in una regione dello spazio nel quale c'è un campo elettrico  $\vec{e}(\vec{r})$  è soggetto a una forza esterna  $\vec{F}^{el} = q \vec{e}(P)$ . L'equazione del moto diventa quindi

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{R}^{ext} = q \vec{e}(P) + \vec{F}^{non \vec{e}}$$

- **todo** esempi

### 17.1.6 Condensatore

#### Condensatore infinito piano

$$e = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$Q = \sigma A$$

$$\Delta V = \int_{\ell} \vec{e} \cdot d\vec{r} = \ell e$$

$$Q = \sigma A = \varepsilon e A = \frac{\varepsilon \ell}{A} \Delta V = C \Delta V ,$$

$C$  capacità,  $C = \frac{\varepsilon A}{\ell}$  capacità per un condensatore piano.

#### Condensatore cilindrico

**todo**

#### Condensatore sferico

Tra le sfere del condensatore, il campo elettrico è ha direzione radiale e valore assoluto  $\propto r^{-2}$ ,

$$\vec{e}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r^2} \hat{r} .$$

dove la carica totale della superficie sferica con distribuzione di carica uniforme è data dal prodotto della densità superficiale di carica e la superficie,  $Q = \sigma S_1 = \sigma 4\pi R_1^2$ . La differenza di potenziale tra le due armature è quindi

$$\Delta V = - \int_{\ell} \vec{e}(r) \cdot \hat{r} = \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r} \Big|_{R_1}^{R_2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) , Q .$$

La formula precedente e la definizione di capacità,  $Q = C, \Delta V$ , consente di determinare la capacità di un condensatore sferico ideale,

$$C = 4\pi\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} .$$

## 17.2 Corrente elettrica

- corrente elettrica:
  - descrizione microscopica: materiale elettricamente neutro, con  $e^-$  liberi di conduzione
  - def come flusso di carica: dalla descrizione micro alla descrizione macroscopica, media, («fenomenologica»?)

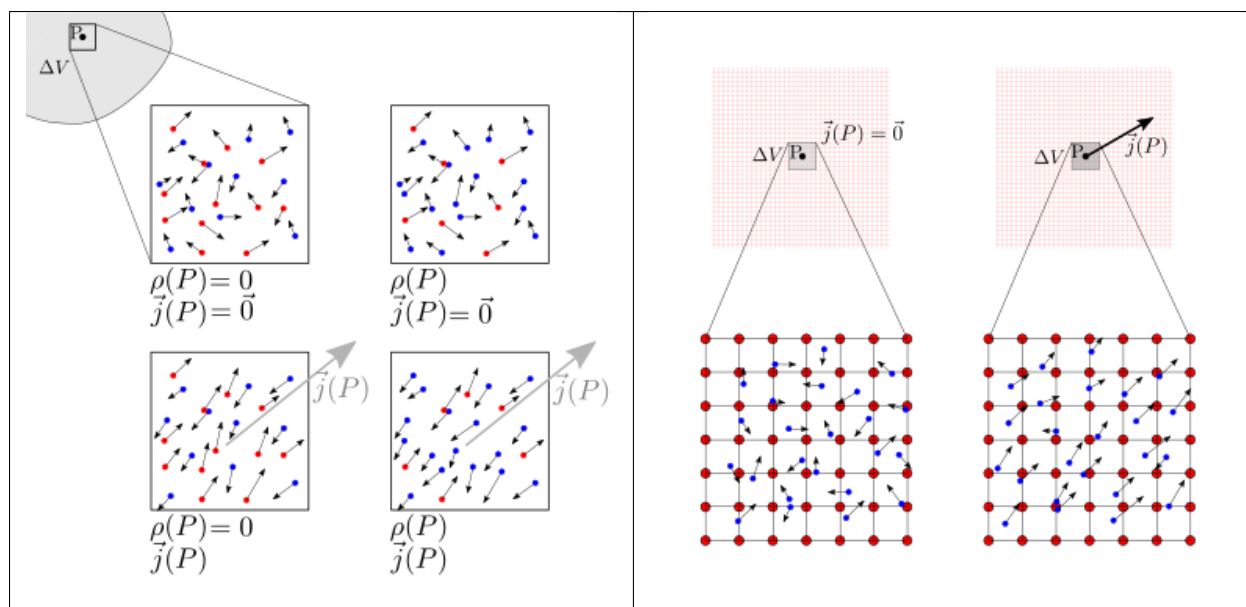
Localmente, è possibile definire una **densità «macroscopica» di corrente elettrica** come la media pesata delle velocità delle cariche,  $\vec{v}$ .

$$\lim_{\Delta V(P) \rightarrow 0} \frac{\sum_{k \in \Delta V(P)} q_k}{\Delta V} = \rho(P)$$

$$\lim_{\Delta V(P) \rightarrow 0} \frac{\sum_{k \in \Delta V(P)} q_k \vec{v}_k}{\Delta V_P} = \vec{j}(P)$$

La **corrente elettrica** attraverso una superficie  $S$  viene definita come il flusso di carica elettrica attraverso la superficie  $S$ ,

$$i = I_S = \Phi_S(\vec{j}) .$$



**Oss. Corrente elettrica in materiali neutri:** è possibile avere corrente elettrica anche in materiali elettricamente neutri, anche localmente. Ad esempio, nell'ipotesi di avere due sostanze diverse con carica  $\rho^+$ ,  $\rho^-$  e velocità media delle due sostanze  $\vec{v}^+$ ,  $\vec{v}^-$ , la corrente densità di corrente elettrica è

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \rho^+ \vec{v}^+ + \rho^- \vec{v}^- .$$

Nel caso in cui il materiale sia neutro, la densità di carica elettrica è nulla,  $0 = \rho = \rho^+ + \rho^-$  e quindi  $\rho^+ = -\rho^-$  e la densità di corrente elettrica può essere scritta come  $\vec{j} = \rho^- (\vec{v}^- - \vec{v}^+)$ .

**Oss. Corrente elettrica in solidi conduttori neutri.** I solidi hanno una struttura microscopica con gli atomi disposti in un reticolo, senza libertà di movimento. Nei solidi conduttori, gli elettroni «più esterni» della struttura atomica non sono localizzati attorno al singolo atomo, ma sono «condivisi» e libersi di muoversi tra tutti gli atomi del solido: queste cariche elettriche libere di muoversi permettono una buona conduzione di corrente elettrica, e vengono chiamati **elettroni di conduzione**

Senza «forzanti esterne», come ad esempio campi elettrici, il moto degli elettroni di conduzione non ha direzioni privilegiate: poiché il moto delle cariche libere è casuale senza direzioni privilegiate, la velocità media è nulla (la velocità è una grandezza vettoriale!) e la corrente elettrica è nulla. Se le velocità delle cariche libere ha una direzione preferenziale, la loro velocità media,  $\vec{v}^-$ , e quindi la corrente elettrica, non è nulla. Assumendo che le cariche elettriche positive abbiano velocità media nulla rispetto all'osservatore  $\vec{v}^+ = \vec{0}$ , la densità di corrente elettrica diventa  $\vec{j} = \rho^- \vec{v}^-$ .

## 17.2.1 Strumenti: misura e generazione

todo

- strumenti per misurare corrente e tensione: amperometro e voltmetro
- generatori di «spinta»: generatori di tensione
- resistenza al moto: la resistenza elettrica

## 17.2.2 Legge di conservazione della carica elettrica

Il principio di conservazione della carica elettrica

$$\dot{Q}_V = -\Phi_{\partial V}(\vec{j}) = -I_{\partial V}$$

- **todo** esempi/esercizi con misura della corrente e della carica elettrica, con strumenti di misura (misura o modello di strumento, come bilance)

## 17.2.3 Conduzione

### Conduzione nei solidi «di Ohm»

In un materiale di Ohm, il campo elettrico  $\vec{e}$  è proporzionale alla densità di corrente elettrica  $\vec{j}$ . Per un solido isotropo, senza direzioni preferenziali, la **forma locale - differenziale - della legge di Ohm** è **Legge di Ohm** in forma locale:

$$\vec{j}(P) = \sigma(P) \vec{e}(P) \quad , \quad \vec{e}(P) = \rho_R(P) \vec{j}(P)$$

essendo la resistività  $\rho_R$ , e la conduttanza  $\sigma = \frac{1}{\rho_R}$  le costanti di proporzionalità, caratteristiche del materiale.

In un cavo conduttore, nell'ipotesi di grandezze uniformi sulla sezione - o riferendosi alle grandezze medie -, si può integrare la legge in forma locale su un tratto di cavo elementare, di lunghezza  $d\ell$ ,

$$\underbrace{e}_{-dv} \underbrace{d\ell}_{A} = \rho_R \underbrace{j A}_{i} d\ell$$

$$\rightarrow dv = -\frac{\rho_R d\ell}{A} i = -dR i ,$$

avendo introdotto la differenza di potenziale elementare  $dv$  tra gli estremi del tratto di cavo elementare, proporzionale alla corrente che transita nel cavo tramite la **resistenza elettrica** elementare  $dR$ . Queste relazioni che caratterizzano i materiali di Ohm sono le due leggi di Ohm:

- **Prima legge di Ohm.** La differenza di potenziale agli estremi di un cavo di lunghezza elementare è proporzionale alla corrente, tramite la resistenza elettrica elementare,

$$dv = -dR i ,$$

- **Seconda legge di Ohm.** La resistenza elettrica di un cavo è direttamente proporzionale alla resistività del materiale, alla lunghezza del cavo, e inversamente proporzionale alla sezione del cavo,

$$dR = \frac{\rho_R d\ell}{A} .$$



Conduzione nei gas

Conduzione nei vuoto?

Conduzione nei semiconduttori

cenni all'elettronica: diodi, transistor, ...

## 17.3 Magnetismo ed elettromagnetismo in regime stazionario

### 17.3.1 Esperienze elementari su campo magnetico

- cos'è? come costruire un campo magnetico? o avere multipli di un campo magnetico?

### 17.3.2 Esperienza di Faraday

$$d\vec{F} = -i\vec{b} \times d\vec{\ell}.$$

**todo** ha senso associarla a Faraday? Nessuno la conosceva prima? Galvani, Volta,... come misuravano la corrente elettrica?

#### Il galvanometro

Il galvanometro è uno strumento utilizzato per la misura della corrente elettrica. Sfrutta l'azione meccanica osservata nell'esperienza di Faraday

Il momento meccanico generato dalla corrente nel cavo elettrico equilibria un momento generato da componenti meccanici «noti», realizzabili e tarabili con la precisione richiesta.

**todo** Serve questo riferimento qui?

- azioni elettro-meccaniche:..., cenni al motore elettrico in corrente continua? serve accoppiamento  $\vec{e} \leftrightarrow \vec{b}$  di Faraday

### 17.3.3 Esperienze di Oersted e Ampere

- interazione tra corrente elettrica e campo magnetico, in regime stazionario:
  - esperienze di Oersted e Ampère:

#### Legge di Ampère

Forza (**todo** per unità di lunghezza; usare notazione vettoriale per indicare la direzione della forza) scambiata tra due cavi percorsi da corrente elettrica

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{d}$$

## Legge di Biot-Savart

Confrontando la legge di Ampère con l'esperienza di Faraday, è possibile ricavare l'espressione del campo magnetico prodotto da un cavo infinito percorso da corrente elettrica,

$$b = \frac{\mu}{2\pi} \frac{i}{d}$$

todo

- campo magnetico prodotto da un cavo rettilineo infinito
- campo magnetico prodotto da un solenoide: lineare infinito, toroidale

## Formula generale

Contributo elementare

$$d\vec{b}(\vec{r}_0) = -\frac{\mu}{4\pi} i(\vec{r}) \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \times d\vec{\ell}(\vec{r})$$

$$\vec{b}(\vec{r}_0) = -\frac{\mu}{4\pi} \int_{\gamma(\vec{r})} i(\vec{r}) \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \times d\vec{\ell}(\vec{r})$$

## Filo rettilineo infinito

$$z = R \tan \theta$$

$$dz = R \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$r^2 = R^2 + z^2 = R^2 \left( 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) = R^2 \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} \vec{b}(\vec{r}_0) &= -\frac{\mu}{4\pi} i \int_{z=-\infty}^{\infty} \hat{\theta} \frac{r}{r^2} \sin \theta dz = \\ &= -\frac{\mu}{4\pi} i \hat{\theta} \int_{\theta=\pi}^0 \frac{\cos^2 \theta}{R^2} \sin \theta R \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \\ &= \frac{\mu}{4\pi} i \hat{\theta} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{R} \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{\mu i}{2\pi R} \hat{\theta}. \end{aligned}$$

## Esempi: spira e solenoide

### Spira circolare

Sfruttando la simmetria cilindrica del problema, è possibile calcolare il campo magnetico \$\$ sull'asse di una spira circolare

$$\cos \phi = \frac{R}{r}, \quad r^2 = R^2 + z^2$$

$$\begin{aligned}
\vec{b}(\theta) &= 2\pi R \left( -\frac{\mu}{4\pi} i \frac{\vec{r}}{r^3} \times \hat{\theta} \cdot \hat{z} \right) \hat{z} = \\
&= \frac{\mu i R}{2 r^2} \cos \phi \hat{z} = \\
&= \frac{\mu i R^2}{2 r^3} \hat{z} = \\
&= \frac{\mu i R^2}{2 (R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{\mu i}{2 R} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \hat{z}
\end{aligned}$$

### Solenoide rettilineo

Applicando la legge di Ampère,

$$N i = \Gamma_{\gamma}(\vec{h}) = \ell h = \ell \frac{b}{\mu}$$

$$b = \mu \frac{N}{\ell} i$$

Il flusso del campo magnetico (uniforme) vale quindi

$$\phi = b A = \mu \frac{N A}{\ell} i$$

### Solenoide toroidale

Applicando la legge di Ampère,

$$N i = \Gamma_{\gamma}(\vec{h}) = r 2 \pi h = r 2 \pi \frac{b}{\mu}$$

$$b(r) = \mu \frac{N}{2 \pi r} i$$

Il flusso del campo magnetico attraverso le sezioni del toro vale

$$\Phi(\vec{b}) = \oint_S b(r) dS = \mu \frac{N i}{2 \pi} \int_{\rho=0}^a \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{1}{R - \rho \cos \alpha} \rho d\rho d\alpha =$$

todo

## 17.3.4 Verso le equazioni di Maxwell

### Legge di Gauss per il flusso del campo magnetico

$$\Phi_{\partial V}(\vec{b}) = 0$$

todo interpretazione: inesistenza del monopol magnetico? linee di campo chiuse?

## Legge di Ampère

$$\oint_{\ell_S} \vec{h} \cdot \hat{t} = \Gamma_{\ell_S}(\vec{h}) = \Phi_S(\vec{j}) = i_S ,$$

essendo  $\ell_S = \partial S$  il contorno - chiuso - della superficie  $S$ .

- Questa equazione è valida **solo** in un regime elettrostatico: la forma generale dell'equazione di Ampère prevede un termine dipendente dal tempo, che è identicamente nullo nel regime elettrostatico.
- Senza questo termine, l'equazione non sarebbe consistente con l'equazione del bilancio della carica elettrica **todo** (aggiungere riferimento): la correzione di questa inconsistenza da parte di Maxwell è stata l'ultima azione, fondamentale, per ottenere un sistema di equazioni che governano i fenomeni elettromagnetici; la stessa modifica permette anche di riconoscere che i fenomeni EM sono fenomeni ondulatori; il calcolo della misura della velocità di propogazione delle onde EM, confrontata con le misure disponibili della velocità della luce, permisero di riconoscere la luce come fenomeno EM

Per dimostrare l'incongruenza, è sufficiente applicare la legge di Ampère a una superficie che è il contorno di un volume chiuso, e che quindi ha contorno nullo,

$$S = \partial V \quad , \quad \partial S = \ell_S = \emptyset$$

In questo caso, la legge di Ampère diventa

$$0 = i_{\partial V} ,$$

mentre le leggi di conservazione della carica elettrica e la legge di Gauss per il campo elettrico

$$\begin{aligned} \dot{Q}_V &= -i_{\partial V} \\ \Phi_{\partial V}(\vec{d}) &= Q_V \end{aligned}$$

implicano

$$i_{\partial V} = -\dot{Q}_V = -\dot{\Phi}_{\partial V}(\vec{d}) .$$

La correzione di Maxwell non è altro che l'aggiunta del termine  $\dot{\Phi}_{\partial V}(\vec{d})$  all'equazione di Ampère per renderla compatibile con le altre equazioni dell'elettromagnetismo. Con questa modifica, l'**equazione di Ampère-Maxwell** diventa

$$\Gamma_{\partial S}(\vec{h}) - \dot{\Phi}_S(\vec{d}) = i_S$$

### 17.3.5 Modelli microscopici del magnetismo

### 17.3.6 Moto di una carica elettrica in un campo elettromagnetico

Forza di Lorentz

$$\vec{F}^{Lorentz} = q \left( \vec{e}(P) + \vec{b}(P) \times \vec{v} \right)$$

Moto di una carica elettrica in un campo elettromagnetico, nell'ipotesi di effetto nullo su di essa del proprio campo elettrico

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{R}^{ext} = q \left( \vec{e}(P) + \vec{b}(P) \times \dot{\vec{r}} \right) + \vec{F}^{non EM}$$

- **todo** esempi

## 17.4 Induzione ed elettromagnetismo

### 17.4.1 Legge di Faraday per l'induzione elettromagnetica

- legge di Faraday: corrente indotta
- corrente alternata:
  - principi e applicazioni:
    - \* trasformatore
    - \* generatori e motori elettrici
    - \* generazione/trasporto/trasformazione/consumo

### 17.4.2 Correzione di Maxwell dell'equazione di Ampère

Qui o nella sezione di magnetismo ed elettromagnetismo statico?

- correzione di Maxwell della legge di Ampère, per renderla consistente con l'equazione di bilancio della carica elettrica

### 17.4.3 Equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo

- le equazioni di Maxwell: le equazioni complete dell'elettromagnetismo



---

## Fondamenti di elettrotecnica

---

L'applicazione dei fenomeni elettromagnetici può essere distinta qualitativamente in due grandi discipline:

### Elettrotecnica

**Regime di applicazione:** correnti intense, bassa frequenza

**Applicazioni:** distribuzione di energia elettrica, conversione tra energia elettrica e meccanica. Esempi:

- rete di trasmissione nazionale o di distribuzione locale di energia elettrica
- circuito elettrico di casa
- generatori di energia elettrica nelle centrali elettriche
- elettrodomestici
- ...

### Elettronica

**Regimi di applicazione:** correnti deboli, alta frequenza

**Applicazioni:** trasmissione dei segnali elettrici

- trasmissione onde EM
- elettronica di consumo: smartphone, computer, navigatori, radio, TV, Wi-Fi,...
- schede di controllo di elettrodomestici...

A queste discipline, si aggiunge l'**ottica** **todo**...non sempre è possibile fare una distinzione netta tra le discipline...alimentazione e potenza, controllo,...

Il regime fisico di applicazione dell'elettrotecnica consente di semplificare le equazioni che governano il problema elettromagnetico usando un'**approssimazione circuitale**.

## 18.1 Circuiti elettrici

### 18.1.1 Approssimazione circuitale - leggi di Kirchhoff

#### 18.1.2 Componenti discreti

##### Resistenza elettrica

La legge costitutiva della resistenza elettrica è

$$v = Ri$$

##### Condensatore

La legge costitutiva di un condensatore è

$$i = C\dot{v}$$

##### Induttore

La legge costitutiva di un induttore è

$$v = L\dot{i}$$

##### Generatore di tensione

$$v = e$$

##### Generatore di corrente

$$i = a$$

### 18.1.3 Regimi di funzionamento

#### Regime stazionario

#### Transitori

#### Regime periodico

#### Sistemi trifase

Vantaggi:



- funzionamento generatori ed utilizzatori naturale
- trasformazione in AC naturale
- trasmissione efficiente
- dalle leggi fisiche alle leggi di Kirchhoff, ipotesi (validità e non-validità dell'approccio circuitale)
- componenti:
  - resistenze
  - condensatori
  - induttori
  - generatori
- regimi di funzionamento: in DC, (trascurando gli effetti EM: no campi magnetici esterni, *ogni circuito è una spira...*), e in AC
  - stazionario
    - \* bilancio di energia: «generatori» di energia elettrica, «perdite» nelle resistenze
      - approfondimenti:
      - pile Collegamento ad altre parti: termodinamica? chimica?
  - transitorio:
    - \* esempio: carica/scarica condensatore
  - armonico, AC:
    - \* ...

## 18.2 Circuiti magnetici

### 18.2.1 Approssimazione circuitale - leggi di Kirchhoff

- dalle leggi fisiche alle leggi di Kirchhoff per i circuiti magnetici, ipotesi (validità e non-validità dell'approccio circuitale)

### 18.2.2 Trasformatore

- esempi:
  - trasformatori ideali

## **18.3 Sistemi elettromeccanici e macchine elettriche**

### **18.3.1 Motori e generatori elettrici**

Esempio elementare

Motori elettrici in DC

Motori elettrici in AC

- sincrono
- asincrono

### **18.3.2 Serratura magnetica**

---

## Onde elettromagnetiche

---

Le equazioni di Maxwell prevedono che, sotto opportune condizioni, il campo elettromagnetico possa propagarsi nello spazio come un fenomeno ondulatorio

- Dalle equazioni di Maxwell alle equazioni delle onde **todo** è possibile arrivarci senza passare dalle equazioni in forma differenziale? Magari con qualche analogia meccanica governata dalle equazioni delle onde. Se sì, in maniera sufficiente formale, figata
- Esperimenti di Hertz:
  - onde elettromagnetiche:
    - \* esperimento onde EM
    - \* **risonanza**, tipica dei fenomeni ondulatori
  - esperimento fallimentare su raggi catodici; con lo stesso esperimento, Thompson dimostra l'esistenza dell'elettrone
  - effetto fotoelettrico...
  - luce come onda EM: la velocità di propagazione del campo EM prevista dalle equazioni di Maxwell è vicina alle misure della velocità della luce disponibili in quegli anni. E' un caso?



## **Parte VI**

# **Fisica moderna**



### 20.1 Struttura del capitolo

#### 20.1.1 Domande

- Struttura della materia
- Natura della luce
- Interazione materia-luce
- Relatività di Einstein

#### 20.1.2 Macro-argomenti

##### Materia e luce

##### Indagine sulla struttura della materia, teoria atomistica

- particelle elementari, atomiche, e loro combinazione:
  - reazioni chimiche
  - teoria cinetica dei gas, meccanica statistica di Boltzmann
- instabilità atomi: radioattività
- particelle sub-atomiche,... e livelli di dettaglio sempre maggiori

##### Natura della luce, onda + particella

##### Teoria quantistica della materia

- de Broglie (1924), **onda + particella**; poi dimostrata con la diffrazione dell'  $e^-$  da Thomson (1927)
- prime teorie meccaniche per l'atomo:

- meccanica delle matrici: Heisenberg, Born, Jordan (1925); meccanica ondulatoria: Schrodinger (1926)
- fondamenti della QM:
  - equivalenza delle due teorie quantistiche (1926-27) e teoria quantistica relativistica
  - interpretazioni della QM (Copenhagen)
- ulteriori dettagli sulla struttura atomica e della materia:
  - spin, e principio di esclusione di Pauli
  - sistemi di più particelle uguali, verso la *meccanica quantistica statistica* e le *teorie di campo quantistiche*
- antimateria

### Relatività di Einstein

- nuovi principi fisici dai quali sviluppare le teorie: velocità della luce  $c$  costante, invarianza
- relatività ristretta: teoria che mette consistente della meccanica e dell'elettromagnetismo, in assenza di gravità
- relatività generale: teoria della gravitazione che rinuncia all'azione a distanza

### 20.1.3 Esperienze

- **Chimica**
  - ...moltissime esperienze suggeriscono la validità di una teoria atomica...
- **Conduttività in gas rarefatti**
  - (1895) Rontgen scopre i raggi X
- **Effetto fotoelettrico** da H.Hertz (1887) a A.Einstein (1905)
- **Radioattività**
  - (1896-1898) A.H.Becquerel e i coniugi Curie scoprono la radioattività di U, Ra, Po;
  - (1899) E.Rutherford scopre e definisce la radiazione/decadimento  $\alpha$  e  $\beta$  dell'U
- **Struttura della materia e interazione con la luce**, con spettroscopia e scattering

### 20.1.4 Tecniche di misura

- **Spettroscopia**
  - XVII secolo: scomposizione con **prisma** della luce solare e della luce proveniente da altre sorgenti
  - XVIII secolo: associazione dello spettro della luce emessa con i componenti chimici coinvolti nelle reazioni, es. *saggio alla fiamma*
  - Prima metà del XIX secolo:
    - \* (1815) Fraunhofer sviluppa i primi **reticoli di diffrazione**, seguendo la teoria ondulatoria della luce di Young, Arago e Fresnel e sfruttando l'interferenza del comportamento ondulatorio della luce; miglioramento della risoluzione spettrale; strumenti di misura «universali»
    - \* spettrografia della luce solare (bande di Fraunhofer,...) e primi studi sistematici di saggi alla fiamma
    - \* (1835) Wheatstone studia gli spettri da scintille e archi elettrici



– Seconda metà del XIX secolo:

- \* (1849) Foucault dimostra la coincidenza delle linee di emissione e di assorbimento di fenomeni che coinvolgono la stessa sostanza
- \* (1853-55) Angstrom, ignorando il lavoro di Foucault, arriva alle stesse conclusioni nel suo lavoro sui gas incandescenti; primi lavori sistematici sugli spettri di emissione e assorbimento di metalli e gas, e composti chimici (Angstrom, Alter, Bunsen, Kirchhoff); si dimostra che la spettroscopia può essere usata per l'analisi della composizione chimica delle sostanze; Bunsen e Kirchhoff riconoscono molti elementi chimici, prima sconosciuti
- \* Kirchhoff formula le leggi della spettroscopia, riconoscendo le condizioni per l'emissione di uno spettro continuo o di uno spettro discreto
- \* (1860) i coniugi Huggins usano la spettrografia per studiare la composizione delle stelle, e (1868) l'effetto Doppler per calcolare la velocità di Sirio **todo come?**
- \* ...
- \* (1895) Rontgen scopre i raggi X
- \* (1896) Becquerel scopre la radioattività dell'U
- \* (1896) Zeeman scopre che l'effetto Zeeman: le linee spettrali si dividono in più linee quando la sostanza è soggetta a un campo magnetico; nel 1913 Stark e Lo Surdo scoprono un effetto analogo con l'applicazione di un campo elettrico
- \* ...

• **Scattering**



## CAPITOLO 21

---

### Introduzione alla fisica del XX secolo

---

**todo**



Nuclei atomici instabili decadono trasmutandosi in nuclei con energia inferiore, tramite emissione di radiazioni ionizzanti. Questi processi avvengono in accordo con i principi di conservazione di massa-energia, quantità di moto e momento angolare. Le possono essere composte da particelle subatomiche, ioni, o radiazione elettromagnetica **todo** *classificazione di Rutherford (1899)  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$*

## 22.1 Storia

### 22.1.1 Raggi X

- 1895, W.C.Rontgen scopre i raggi X
  - 1875, studi di Crookes sulla conduttività dei gas a bassa pressione, tramite ionizzazione quando soggetti ad alta tensione DC, 1 – 100 kV; raggi catodici di  $e^-$
  -
- metodi di creazione di raggi X:
  - Bremsstrahlung: viene emessa radiazione EM quando cariche elettriche subiscono brusca accelerazione
  - effetto fotoelettrico: la creazione di  $e^-$  liberi lascia delle lacune negli orbitali atomici: la lacuna creata in un orbitale vicino al nucleo e viene colmata da un  $e^-$  in un guscio esterno; se la lacuna si forma in un orbitale sufficientemente vicino al nucleo e viene colmata da un  $e^-$  in un orbitale sufficientemente esterno, la frequenza della radiazione EM emessa  $f = \frac{\Delta E}{h}$  è sufficientemente elevata da essere nella parte di spettro dei raggi X
  - effetto Compton inverso: un  $e^-$  ad alta velocità e radiazione EM a bassa frequenza si incontrano, e l'energia viene trasferita dall' $e^-$  alla radiazione EM, aumentandone la frequenza
- esempi e applicazioni:
  - ambito medico: diagnosi, terapia
  - cristallografia
  - astronomia

– ...

### 22.1.2 Radioattività

- 1896, A.H.Becquerel scopre la radioattività dell'U
  - 1900, con il metodo di J.J.Thomson, Becquerel misura il rapporto massa/carica delle particelle  $\beta$  e scopre che coincide con quello trovato da J.J.Thomson per l'elettrone: postula quindi che la radiazione  $\beta$  (oggi  $\beta^-$ ) sia composta da  $e^-$
- 1898, M.Curie, abile fisica e sperimentatrice, conia il termine radioattività e
  - misura la radiazione dell'U sfruttando nei suoi strumenti di misura la piezoelettricità scoperta nel quarzo dal marito nel 1880
  - scopre la radioattività del Torio; scopre la presenza di altri elementi radioattivi contenuti nel minerale in esame nei suoi esperimenti, la pechblenda: il polonio e il radio

### 22.1.3 J.J.Thomson

- 1897, scopre che i raggi catodici sono composti da particelle cariche negative, delle quali calcola il rapporto  $\frac{\text{massa}}{\text{carica}}$ ; G.FitzGerald suggerisce che queste particelle identificate siano delle particelle sub-atomiche, identificabili con l'«elettrone libero» descritto da J.Larmor e H.Lorentz.
- 1899, l'elettricità emessa grazie all'effetto fotoelettrico ha lo stesso rapporto massa/carica
- 1904, modello atomico «a panettone»
- 1906-1910, esperimenti di scattering con particelle  $\beta$  e modello matematico

### 22.1.4 E.Rutherford

- 1899 scopre quelle che chiama particelle  $\alpha$  emesse da alcuni elementi radioattivi, e che possono essere rilevate con schermi fosforescenti, lastre fotografiche o elettrodi. Sottoponendo i raggi  $\alpha$  a campi elettrici e magnetici, Rutherford scopre che sono formati da particelle cariche positivamente, comparabili a He privato di  $2 e^-$ ,  $\text{He}^{2+}$ .
- Rutherford classifica i tipi di radiazione noti in base alla capacità di penetrazione nei materiali e di ionizzazione:
  - radiazione  $\alpha$ ,  $\text{He}^{2+}$
  - radiazione  $\beta$ ,  $e^-$  in decadimento  $\beta^-$ ; lo spettro è continuo; successivamente vengono distinti diversi decadimenti  $\beta$ , e viene scoperto il neutrino; nel 1930, W.Pauli prevede la creazione di una particella molto leggera e neutra durante il decadimento  $\beta$ ; nel 1933, E.Fermi pubblica «*Tentativo di una teoria dei raggi  $\beta$* », prevedendo l'esistenza del neutrino, particella prodotta nel decadimento; nel 1956 viene rilevato il neutrino, con le proprietà previste da Pauli e Fermi
  - radiazione  $\gamma$
- Rutherford, Geiger e Madsen (modello atomico, e nucleo)
  - 1908: esperimento per la determinazione di massa e carica delle particelle  $\alpha$ , con una versione primordiale di contatore Geiger. Le particelle  $\alpha$  sono in grado di ionizzare le molecole in aria (1902, Townsend); se l'aria è soggetta a un campo elettrico sufficientemente intenso, un  $e^-$  è in grado di generare altre interazioni ionizzanti e creare una cascata/moltiplicazione di ioni, che produce una scarica elettrica; **tutto** limiti dell'esperimento. E' necessario un nuovo esperimento: Rutherford chiede di indagare la deflessione di raggio  $\alpha$  da parte della materia, con un **esperimento di scattering**

- 1909-1913: deflessione di raggi  $\alpha$  generati dal radio da parte di una sottile lamina d'oro; scattering anche oltre i  $90^\circ$ ; il **modello atomico di Rutherford** prevede che la carica positiva sia concentrata al centro dell'atomo, in un **nucleo positivo** (termine coniato da Rutherford) con raggio circa  $\frac{1}{10.000}$  del raggio atomico; i risultati di questa attività vengono presentati tra il 1911 e il 1913, inclusa la validità del nuovo modello atomico.

### 22.1.5 N.Bohr

- partendo dal modello atomico di Rutherford e dai risultati sugli spettri di emissione/assorbimento discreti, e dalle linee spettrali dell'idrogeno descritte dalla formula di Rydberg, introducendo i concetti di  $\hbar$  e di discretizzazione trovati ai primordi della meccanica quantistica nel suo modello atomico, Bohr postula che
  1. gli elettroni possono stare in orbite (poi orbitali) senza emettere radiazione EM; questo postulato risolve il problema della stabilità dell'atomo: secondo la fisica classica, una carica elettrica in moto attorno al nucleo perde energia emettendo radiazione EM ed è destinata a cadere sul nucleo
  2. Le orbite sono discrete e caratterizzate da valori di energia e momento angolare,...
  3. Un  $e^-$  assorbe o perde energia sotto forma di radiazione EM, saltando da un'orbita all'altra; per orbite con  $n$  sufficientemente grande, le orbite coinvolte in un salto energetico  $E_n, E_{n-k}$  hanno circa la stessa frequenza se  $k \ll n$ : questa è anche la frequenza della radiazione emessa; per  $n$  piccoli o  $k$  grandi, la frequenza della radiazione emessa non ha una interpretazione classica univoca; questa osservazione porta alla nascita del **principio di corrispondenza**, richiedendo che la teoria quantistica dell'atomo sia in accordo con la teoria classica nel limite di  $n$  grande,  $k$  piccolo.
- Evoluzione del modello atomico:
  - Bohr-Sommerfeld
  - meccanica quantistica:
    - \* Heisenberg, Born, Jordan: QM matriciale; modello dell'atomo di  $H$  da parte di Pauli
    - \* Schrodinger: QM ondulatoria, e orbitali atomici

## 22.2 Applicazioni

- ...
- Applicazioni mediche

## 22.3 Riferimenti

- CURIUSS: La storia della radioattività

## 22.4 Esercizi

- Esperimento di Marie-Curie
- Moti di cariche in campi elettrici (uniformi e non)
  - Esperimento di Thomson
  - Esperimento di Millikan
  - Precessione di Larmor (come verificare precessione momento magnetico?)
  - Esperimento di Stern-Gerlach
- Scattering:
  - Esperimento di Geiger-Mardsen (Rutherford)



---

### Fenomeni termo-elettrici nella materia

---

Fenomeni fisici:

- Effetto piezoelettrico
- Effetto Peltier
- Effetto Seebeck
- Piroelettricità
- ...
- Effetto fotoelettrico
- ...
- Fluorescenza
- Fosforescenza
- ...

Applicazioni:

- ...



## CAPITOLO 24

---

### Fotografia

---

- Daguerre
- Lippmann
- Lumière



---

## Sviluppi dell'astronomia

---

### 25.1 Breve storia

#### Storia antica

- ...

#### Medioevo

- ...
- Modelli astronomici:
  - Terra, Sole, Luna
  - pianeti del sistema solare: Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno

#### Età moderna

- Telescopio per le osservazioni astronomiche; G.Galilei osserva alcune lune di Giove
- Leggi di J.Kepler
- Legge di gravitazione universale di I.Newton, e principi della dinamica
- E.Halley prevede il ritorno della cometa che porta il suo nome nel 1758
- Problema delle perturbazioni di Giove e Saturno, risolto analiticamente da Eulero e Lagrange
- (1781) W.Herschel osserva Urano
- (1845-46) viene osservato per la prima volta Nettuno, come previsto analiticamente nella ricerca di un nuovo pianeta come caus adelle perturbazioni dell'orbita di Urano

#### Età contemporanea, XIX e XX secolo

- tecniche:
  - primordi della fotografia
  - spettrografia: analisi degli spettri di corpi celesti

- \* classificazione delle stelle
  - \* redshift...
- misura distanza:
  - \* parallasse per le stelle vicine
  - \* parallasse statistica
- scoperte e misure:
  - sistemi binari: Sirio (1834, Bessel), Mizar (1899, Pickering)
  - relazione periodo-luminosità, (1900, H.S. Leavitt e le «calcolatrici umane» di Harvard) nelle variabili cefeidi
  - K.Schwarzschild scopre la relazione tra il colore (e quindi la temperatura) e la magnitudine apparente e reale
  - (1913) E.Hertzsprung-H.N.Russell classificano le stelle usando la temperatura e la magnitudine nel diagramma che prende il loro nome
  - (1925) C.Payne-Gaposchkin propone una composizione delle stelle, principalmente di H ed He
  - ...
- ...

## **Parte VII**

### **Indice**





## CAPITOLO 26

---

Indice

---



### definition-0

definition-0 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*),  
97

### definition-2

definition-2 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*),  
97

### example-0

example-0 (*ch/thermodynamics/principles-open*), 106

### example-1

example-1 (*ch/thermodynamics/principles-open*), 106

### example-10

example-10 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*),  
99

### example-11

example-11 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*),  
101

### example-12

example-12 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*),  
101

### example-13

example-13 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*),  
101

### example-14

example-14 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*),  
101

### example-15

example-15 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*),  
101

### example-16

example-16 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*),  
102

### example-17

example-17 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*),  
102

### example-2

example-2 (*ch/thermodynamics/principles-open*), 106

### example-3

example-3 (*ch/thermodynamics/foundation-experiments*), 89

### example-4

example-4 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*), 98

### example-5

example-5 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*), 98

### example-6

example-6 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*), 98

### example-7

example-7 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*), 99

## example-8

example-8 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*), [99](#)

## example-9

example-9 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*), [99](#)

## proposition-3

proposition-3 (*ch/thermodynamics/principles-gibbs-phase-rule*), [97](#)