Fisica per le superiori

basics

Nov 11, 2024

CONTENTS

Questo libro fa parte del materiale pensato per le scuole superiori. E' disponibile la versione in .pdf scaricabile.

Part I

Introduzione alla fisica

CHAPTER

ONE

INTRODUZIONE ALLA FISICA

- Metodo scientifico:
  - ricerca di princìpi fisici in accordo con le attività sperimentali
  - deduzione di una teoria, a partire dai princìpi
- Grandezze fisiche:
  - fondamentali e derivate
    - lunghezza, aree e volumi
    - massa e densità
    - tempo
  - processo e strumenti di misura:
    - logica **todo** *?*
    - analisi dati, errori
- **Astrazione** e costruzione di **modelli**, con il linguaggio matematico
- Rappresentazione dei dati
  - …

CHAPTER

TWO

GRANDEZZE FISICHE

- Come conosciamo il mondo? Come misuriamo il mondo?
- Necessità di avere delle grandezze di riferimento stabili o facilmente riproducibili in maniera precisa, da usare come unità di misura delle grandezze fisiche.
- Nell'antichità, dall'esperienza:
  - spazio:
    - importanza di misurare le distanze (es. distanze da percorrere), le aree (es. misura dei campi,...), e i volumi
    - grandezze di riferimento: lunghezze ideali di parti anatomiche umane: cubito, pollice, piede,...
  - tempo:
    - alternanza di luce e buio, alternanza delle stagioni, alternanza di configurazioni degli astri osservati dalla terra; queste alternanze scandiscono
    - grandezze di riferimento: intervalli temporali scanditi dalla natura
  - peso:
    - misura della quantità di merce, quantità di denaro o materiali preziosi, per le prescrizioni mediche (apothecary,...)
    - grandezze di riferimento: grano (basato su un seme ideale di cereale), libbra (dallo strumento usato per la misura del peso/massa, *libra* = bilancia)
- In epoca moderna:
  - aggiornamento delle grandezze di riferimento
    - Parigi tra fine XVIII e XIX secolo:
      - lunghezza: metro (1791) come $1/10.000.000$ la distanza tra l'equatore e il polo nord sul meridiano terrestre passante per Parigi
      - tempo: **todo**
      - **todo**
  - nuove grandezze fisiche misurate nelle nuove scienze, chimica, termodinamica ed elettromagnetismo:
    - quantità di sostanza
    - temperatura
    - corrente elettrica
    - luminosità

- XX-XXI secolo: continuo aggiornamento delle unità di misura, usando definizioni più precise e replicabili, tramite misure non disponibili solo qualche decennio prima

2.1 Spazio

2.2 Quantità di materia

2.3 Tempo

Prime esperienze e strumenti.

- tempo scandito dall'astronomia:
  - osservazioni astronomiche degli astri
  - alternanza stagioni
  - alternanza luce/buio e meridiana
  - astroloabio
- primi strumenti rudimentali
  - orologio ad acqua
  - orologio a candela e clessidra
- orologi meccanici:
  - a pendolo
  - a molla
- orologi a batteria,
  - al quarzo, digitali,…

Ma cos'è il tempo?

- Kairos e Chronos, come percezione personale e percezione assoluta
- Newton e la formulazione della meccanica con spazio e tempo assoluti, il tempo come misurato dall'orologio meccanico allora disponibile
- Relatività di Einstein: la misura del tempo dipende dall'osservatore; spazio e tempo non sono più assoluti; assoluta - indipendente dall'osservatore - è la misura della velocità della luce per ogni osservatore

2.4 Temperatura

2.5 Carica e corrente elettrica

2.6 Quantità di sostanza, la mole

2.7 Intensità luminosa

Part II

Meccanica classica

CHAPTER

THREE

MECCANICA CLASSICA

La meccanica classica fu sviluppata da Newton nel XVII secolo, e presentanta nei *Principi matematici di filosofia naturale* (1687) **todo** *Dire due parole si Principi matemtatici di filosofia naturale*

L'opera di Newton **todo** usa i metodi della geometria analitica introdotti da Cartesio, e viene sviluppata in accordo con le osservazioni astronomiche, come le leggi di Keplero, e le esperienze di Galileo sul principio di inerzia, sulla caduta dei gravi (**todo** anche se probabilmente era lo studio del rotolamento di corpi su piani inclinati) e sull'isocronismo delle piccole oscillazioni libere di un pendolo(**todo** cosa c'entra? Isocronismo come principio alla base del principio di funzionamento dei primi orologi meccanici, a gravità o a molla, con regolazione tramite scappamento; lo stesso principio, anche se migliorato, degli orologi meccanici contemporanei)

A partire dal principio di conservazione della massa di sistemi chiusi e da tre principi della dinamica, Newton formula una teoria capace di descrivere il moto dei corpi in termini usando concetti definiti nelle prime pagine della sua opera, come:

- lo spazio assoluto, inteso come uno spazio euclideo o un sottoinsieme dello spazio euclideo **todo** ref
- il tempo assoluto, in contrapposizione con il tempo percepito dagli individui (che può sembrare scorrere più velocmente o più lentamente a seconda dell'individuo, del divertimento o della noia provata,…) **todo** ref, e discussione su cos'è il tempo e come si misura
- la massa, intesa come la quantità di materia di un sistema **todo** come la misura Newton?
- la quantità di moto, intesa come il prodotto di massa e velocità del centro di massa del sistema **todo** ok, ma cos'è il centro di massa? E' proprio questa la definizione?
- le forze, intese come le azioni che possono far cambiare la quantità di moto di un sistema.

CHAPTER

FOUR

INTRODUZIONE ALLA MECCANICA CLASSICA

- Prime esperienze:
  - astronomia
  - Galileo, la relatività, gravità
  - Hooke, le molle e i dinamometri
- Grandezze fisiche, strumenti di misura e concetti:
  - spazio, tempo, massa; velocità, accelerazione, quantità di moto,…
  - cos'è lo spazio? cos'è il tempo? cos'è la massa? cos'è una forza?

4.1 Breve storia

4.1.1 Osservazioni astronomiche

- leggi di Keplero

4.1.2 Galileo

- inerzia e relatività
- esperimenti sulla caduta dei gravi
- pendolo
- osservazioni astronomiche: lune di Giove e verifica della legge di Keplero?

4.1.3 Newton

- grandezze e concetti per lo sviluppo della teoria:
  - spazio e tempo assoluti; massa come quantità di materia
    - ma cosa sono? o meglio, come si misurano? Cenni agli orologi meccanici (pendolo, molle ed escapement clocks), per la misura del tempo assoluto
    - modelli e astrazione
  - equazioni della dinamica in termini di forza che causa la quantità di moto
- strumenti matematici:

  – dalla geometria analitica al calcolo infinitesimale

- legge di gravitazione universale: l'origine del moto dei gravi è la stessa del moto dei corpi celesti

4.2 Modelli

Muovere in una sezione "Introduzione alla meccanica", per rendere lo schema uniforme con Termodinamica ed Elettromagnetismo: prime esperienze; approccio di Newton (grandezze fisiche e concetti); modelli

Quando si costruisce una teoria scientifica, è spesso necessario compiere uno sforzo di astrazione (**todo** *come conosciamo? Discorso filosofico…*), di modellazione dei fenomeni di interesse. Un buon modello è in grado di rappresentare con la precisione (**todo** *o accuratezza?*) richiesta il fenomeno studiato, essere in accordo con attività sperimentali e garantire capacità di previsione che coinvolgono tali fenomeni.

Nello studio della meccanica e della fisica in generale, si è soliti distinguere gli elementi oggetti di studio da tutti gli altri elementi:

- **sistema**, unione degli elementi oggetti di studio
- **ambiente esterno**, tutto quello che non fa parte del sistema

In meccanica, è necessario uno sforzo di modellazione per costruire un modello matematico che rappresenti:

- i componenti meccanici, che costituiscono il sistema
- le connessioni tra componenti meccanici del sistema, o le connessioni con l'ambiente esterno
- le azioni che operano sul sistema, dovute alle interazioni del sistema con l'esterno o scambiate tra componenti del sistema

A seconda del livello di dettaglio richiesto, si possono definire diversi modelli di componenti meccanici in base a:

- dimensioni:
  – sistemi puntiformi, di dimensioni trascurabili per il problema di interesse
  – sistemi estesi, di dimensioni non trascurabili per il problema di interesse; a seconda della loro deformabilità e/o del livello di dettaglio dell'analisi:
    * rigidi
    * deformabili
- inertia:
  – massa non trascurabile
  – massa trascurabile

Esempio. Analisi di un aereo:

- per lo studio di traiettorie e prestazioni, può essere considerato come un sistema puntiforme
- per uno studio preliminare di equilibrio e dinamica del velivolo, può essere usato un modello esteso rigido
- per lo studio accurato dell'equilibrio, della dinamica del volo e del progetto aero-servo-elastico l'aereo viene modellato come un insieme di elementi: viene usato un modello esteso deformabile dotato di massa per molti elementi strutturali, connessi tramite vincoli

CHAPTER

FIVE

CINEMATICA

La cinematica si occupa della descrizione del moto dei sistemi, senza indagarne le cause. La cinematica si occupa della descrizione dello stato di un sistema, e della sua variazione, nello spazio.

La **configurazione di un sistema** è definita da un insieme di variabili indipendenti, o coordinate, dette **gradi di libertà**. Il numero di gradi di libertà di un sistema dipende dalla dimensione dello spazio nel quale avviene il moto, dal numero e dal tipo degli elementi che lo compongono e dai vincoli che connettono gli elementi del sistema tra di loro o con l'ambiente esterno. In generale, in meccanica classica lo **stato di un sistema** è definito dalla sua configurazione e dalla derivata prima nel tempo delle variabili che definiscono i gradi di libertà: questo è sensato per sistemi meccanici la cui dinamica è governata da equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine.

La configurazione di un **punto** libero nello spazio euclideo E^n ($n = 2$ piano, $n = 3$ spazio) è definita dalla sua posizione nello spazio, tramite un insieme di n coordinate:

- un punto libero nel piano ha 2 gradi di libertà (traslazione);
- un punto libero nello spazio ha 3 gradi di libertà (traslazione).

La configurazione di un **corpo rigido** è definita dalla posizione di un suo punto nello spazio e dalla sua orientazione:

- un corpo rigido nel piano ha 3 gradi di libertà, 2 per definire la posizione di un suo punto nello spazio (traslazione) e 1 per definire la sua orientazione (rotazione) rispetto a un asse ortogonale al piano;
- un corpo rigido nello spazio ha 6 gradi di libertà, 3 per definire la posizione di un suo punto nello spazio (traslazione) e 3 per definire la sua orientazione (rotazione)

5.1 Cinematica del punto

La cinematica di un punto $P(t)$ è completamente definita dalla sua posizione nello spazio in funzione del tempo.

Posizione di un punto. $P(t) - O = \vec{r}_P(t)$

Velocità di un punto. $\vec{v}_P = \dfrac{d\vec{r}_P}{dt}$

Accelerazione di un punto. $\vec{a}_P = \dfrac{d\vec{v}_P}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}_P}{dt^2}$

5.1.1 Moti particolari

Moto non accelerato

Un moto non accelerato di un punto P rispetto a un sistema di riferimento con origine in O può essere definito dalla condizione di accelerazione nulla

$$\vec{a}_P = \ddot{\vec{r}}_P(t) = \vec{0} \ ,$$

la cui integrazione due volte in tempo fornisce le leggi della velocità e dello spazio

$$\begin{cases} \vec{v}_P(t) & = \vec{c}_1 \\ \vec{r}_P(t) & = \vec{c}_1 \, t + \vec{c}_2 \ . \end{cases}$$

todo dimostrazione come esercizio con procedimento

Si nota che la condizione di accelerazione nulla implica la condizione di velocità costante. **todo**

accompagnata da condizioni tra di loro compatibili (**todo** *fare esempio di condizioni non compatibili, es. velocità diverse in due istanti temporali diversi*) che identifichino unicamente il moto, come possono essere ad esempio:

- posizione e velocità a un istante temporale

  $$\begin{cases} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

  Le leggi del moto possono diventano

  $$\begin{cases} \vec{v}_P & = \vec{v}_0 \\ \vec{r}_P(t) & = \vec{v}_0 \, (t - t_0) + \vec{r}_0 \ , \end{cases}$$

  todo dimostrazione come esercizio con procedimento

- posizione in due istanti temporali

  $$\begin{cases} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \\ \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1 \end{cases}$$

  Le leggi del moto possono diventano

  $$\begin{cases} \vec{v}_P & = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{t_1 - t_0} \\ \vec{r}_P(t) & = \vec{v}_P \, (t - t_0) + \vec{r}_0 \ , \end{cases}$$

  todo dimostrazione come esercizio con procedimento

Moto uniformemente accelerato

Un moto uniformemente accelerato di un punto P rispetto a un sistema di riferimento con origine in O può essere definito dalla condizione di accelerazione costante

$$\vec{a}_P = \ddot{\vec{r}}_P(t) = \vec{a} \ ,$$

la cui integrazione due volte in tempo fornisce le leggi della velocità e dello spazio

$$\begin{cases} \vec{v}_P(t) & = \vec{a}t + \vec{c}_1 \\ \vec{r}_P(t) & = \dfrac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{c}_1 \, t + \vec{c}_2 \ . \end{cases}$$

todo dimostrazione come esercizio con procedimento

accompagnata da condizioni tra di loro compatibili che identifichino unicamente il moto, come possono essere ad esempio:

- posizione e velocità a un istante temporale

$$\begin{cases} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

  Le leggi del moto possono diventano

$$\begin{cases} \vec{v}_P(t) & = \vec{a}t + \vec{v}_0 \\ \vec{r}_P(t) & = \dfrac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2 + \vec{v}_0\,(t-t_0) + \vec{r}_0 \ , \end{cases}$$

  todo dimostrazione come esercizio con procedimento

- posizione in due istanti temporali… **todo**

  todo dimostrazione come esercizio con procedimento

Moto circolare

La cinematica di un punto su una traiettoria circolare (**todo** è un vincolo!) può essere rappresentato usando un sistema di **coordinate polari** con origine coincidente con il centro della circonferenza

$$r = R \ , \quad \theta_P(t) = \text{**todo**}$$

o in coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x_P(t) = R\, \cos\theta_P(t) \\ y_P(t) = R\, \sin\theta_P(t) \end{cases}$$

che permettono di identificare il punto P con il raggio vettore rispetto all'origine

$$\vec{r}_P = R\cos\theta_P(t)\hat{x} + R\sin\theta_P(t)\hat{y} \ .$$

- Definizione vettori $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ **todo** *dipendenza di questi versori dalla posizione di P nello spazio, e quindi in generale dal tempo
- La velocità e l'accelerazione del punto **todo**
  - direzione e modulo di velocità e accelerazione

$$\begin{cases} \vec{v}_P(t) & = R\dot{\theta}(t)\left(-\sin\theta_P(t)\hat{x} + \cos\theta_P(t)\hat{y}\right) = R\dot{\theta}(t)\hat{\theta}(t) \\ \vec{a}_P(t) & = R\ddot{\theta}(t)\left(-\sin\theta_P(t)\hat{x} + \cos\theta_P(t)\hat{y}\right) + \\ & +R\ddot{\theta}^2(t)\left(-\cos\theta_P(t)\hat{x} - \sin\theta_P(t)\hat{y}\right) = R\ddot{\theta}(t)\hat{\theta}(t) - R\dot{\theta}^2(t)\hat{r}(t) \ . \end{cases}$$

Moto circolare uniforme

Il moto circolare uniforme ha modulo della velocità costante,

$$|\vec{v}_P| = |R\dot{\theta}_P|$$

e la derivata nel tempo della coordinata θ_P è costante **todo**

- **todo** pulsazione, periodo, frequenza,…

Moto armonico lungo un segmento

Un moto armonico lungo un segmento può essere definito come la proiezione di un punto che compie un moto circolare uniforme su una circonferenza che ha il segmento come diametro **todo**

5.1.2 Problemi

basics

Nov 11, 2024

2 min read

5.2 Cinematica di un corpo rigido

La cinematica di corpo rigido è definita dalla posizione di un suo punto materiale e dalla propria orientazione in funzione del tempo. In generale, per definire la posizione di corpo rigido nello spazio 3-dimensionale servono 6 parametri: 3 coordinate per definire la posizione di un punto materiale Q e 3 parametri per definire l'orientazione del corpo nello spazio. Per definire la posizione di un corpo rigido che compie un moto piano servono 3 parametri: 2 coordinate per definire la posizione di un punto e 1 parametro per definirne l'orientazione.

todo definizione di moto piano

Note: Questo materiale è rivolto a studenti delle scuole superiori, e si limita a discutere il moto 2-dimensionale di corpi rigidi. Una discussione del moto 3-dimensionale di corpi rigidi richiede l'uso e la dimestichezza con oggetti matematici che non sono introdotti nei primi anni delle scuole superiori - e purtroppo troppo spesso nemmeno nei corsi universitari dei primi anni -, i tensori.

Al prezzo di non poter trattare i problemi meccanici più generali, questa scelta evita di richiedere la conoscenza dell'algebra tensoriale o di introdurre formule in forma quantomeno discutibile. Per una discussione completa del problema, si rimanda al materiale pensato per studenti più maturi: **todo**

- algebra vettoriale e tensoriale **todo**
- meccanica classica **todo**

5.2.1 Posizione dei punti di un corpo rigido

- **Posizione del un punto materiale di riferimento, Q.**

$$Q - O = \vec{r}_Q$$

- **Posizione di tutti i punti materiali P del corpo rigido, e orientazione del corpo.** Nell'ipotesi di moto 2-dimensionale, il vettore tra due punti materiali $\vec{r}_{QP} = P - Q$ può essere scritto in funzione del vettore $\vec{r}^0_{QP}$ nella configurazione di riferimento del corpo e della rotazione di un angolo θ attorno a un asse di direzione $\hat{n}$ costante e perpendicolare al piano del moto,

$$P - Q = \vec{r}_{QP} = \cos\theta\,\vec{r}^0_{QP} + \sin\theta\,\hat{n}\times\vec{r}^0_{QP}$$

La posizione di un punto materiale P di un corpo rigido rispetto al sistema di riferimento scelto, può essere quindi scritta come

$$\begin{aligned} P - O &= Q - O + P - Q = \\ &= \vec{r}_{OQ} + \cos\theta\,\vec{r}^0_{QP} + \sin\theta\,\hat{n}\times\vec{r}^0_{QP}\ . \end{aligned}$$

5.2.2 Velocità dei punti di un corpo rigido

- **Velocità del punto materiale di riferimento,** Q

$$\vec{v}_Q = \frac{d\vec{r}_Q}{dt}$$

- **Velocità di tutti i punti materiali** P **del corpo rigido, e velocità angolare del corpo**, $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{n}$. La velocità relativa di un punto P rispetto al punto di riferimento Q viene calcolata con la derivata del vettore $\vec{r}_{QP}$ rispetto al tempo, ricordando che $\hat{n}$ è costante e quindi $\frac{d}{dt}\hat{n} = \vec{0}$,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}_{QP}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\cos\theta\,\vec{r}^{\,0}_{QP} + \sin\theta\,\hat{n}\times\vec{r}^{\,0}_{QP}\right) = \\ &= \dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\vec{r}^{\,0}_{QP} + \cos\theta\,\hat{n}\times\vec{r}^{\,0}_{QP}\right) = \\ &= \dot{\theta}\hat{n}\times\left(\sin\theta\,\hat{n}\times\vec{r}^{\,0}_{QP} + \cos\theta\,\vec{r}^{\,0}_{QP}\right) = \\ &= \dot{\theta}\hat{n}\times\vec{r}_{QP} = \\ &= \vec{\omega}\times\vec{r}_{QP}\ ,\end{aligned}$$

avendo definito la **velocità angolare**, $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$ per un moto 2-dimensionale, e usato l'identità vettoriale

$$\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{w}) = \hat{n}\underbrace{(\hat{n}\cdot\vec{w})}_{=0} - \vec{w}\underbrace{(\hat{n}\cdot\hat{n})}_{=1} = -\vec{w}\ .$$

Note: La formula

$$\vec{v}_P - \vec{v}_Q = \vec{\omega}\times(P-Q)$$

vale anche per moti 3-dimensionali. In questo caso però **non** è possibile scrivere $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{n}$.

La velocità di un punto materiale P di un corpo rigido rispetto al sistema di riferimento scelto, può essere quindi scritta come

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v}_{Q/O} + \vec{v}_{P/Q} = \\ &= \vec{v}_{Q/O} + \vec{\omega}\times(P-Q)\ .\end{aligned}$$

5.2.3 Accelerazione dei punti di un corpo rigido

- **Accelerazione del punto materiale di riferimento,** Q

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_P}{dt^2}$$

- **Accelerazione di tutti i punti materiali** P **del corpo rigido, e accelerazione angolare del corpo**, $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\theta}\hat{n}$. L'accelerazione relativa di un punto P rispetto al punto di riferimento Q viene calcolata con la derivata seconda del vettore $\vec{r}_{QP}$ rispetto al tempo, ricordando che $\hat{n}$ è costante e quindi $\frac{d}{dt}\hat{n} = \vec{0}$,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{r}_{QP}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{QP}\right) = \\ &= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_{QP} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_{QP}}{dt} = \\ &= \alpha\times\vec{r}_{QP} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{QP}\right)\ .\end{aligned}$$

L'accelerazione di un punto materiale P di un corpo rigido rispetto al sistema di riferimento scelto, può essere quindi scritta come

$$\begin{aligned}\vec{a}_P & = \vec{a}_{Q/O} + \vec{a}_{P/Q} = \\ & = \vec{a}_{Q/O} + \alpha \times \vec{r}_{QP} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{QP} \right) \ .\end{aligned}$$

basics

Nov 11, 2024

0 min read

5.3 Cinematica dei sistemi deformabili

5.4 Cinematica relativa

basics

Nov 11, 2024

0 min read

CHAPTER

SIX

AZIONI

- Tipi di azione:
  - forza concentrata, momento di una forza, coppia di forze; carichi equivalenti
  - azioni distribuite: azioni di volume, e di superficie (sforzo e pressione)
- Lavoro e potenza; azioni conservative
- Esempi:
  - gravitazione: gravitazione universale, nei pressi della superficie terrestre; cenni a interazione a distanza
  - elasticità
  - reazioni vincolari
  - contatto: reazione normale e attrito
  - cenni ad altre azioni (tra cariche elettriche, cariche in campi EM,…; esempi: levmag,…)

basics

Nov 11, 2024

1 min read

6.1 Forza, momento di una forza, azioni distribuite

6.1.1 Forza concentrata

Una forza (concentrata) è una quantità vettoriale di dimensioni fisiche,

$$[\text{forza}] = \frac{[\text{massa}][\text{lunghezza}]}{[\text{tempo}]^2}$$

che può essere misurata tramite un dinamometro, e il cui effetto può alterare le condizioni di equilibrio o di moto di un sistema fisico.

Oltre alle informazioni tipiche di una quantità vettoriale - intensità, direzione e verso - contenute nel vettore forza $\vec{F}$, è spesso necessario conoscere il **punto di applicazione**, o la retta di applicazione, della forza.

6.1.2 Momento di una forza concentrata

Il momento di una forza $\vec{F}$ applicata nel punto P, o con retta di applicazione passante per P, rispetto al punto H viene definito come il prodotto vettoriale,

$$\vec{M}_H = (P - H) \times \vec{F}$$

6.1.3 Sistema di forze, risultante delle azioni e carichi equivalenti

Dato un sistema di N forze $\left\{\vec{F}_n\right\}_{n=1:N}$, applicate nei punti P_n, si definiscono:

- **risultante** del sistema di forze: la somma delle forze,

$$\vec{R} = \sum_{n=1}^{N} \vec{F}_n \ ,$$

- risultante dei momenti rispetto a un punto H: la somma dei momenti

$$\vec{M}_H = \sum_{n=1}^{N} (P_n - H) \times \vec{F}_n \ ,$$

- un **carico equivalente**: un sistema di forze che ha la stessa risultante di forze e momenti; per un sistema di forze, è possibile definire un carico equivalente formato da una sola forza, la risultante delle forze $\vec{R}$ applicata nel punto Q ricavato dall'equivalenza ai momenti

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \sum_{n=1}^{N} \vec{F}_n \\ (Q - H) \times \vec{R} &= \sum_{n=1}^{N} (P_n - H) \times \vec{F}_n\end{aligned}$$

6.1.4 Coppia di forze

Una coppia di forze è un carico equivalente a due forze di uguale intensità e verso opposto, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, applicate in due punti P_1, P_2 non allineati lungo la retta di applicazione delle forze per avere effetti non nulli.

todo *immagine*

La risultante delle forze è nulla,

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 - \vec{F}_1 = \vec{0} \ ,$$

mentre la risultante dei momenti non dipende dal polo dei momenti,

$$\begin{aligned}\vec{M}_H &= (P_1 - H) \times \vec{F}_1 + (P_2 - H) \times \vec{F}_2 = \\ &= (P_1 - H) \times \vec{F}_1 - (P_2 - H) \times \vec{F}_1 = \\ &= (P_1 - P_2) \times \vec{F}_1 =: \vec{C} \ .\end{aligned}$$

6.1.5 Campi di forze

todo

6.1.6 Azioni distribuite

todo

basics

Nov 11, 2024

2 min read

6.2 Lavoro e potenza

In meccanica, come sarà più chiaro avanti (**todo** aggiungere riferimento), il concetto di lavoro è legato al concetto di energia. **todo**

6.2.1 Lavoro e potenza di una forza

Lavoro. Il lavoro elementare di una forza $\vec{F}$ applicata nel punto P che subisce uno spostamento elementare $d\vec{r}_P$ è definito come il prodotto scalare tra la forza e lo spostamento,

$$\delta L := \vec{F} \cdot d\vec{r}_P \ .$$

Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ applicata nel punto P che si muove dal punto A al punto B lungo il percorso ℓ_{AB} è la somma di tutti i contributi elementari - e quindi, al limite per spostamenti elementari $\rightarrow 0$ per variazioni continue, l'integrale di linea,

$$L_{\ell_{AB}} = \int_{\ell_{AB}} \delta L = \int_{\ell_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}_P \ .$$

In generale, il lavoro di una forza o di un campo di forze dipende dal percorso ℓ_{AB}. Nei casi in cui il lavoro è indipendente dal percorso, ma dipende solo dagli estremi del percorso, si parla di *azioni conservative*.

Potenza. La potenza della forza viene definita come la derivata nel tempo del lavoro,

$$P := \frac{\delta L}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_P \ ,$$

e coincide con il prodotto scalare tra la forza e la velocità del punto di applicazione. Prestare attenzione se una forza è applicata a punti geometrici e non materiali, come ad esempio il caso di una disco che rotola senza strisciare su una superficie: in ogni istante il (nuovo) punto materiale di contatto ha velocità nulla, mentre il punto geometricodi contatto è la proiezione del centro del disco e si muove con la stessa velocità, $v = R\theta$

6.2.2 Lavoro e potenza di un sistema di forze

Lavoro. Il lavoro di un sistema di forze è la somma dei lavori delle singole forze,

$$\delta L = \sum_{n=1}^{N} \delta L_n = \sum_{n=1}^{N} \vec{F}_n \cdot d\vec{r}_n$$

Potenza. La potenza di un sistema di forze è la somma delle potenze delle singole forze

$$P = \sum_{n=1}^{N} P_n = \sum_{n=1}^{N} \vec{F}_n \cdot \vec{v}_n \ .$$

6.2.3 Lavoro e potenza di una coppia di forze

Lavoro. Il lavoro elementare di una coppia di forze è la somma dei lavori elementari

$$\begin{aligned} \delta L &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \\ &= \vec{F}_1 \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \end{aligned}$$

Potenza. La potenza di una coppia di forze,

$$P = \vec{F}_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

può essere riscritta se i punti di applicazione compiono un atto di moto rigido (**todo** verificare la definizione di atto di moto e se è il caso di introdurla),

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{\omega} \times (P_1 - P_2) \ ,$$

come

$$\begin{aligned} P &= \vec{F}_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \\ &= \vec{F}_1 \cdot [\vec{\omega} \times (P_1 - P_2)] = \\ &= \vec{\omega} \cdot \left[(P_1 - P_2) \times \vec{F}_1\right] = \\ &= \vec{\omega} \cdot \vec{C} \ . \end{aligned}$$

basics

Nov 11, 2024

1 min read

6.3 Azioni conservative

Un campo di forze conservativo viene definito tramite il lavoro compiuto. In generale, il lavoro di un campo di forze agente su un punto P che si muove nello spazio dal punto A al punto B lungo un percorso ℓ_{AB} dipende dal percorso. (**todo** aggiungere riferimento)

Se il lavoro di un campo di forze non dipende dal percorso ℓ_{AB} ma solo dai punti estremi A, B, per tutte le coppie di punti appartenenti a una regione dello spazio Ω, si dice che il **campo di forze** è **conservativo** nella regione Ω dello spazio.

In questo caso, il lavoro compiuto può essere scritto come differenza di una campo scalare, $U(P)$ o il suo opposto $V(P) := -U(P)$,

$$\begin{aligned} L_{AB} &= U(B) - U(A) = \Delta_{AB} U \\ &= V(A) - V(B) = -\Delta_{AB} V \end{aligned}$$

Le funzioni U, V vengono definite rispettivamente **potenziale** ed **energia potenziale** del campo di forze.

Il lavoro elementare può quindi essere scritto in termini del differenziale di queste funzioni,

$$\begin{aligned} \delta L = & \quad dU = \quad d\vec{r} \cdot \nabla U = \\ = & -dV = -d\vec{r} \cdot \nabla V \end{aligned}$$

Confrontando questa relazione con la definizone di lavoro $\delta L = d\vec{r} \cdot \vec{F}$, è possibile identificare il campo di forze con il gradiente della funzione potenziale, e l'opposto del gradiente dell'energia potenziale,

$$\vec{F} = \nabla U = -\nabla V \ .$$

basics

Nov 11, 2024

3 min read

6.4 Esempi di forze

6.4.1 Gravità

Legge di gravitazione universale

La forza $\vec{F}_{12}$ esercitata da un corpo di massa m_2 in P_2 su un corpo di massa m_1 in P_1 è descritta dalla **legge di gravitazione universale di Newton**,

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \ ,$$

avendo indicato con $\vec{r}_{12} = (P_2 - P_1)$ il vettore che punta dal punto P_1 al punto P_2, $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$ il suo modulo, e $\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$ il vettore unitario lungo la stessa direzione, e con

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N\, m^2}{kg^2}$$

la **costante di gravitazione universale**, considerata una costante della natura. **todo**

Campo di gravità

Il campo di gravità generato da una massa m_2 posta in P_2 è **todo** una funzione dello spazio che associa a ogni punto P un vettore,

$$\vec{g}(\vec{r}_1) = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} = G \frac{m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \ ,$$

- **todo** abituarsi al concetto di campo, introdotto a partire dalla definizione operativa con *massa test*

- **todo** PSCE
- **todo** noto il campo di gravità $\vec{g}(P)$, la forza di gravità percepita da un sistema di massa m in P può essere scritta come

$$\vec{F}_g = m\vec{g}(P)$$

Energia potenziale gravitazionale. E' possibile dimostrare che il campo gravitazionale è … **todo**

$$V(P) = -G\,m\,m_1 \frac{1}{|P - P_1|}$$

Campo di gravità nei pressi della superficie terrestre

All'interno di un dominio limitato nei pressi della superficie terrestre, è comune approssimare il campo di gravitazione terrestre come un campo uniforme, diretto lungo la verticale locale verso il centro della terra e di intensità $g = G\frac{M_E}{R_E^2}$.

E' possibile derivare questo modello, approssimando il vettore posizione rispetto al centro della terra $P - P_E \sim R_E\hat{r}$ e il versore che identifica la direzione da un punto del dominio al centro della Terra con la verticale locale $\hat{r}_{12} \sim -\hat{z}$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G\frac{M_E}{R_E^2}\hat{z} = -g\hat{z} \ .$$

La forza di gravità percepita da un corpo di massa m nei pressi della superficie terrestre è quindi

$$\vec{F}_g = -mg\hat{z} \ ,$$

quello che viene comunemente chiamato **peso**.

Energia potenziale gravitazionale. E' possibile dimostrare che il potenziale gravitazionale nei pressi della superficie terrestre diventa

$$V(P) = m\,g\,z_P \ .$$

Dimostrazione.

Con l'espansione in serie, con $P - P_E = R_E\hat{r} + \vec{d}$, e $|\vec{d}| \ll R_E$

$$\begin{aligned} V(P) &= -G\,m\,M_E \frac{1}{|P - P_E|} = \\ &\approx GM_E\,m\left[-\frac{1}{R_E} + \frac{R_E\hat{r}\cdot\vec{d}}{R_E^3}\right] = \\ &= \underbrace{-\,m\,\frac{GM_E}{R_E}}_{\text{const}} + m\,\underbrace{\frac{G\,M_E}{R_E^2}}_{=g}\,\underbrace{\hat{r}\cdot\vec{d}}_{=z} \end{aligned}$$

6.4.2 Azioni elastiche: molle lineari

Secondo la legge di Hooke, il comportamento di una molla elastica lineare ideale è descritto dall'equazione costitutiva

$$F = k(\ell - \ell_0) \ ,$$

essendo F il valore assoluto della forza trasmessa dalla molla, k la costante elastica della molla, ℓ_0 la lunghezza a riposo della molla, e ℓ la lunghezza nella configurazione considerata.

Energia potenziale.

$$\begin{aligned}
\delta L &= F d\ell = k(\ell - \ell_0) d\ell \\
L &= \int_{\ell_1}^{\ell_2} = \left[\frac{1}{2} k \ell^2 - k \ell_0 \, \ell \right] \Bigg|_{\ell_1}^{\ell_2} \\
V &= \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2
\end{aligned}$$

6.4.3 Azioni di contatto

Reazioni vincolari di vincoli ideali

I vincoli ideali sono modelli di vincolo che **non compiono lavoro netto**, e per questo sono **elementi conservativi**. Come dovrebbe risultare evidente nei paragrafi successivi dalle espressioni delle velocità relative e dalle azioni scambiate,

$$\begin{aligned}
P &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{F}_{21} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{F}_{12} + \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{M}_{21} + \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{M}_{12} = \\
&= (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{F}_{21} + (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \cdot \mathbf{M}_{21} = \\
&= \mathbf{v}_{21}^{rel} \cdot \mathbf{F}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{21}^{rel} \cdot \mathbf{M}_{21} \ ,
\end{aligned}$$

entrambi i termini sono nulli, o perché il moto relativo è nullo, o le azioni agiscono in direzione ortogonale ai moti relativi.

Incastro

Il vincolo di incastro impedisce sia il moto sia la rotazione relativa,

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{v}_{21}^{rel} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{0} = \boldsymbol{\omega}_{21}^{rel} = \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \\ \mathbf{M}_{12} = -\mathbf{M}_{21} \end{cases}$$

Pattino

Il vincolo di pattino impedisce il moto relativo in una direzione e la rotazione relativa.

$$\begin{cases} \forall \ \mathbf{v}_{\hat{\mathbf{t}},21}^{rel} = \mathbf{v}_{\hat{\mathbf{t}},2} - \mathbf{v}_{\hat{\mathbf{t}},1} \\ 0 = v_{\hat{\mathbf{n}},21}^{rel} = v_{\hat{\mathbf{n}},2} - v_{\hat{\mathbf{n}},1} \\ \mathbf{0} = \boldsymbol{\omega}_{21}^{rel} = \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{F}_{\hat{\mathbf{t}},12} = \mathbf{F}_{\hat{\mathbf{t}},21} \\ F_{\hat{\mathbf{n}},12} = -F_{\hat{\mathbf{n}},21} \\ \mathbf{M}_{12} = -\mathbf{M}_{21} \end{cases}$$

Cerniera (cilindrica)

Il vincolo di pattino impedisce il moto relativo e consente solo la rotazione attorno a un asse.

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{v}^{rel}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \\ \forall\ \omega^{rel}_{\hat{\mathbf{t}},21} = \omega_{\hat{\mathbf{t}},2} - \omega_{\hat{\mathbf{t}},1} \\ \mathbf{0} = \boldsymbol{\omega}^{rel}_{\hat{\mathbf{n}},21} = \boldsymbol{\omega}_{\hat{\mathbf{n}},2} - \boldsymbol{\omega}_{\hat{\mathbf{n}},1} \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \\ 0 = M_{\hat{\mathbf{t}},12} = M_{\hat{\mathbf{t}},21} \\ \mathbf{M}_{\hat{\mathbf{n}},12} = -\mathbf{M}_{\hat{\mathbf{n}},21} \end{cases}$$

Cerniera (sferica)

Il vincolo di pattino impedisce il moto relativo, consentendo una rotazione generica.

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{v}^{rel}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \\ \forall \boldsymbol{\omega}^{rel}_{21} = \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1 \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \\ \mathbf{0} = \mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{21} \end{cases}$$

Carrello

Il vincolo di carello può essere pensato come la combinazione di un pattino e di una cerniera

$$\begin{cases} \forall\ \mathbf{v}^{rel}_{\hat{\mathbf{t}},21} = \mathbf{v}_{\hat{\mathbf{t}},2} - \mathbf{v}_{\hat{\mathbf{t}},1} \\ 0 = v^{rel}_{\hat{\mathbf{n}},21} = v_{\hat{\mathbf{n}},2} - v_{\hat{\mathbf{n}},1} \\ \forall\ \omega^{rel}_{\hat{\mathbf{t}},21} = \omega_{\hat{\mathbf{t}},2} - \omega_{\hat{\mathbf{t}},1} \\ \mathbf{0} = \boldsymbol{\omega}^{rel}_{\hat{\mathbf{n}},21} = \boldsymbol{\omega}_{\hat{\mathbf{n}},2} - \boldsymbol{\omega}_{\hat{\mathbf{n}},1} \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{F}_{\hat{\mathbf{t}},12} = \mathbf{F}_{\hat{\mathbf{t}},21} \\ F_{\hat{\mathbf{n}},12} = -F_{\hat{\mathbf{n}},21} \\ 0 = M_{\hat{\mathbf{t}},12} = M_{\hat{\mathbf{t}},21} \\ \mathbf{M}_{\hat{\mathbf{n}},12} = -\mathbf{M}_{\hat{\mathbf{n}},21} \end{cases}$$

Appoggio

Il vincolo di appoggio è un vincolo monolatero **todo** *aggiungere descrizione*

Attrito

Attrito statico

L'attrito statico è la forma di attrito che si manifesta tra due corpi quando non c'è moto relativo tra di essi, come una forza tangenziale alla superficie di contatto. Il più semplice modello di attrito statico prevede che il modulo massimo della forza di attrito F^s_{max} che si può esercitare tra due corpi è proporzionale alla reazione normale tra di essi, N,

$$F^s_{max} = \mu^s N \ .$$

Il coefficiente di proporzionalità μ^s viene definito **coefficiente di attrito statico**. In generale, le forze di attrito statico sono determinate dalle condizioni di equilibrio del corpo, se queste condizioni sono ottenibili ed è soddisfatta la relazione

$$|F^s| \geq F^s_{max} \ .$$

Attrito dinamico

L'attrito dinamico è la forma di attrito che si manifesta tra due corpi a contatto e in moto relativo, come una forza tangenziale alla superficie di contatto. Il più semplice modello di attrito statico prevede che la forza di attrito dinamico sia proporzionale alla reazione normale tra i due corpi e diretta in verso opposto alla velocità relativa,

$$\vec{F}_{12} = -\mu^d N \frac{\vec{v}_{12}}{|\vec{v}_{12}|} \ ,$$

avendo definito $\vec{F}_{12}$ come la forza agente sul corpo 1 a causa del corpo 2, e $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ la velocità del corpo 1 relativa al corpo 2.

- lavoro e potenza di una forza
- azioni conservative

CHAPTER

SEVEN

STATICA

La statica si occupa dello studio delle condizioni di equilibrio di un sistema, cioè le condizioni in cui un sistema rimane in quiete anche quando soggetto ad *azioni* esterne. Le condizioni di equilibrio dei sistemi sono un caso particolare delle *equazioni della dinamica*, nel caso in cui il sistema sia in quiete e le derivate delle quantità dinamiche nulle.

In generale le condizioni di equilibrio dipendono dalla natural del sistema. Come si vedrà meglio nelle sezioni di questo capitolo,

- le condizioni di equilibrio di un sistema puntiforme sono garantite dall'equilibrio globale delle forze agenti sul sistema
- le condizioni di equilibrio di un corpo rigido sono garantite dall'equilibrio globale delle forze e dall'equilibrio globale dei momenti agenti sul sistema
- le condizioni di equilibrio di sistemi composti da corpi puntiformi e corpi rigidi sono garantite dalle condizioni di equilibrio di ognuna delle sue parti
- le condizioni di equilibrio di mezzi continui deformabili è garantito dall'equilibrio globale e locale delle forze

7.1 Statica del punto

La condizione necessaria all'equilibrio di un sistema puntiforme è:

- l'equilibrio **globale** delle **forze esterne** agenti sul sistema

$$\sum_k \vec{F}_k^{ext} = \vec{0} \ .$$

7.2 Statica di un corpo rigido

Le condizioni necessarie all'equilibrio di un corpo rigido sono:

- l'equilibrio **globale** delle **forze esterne** agenti sul sistema
- l'equilibrio **globale** dei **momenti esterni** agenti sul sistema

$$\begin{cases} \sum_k \vec{F}^{ext} = \vec{0} \\ \sum_k \vec{M}_{k,H}^{ext} = \vec{0} \ . \end{cases}$$

7.2.1 Problemi nel piano

Esempi ed esercizi

- leve
- carrucole
- ingranaggi e trasmissioni

7.3 Statica dei mezzi deformabili

La condizione necessaria all'equilibrio di un sistema puntiforme è:

- l'equilibrio **locale** delle forze agenti sul sistema
- l'equilibrio **locale** dei momenti agenti sul sistema

Gli equilibri globali sono una diretta conseguenza degli equilibri locali, e del principio di azione e reazione della dinamica.

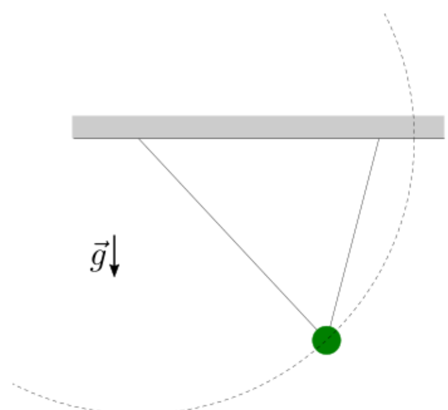
7.3.1 Strutture

7.3.2 Fluidi

- Stevino e principio di Archimede

7.4 Problemi

Problema 1. Data la massa m della massa puntiforme appeso tramite due fili inestensibili ideali di lunghezza L_1 e L_2 note, si calcolino le reazioni a terra.



Soluzione. I fili inestensibili senza massa e senza rigidezza flessionale possono solo trasmettere un'azione assiale. Ci si aiuta qui con un sistema di coordinate cartesiane con asse x orizzontale con coordinata crescente verso destra e asse y verticale con coordinata crescente verso l'alto. Date le direzioni dei fili identificate dai vettori unitari $\hat{t}_1$, $\hat{t}_2$, l'equilibrio della massa m è garantito dall'equilibrio delle forze,

$$\hat{0} = -mg\hat{y} + F_1\hat{t}_1 + F_2\hat{t}_2 \ .$$

Definiti gli angoli θ_1, θ_2, calcolabili dalla geometria del problema - qui considerati noti e calcolati in seguito - e tali che $\hat{t}_1 = \hat{x}\cos\theta_1 + \hat{y}\sin\theta_1$, $\hat{t}_2 = \hat{x}\cos\theta_2 + \hat{y}\sin\theta_2$, le componenti cartesiane della condizione di equilibrio forniscono un sistema di due equazioni nelle due incognite F_1, F_2,

$$\begin{cases} F_1\cos\theta_1 + F_2\cos\theta_2 = 0 \\ F_1\sin\theta_1 + F_2\sin\theta_2 = mg \end{cases}$$

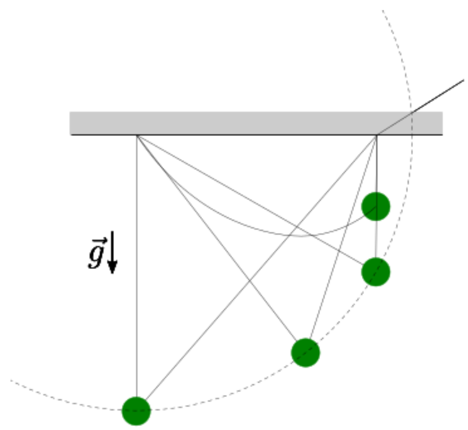
che ha soluzione

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2}\begin{bmatrix} \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\begin{bmatrix} -\cos\theta_2 \\ \cos\theta_1 \end{bmatrix} mg\,.$$

todo *Controllare conti. Aggiungere immagine.*

Grandezze geometriche del problema. todo

Problema 2. Data la massa m della massa puntiforme appeso tramite due fili inestensibili ideali di lunghezza L_1 nota e L_2 variabile, si calcolino le reazioni a terra in funzione della lunghezza del filo 2.

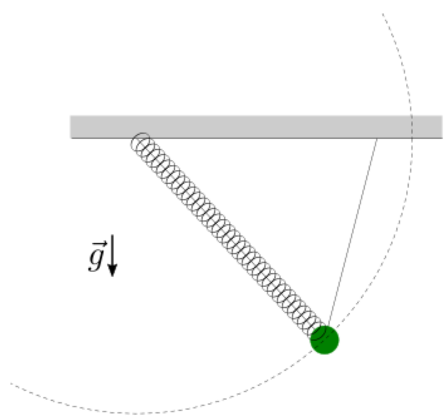


Soluzione.

Problema 3. Data la massa m della massa puntiforme appeso tramite un filo inestensibile ideale di lunghezza L e una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo x_0 collegata a terra in un punto distante H dal punto a terra dove è collegato il filo, si calcoli:

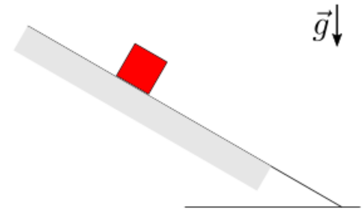
1. la posizione del punto
2. la lunghezza della molla
3. le reazioni vincolari a terra

nella configurazione di equilibrio.



Soluzione.

Problema 4. Data m, μ^s, trovare l'angolo massimo θ_{max} per il quale esiste una condizione di equilibrio per il cubetto rosso.



Soluzione. Per l'equilibrio del corpo è necessario l'equilibrio delle forze. Le forze agenti sul cubetto rosso sono la sua forza peso e la reazione di contatto $\vec{R}$ con la parete inclinata, che può essere scomposta nella direzione perpendicolare - reazione normale - e parallela alla parete - attrito.

La condizione di equilibrio,

$$\vec{0} = -mg\hat{y} + \vec{R} \, ,$$

può essere proiettata lungo la direzione normale alla parete $\hat{n}$ e la direzione tangente $\hat{t}$ (verto l'alto, così che $\hat{y} = -\cos\theta\,\hat{n} - \sin\theta\,\hat{t}$

$$\begin{cases} 0 = N - mg\cos\theta \\ 0 = F - mg\sin\theta \, , \end{cases}$$

così che $F = N\;\tan\theta$. Bisogna infine verificare che questa forza di attrito statico possa essere trasmessa, con la condizione

$$|F| \le F^{s,max} = \mu^s\,N \, ,$$

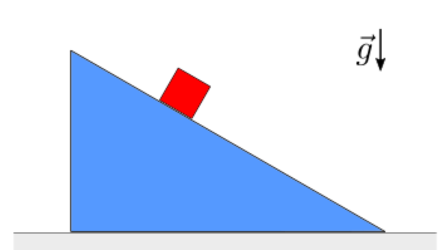
insieme alla condizione di contatto $N \ge 0$, e quindi

$$|\tan\theta| \le \mu^s \, .$$

Problema 5. Data m, M, μ^s tra i due solidi, si chiede di calcolare:

1. la risultante delle azioni scambiate tra i due corpi
2. la risultante delle reazioni vincolari a terra agenti sul solido blu,

nella condizione di equilibrio del sistema, nell'ipotesi che l'attrito tra solido blu e terra sia trascurabile. Verificare le condizioni limite tra θ e μ^s affinché l'equilibrio sia possibile



Soluzione. Il piano orizzontale liscio non può trasmettere nessuna forza orizzontale al prisma triangolare. L'equilibrio delle forze del prisma triangolare, necessaria alla condizione di equilibrio, implica quindi che la risultante delle forze di contatto con il blocchetto rosso ha direzione verticale anch'essa.

Dalla condizione di equilibrio per il blocchetto rosso,

$$\vec{0} = -mg\hat{y} + \vec{R}_{quad,tri} \qquad \rightarrow \qquad \vec{R}_{quad,tri} = mg\hat{y} \; .$$

La risultante delle forze scambiate tra i corpi è quindi uguale e contraria al peso del cubetto (**1**). L'equilibrio del corpo triangolare

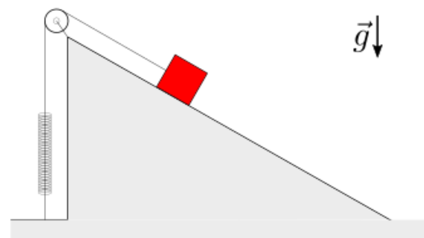
$$\vec{0} = -Mg\hat{y} + \vec{R}_{tri,quad} + \vec{R}_{tri,plane} \; ,$$

implica che la reazione $\vec{R}_{tri,plane}$ agente sul solido triangolare dovuta alla superficie orizzontale è uguale e contraria alla somma del peso dei due solidi (**2**),

$$\vec{R}_{tri,plane} = Mg\hat{y} - \vec{R}_{tri,quad} = Mg\hat{y} + \vec{R}_{quad,tri} = Mg\hat{y} + mg\hat{y} \; .$$

Problema 6. Data la massa m del blocco rosso, la costante elastica k della molla lineare ideale, con lunghezza a riposo ℓ_0, viene chiesto di:

1. determinare la lunghezza della molla nella condizione di equilibrio, nell'ipotesi che l'attrito tra blocco rosso e piano inclinato sia trascurabile
2. determinare le possibili condizioni di equilibrio, nell'ipotesi che l'attrito statico tra blocco rosso e piano inclinato sia μ^s



Soluzione. I fili inestensibili trasmettono solo azione assiale nela direzione del filo, costante in ogni sua sezione. Le condizioni di equilibrio alla rotazione di una carrucola assicurano che sia costante l'azione assiale ai due capi di un filo parzialmente avvolto attorno alla carrucola, nel caso di attriti nulli (carrucola ideale).

Il problema può essere risolto scrivendo le condiizoni di equilibrio della molla,

$$F = k(\ell - \ell_0)$$

e del blocchetto rosso, proiettate in direzione perpendicolare e tangente alla superficie inclinata

$$\vec{0} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{R} \qquad , \qquad \begin{cases} t: \; 0 = -F + mg\sin\theta + F_t \\ n: \; 0 = \quad -mg\cos\theta + F_n \end{cases}$$

In assenza di attrito, $F_t = 0$. In assenza di attrito, la reazione tangenziale è nulla $F_t = 0$ e quindi

$$\begin{aligned} F_n &= mg\cos\theta \\ F &= mg\sin\theta \\ \Delta\ell &= \frac{mg}{k}\sin\theta \end{aligned}$$

Con attrito statico. In presenza di attrito statico, la soluzione non è unicamente determinata ma bisogna discutere le condizioni che garantiscono l'equilibrio, verificando la condizione $|F_t| \le \mu^s F_n$. Le espressione delle componenti normali e tangenziali della reazione vincolare agente sul blocchetto,

$$\begin{aligned} F_n &= mg\cos\theta \\ F_t &= k\Delta\ell - mg\sin\theta \end{aligned}$$

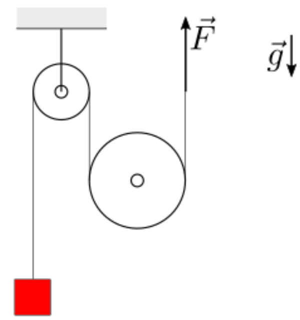
permettono di scrivere la condizione che garantisce l'equilibrio come

$$|k\Delta\ell - mg\sin\theta| \le \mu_s mg\cos\theta$$

e quindi

$$-\mu_s mg\cos\theta + mg\sin\theta \le k\Delta\ell \le \mu_s mg\cos\theta + mg\sin\theta\ .$$

Problema 7. Data la massa m del blocco rosso, il raggio R_1, R_2 delle due carrucole, si chiede di determinare la forza $\vec{F}$ da applicare nella condizione di equilibrio, nell'ipotesi di fili inestensibili e carrucole ideali e senza massa. Si chiede poi di ripetere il calcolo nell'ipotesi in cui la massa delle carrucole non sia trascurabile, ma siano M_1 per la carrucola vincolata a terra, e M_2 per la carrucola non vincolata a terra.



Soluzione.

$$\begin{aligned}
0 &= -mg + T_1 \\
0 &= F + T_1 - Mg \\
0 &- MgR_2 + F\,(2R_2)
\end{aligned}$$

$$F = \frac{1}{2}Mg$$

$$T_1$$

\begin{minipage}[t]{.55\textwidth} \vspace{0pt} \textbf{Problema 8.} Nel meccanismo di un orologio i 3 componenti che devono guidare il moto delle lancette dei secondi, dei minuti e delle ore, connessi "in cascata" tramite ingranaggi (con rapporto dei raggi $1 : 60$ **todo** scriverlo esplicitamente?). Conoscendo la costante elastica k e la compressione $\Delta\theta$ della molla che guida il componente che guida la lancetta delle ore, si chiede di: \begin{enumerate} \item determinare la forza necessaria da applicare alla lancetta dei secondi nel punto indicato nell'imagine, necessaria a garantire la posizione di equilibrio \item le reazioni vincolari in corrispondenza delle cerniere che collegano a terra i 3 componenti, nell'ipotesi che non si scambino forze in direzione radiale \end{enumerate} \end{minipage} \hspace{.05\textwidth} \begin{minipage}[t]{.40\textwidth} \vspace{0pt} \includegraphics[width=.95\textwidth]{../../media/pb-statics-002-ese-001.png} \end{minipage} $$

Soluzione.

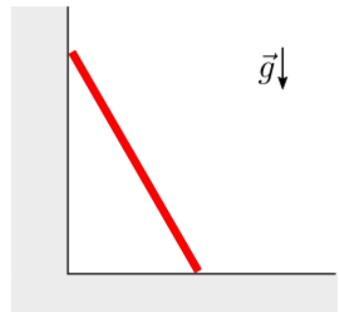
$$\begin{aligned}
FR_1 &= F_{12}R_2 \\
F_{12}R_2 &= F_{23}R_3 \\
F_{23}R_3 &= k\Delta\theta\ .
\end{aligned}$$

$$F = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_3}{R_2}\frac{1}{R_3}k\Delta\theta\ .$$

Problema 9. Data la lunghezza L e la massa m dell'asta rigida con distribuzione di massa uniforme e il coefficiente di attrito stativo μ^s tra asta e superficie orizzontale, si chiede di:

1. determinare la condizione limite dell'equilibrio
2. determinare le reazioni a terra

nell'ipotesi che l'attrito sulla superficie verticale sia trascurabile.



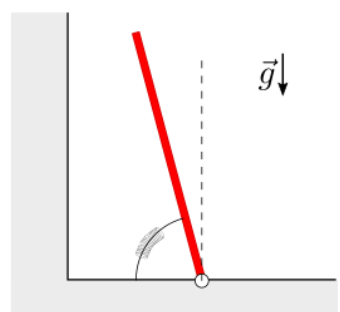
Soluzione.

$$\begin{aligned} x &: 0 = N_1 + F_2^s \\ y &: 0 = -mg + N_2 \\ \text{rot}, 2 &: 0 = mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - N_1\ell\sin\theta \end{aligned}$$

Problema 10. Data la lunghezza L e la massa m dell'asta rigida incernierata a terra, e la costante elastica k della molla rotazionale, si chiede di:

1. calcolare la condizione di equilibrio
2. le reazioni vincolari sull'asta

discutendo i due casi determinati dalla condizione di appoggio dell'estremo superiore dell'asta sulla parete verticale.

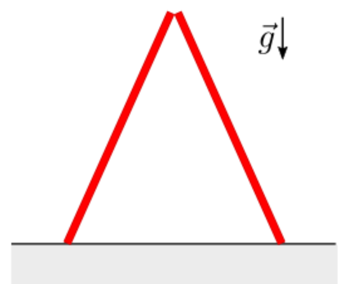


Soluzione. Nel caso generale,

$$\begin{aligned} x &: 0 = N_1 + F_{2,x} \\ y &: 0 = -mg + F_{2,y} \\ \text{rot}, 2 &: 0 = mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - N_1\ell\sin\theta + k\Delta\theta \end{aligned}$$

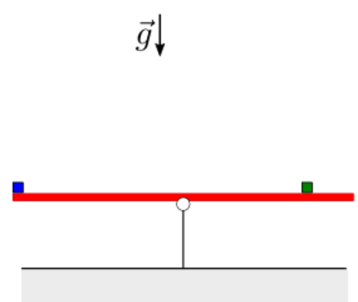
Il contatto avviene quando la rigidezza della molla garantisce una condizione di equilibrio con $\Delta\theta < \overline{\Delta\theta}$. Se non c'è contatto, $N_1 = 0$; se c'è contatto, in generale $N_1 > 0$.

Problema 11.



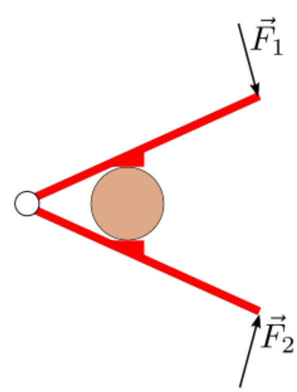
Soluzione.

Problema 12.



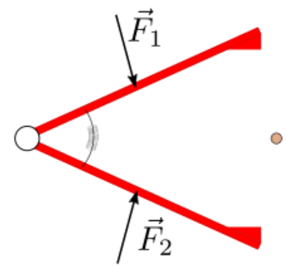
Soluzione.

Problema 13.



Soluzione.

Problema 14.



Soluzione.

basics

Nov 11, 2024

1 min read

CHAPTER

EIGHT

INERZIA

8.1 Massa e distribuzione di massa

La massa è la grandezza fisica che rappresenta la quantità di materia (**todo** *Non confonderla con la mole, definita come quantità di sostanza, una volta affermatasi la teoria atomica*)

In meccanica classica, la può essere definita in maniera operativa:

- tramite la sua *interazione gravitazionale* con altri corpi dotati di massa
- come una misura della resistenza di un sistema ai cambiamenti del suo stato di moto in risposta a una forza applicata, come sarà chiaro dalle equazioni della *dinamica*

8.2 Quantità dinamiche

Come sarà chiaro nello sviluppo delle *equazioni di moto di un sistema*, la definizione di alcune grandezze dinamiche additive risulta naturale, fornendo dei concetti utili e sintetici per la costruzione di un modello e l'interpretazione dei fenomeni fisici.

Queste grandezze dinamiche combinano la massa e la sua distribuzione con le grandezze cinematiche del sistema. In particolare, risulta utile definire tre grandezze:

- quantità di moto
- momento della quantità di moto
- energia cinetica

Le *equazioni del moto* dei sistemi rappresentano delle equazioni differenziali che mettono in relazione la variazione di queste quantità dinamiche con la causa di queste variazioni, in generale riconducibile ad *azioni* agenti sul sistema.

Sotto opportune ipotesi, queste grandezze dinamiche sono costanti del moto, come descritto dalle *leggi di conservazione*.

Le 3 grandezze dinamiche possono avere espressioni diverse, a seconda del sistema di interesse. Nel caso di corpi rigidi, queste possono essere espresse in termini di velocità di un punto materiale e della velocità angolare del corpo.

basics

Nov 11, 2024

0 min read

8.3 Inerzia e grandezze dinamiche di un punto

$$\begin{aligned}
\vec{Q}_P &= m_P \, \vec{v}_P \\
\vec{L}_{P,H} &= m_P \, (P - H) \times \vec{v}_P \\
K_P &= \frac{1}{2} m_P \, |\vec{v}_P|^2
\end{aligned}$$

basics

Nov 11, 2024

0 min read

8.4 Inerzia e grandezze dinamiche di un sistema esteso con distribuzione discreta di massa

$$\begin{aligned}
\vec{Q} &= \sum_i \vec{Q}_i = \sum_i m_i \, \vec{v}_i \\
\vec{L}_H &= \sum_i \vec{L}_{i,H} = \sum_i m_i \, (P_i - H) \times \vec{v}_i \\
K &= \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \, |\vec{v}_i|^2
\end{aligned}$$

8.4.1 Sistemi rigidi

Usando la definizione di centro di massa

$$mG = \sum_i m_i P_i$$

e legge del moto rigido

$$\vec{v}_i - \vec{v}_P = \vec{\omega} \times (P_i - P)$$

le quantità dinamiche possono essere espresse in funzione della velocità del punto di riferimento P e della velocità angolare del sistema, tramite la massa e le altre quantità inerziali

- la quantità di moto

$$\begin{aligned}
\vec{Q} = \sum_i m_i \vec{v}_i &= \sum_i m_i \left(\vec{v}_P + \vec{\omega} \times (P_i - P) \right) = \\
&= m \vec{v}_P + \vec{\omega} \times m(G - P)
\end{aligned}$$

- momento della quantità di moto

$$\begin{aligned}
\vec{L}_H = \sum_i m_i (P_i - H) \times \vec{v}_i &= \sum_i m_i \left(P_i - P + \vec{r}_P - \vec{r}_H \right) \times \vec{v}_i = \\
&= \sum_i m_i \left(P_i - P \right) \times \vec{v}_i + (P - H) \times \vec{Q} = \\
&= \sum_i m_i \left(P_i - P \right) \times \left(\vec{v}_P - (P_i - P) \times \vec{\omega} \right) + (P - H) \times \vec{Q} = \\
&= m(G - P) \times \vec{v}_P - \sum_i m_i \left(P_i - P \right) \times \left((P_i - P) \times \vec{\omega} \right) + (P - H) \times \vec{Q} = \\
&= \mathbb{I}_P \cdot \vec{\omega} + m(G - P) \times \vec{v}_P + (P - H) \times \vec{Q}
\end{aligned}$$

Nel caso di moto 2-dimensionale e velocità angolare perpendicolare a questo piano, **todo**

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{i/P} & := P_i - P = (x_i - x_P)\,\hat{x} + (y_i - y_P)\,\hat{y} \\
\vec{\omega} & = \dot{\theta}\,\hat{z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\vec{r}_{i/P} \times \left(\vec{r}_{i/P} \times \hat{\omega}\right) & = -(\Delta x_i \hat{x} + \Delta y_i \hat{y}) \times \left[(\Delta x_i \hat{x} + \Delta y_i \hat{y}) \times \dot{\theta}\hat{z}\right] = \\
& = -\dot{\theta}(\Delta x_i \hat{x} + \Delta y_i \hat{y}) \times (-\Delta x_i \hat{y} + \Delta y_i \hat{x}) = \\
& = (\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)\,\dot{\theta}\,\hat{z}\,.
\end{aligned}$$

e l'espressione del momento della quantità di moto diventa

$$\vec{L}_H = I_P\,\vec{\omega} + m(G-P) \times \vec{v}_P + (P-H) \times \vec{Q}$$

con

$$I_P = \sum_i m_i \left[(x_i - x_P)^2 + (y_i - y_P)^2\right]$$

basics

Nov 11, 2024

0 min read

8.5 Inerzia e grandezze dinamiche di un sistema esteso con distribuzione continua di massa

8.5.1 Sistemi rigidi

basics

Nov 11, 2024

1 min read

CHAPTER

NINE

DINAMICA

La dinamica si occupa del moto dei sistemi e delle cause del moto, mettendo insieme la descrizione cinematica, l'inerzia dei sistemi a perseverare nel moto, e le cause di una variazione del moto.

Princìpi della dinamica. Vengono discussi i tre principi della dinamica di Newton e il significato della relatività galileiana.

Equazioni cardinali della dinamica. Vengono presentate le tre equazioni cardinali della dinamica per sistemi chiusi, che mettono in relazione la variazione delle grandezze dinamiche alle azioni, e che nel caso di moti regolari possono essere scritte in forma differenziale

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{Q}} &= \vec{R}^{ext} && \text{(bilancio quantità di moto)} \\
\dot{\vec{L}}_H + \dot{\vec{x}}_H \times \vec{Q} &= \vec{M}_H^{ext} && \text{(bilancio momento della quantità di moto)} \\
\dot{K} &= P^{tot} && \text{(bilancio energia cinetica)} \ .
\end{aligned}$$

Viene dimostrato che le equazioni di bilancio hanno la stessa forma per ogni sistema chiuso se scritti in termini di variazione di quantità di moto, momento della quantità di moto ed energia cinetica, senza esplicitare la forma particolare di queste grandezze dinamiche per i sistemi particolari presi in considerazione. Vengono forniti alcuni esempi ed esercizi svolti.

Leggi di conservazione. Sotto opportune ipotesi immediatamente riconoscibili dalle equazioni cardinali, vengono ricavate le leggi di conservazione validi per i sistemi meccanici,

$$\begin{aligned}
\vec{R}^{ext} &= \vec{0} && \rightarrow && \vec{Q} = \text{const.} \\
\vec{M}_H^{ext} &= \vec{0}, \dot{\vec{x}}_H \times \vec{Q} = \vec{0} && \rightarrow && \vec{L}_H = \text{const.} \\
P^{tot} &= \vec{0} && \rightarrow && K = \text{const.}
\end{aligned}$$

Nel caso in cui le azioni agenti sul sistema non abbiano potenza nulla, ma che siano forze conservative, si riconosce la legge di conservazione dell'energia meccanica E^{mec}, definita come somma dell'energia cinetica, K, e dell'energia potenziale, V,

$$P^{tot} = -\dot{V} \ , \quad E^{mec} = K + V \qquad \rightarrow \qquad E^{mec} = \text{const.}$$

Urti. Viene presentato un modello di urto tra sistemi fondato unicamente sul coefficiente di restituzione, ε, per rappresentare la frazione di energia meccanica persa dal sistema durante l'urto. Vengono presentati dei problemi risolti grazie ai princìpi di conservazione e alle equazioni cardinali in forma incrementale.

Moti particolari - gravitazione. Vengono infine analizzati alcuni sistemi particolare, di interesse pratico, storico, e/o didattico **todo**

9.1 Princìpi della dinamica di Newton

La meccanica classica di Newton viene costruita assumendo valido il **principio di conservazione della massa** e i **tre principi della dinamica**.

Principio di conservazione della massa. In meccanica classica, il principio di Lavoisier di conservazione della massa può essere riassunto con la formula "niente si crea, niente si distrugge". Per essere più precisi, il principio di conservazione della massa postula che la massa di un sistema chiuso è costante.

Primo principio - principio di inerzia. Un sistema (o meglio, il baricentro di un sistema) sul quale agisce una forza esterna netta nulla, persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema di riferimento inerziale.

Secondo principio - bilancio della quantità di moto per sistemi chiusi. Rispetto a un sistema di riferimento inerziale, la variazione della quantità di moto $\vec{Q}$ di un sistema chiuso è uguale all'impulso delle forze esterne $\vec{I}^{ext}$ agenti su di esso,

$$\Delta \vec{Q} = \vec{I}^{ext} \ .$$

Nel caso di moto regolare, in cui la quantità di moto del sistema è una grandezza continua e differenziabile rispetto al tempo, il secondo principio può essere scritto in forma differenziale, facendo tendere a zero l'intervallo di tempo considerato

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{R}^{ext} \ ,$$

avendo indicato con $\vec{R}^{ext}$ la risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

Terzo principio - principio di azione-reazione. Se un sistema i esercita una forza $\vec{F}_{ji}$ sul sistema j, allora il sistema j esercita sul sistema i una forza $\vec{F}_{ij}$ "uguale e contraria" - stesso valore assoluto e verso opposto,

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \ .$$

todo Osservazioni

- sistema di riferimento inerziale e invarianza galileiana
- sistemi aperti e sistemi chiusi: sottolineare la validità di $\Delta \vec{Q} = \vec{I}^{ext}$ solo per sistemi chiusi, mentre per sistemi aperti è necessario un termine di flusso della quantità meccanica. Riferimento alla meccanica dei fluidi

9.1.1 Sistemi di riferimento inerziali e invarianza galileiana.

La formulazione dei princìpi della dinamica si basa sul concetto di sistema di riferimento inerziale, di cui non è stato ancora detto nulla. E' possibile dare una definizione operativa di osservatore inerziale (o sistema di riferimento inerziale? **todo**), supponendo che:

- l'osservatore sia dotato di uno strumento in grado di misurare le forze e i momenti ai quali è soggetto (**todo** ad esempio una bilancia o una combinazione di dinamometri)
- sia possibile conoscere le azioni "vere" (**todo** fare riferimento alle forze "vere" note: gravitazione - che in meccanica classica è una forza -, elettromagnetica, nucleare forte e debole; o le loro manifestazioni macroscopiche come ad esempio forze di contatto) agenti sul sistema.

Definizione. Un osservatore è inerziale se la lettura degli strumenti di misura in suo possesso corrisponde alle azioni "vere" agenti sul sistema. In particolare, in assenza di azioni nette gli strumenti restituiscono una misura nulla.

Definizione quantità cinematiche. Sia O l'origine di un sistema di riferimento coincidente con un'osservatore inerziale, la velocità di un punto P rispetto a O è a derivata del vettore posizione $P - O$ rispetto al tempo (assoluto in meccanica classica di Newton)

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(P - O) \ .$$

La quantità di moto di un sistema rispetto al sistema di riferimento inerziale con origine in O è data dal prodotto della massa del sistema per la velocità del centro di massa G,

$$\vec{Q} = m\,\vec{v}_G \ .$$

Equivalenza di sistemi inerziali e invarianza galileiana. Dato un sistema inerziale, ogni altro sistema in moto relativo con un moto di traslazione a velocità costante è un sistema inerziale.

todo *Prova.*

Invarianza galileiana.

- Posizione

$$P - O_0 = P - O_1 + O_1 - O_0$$

- Velocità e quantità di moto

$$\vec{v}_{P/0} = \vec{v}_{P/1} + \vec{v}_{O_1/0}$$

$$\begin{aligned} m\vec{v}_{G/0} &= m\vec{v}_{G/1} + m\vec{v}_{O_1/0} \\ \vec{Q}_{/0} &= \vec{Q}_{/1} + m\vec{v}_{O_1/0} \end{aligned}$$

  con $\frac{d}{dt}\vec{v}_{O_1/0} = \vec{a}_{O_1/0} = \vec{0}$.

- Accelerazione e secondo principio della dinamica

$$\vec{a}_{P/0} = \vec{a}_{P/1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{Q}_{/0} &= \frac{d}{dt}\vec{Q}_{/1} + \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_{O_1/0}\right) \\ \dot{\vec{Q}}_{/0} &= \dot{\vec{Q}}_{/1} \end{aligned}$$

  essendo $\frac{d}{dt}\vec{v}_{O_1/0} = \vec{a}_{O_1/0} = \vec{0}$.

Di conseguenza, il secondo principio della dinamica assume la stessa forma quando è riferito a un sistema di riferimento inerziale qualsiasi,

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{R}^{ext} \ ,$$

e mentre la regola di trasformazione delle veloctià e delle posizioni rispetto ai diversi sistemi di riferimento inerziali è data dalle leggi

$$\begin{cases} \vec{v}_{P/0} = \vec{v}_{P/1} + \vec{v}_{O_1/0} \\ \vec{r}_{P/0} = \vec{r}_{P/1} + \vec{v}_{O_1/0}t + \vec{r}_{O_1/0} \end{cases}$$

che costituiscono le leggi della **relatività galileiana**, che legano due sistemi inerziali.

9.2 Equazioni cardinali della dinamica

Le equazioni cardinali della dinamica mettono in relazione le variazioni delle grandezze inerziali con le azioni agenti sul sistema.

Usando i princìpi della meccanica di Newton e la conservazione della massa per sistemi chiusi, è possibile ricavare le equazioni cardinali della dinamica, che governano il moto di un sistema meccanico.

Per ogni sistema chiuso le equazioni cardinali assumono la stessa forma, quando vengono espresse in termini di quantità di moto, quantità del momento angolare ed energia cinetica del sistema. Questo viene qui dimostrato per un *punto materiale* per un *sistema di punti materiali*, e per *un corpo rigido con distribuzione di massa continua in un moto piano* **todo**, ma è valido per un sistema meccanico qualsiasi.

In particolare, per moti regolari e derivabili (e quindi senza urti impulsivi) le 3 equazioni cardinali del moto sono:

- **bilancio della quantità di moto**: la derivata nel tempo della quantità di moto di un sistema chiuso è uguale alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema,

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{R}^{ext} \ ;$$

- **bilancio del momento della quantità di moto**: la derivata nel tempo del momento della quantità di moto di un sistema chiuso rispetto a un punto H, a meno di un "termine di trasporto della quantità di moto", è uguale alla risultante dei momenti esterni rispetto al polo H

$$\dot{\vec{L}}_H + \dot{\vec{x}}_H \times \vec{Q} = \vec{M}^{ext}_H \ ;$$

- **bilancio dell'energia cinetica**: la derivata nel tempo dell'energia cinetica di un sistema chiuso è uguale all potenza totale agente sul sistema, uguale alla somma della potenza delle azioni interne e delle azioni interne al sistema,

$$\dot{K} = P^{tot} = P^{ext} + P^{int} \ .$$

basics

Nov 11, 2024

0 min read

9.2.1 Equazioni cardinali della dinamica per un punto

Le equazioni cardinali della dinamica in forma differenziale,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{Q}} &= \vec{R}^{ext} && \text{(bilancio quantità di moto)} \\ \dot{\vec{L}}_H + \dot{\vec{x}}_H \times \vec{Q} &= \vec{M}^{ext}_H && \text{(bilancio momento della quantità di moto)} \\ \dot{K} &= P^{tot} && \text{(bilancio energia cinetica)} \ . \end{aligned}$$

vengono ricavate per un sistema puntiforme calcolando la derivata nel tempo delle grandezze dinamiche di un punto,

$$\begin{aligned} \vec{Q}_P &:= m_P \vec{v}_P && \text{(quantità di moto)} \\ \vec{L}_{P,H} &:= (\vec{r}_P - \vec{r}_H) \times \vec{Q} = m_P (\vec{r}_P - \vec{r}_H) \times \vec{v}_P && \text{(momento della quantità di moto)} \\ K &:= \frac{1}{2} m_P \vec{v}_P \cdot \vec{v}_P = \frac{1}{2} m_P |\vec{v}_P|^2 && \text{(energia cinetica)} \end{aligned}$$

utilizzando i princìpi della dinamica.

Bilancio della quantità di moto

Il bilancio della quantità di moto di un punto materiale P, $\vec{Q}_P = m\vec{v}_P$ segue direttamente dal secondo principio della dinamica di Newton,

$$\dot{\vec{Q}}_P = \vec{R}^{ext}_P$$

Bilancio del momento della quantità di moto

La derivata nel tempo del momento della quantità di moto viene calcolata usando la regola del prodotto,

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}}_{P,H} &= \frac{d}{dt}\left[m_P(\vec{r}_P - \vec{r}_H) \times \vec{v}_P\right] = \\ &= m\left[(\dot{\vec{r}}_P - \dot{\vec{r}}_H) \times \vec{v}_P + m_P(\vec{r}_P - \vec{r}_H) \times \dot{\vec{v}}_P\right] = \\ &= -m_P\dot{\vec{r}}_H \times \vec{v}_P + m_P(\vec{r}_P - \vec{r}_H) \times \dot{\vec{v}}_P = \\ &= -\dot{\vec{r}}_H \times \vec{Q} + \vec{M}^{ext}_H \ .\end{aligned}$$

Bilancio dell'energia cinetica.

$$\begin{aligned}\dot{K}_P &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_P\vec{v}_P \cdot \vec{v}_P\right) = \\ &= m_P\dot{\vec{v}}_P \cdot \vec{v}_P = \\ &= \vec{R}^{ext} \cdot \vec{v}_P = \\ &= \vec{R}^{tot} \cdot \vec{v}_P = P^{tot} \ .\end{aligned}$$

basics

Nov 11, 2024

2 min read

9.2.2 Equazioni cardinali della dinamica per sistemi di punti

Partendo dalle equazioni dinamiche per un punto, si ricavano le equazioni dinamiche per un sistema di punti,

$$\begin{aligned}\dot{\vec{Q}} &= \vec{R}^{ext} && \text{(bilancio quantità di moto)} \\ \dot{\vec{L}}_H + \dot{\vec{x}}_H \times \vec{Q} &= \vec{M}^{ext}_H && \text{(bilancio momento della quantità di moto)} \\ \dot{K} &= P^{tot} && \text{(bilancio energia cinetica)} \ .\end{aligned}$$

sfruttando il terzo principio della dinamica di azione/reazione. Lo sviluppo delle equazioni permette di comprendere l'origine della natura additiva delle grandezze dinamiche di sistemi composti da più componenti,

$$\begin{aligned}\vec{Q} &= \sum_i \vec{Q}_i && \text{(quantità di moto)} \\ \vec{L}_H &= \sum_i \vec{L}_{H,i} && \text{(momento della quantità di moto)} \\ K &= \sum_i K_i && \text{(energia cinetica)} \ .\end{aligned}$$

(quantità di moto, momento della quantità di moto, energia cinetica),

Bilancio della quantità di moto.

E' possibile scrivere il bilancio della quantità di moto per ogni punto i del sistema, scrivendo la risultante delle forze esterne agente sul punto come la somma delle forze esterne all'intero sistema agenti sul punto e le forze interne scambiate con gli altri punti del sistema,

$$\vec{R}_i^{ext,i} = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \ .$$

L'equazione di bilancio per la i-esima massa diventa quindi

$$\dot{\vec{Q}}_i = \vec{R}_i^{ext,i} = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \ .$$

Sommando le equazioni di bilancio di tutte le masse, si ottiene

$$\begin{aligned}\sum_i \dot{\vec{Q}}_i &= \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \\ &= \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \sum_{\{i,j\}} \underbrace{\left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}\right)}_{=\vec{0}}\end{aligned}$$

e definendo la quantità di moto di un sistema come la somma delle quantità di moto delle sue parti e la risultante delle forze esterne come somma delle forze esterne agenti sulle parti del sistema,

$$\begin{aligned}\vec{Q} &:= \sum_i \vec{Q} \\ \vec{R}^{ext} &:= \sum_i \vec{F}_i^{ext}\end{aligned}$$

si ritrova la forma generale del bilancio della quantità di moto,

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{R}^{ext} \ .$$

Bilancio del momento della quantità di moto

E' possibile scrivere il bilancio del momento della quantità di moto per ogni punto i del sistema, scrivendo la risultante dei momenti esterni agente sul punto come la somma dei momenti esterni all'intero sistema agenti sul punto e i momenti interni scambiati con gli altri punti del sistema,

$$\vec{M}_{H,i}^{ext,i} = \vec{M}_{H,i}^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{M}_{H,ij} \ .$$

Nel caso le parti del sistema interagiscano tramite forze, il momento rispetto al polo H generato dalla massa j sulla massa i vale

$$\vec{M}_{H,ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_H) \times \vec{F}_{ij} \ .$$

L'equazione di bilancio per la i-esima massa diventa quindi

$$\dot{\vec{L}}_{H,i} + \dot{\vec{r}}_H \times \vec{Q}_i = \vec{M}_{H,i}^{ext,i} = \vec{M}_{H,i}^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{M}_{H,ij} \ .$$

Sommando le equazioni di bilancio di tutte le masse, si ottiene

$$\begin{aligned}\sum_i \left(\dot{\vec{L}}_i + \dot{\vec{r}}_H \times \vec{Q}_i\right) &= \sum_i \vec{M}_{H,i}^{ext} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{M}_{H,ij} = \\ &= \sum_i \vec{M}_{H,i}^{ext} + \sum_{\{i,j\}} \underbrace{\left(\vec{M}_{H,ij} + \vec{M}_{H,ji}\right)}_{=\vec{0}}\end{aligned}$$

e riconoscendo la quantità di moto del sistema e definendo il momento della quantità di moto di un sistema come la somma del momento della quantità di moto delle sue parti e la risultante dei momenti esterni come somma dei momenti esterni agenti sulle parti del sistema,

$$\vec{L}_H := \sum_i \vec{L}_{H,i}$$

$$\vec{M}^e_H := \sum_i \vec{M}^{ext}_{H,i}$$

si ritrova la forma generale del bilancio del momento della quantità di moto,

$$\dot{\vec{L}}_H + \dot{\vec{r}}_H \times \vec{Q} = \vec{M}^{ext}_H \ .$$

Bilancio dell'energia cinetica.

E' possibile ricavare il bilancio dell'energia cinetica del sistema, moltiplicando scalarmente il bilancio della quantità di moto di ogni punto,

$$\vec{v}_i \cdot m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{v}_i \cdot \left(\vec{F}^e_i + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \right) \ ,$$

riconoscendo nel primo termine la derivata nel tempo dell'energia cinetica dell'i-esimo punto,

$$\dot{K}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \right) = m_i \vec{v}_i \cdot \dot{\vec{v}}_i \ ,$$

e sommando queste equazioni di bilancio per ottenere

$$\sum_i \dot{K}_i = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{F}^e_i + \sum_i \vec{v}_i \cdot \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \ .$$

Definendo l'energia cinetica di un sistema come la somma dell'energia cinetica delle sue parti, e definendo la potenza delle forze esterne/interne agenti sul sistema come la somma della potenza di tutte le forze esterne/interni al sistema,

$$K := \sum_i K_i$$

$$P^e := \sum_i P^{ext}_i = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{F}^{ext}_i$$

$$P^i := \sum_i P^{int}_i = \sum_i \vec{v}_i \cdot \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

si ritrova la forma generale del bilancio dell'energia cinetica,

$$\dot{K} = P^{ext} + P^{int} = P^{tot} \ .$$

9.2.3 Equazioni cardinali della dinamica per un corpo rigido in moto piano

todo

basics

Nov 11, 2024

1 min read

9.3 Leggi di conservazione

Partendo dalle equazioni di bilancio,

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{Q}} &= \vec{R}^{ext} && \text{(bilancio quantità di moto)} \\
\dot{\vec{L}}_H + \dot{\vec{x}}_H \times \vec{Q} &= \vec{M}_H^{ext} && \text{(bilancio momento della quantità di moto)} \\
\dot{K} &= P^{tot} && \text{(bilancio energia cinetica)} \ .
\end{aligned}$$

sotto opportune ipotesi, si ottengono alcune leggi di conservazione di quantità meccaniche.

Conservazione della quantità di moto. L'equazione di bilancio della quantità di moto di un sistema chiuso garantisce che la quantità di moto di un sistema chiuso è costante se la risultante delle forze esterne sul sistema è nulla,

$$\vec{R}^{ext} = \vec{0} \qquad \rightarrow \qquad \vec{Q} = \text{const.}$$

Conservazione del momento della quantità di moto. L'equazione di bilancio del momento della quantità di moto di un sistema chiuso garantisce che il momento della quantità di moto di un sistema chiuso è costante se la risultante dei momenti esterni sul sistema è nulla, ed è nullo il termine di trasporto,

$$\vec{M}_H^{ext} = \vec{0}, \dot{\vec{x}}_H \times \vec{Q} = \vec{0} \qquad \rightarrow \qquad \vec{L}_H = \text{const.}$$

Conservazione del momento dell'energia cinetica. L'equazione di bilancio dell'energia cinetica di un sistema chiuso garantisce che il momento della quantità di moto di un sistema chiuso è costante se la risultante della potenza di tutte le azioni agenti sul sistema è nulla,

$$P^{tot} = \vec{0} \qquad \rightarrow \qquad K = \text{const.}$$

Conservazione del momento dell'energia meccanica. Se le azioni agenti su un sistema sono conservative, la loro potenza può essere scritta come derivata nel tempo di un'energia potenziale, $P^{tot} = -\dot{V}$. Se si definisce **energia meccanica** la somma dell'energia cinetica del sistema e dell'energia potenziale delle azioni agenti sul sistema, $E^{mec} := K + V$, segue immediatamente che, in assenza di azioni non-conservative l'energia meccanica di un sistema è costante,

$$P^{tot} = -\dot{V} \qquad \rightarrow \qquad E^{mec} = \text{const.}$$

9.4 Collisioni

Una descrizione dettagliata delle collisioni tra sistemi qualsiasi va ben al di là dello scopo di un primo approccio alla meccanica.

Qui, ci si limiterà allo studio di collisioni che:

- possono essere caratterizzate unicamente da un *coefficiente di ritorno*, ε **todo**
- avvengono in intervalli di tempo ridotti, al limite nulli

Questi urti comportano delle variazioni finite delle quantità dinamiche in intervalli di tempo finiti, vengono definiti **urti impulsivi** (**todo** *verificare*) e rappresentano un esempio di moto "non regolare", per il quale le equazioni cardinali della dinamica devono essere scritte in forma incrementale.

todo *approfondimento su forze impulsive e delta di Dirac?*

Tra due istanti temporali immediatamente precedente e immediatamente successivo all'urto tra due sistemi possono essere trascurate tutte le azioni agenti sul sistema complessivo tranne quelle **impulsive** dovute all'**urto**, e ad eventuali **reazioni**

vincolari (vedi esercizi),

$$\begin{aligned}\vec{I}^{ext} &= \Delta\vec{Q}\\ \vec{J}^{ext}_H &= \Delta\vec{\Gamma}_H + \Delta\vec{x}_H \times \vec{Q} = \Delta\vec{\Gamma}_H\\ L^{ext} + L^{int} &= \Delta K\ ,\end{aligned}$$

con $\vec{I}^{ext}$ l'impulso delle forze esterne durante l'urto, $\vec{J}^{ext}$ l'impulso dei momenti esterni durante l'urto, L^{ext}, L^{int} il lavoro delle forze esterne e interne durante l'urto.

E' bene osservare che in assenza di forze e momenti impulsivi esterni - anche dovuti a eventuali vincoli - ai due sistemi che collidono, la quantità di moto e il momento della quantità di moto del sistema complessivo si conservano in un urto. Al contrario, in generale, l'**energia cinetica non si conserva** poiché dipende anche dal lavoro delle azioni interne che includono quelle impulsive scambiate durante l'urto.

Il **coefficiente di restituzione** $\varepsilon \in [0, 1]$ caratterizza il tipo di urto e ha una facile interpretazione se l'urto viene studiato usando un sistema di riferimento con orgine il centro di massa del sistema, Q. Le quantità riferite a questo sistema vengono indicate qui con l'apice.

Poiché si è scelto come riferimento il centro di massa, in assenza di forze implusive esterne,

$$\vec{0} = \vec{p}^- = \vec{p}^+$$

$$\begin{aligned}\vec{0} = \vec{p}^- = \vec{p}_1^- + \vec{p}_2^-\\ \vec{0} = \vec{p}^+ = \vec{p}_1^+ + \vec{p}_2^+\end{aligned}$$

todo *distinguere tra componente normale e tangenziale*

Il coefficiente di restituzione viene definito come l'opposto del rapporto tra il valore assoluto (**todo** dovrebbe essere la componente normale, assumento che la componente tangenziale si conservi - oppure trovare anche un modello per la componente tangenziale, dovuta ad attrito) della quantità di moto di uno dei due corpi dopo e prima dell'urto,

$$\varepsilon := -\frac{|\vec{p}_1^{+'}|}{|\vec{p}_1^{-'}|} = -\frac{|\vec{p}_2^{+'}|}{|\vec{p}_2^{-'}|}$$

In termini di energia cinetica, nel sistema di riferimento del centro di massa

$$\begin{aligned}K^{+'} &= \frac{1}{2m_1}\vec{p}_1^{+'} \cdot \vec{p}_1^{+'} + \frac{1}{2m_2}\vec{p}_2^{+'} \cdot \vec{p}_2^{+'} =\\ &= \varepsilon^2 \left[\frac{1}{2m_1}\vec{p}_1^{-'} \cdot \vec{p}_1^{-'} + \frac{1}{2m_2}\vec{p}_2^{-'} \cdot \vec{p}_2^{-'}\right] = \varepsilon^2 K^{-'}\end{aligned}$$

9.4.1 Problemi

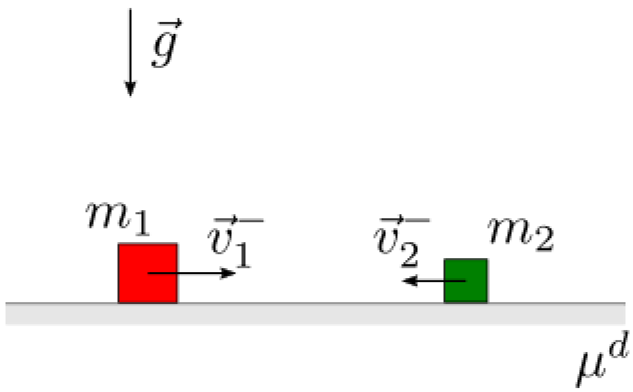
Collisione tra blocchi su piano orizzontale liscio Date le masse di due blocchi che scivolano su un piano orizzontale liscio, e le velocità iniziali dei due blocchi, e il coefficiente di restituzione dell'urto, viene chiesto di determinare le velocità dei due blocchi dopo l'urto.

Soluzione.

todo

Collisione tra blocchi su piano orizzontale scabro   Date le masse di due blocchi che scivolano su un piano orizzontale scabro, le velocità e la distanza iniziale tra i due blocchi, il coefficiente di restituzione dell'urto, il coefficiente di attrito dinamico μ^d tra i due blocchi e il piano orizzontale, viene chiesto di determinare:

- le condizioni affinché avvenga l'urto
- in caso di urto:
  - le velocità immediatamente dopo l'urto
  - la posizione finale delle due masse

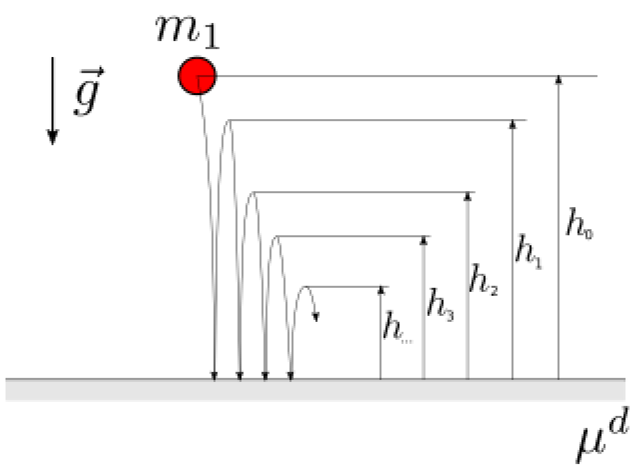


Soluzione.

todo

Rimbalzo di una palla   Dato il coefficiente di restituzione degli urti tra la palla di massa m_1 nota e ilpiano orizzontale, viene chiesto di determinare la distanza verticale percorsa dalla palla durante i rimbalzi.

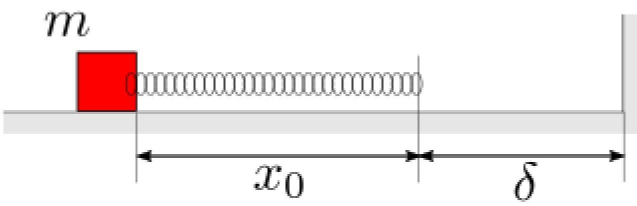
Oss. Il numero di rimbalzi è infinito, ma il risultato si ottiene da una serie infinita convergente.



Soluzione.

todo

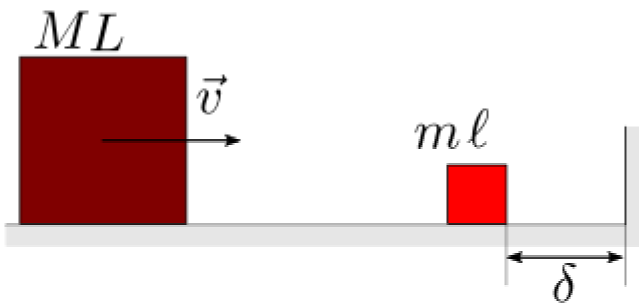
Collisione di un sistema massa-molla con una parete Data la configurazione iniziale del sistema massa-molla, con lunghezza a riposo nulla ℓ_0 e allungamento iniziale x_0, viene chiesto di descrivere l'evoluzione del sistema in funzione del coefficiente di restituzione ε degli urti tra la massa e la parete rigida verticale. In particolare, si chiede di distinguere il caso di urto elastico dai casi di urto parzialmente elastico.



Soluzione.

todo

Collisioni tra due blocchi e una parete rigida   Nel caso di urti perfettamente elastici tra i due blocchi e con la parete, viene chiesto di determinare il numero di urti tra i due blocchi.



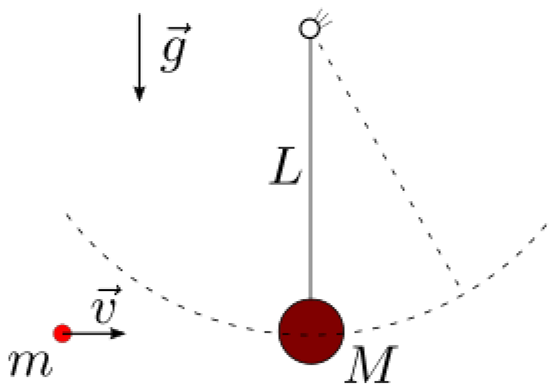
Soluzione.

todo

Proiettile su pendolo con massa concentrata Un proiettile colpisce un pendolo. In funzione del coefficiente di restituzione ε, viene chiesto di determinare:

- le condizioni immediatamente successive all'urto
- l'angolo massimo raggiunto dal pendolo

Si calcolino poi le reazioni vincolari a terra, prima, durante e dopo l'urto.



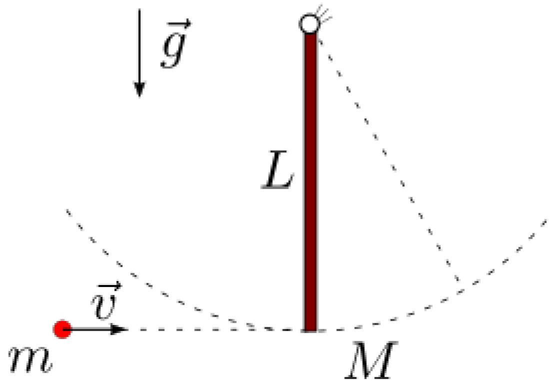
Soluzione.

todo

Proiettile su pendolo con massa distribuita   Un proiettile colpisce un pendolo. In funzione del coefficiente di restituzione ε, viene chiesto di determinare:

- le condizioni immediatamente successive all'urto
- l'angolo massimo raggiunto dal pendolo.

Si calcolino poi le reazioni vincolari a terra, prima, durante e dopo l'urto.



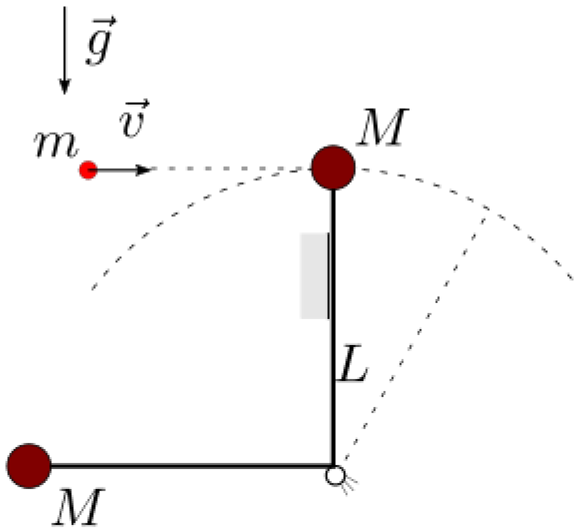
Soluzione.

todo

Proiettile su bersaglio di poligono di tiro Un proiettile colpisce il bersaglio di un poligono, inizialmente appoggiato alla parete verticale. In funzione del coefficiente di restituzione ε, viene chiesto di determinare:

- le condizioni immediatamente successive all'urto
- la velocità minima del proiettile prima dell'urto che garantisce di abbattere il bersaglio.

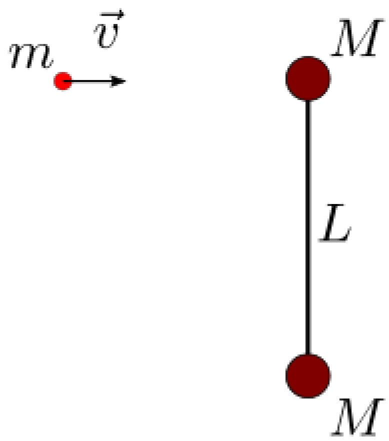
Si calcolino poi le reazioni vincolari a terra, prima, durante e dopo l'urto.



Soluzione.

todo

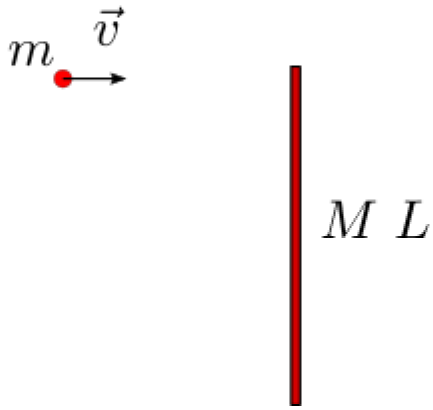
Collisione su sistema libero rigido di masse concentrate Un proiettile colpisce un sistema rigido di due masse concentrate, libero e inizialmente in quiete. Si chiede di determinare il moto dei sistemi dopo l'urto, in funzione del coefficiente di restituzione.



Soluzione.

todo

Collisione su sistema libero rigido a massa distribuita Un proiettile colpisce un sistema rigido di due masse concentrate, libero e inizialmente in quiete. Si chiede di determinare il moto dei sistemi dopo l'urto, in funzione del coefficiente di restituzione.



Soluzione.

todo

basics

Nov 11, 2024

3 min read

9.5 Gravitazione

9.5.1 Legge di gravitazione universale

$$\vec{F}_{10} = G\, m_0\, m_1 \frac{\vec{r}_{01}}{|\vec{r}_{01}|^3}$$

9.5.2 Problema dei due corpi

In meccanica classica, il problema dei due corpi si riferisce alla dinamica di un sistema formato da due corpi puntiformi soggetti unicamente alla mutua interazione gravitazionale, descritta dalla legge di gravitazione universale di Newton.

Il sistema formato dai due punti è un sistema chiuso e isolato, sul quale non agiscono azioni esterne. La quantità di moto rispetto a un sistema di riferimento inerziale rimane quindi costante. Rimane quindi costante la velocità del centro di massa G,

$$G = \frac{m_0\,P_0 + m_1\,P_1}{m_0 + m_1}\ ,$$

ed è possibile definire un sistema di riferimento inerziale con origine nel centro di massa del sistema. Il raggio vettore tra i due corpi può quindi essere riscritto,

$$P_1 - G = P_1 - \frac{m_0\,P_0 + m_1\,P_1}{m_0 + m_1} = \frac{-m_0\,P_0 + m_0\,P_1}{m_0 + m_1} = \frac{m_0}{m_0 + m_1}(P_1 - P_0)\ .$$

L'equazione del moto per il corpo 1 nel sistema di riferimento inerziale con origine in G segue il secondo principio della dinamica. L'equazione del moto può essere scritto in termini del raggio vettore tra corpo 1 e centro di massa,

$$\begin{aligned} m_1\frac{d^2}{dt^2}(P_1 - G) &= -Gm_0m_1\frac{P_1 - P_0}{|P_1 - P_0|^3} = \\ &= -G\frac{(m_0 + m_1)^2}{m_0}m_1\frac{P_1 - G}{|P_1 - G|^3} \end{aligned}$$

o in termini del raggio vettore tra i due corpi $P_1 - P_0$

$$\frac{m_0m_1}{m_0 + m_1}\frac{d^2}{dt^2}(P_1 - P_0) = -Gm_0m_1\frac{P_1 - P_0}{|P_1 - P_0|^3}$$

$$m_1\frac{d^2}{dt^2}(P_1 - P_0) = -G(m_0 + m_1)m_1\frac{P_1 - P_0}{|P_1 - P_0|^3}$$

Le equazioni del moto in questi due sistemi di riferimento possono essere scritte nella forma

$$m_1\,\ddot{\vec{r}} = -GMm_1\frac{\vec{r}}{r^3}\ .$$

Traiettorie, coniche, ed energia

E' possibile dimostrare che il moto di ognuno dei due corpi è un moto piano, e che la traiettoria avviene descrive una conica.

- **todo** Dimostrare che il moto è piano
- **todo** Dimostrare che la traiettoria è una conica

Il tipo di curva conica dipende da una grandezza scalare che può essere ricondotta a un'energia. Il prodotto scalare della velocità $\dot{\vec{r}}$ con l'equazione del moto, permette di ricavare un principio di conservazione dell'energia,

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\vec{r}}\cdot\left(m\ddot{\vec{r}} + GMm\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left|\dot{\vec{r}}\right|^2 - GMm\frac{1}{r}\right) = \frac{dE^{mec}}{dt} \end{aligned}$$

Usando il sistema di coordinate polari, e la costanza della velocità angolare $\Omega = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$, si può scrivere

$$\begin{aligned}\frac{E^{mec}}{m} &= \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r} = \\ &= \frac{1}{2}\dot{r}^2 + 2\frac{\Omega^2}{r^2} - \frac{GM}{r} = \\ &= \frac{1}{2}\dot{r}^2 + v_r(r) \ .\end{aligned}$$

Poiché $\frac{1}{2}\dot{r}^2 \geq 0$, il moto è possibile per tutti i valori di r tali che $\frac{E}{m} \geq v_r(r)$. Il valore di E identifica le traiettorie. **todo** *aggiungere grafici*

- esiste un valore minimo di E: questo valore è associato a un'orbita circolare
- per $E_{min} \leq E \leq 0$ esistono due soluzioni dell'equazione $\frac{E}{m} - v_r(r) = 0$: orbite chiuse, ellittiche o circolari (per $E = E_{min}$)
- $E = 0$ è un caso limite che separa le orbite chiuse e le orbite aperte: a $E = 0$ è associata un'orbita parabolica
- per $E > 0$ le orbite aperte sono iperboliche

Traiettorie chiuse e leggi di Keplero

Prima legge. Un pianeta descrive un'orbita ellittica attorno al Sole, che si trova in uno dei due fuochi.

Seconda legge legge. Considerando l'area descritta dal moto del pianeta attorno al Sole, la velocità angolare è costante lungo la traiettoria.

Terza legge. In un sistema di pianeti, il quadrato del periodo delle orbite descritte dai pianeti è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della traiettoria, $T^2 \propto a^3$.

todo rispetto a quale sistema di riferimento? Serve l'approssimazione che la massa del Sole sia $>>$ delle masse dei pianeti, se si considera inerziale un sistema di coordinate con origine nel Sole? O bisogna/si può usare un sistema inerziale con origine nel centro di massa del sistema (considerato isolato)

Moto piano. Siano $\vec{r}$, $\vec{v}$ la posizione e la velocità del pianeta rispetto al Sole. La forza di gravità agente sul pianeta è

$$\vec{F} = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3} \ .$$

E' facile dimostrare che il moto è piano, cioè che la posizione e la velocità del pianeta sono sempre ortogonali a una direzione costante.

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{v}\right) = \underbrace{\vec{v}\times\vec{v}}_{=\vec{0}} + \vec{r}\times\vec{a} = -GMm\underbrace{\vec{r}\times\frac{\vec{r}}{r^3}}_{=\vec{0}} = \vec{0} \ .$$

Poiché il vettore $\vec{r}\times\vec{v} =: \frac{L}{m}\hat{k}$ è costante, è costante sia il suo valore assoluto sia la sua direzione: affinché $\vec{r}\times\vec{v}$ sia allineato con $\hat{k}$, i vettori $\vec{r}$, $\vec{v}$ devono essere ortogonali a $\hat{k}$.

Coordinate polari. Per descrivere il moto piano di un punto, si può usare un sistema di coordinate 2-dimensionale. Si sceglie un sistema di coordinate polari con origine coincidente con il Sole. La posizione del pianeta è identificata dal raggio vettore

$$\vec{r} = r\,\hat{r} \ ,$$

e la derivate dei versori radiale e azimuthale valgono

$$\begin{aligned}\dot{\hat{r}} &= \dot{\theta}\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\dot{\theta}\hat{r}\end{aligned}$$

La posizione, la velocità e l'accelerazione del pianeta possono essere scritte come

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= r\,\hat{r} \\
\vec{v} &= \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} \\
\vec{a} &= \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right]\,\hat{r} + \left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right]\,\hat{\theta}
\end{aligned}$$

La **velocità areolare**, $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$ è costante e uguale a

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\frac{L}{m}\hat{k} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\,\hat{k}\ .$$

Dall'espressione della velocità angolare costante, si può ricavare il legame tra $\dot{\theta}$ ed r,

$$\dot{\theta} = \frac{\Omega}{r^2}\ .$$

Usando le coordinate polari, l'equazione del moto $m\ddot{\vec{r}} = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3}$ viene scritta in componenti,

$$\begin{aligned}
r:&\ \ m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -GMm\frac{1}{r^2} \\
\theta:&\ \ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}^2) = 0
\end{aligned}$$

Traiettoria, $r(\theta)$**.** Inserendo l'espressione $\dot{\theta} = \frac{\Omega}{r^2}$ nella componente radiale, e definendo la funzione $z = \frac{1}{r}$, le derivate nel tempo della coordinata radiale possono essere riscritte come

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\theta}\dot{\theta} = -\Omega\frac{dz}{d\theta} \\
\ddot{r} &= \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(-\Omega\frac{dz}{d\theta}\right) = -z^2\Omega^2 z''(\theta)
\end{aligned}$$

e la componente radiale dell'equazione di moto,

$$-z^2\Omega^2 z'' - z^3\Omega^2 = -GMz^2$$

$$z'' + z = \frac{GM}{\Omega^2}$$

$$z(\theta) = \frac{GM}{\Omega^2} + A\cos(\theta) + B\sin(\theta)\ .$$

e quindi

$$r(\theta) = \frac{\Omega^2}{GM}\frac{1}{1 + A\dfrac{\Omega^2}{GM}\cos\theta + B\dfrac{\Omega^2}{GM}\sin\theta}$$

Scelta della direzione di riferimento: direzione del perielio: $r(\theta = 0) = \min r$, $B = 0$,

Scelte diverse si ottengono da una trasformazione di coordinate con una rotazione dell'asse di riferimento: $\theta_1 = \theta - \theta_0$, e quindi

$$r(\theta) = \frac{\Omega^2}{GM}\frac{1}{1 + \frac{A\Omega^2}{GM}\cos\theta} = \frac{\Omega^2}{GM}\frac{1}{1 + \frac{A\Omega^2}{GM}\cos(\theta_1 + \theta_0)} = \frac{\Omega^2}{GM}\frac{1}{1 + \underbrace{\frac{A\Omega^2}{GM}\cos\theta_0}_{=A_1}\cos\theta_1 \underbrace{- \frac{A\Omega^2}{GM}\sin\theta_0}_{=B_1}\sin\theta_1}$$

Il confronto con l'equazione delle coniche in coordinate polari, permette di riconoscere l'eccentricità, e e il prodotto $e\,D$ dell'eccentricità per la distanza D tra fuoco e direttrice,

$$e = \frac{A\Omega^2}{GM} \qquad , \qquad e\,D = \frac{\Omega^2}{GM}$$

$$r(\theta) = \frac{\Omega^2}{GM}\frac{1}{1+\frac{A\Omega^2}{GM}\cos\theta}$$

$$r(\theta) = \frac{e\,D}{1+e\,\cos\theta}$$

Poiché la velocità areolare è costante, il periodo dell'orbita è uguale al raggporto tra l'area dell'ellisse e la velocità areaolare,

$$T = \frac{\pi ab}{\Omega} = \pi\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{\Omega} =$$

$$1-e^2 = 1-\left(\frac{A\Omega^2}{GM}\right)^2 = \frac{\Omega^2}{GM\,a}$$

$$\rightarrow \qquad \frac{\sqrt{1-e^2}}{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{GM}\sqrt{a}}$$

$$\rightarrow \qquad T = \pi\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}$$

$$2a = \frac{\Omega^2}{GM+A\Omega^2} + \frac{\Omega^2}{GM-A\Omega^2} = \Omega^2\frac{2GM}{(GM)^2-A^2\Omega^4}$$

$$A^2\Omega^4 = (GM)^2 - \frac{GM\,\Omega^2}{a}$$

$$\frac{\Omega^2}{GM}\frac{1}{a} = 1-\left(\frac{A\Omega^2}{GM}\right)^2$$

$$\frac{1}{a} = \left(1-\left(\frac{A\Omega^2}{GM}\right)^2\right)\frac{GM}{\Omega^2}$$

Part III

Termodinamica

CHAPTER

TEN

TERMODINAMICA

La termodinamica si occupa dell'**energia** di un sistema, definita come *capacità di un sistema di svolgere lavoro*, e la sua variazione tramite scambi di lavoro o calore con l'ambiente esterno.

- …

La termodinamica classica fornisce **modelli macroscopici** di sistemi composti da un numero elevato di componenti elementari.

- indagini sulla struttura della materia, indagini di chimica:
  - primi strumenti: barometro, termometro, calorimetro
  - studi sui gas, reazioni chimiche (Boyle, Lavoisier, Dalton, Charles, Gay-Lussac, Avogadro): legge dei gas perfetti, teoria atomica
  - temperatura e calore
  - transizione di fase
- macchine termiche
  - prima: innovazione tecnologica: macchine termiche nella rivoluzione industirale. Trasformazione di calore in lavoro
  - poi: indagini teoriche sulle macchine termiche, relazione tra calore e lavoro
    - Carnot
    - Clausis
  - formalizzazione (Clausius, Rankine, Kelvin, Gibbs):
    - modello:
      - variabili di stato *intensive* macroscopiche (come temperatura, pressione, energia interna) per descrivere lo stato di un sistema
      - regola delle fasi di Gibbs
      - …
    - princìpi che traducano l'esperienza:
      - primo principio della TD
      - secondo principio della TD

- Stati di equilibrio, e come questo equilibrio viene raggiunto - Reazioni chimiche - Rankine, Kelvin, **Gibbs**: variabili di stato

todo in meccanica, la presenza di azioni dissipative riduce l'energia meccanica (**todo** riferimento al teorema dell'energia cinetica). Dove finisce questa energia? **Equivalenza lavoro-calore di Joule**

todo approccio macroscopico a sistemi complessi

todo formulazione dei princìpi a partire dall'esperienza:

- non si crea energia meccanica dal nulla, ossia la dissipazione dell'energia meccanica è non-negativa
- temperatura, grandezza fisica associata alla sensazione di caldo-freddo; evidenza della dilatazione delle sostanze al variare della temperatura (principio fisico alla base del principio di funzionamento dei primi termometri)
- tendenza di due sistemi chiusi e in quiete inizialmente a temperature diverse a raggiungere l'equilibrio termico: trasferimento di calore "dal corpo a temperatura maggiore a quello a temperatura minore"

CHAPTER

ELEVEN

INTRODUZIONE ALLA TERMODINAMICA

Concetti e primi strumenti.

- Temperatura, pressione
- Primi strumenti, e princìpi fisici utilizzati:
  - manometro di Torricelli e peso di una colonna di acqua o Hg
  - termometri e dilatazione termica delle sostanze

Esperienza.

- Tendenze naturali:
  - Equilibrio termico: calore dal corpo più caldo a quello più freddo
  - Dissipazione dell'energia meccanica
  - Conservazione della massa
- Esperimenti in chimica, sull'indagine della natura della materia:
  - misura di: massa, pressione, volume, temperatura,
  - esperimenti su: reazioni chimiche, gas

Macchine termiche.

- Applicazioni che guidano la rivoluzione industriale in Inghilterra,
- Approfondimenti e studi teorici sul funzionamento delle macchine termiche, le sostanze e i fenomeni fisici coinvolti
- Equivalenza calore-lavoro di Joule

Formalizzazione dei principi della termodinamica.

Le prime esperienze, lo studio delle sostanze, delle trasformazioni, e delle macchine termiche verranno ri-analizzate nei capitoli successivi, dopo aver formalizzato i princìpi della termodinamica e **todo** un modello/approccio allo studio della materia.

11.1 Breve storia della termodinamica

Sviluppo non lineare, dovuto ai contributi di molti studiosi, nel corso di più di un paio di secoli.

Esperienze.

- Sensazione di caldo e freddo
- Dissipazione dell'energia meccanica "macroscopica"

Domande aperte.

- Come è fatta la materia?
  - affermazione della **teoria atomistica**: particelle elementari, che si possono combinare
  - esiste il vuoto? "la natura ha orrore del vuoto" (Galileo)?
- Come descrivere le sensazioni di caldo-freddo: temperatura e calore
  - teoria **calorica**? Fluido invisibile
  - …

Indagine scientifica: natura materia. Rivoluzione scientifica del XVI-XVII secolo. Costruzione di strumenti

- Torricelli, disceplo di Galileo:
  - il barometro;
  - la misura del peso dell'aria: **pressione** atmosferica;
  - "vuoto" al di sopra della colonnina di Hg: argomento che rilancia la tesi atomistica
- Boyle, "primo chimico"; tra i fondatori della Royal Society; preciso sperimentatore (descrizione dettagliata per permettere replica), grazie agli strumenti progettati e realizzati da Robert Hooke:
  - contributi alla chimica
  - legge di Boyle sui gas: l'aria si comporta come una molla, $PV =$ cost a T cost. Comportamento elastico, come i solidi studiati da Hooke (legge costitutiva lineare elastica): modello dei gas come costituiti da particelle elementari, collegati da molle
- D.Bernoulli, *Hydrodynamica*, 1738:
  - primo modello matematico nella teoria cinetica dei gas: gas costituiti da particelle libere di muoversi: la pressione è il risultato degli urti delle particelle sulle pareti del contenitore.
- A.Lavoisier, fine '700, uno dei più influenti chimici della storia:
  - misura del peso nelle indagini di chimica: **conservazione della massa** in fisica classica
  - altro valido argomento a sostegno della teoria atomistica: le sostanze sono formate da particelle elementari che si combinano a formare diverse sostanze; nelle reazioni chimiche, reagenti e prodotti hanno la stessa massa ($HgO \rightarrow Hg + \frac{1}{2}O_2$)
- Composizione sostanze è ben definita?
  - Berthollet: no, contrario alla teoria atomica, es. bronzo (lega!): la composizione di una sostanza dipende dal processo con il quale viene prodotto;
  - Proust: carbonato basico di Cu. I campioni provenienti da diverse parti, trovate sia in natura sia sintetizzate in laboratorio, hanno esattamente la stessa composizione in massa;
  - Dalton: sostenitore teoria atomica, dopo aver formulato la legge delle proporzioni multiple; pessimo sperimentatore; gli atomi sono indivisibili, ma non pensa che le sostanze possano avere molecole con più atomi; le sue conclusioni sulla composizione dell'acqua saranno causa di grande confusione negli anni successivi

- Gay-Lussac, 1808, discepolo di Berthollet
  - leggi dei gas
  - studi con controllo del volume: osserva che V, n sono proporzionali a parti pressione e temperatura; non formula una spiegazione fondata sulla teoria atomica, forse per timore del giudizio di Berthollet, più probabilmente per il disaccordo con le conclusioni sbagliate di Dalton sulla composizione dell'acqua
- Avogadro, 1811:
  - volumi di gas uguali nelle stesse condizioni di T, P contengono lo stesso numero di molecole, anche tipi di gas diverso
- Berzelius, 1813
- Cannizzaro, 1860 *Sunto di un corso di filosofia chimica*

Indagine scientifica - Calore e temperatura. Muovere sopra, prima dell'indagine dei chimici? Fare un paragrafo introduttivo su pressione/temperatura, strumenti per la misura, e scale di misura? Non rispetta un ordine cronologico, ma permette di non spezzettare troppo il racconto"

- strumenti e scale di temperatura
- equilibrio termico, e tendenza naturale nell'evoluzione della temperatura
- calore latente, J.Black
- Fourier: equazione per la conduzione
- …

Indagine scientifica - Macchine termiche: energia, lavoro e calore.

- L'invenzione della macchina a vapore e i motori termici dà il via alla rivoluzione industriale
- Indagini teoriche sul funzionamento delle macchine termiche, sulla trasmissione di calore e la generazione di lavoro
  - 1824, **S.Carnot** *riflessioni sulla forza motrice del fuoco*:
    - analisi teorica delle macchine termiche, macchina ideale e rendimento massimo
    - critica della *teoria calorica*: se il calore fosse materia, questo dovrebbe essere creato dal movimento…
  - Joule: equivalenza lavoro-calore (porterà al I principio)
  - **Clausius**:
    - irreversibilità, in termini di etnropia (II principio)
  - **Gibbs**: formalizzazione di una teoria termodinamica "macroscopica", con un approccio geometrico:
    - variabili di stato, spazio delle fasi, regola delle fasi
    - energia libera

Indagine scientifica - Meccanica statistica: il microscopico.

- Clausius
- Maxwell:
  - …
- Gibbs
- **Boltzmann**
  - …

11.2 Esperienze ed esperimenti

11.2.1 Dilatazione sostanze

11.2.2 Esperienza di Torricelli

11.2.3 Prime esperienze sui gas

Boyle

11.2.4 Equilibrio termico

…

11.2.5 Scale di temperatura

- Scale empiriche: costruite con scelte arbitrarie senza nessun significato fisico profondo
- Scala termodinamica: la temperatura assoluta è direttamente legata all'agitazione dei componenti elementari della materia

Scale empiriche

Metodo generale per la definizione delle scale di temperatura: scelta di due temperature di riferimento, facilmente riproducibili nei limiti di errori tollerati; suddivisione in parti uguali dell'intervallo ed estensione oltre questi limiti, tipicamente in 100 o 60 (o suoi multipli) parti.

- 1702, Romer:
  - estremo inferiore, $0\,°\mathrm{Ro}$: temperatura eutettica del cloruro di ammonio;
  - estremo superiore, $60\,°\mathrm{Ro}$: temperatura di ebollizione dell'acqua successivamente si accorse che la solidificazione dell'acqua avveniva circa a $7.5\,°\mathrm{Ro}$ e decise di usare questa condizione per definire l'estremo inferiore, in modo tale da rendere più facile la taratura dello strumento
- 1709-15, Fahrenheit:
  - definizione originale della scala:
    - estremo inferiore, $0\,°\mathrm{F}$: temperatura eutettica del cloruro di ammonio; le malelingue sostengono la temperatura più bassa registrata negli inverni di Danzica, città allora prussiana in cui viveva mentre metteva a punto gli strumenti
    - estremo superiore, $96\,°\mathrm{F}$: temperatura media del corpo umano
  - le scelte rocambolesche e definite in maniera imprecisa non costituivano delle condizioni facilmente replicabili per la costruzione e/o taratura di nuovi strumenti. Vennero scelte quindi le condizioni di solidificazione ($32\,°\mathrm{F}$) e di evaporazione ($212\,°\mathrm{F}$) dell'acqua a pressione ambiente al livello del mare, in modo tale da suddividere tale intervallo in 180 sotto-intervalli
- 1731, de Réaumur:
  - estremi: solidificazione ($0\,°\mathrm{Re}$) ed evaporazione ($80\,°\mathrm{Re}$) dell'acqua a temperatura ambiente. Perché 80 intervalli tra queste due condizioni? Perché il termometro costruito da Reaumur usava come principio fisico l'espansione dell'etanolo, e il volume dell'etanolo varia dell'8% tra le due condizioni di riferimento scelte.

- 1742, Celsius:
  - estremi: solidificazione ($100\,°C$) ed evaporazione ($0\,°C$) dell'acqua a temperatura ambiente. Perché questa definizione "invertita" rispetto alle altre? Perché no, si potrebbe rispondere. Per rendere più pratica la misura e adeguarsi al verso delle altre scale, un anno dopo la morte di Celsius, la scala fu invertita da Linneo (**todo** lo stesso Linneo, biologo, che si dilettava con la classificazione di piante e animali, padre della classificazione scientifica degli organismi viventi, usata tuttora)

Scala termodinamica

Scala di temperatura assoluta

- Esperimenti sui gas, estrapolando i dati sperimentali delle *leggi di Charles* e di *Gay-Lussac*
- 1848, Kelvin *On an Absolute Thermometric Scale*.

11.2.6 Teoria cinetica dei gas

1738, D.Bernoulli *Hydrodynamica*

11.2.7 Calore latente e calore specifico

1750-60, J.Black. I suoi studi sul calore aiutano a distinguere i concetti di temperatura e di calore **todo**

- sistemi fisici sul quale non viene compiuto lavoro, scambiano tra di loro calore per raggiungere l'equilibrio termico
  - la quantità di calore "entrante" in un sistema, ne fa variare la temperatura. La variazione di temperatura nel sistema è inversamente proporzionale alla sua massa,

    $$m\, c_x\, dT = \delta Q\ ,$$

    la costante di proporzionalità è definita **calore specifico**. **todo** *controllare commenti su stato termodinamico* $\cdot_x$ *del sistema*
  - la quantità di calore scambiata tra due sistemi è uguale e opposta: $dQ_{ij} = -dQ_{ji}$. Mettendo a contatto due sistemi che non manifestano cambiamenti di fase, isolati dall'ambiente, si ottiene quindi

    $$\begin{cases} dE_i = m_i\, c_i\, dT_i = \delta Q_{ij} \\ dE_j = m_j\, c_j\, dT_j = \delta Q_{ji} = -\delta Q_{ij} \end{cases}$$

    $$\rightarrow \qquad 0 = dE_i + dE_j = m_i\, c_i\, dT_i + m_j\, c_j\, dT_j$$

    todo *definire energia interna e aggiungere riferimento alla sezione "Princìpi della termodinamica"*
- i cambiamenti di fase avvengono a temperatura costante. Ad esempio, l'apporto di calore a un sistema in equilibrio contenente ghiaccio alla temperatura di solidificazione non ne fa aumentare la temperatura, ma la massa liquida. L'aumento della temperatura. Una volta completata la trasformazione di fase, l'apporto di calore causa una variazione di temperatura,

  $$\delta Q = \begin{cases} dm_l\, L_{sl} & , \quad \delta m_l < m \\ dm_l\, L_{sl} + m\, c\, dT & , \quad \delta m_l = m\ . \end{cases}$$

  Viene definito **calore latente di fusione** il coefficiente L_{sl} di proporzionalità tra il calore entrante nel sistema durante la trasformazione di fase e la quantità di massa liquefatta δm_l.

11.2.8 Esperienze sui gas, ed equazione di stato dei gas perfetti

- Boyle: $PV = \text{const.}$
- Charles: $V \propto T$
- Gay-Lussac: $P \propto T$
- Avogadro: $V \propto n$

L'equazione di stato dei gas perfetti riassume questi risultati

$$\frac{PV}{Tn} = R = \text{const.}$$

11.2.9 Lavoro, ... todo

todo Diatriba sulla priorità sulla formulazione del principio di conservazione dell'energia: von Meyer; Joule; successivamente Hemlholtz; Tyndall - scienziato e uno dei primi alpinisti - uno dei pochi a riconoscere il contributo di von Meyer

- Rivoluzione industriale
- 1798, B.Thompson, *An Inquiry Concerning the Source of the Heat Which is Excited by Friction*, oggi può essere interpretato come un lavoro che identificava l'attrito come fenomeno di dissipazione dell'energia meccanica "utile"/"macroscopica" e della sua conversione in calore;
- 1824, S.Carnot, *Riflessioni sulla forza motrice del fuoco*
- 1840-42, J.von Meyer, medico, chimico e fisico, intuisce il principio di conservazione dell'energia, *"che non può essere né creata né distrutta"* **ref** *Remarks on the Forces of Nature*, 1841
- 1842-45, J.P.Joule *The Mechanical Equivalent of Heat*
- 1850, R.Clausius

11.2.10 Formalismo e prìncipi della termodinamica classica

todo

- usando il formalismo di Gibbs:
  - funzioni di stato (energia interna,…), regola delle fasi, spazio di fase,…
- si possono formulare i prìncipi della termodinamica

11.2.11 Meccanica statistica

- Maxwell
- Gibbs
- **Boltzmann**

11.3 Termodinamica e teoria atomica

11.3.1 Stati della materia

11.3.2 Cambiamenti di stato

11.3.3 Variabili di stato

11.4 Problemi

11.4.1 todo ...

Problema … Manometro di Torricelli

Soluzione.

11.4.2 Calorimetria

Problema … Calore latente - B.Franklin *Cooling by Evaporation*

Soluzione.

Problema … Calore latente - J.Black *Lectures on the Elements of Chemistry: Delivered in the University of Edinburgh*

- …
- Durante i suoi esperimenti, J.Black scopre che una massa m di acqua a temperatura $T_1 = 176\,°F$ è necessaria e sufficiente per sciogliere una massa uguale di ghiaccio a temperatura costante $T_0 = 32\,°F$.
- …

Soluzione.

Problema … Calore latente - Refrigeratore evaporativo   Qualche applicazione…

Soluzione.

Problema … Calore latente - Sudore e termoregolazione   Refrigerazione evaporativa tramite evaporazione del sudore sulla pelle

Soluzione.

CHAPTER

TWELVE

PRINCÌPI DELLA TERMODINAMICA

Sistemare come presentazione! I contenuti vengono divisi nelle sezioni successive.

In questa sezione vengono presentati i princìpi fondamentali della termodinamica classica. **todo**

Principio di conservazione della massa. Nell'ambito della fisica classica, la massa di un sistema chiuso è costante.

Primo principio della termodinamica - bilancio dell'energia totale. Il primo principio della termodinamica rappresenta il bilancio di energia totale per un sistema chiuso (**todo** *riferimenti a sistemi aperti e chiusi*),

$$dE^{tot} = \delta L^{ext} + \delta Q^{ext} \ .$$

Usando il teorema dell'energia cinetica (**todo** riferimento alla meccanica), $dK = \delta L^{ext} + \delta L^{int}$, e la definizione di energia interna come differenza tra energia totale ed energia cinetica macroscopica, $E := E^{tot} - K$,

$$dE = -\delta L^{int} + \delta Q^{ext} \ .$$

Regola delle fasi di Gibbs. L'energia interna può essere scritta come funzione di stato, $E(S, X_k)$, **todo** con variabili indipendenti …

$$\begin{aligned} dE &= \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{\mathbf{X}} dS + \left(\frac{\partial E}{\partial X_k}\right)_S dX_k = \\ &= T\,dS + \sum_k F_k\,dX_k \end{aligned}$$

La variazione di energia interna rispetto alla variabile S corrisponde alla temperatura,

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{\mathbf{X}} \geq 0 \ .$$

Secondo principio della termodinamica - irreversibilità.

- Secondo principio per sistemi semplici **todo** *temperatura uniforme*

$$\begin{aligned} dE &= \delta Q^{ext} - \delta L^{int} = \\ &= \underbrace{\delta Q^{ext} + \delta^+ D}_{\delta U} - \delta L^{int,rev} = \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -\delta L^{int,rev} & = \sum_k F_k\,dX_k \\ \delta U & = T\,dS \end{cases}$$

12.1 Principio di Lavoisier

Il principio di Lavoisier descrive la conservazione della massa per sistemi chiusi,

$$dM = 0 \, .$$

12.2 Primo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica è il bilancio di energia totale per sistemi chiusi,

$$dE^{tot} = \delta L^{ext} + \delta Q^{ext}$$

12.3 Energia interna e regola delle fasi di Gibbs

12.3.1 Energia interna

Gibbs definisce l'energia interna del sistema come differenza tra la sua energia totale e l'energia cinetica "macroscopica",

$$E = E^{tot} - K \, .$$

Il bilancio dell'energia interna viene ricavato come differenza dei bilanci dell'energia totale, descritto dal primo principio della termodinamica

$$dE^{tot} = \delta L^{ext} + \delta Q^{ext} \, ,$$

e il bilancio dell'energia cinetica, fornito dal teorema dell'energia cinetica ricavato in meccanica,

$$dK = \delta L^{ext} + \delta L^{int} \, .$$

Il bilancio dell'energia interna diventa quindi

$$dE = \delta Q^{ext} - \delta L^{int} \, .$$

12.3.2 Variabili di stato e regola delle fasi

todo *def di variabile di stato* Lo stato termodinamico di un sistema può essere descritto da un numero definito di variabili termodinamiche indipendenti, descritto dalla **regola delle fasi di Gibbs**,

$$F = C - P + 1 + W \, ,$$

cioè il numero di variabili indipendenti (o gradi di libertà), F, di un sistema è una funzione del numero di componenti C di un sistema, il numero di fasi P e il numero W di modi del sistema di manifestare lavoro interno, come ad esempio:

- sforzi meccanici interni
- contributo della tensione superficiale
- energia dei legami delle molecole dei componenti
- contributo del campo elettromagnetico

Esempi.

- In un sistema composto da un gas comprimibile, monocomponente e monofase (gassosa), elettricamente neutro, **todo** *altro?*, l'unica forma di lavoro interno è quello legato alla compressione, $\delta L^{int,rev} = PdV$, e quindi $W = 1$. Per questo sistema servono quindi,

$$F = C - P + 1 + W = 1 - 1 + 1 + 1 = 2 \, ,$$

  variabili di stato per definire lo stato del sistema.

- Solido elastico, … **todo**
- Miscela reattiva di gas
- Sistema monocomponente durante una transizione di fase
  - transizione di fase del primo ordine
  - punto critico
- Fasi nelle miscele solide
- Campo elettrico e magnetizzazione

12.3.3 Primo principio in termini delle variabili di stato

L'energia interna è una variabile di stato che, secondo la regola delle fasi, può essere scritta come

$$E(S, X_k) \, ,$$

avendo indicato con X_k tutte le variabili (**todo** *di stato?*) la cui variazione è associata a un lavoro interno reversibile, ed S la variabile di stato la cui variazione è associata al calore scambiato con l'ambiente esterno e alle azioni interne dissipative. Il differenziale - **esatto** - dell'energia interna

$$\begin{aligned} dE &= \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{\mathbf{X}} dS + \left(\frac{\partial E}{\partial X_k}\right)_{S} dX_k = \\ &= T\,dS + \sum_k F_k\,dX_k \end{aligned}$$

può essere confrontato con il bilancio dell'energia interna,

$$\begin{aligned} dE &= \delta Q^{ext} + \delta L^{int} = \\ &= \delta Q^{ext} + \delta^+ D - \delta L^{int,rev} \, . \end{aligned}$$

Poiché dE è un differenziale esatto e $\delta L^{int,rev}$ è un contributo reversibile, segue che la somma dei due contributi in generale non reversibili, $\delta U := \delta Q^{ext} + \delta^+ D$, è un contributo reversibile. Confrontando le due espressioni del differenziale dell'energia interna, si può associare questo contributo al termine $T\,dS$, il lavoro interno reversibile alla somma dei contributi formati come prodotto delle forze generalizzate F_k e le variazioni delle variabili di stato X_k,

$$\begin{cases} -\delta L^{int,rev} & = \sum_k F_k\,dX_k \\ \delta U & = T\,dS \end{cases}$$

12.4 Diagrammi termodinamici

12.4.1 Diagramma di stato di un sistema mono-componente

Si consideri un sistema ad un componente, in grado di scambiare calore e con un unico modo di manifestare il lavoro reversibile interno al sistema, quello meccanico dovuto a un'espansione isotropa del volume, $\delta L^{int,rev} = P\,dV$.

Come applicarla? P, T e concentrazioni? In una rappresentazione 3D del diagramma di stato, la superficie di stato è una superficie 2D, anche durante le transizioni di fase: queste sono descritte dalla composizione delle fasi, come frazioni molari. Queste non sono contate come gradi di libertà? I **gradi di libertà** sono cons le proprietà termodinamiche **intensive** indipendenti, come P,T Applicando la regola delle fasi di Gibbs,…

Diagramma 3D di sistema monocomponente

- regione di una superficie 2D: ha 2 gradi di libertà
- curva sulla superficie di stato, es: trasformazione termodinamica: ha un grado di libertà
- punto: stato TD determinato, es. punto triplo, eutettico: zero gradi di libertà

12.4.2 Piani termodinamici

Piani termodinamici: proiezioni 2D di un diagramma multi-dimensionale Esempi:

- piano P-V, Clapeyron
- piano T-S, entropico
- piano H-S, Mollier
- …

Piano di Clapeyron, P-V

Lavoro. Nel caso di **sistemi chiusi** e **processi ideali**, il primo principio della termodinamica viene scritto

$$\begin{aligned} dE &= -\delta L^{int,rev} + \delta Q^{ext} = \\ &= -P\,dV + T\,dS\ . \end{aligned}$$

Nel caso in cui il contributo dell'**energia cinetica sia trascurabile**, il lavoro compiuto dal sistema sull'ambiente esterno coincide con

$$\delta L^{done} = -\delta L^{ext} = -dK + \delta L^{int} \approx \delta L^{int} \approx \delta L^{int,rev} = P\,dV$$

Un sistema che compie una trasformazione termodinamica descritta dalla curva γ nel piano $P-V$ di Clapeyron, compie un lavoro verso l'ambiente esterno che è uguale alla somma dei contributi elementari - e quindi l'integrale

$$L^{done} = \int_\gamma \delta L^{done} \approx \int_\gamma P\,dV\ ,$$

che ha l'immediata rappresentazione grafica corrispondente all'area (con segno) tra il grafico della trasformazione e l'asse delle ascisse, $P = 0$.

Esempi di trasformazioni. …

Piano entropico, T-S

Nel caso di trasformazioni ideali, il calore entrante nel sistema può essere identificato con il termines

$$\delta Q^{ext} = T\, dS - \underbrace{\delta^+ D}_{=0 \text{ ideal, rev.}} = T\, dS \,..$$

Un sistema chiuso che compie una trasformazione termodinamica descritta dalla curva γ nel piano $P - V$ di Clapeyron, assorbe calore dall'ambiente esterno che è uguale alla somma dei contributi elementari - e quindi l'integrale

$$Q^{ext} = \int_\gamma \delta Q^{ext} \approx \int_\gamma T\, dS,$$

che ha l'immediata rappresentazione grafica corrispondente all'area (con segno) tra il grafico della trasformazione e l'asse delle ascisse, $T = 0$.

12.5 Secondo principio della termodinamica

12.5.1 Enunciato di Clausius

Sistemi semplici

La variazione elementare di entropia dS di un sistema a temperatura uniforme T è maggiore o uguale al rapporto tra il flusso di calore elementare introdotto nel sistema e la temperatura del sistema stesso,

$$dS = \underbrace{\frac{\delta^+ D}{T}}_{\geq 0} + \frac{\delta Q^{ext}}{T} \geq \frac{\delta Q^{ext}}{T}\ .$$

Questo è l'enunciato di Clausius del secondo principio della termodinamica per sistemi semplici con temperatura omogenea.

Sistemi composti

todo definizione di sistema composto. Avviene conduzione tra i sotto-sistemi.

Definendo l'entropia come una proprietà additiva, l'entropia di un sistema composto da N sotto-sistemi semplici è la somma dell'entropia dei sotto-sistemi,

$$S = \sum_{n=1:N} S_n\ .$$

Il bilancio dell'entropia del singolo sotto-sistema che scambia calore con gli altri sotto-sistemi e l'ambiente esterno viene scritto come

$$\begin{aligned}
dS_i &= \frac{\delta Q_i^{ext,i}}{T_i} - \frac{\delta D_i}{T_i} = \\
&= \frac{\delta Q_i^{ext}}{T_i} + \frac{\sum_{k\neq i} \delta Q_{ik}}{T_i} - \frac{\delta D_i}{T_i} \geq \\
&\geq \frac{\delta Q_i^{ext}}{T_i} + \frac{\sum_{k\neq i} \delta Q_{ik}}{T_i}\ .
\end{aligned}$$

Il bilancio dell'entropia dell'intero sistema viene ricavato sommando i bilanci dell'entropia dei singoli sotto-sistemi,

$$\begin{aligned} dS = \sum_i dS_i & \geq \\ & \geq \sum_i \left\{ \frac{\delta Q_i^{ext}}{T_i} + \frac{\sum_{k \neq i} \delta Q_{ik}}{T_i} \right\} = \\ & = \sum_i \frac{\delta Q_i^{ext}}{T_i} + \underbrace{\sum_{\{i,k\}} \delta Q_{ik} \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_k} \right)}_{\geq 0} \geq \\ & \geq \sum_i \frac{\delta Q_i^{ext}}{T_i} \ . \end{aligned}$$

avendo usato la relazione che rappresenta la tendenza naturale della trasmissione del calore "da un sistema a temperatura maggiore a un sistema a temperatura minore",

$$\delta Q_{ik} \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_k} \right) \geq 0 \ .$$

todo *aggiungere riferimento alla tendenza naturale nella trasmissione del calore*

12.5.2 Aumento dell'entropia nell'universo

Se consideriamo l'universo come il sistema chiuso e isolato (ma sarà vero? E chi lo sa? Forse è sensato che lo sia, ma tante cose che sembrano sensate oggi saranno fregnacce tra qualche anno) formato da un sistema di interesse sys e dall'ambiente esterno env.

La variazione dell'entropia dell'universo è la somma della variazione nel sistema e nell'ambiente esterno. Si indica con $\delta Q_{sys,env}$ il flusso di calore che, se positivo, fa aumentare l'energia del sistema e diminuire quella dell'ambiente esterno. Assumendo che i due sotto-sistemi siano internamente omogenei,

$$\begin{aligned} dS^{univ} & = dS^{sys} + dS^{env} = \\ & = \frac{\delta Q_{sys,env}}{T^{sys}} + \frac{\delta Q_{env,sys}}{T^{env}} = \\ & = \frac{\delta Q_{sys,env}}{T^{sys}} - \frac{\delta Q_{sys,env}}{T^{env}} = \\ & = \delta Q_{sys,env} \left(\frac{1}{T^{sys}} - \frac{1}{T^{env}} \right) \geq 0 \ , \end{aligned}$$

si ottiene la relazione

$$dS^{univ} \geq 0 \ ,$$

che prevede la "non-diminuzione" dell'entropia dell'universo.

12.6 Sistemi aperti

CHAPTER

THIRTEEN

STATI DELLA MATERIA

13.1 Gas ideali

Il modello di gas ideale rappresenta un gas in cui

- le molecole hanno volume trascurabile rispetto al volume disponibile
- le molecole non interagiscono tra di loro e interagiscono le pareti solide di un contenitore con urti perfettamente elastici; è possibile rilassare l'ipotesi di assenza di interazioni tra le particelle con l'ipotesi di interazioni perfettamente elastiche
- le molecole sono identiche
- il moto delle molecole è casuale e isotropo, cioè non esistono direzioni preferenziali del moto

Il modello di gas ideale può essere un buon modello per gas:

- **alta temperatura e molecole semplici**: l'energia cinetica delle molecole rende trascurabile l'energia delle forze intermolecolari tra molecole distanti; l'interazione tra molecole semplici o non-polari è debole se confrontata rispetto a molecole complesse o polari
- **bassa pressione e bassa densità**: la bassa concentrazione di molecole rende le loro interazioni rare.

13.1.1 Esperimenti

todo Aggiungere immagini e grafici dei dati sperimentali per le leggi di Charles e Gay-Lussac con estrapolazione verso lo zero assoluto.

Esperimenti e leggi

Legge di Boyle

Per gas semplici, a temperatura sufficientemente elevata, e pressione sufficientemente ridotta

$$T, n \text{ const} \quad \rightarrow \quad PV = \text{const}$$

Legge di Charles

Per gas semplici, a temperatura sufficientemente elevata, e pressione sufficientemente ridotta

$$P, n \text{ const} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta V}{\Delta T} = V_0\, \alpha_P = \text{const}$$

$$V = V_0\,(1 + \alpha_P\, T) \ ,$$

avendo indicato con α_0 il coefficiente di dilatazione termica a pressione costante.

I dati sperimentali misurati mostrano un andamento lineare, e la loro estrapolazione verso il valore limite del volume $V = 0$ porta a un valore di temperatura $T = -273.15$°C.

Legge di Gay-Lussac

Per gas semplici, a temperatura sufficientemente elevata, e pressione sufficientemente ridotta

$$V, n \text{ const} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta P}{\Delta T} = P_0\, k_V = \text{const}$$

$$P = P_0\,(1 + k_V\, T) \ ,$$

I dati sperimentali misurati mostrano un andamento lineare, e la loro estrapolazione verso il valore limite del volume $P = 0$ porta allo stesso valore di temperatura $T = -273.15$°C trovato nell'esperimento di Charles.

Scala di temperatura assoluta

Questa osservazione porta alla scelta di una nuova scala di temperatura, quella che diverrà la scala di temperatura termodinamica, o assoluta, di Kelvin:

- viene definito il punto a temperatura, 0 K $= -273.15$°C
- viene mantenuta l'ampiezza del grado,

così che la legge di conversione tra il valore numerico della misura di temperatura con la scala Celsius e la scala Kelvin è

$$T[\text{K}] = T[°\text{C}] + 273.15 \ .$$

Usando la scala di temperatura assoluta, le leggi di Charles e di Gay-Lussac possono essere riscritte come **todo** (*evitare singolarità*)

$$\begin{aligned} & V \propto T && \text{se } P, n \text{ const.} \\ & P \propto T && \text{se } T, n \text{ const.} \end{aligned}$$

Legge di Avogadro

Per gas semplici, a temperatura sufficientemente elevata, e pressione sufficientemente ridotta

$$P, T \text{ const} \quad \rightarrow \quad \frac{n}{V} = \text{const}$$

Legge dei gas ideali

La legge dei gas ideali permette di riassumere le quattro leggi di Boyle, Charles, Gay-Lussac, Avogadro in un'unica equazione di stato,

$$\frac{P\,V}{n\,T} = R\,,$$

avendo introdotto $R \approx 8.314 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$ la **costante universale dei gas**.

13.1.2 Espressioni diverse dell'equazione di stato dei gas perfetti

Formule alternative dell'equazione di stato dei gas perfetti

- n numero di moli, R costante universale dei gas

  $$P\,V = n\,R\,T$$

- il numero di moli n può essere scritto come rapporto della massa m del sistema e la massa molare M_m del gas considerato,

  $$m = M_m\,n$$

  Usando questa espressione per sostituire n nella legge dei gas perfetti, e dividendo per V si può trovare una nuova espressione dell'equazione di stato di un gas perfetto,

  $$P = \frac{m}{V}\,\frac{R}{M_m}\,T = \rho\,R_g\,T\,,$$

  avendo riconosciuto la densità come rapporto tra massa e volume del sistema $\rho = \frac{m}{V}$ e definito la costante del gas specifica per il gas considerato come rapporto della costante universale e la massa molare, $R_g = \frac{R}{M_m}$

- la relazione di Avogadro lega il numero di moli n e il numero di molecole N (**todo** *può essere solo una comoda unità di conto? Da dove arriva?...),

  $$N = N_A\,n\,,$$

  essendo $N_A \approx 6.022 \cdot 10^{23} \mathrm{mol}^{-}1$ il **numero di Avogadro**. La legge di stato dei gas perfetti può quindi essere riscritta come

  $$P\,V = N\,\frac{R}{N_A}\,T = N\,k_B\,T\,,$$

  dove è stata introdotta la costante di Boltzmann, $k_B = \frac{R}{N_A} \approx 1.38 \cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$.

  La costante di Boltzmann (**todo** *introdotta da Planck e da lui dedicata a Boltzmann*) è il fattore di conversione tra l'energia dovuta all'agitazione termica del sistema e la sua temperatura, come mostrato nella sezione dedicata alla *teoria cinetica dei gas*.

13.1.3 Teoria cinetica dei gas

Nel 1738, Daniel Bernoulli pubblica il *Hydrodynamica* nel quale fornisce un primo modello microscopico di un gas, pensato come un insieme di un numero enorme **todo** di particelle elementari (molecole), e il legame tra le grandezze macroscopiche e la media delle grandezze microscopiche.

Considerando: **todo**

- un volume retto di lati ΔL_x, ΔL_y, ΔL_z, $\Delta V = \Delta L_x \, \Delta L_y \, \Delta L_z$
- che contiene un numero ΔN di particelle identiche che non interagiscono tra di loro ma solo con urti elastici con le pareti rigide del volume

La forza sulla parete del volume con normale in direzione x, può essere calcolata come rapporto tra l'impulso esercitato dalla parete e l'intervallo di tempo tra 2 urti della stessa molecola con la stessa parete,

$$\Delta F_{x,i} = -\frac{\Delta I_{x,i}}{\Delta t_i} = \frac{2 m_m v_{x,i}}{\frac{2\Delta L_x}{v_{x,i}}} = m_m \frac{v_{x,i}^2}{\Delta L_x}$$

La forza media per unità di superficie sulla parete è

$$\frac{\Delta F_{x,i}}{\Delta S_x} = \frac{\Delta F_{x,i}}{\Delta L_y \Delta L_z} = \frac{m_m v_{x_i}^2}{\Delta L_x \, \Delta L_y \, \Delta L_z} = \frac{m_m v_{x_i}^2}{\Delta V}$$

L'energia cinetica della i-esima particella è

$$K_i = \frac{1}{2} m_m |\vec{v}_i|^2 = \frac{1}{2} m_m \left(v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2 + v_{z,i}^2 \right) =$$

L'energia dell'insieme delle particelle contenute nel volume è uguale alla somma delle loro energie cinetiche

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_m \left(v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2 + v_{z,i}^2 \right) \ .$$

Assumendo che la velocità delle particelle abbia una distribuzione isotropa nello spazio, ossia che non ci siano direzioni preferenziali, la media dei quadrati delle singole componenti cartesiane è uguale

$$\langle \Delta K \rangle = \langle K_1 \rangle \, \Delta N = \Delta N \frac{3}{2} m_m v_{rms}^2 \ .$$

todo L'energia cinetica può essere scritta in funzione della temperatura, T,

$$\frac{\langle \Delta K \rangle}{\Delta N} = \frac{3}{2} m_m v_{rms}^2 = \frac{3}{2} k_B T \ ,$$

questa espressione prevede che l'energia cinetica di una molecola sia direttamente proporizonale alla temperatura e al numero di gradi di libertà della particella, qui $f = 3$, tramite la costante di proporzionalità $k_B = ...$, la **costante di Boltzmann**.

La forza media esercitata dalle ΔN molecole sulla superficie con normale x può essere quindi scritta come

La **costante di Avogadro** (**todo** da dove arriva? Esperimenti sui gas a pari volume e condizioni TD, fatti da?? Gay-Lussac?? Charles?? Controllare video di Bressanini e altre fonti) permette di convertire il numero di molecole N nel numero di moli n, $\Delta N = N_A \, \Delta n$, e calcolare la massa di una mole, la massa molare, una volta nota la massa di una molecola $M_m = N_A m_m$

$$\begin{aligned} P &= \frac{\Delta N}{\Delta V} m_m \, v_{rms}^2 = \\ &= \frac{\Delta N}{\Delta V} k_B T = \frac{\Delta n}{\Delta V} \underbrace{N_A k_B}_{=R_u} T \\ &= \frac{m_m \Delta N}{\Delta V} \frac{k_B}{m_m} T = \frac{\Delta m}{\Delta V} \frac{k_B}{m_m} T = \frac{\Delta m}{\Delta V} \underbrace{\frac{N_A \, k_B}{M_m}}_{=\frac{R_u}{M_m} = R} T \ , \end{aligned}$$

avendo introdotto la definizione della **costante universale** $R_u = N_A \, k_B$ come prodotto del numero di Avogadro e la costante di Boltzmann, e una costante del gas considerato come rapporto tra la costante universale e la sua massa molare, $R = \dfrac{R_u}{M_m}$.

Valori numerici; cenni storici

13.1.4 Caratteristiche dei gas perfetti

Legge di stato

$$\begin{aligned}
& PV = N\, k_B\, T \\
& \qquad\qquad (N = N_A\, n \ , \ N_A\, k_B = R) \\
& PV = n\, R\, T \\
& \qquad\qquad \left(m = M_m\, n \ , \ R_g = \frac{R}{M_m} \right) \\
& PV = m\, R_g\, T \\
& \qquad\qquad (m = \rho\, V) \\
& P = \rho\, R_g\, T
\end{aligned}$$

Primo principio della termodinamica

Per un gas comprimibile monocomponente, il lavoro interno meccanico reversibile è

$$\delta L^{int,rev,mech} = P\, dV$$

In assenza di altre interazioni di lavoro, il bilancio di energia interna per un gas comprimible diventa

$$\begin{aligned}
dE & = \delta Q^{ext} + \delta^+ D - \delta L^{int,rev} = \\
& = T\, dS - P\, dV \ .
\end{aligned}$$

Energia interna, entalpia e calori specifici

Energia interna. Seguendo le conclusioni del modello di gas ideale fornito dalla *teoria cinetica dei gas*, l'espressione dell'energia interna di un gas perfetto può essere scritta come,

$$E = \frac{f}{2}\, N\, k_B\, T = \frac{f}{2}\, n\, R\, T = m \frac{f}{2}\, R_g\, T \ .$$

Entalpia. Usando la definizione di entalpia $H = E + F_i\, X_i = E + P\, V$, l'equazione di stato e l'espressione dell'energia interna dei gas perfetti, l'entalpia di un gas perfetto può essere scritta come

$$H = \left(\frac{f}{2} + 1 \right)\, N\, k_B\, T = \left(\frac{f}{2} + 1 \right)\, n\, R\, T = m \left(\frac{f}{2} + 1 \right)\, R_g\, T \ .$$

Calore specifico a volume costante. Se il volume del sistema è costante, il lavoro interno è nullo (**todo** complessivo, reversibile, aggiungere ipotesi di stato di equilibrio una volta per tutte?), $\delta L = 0$, $dE = \delta Q^{ext} = T\, dS$

$$m\, c_v\, dT := \delta Q^{ext}\big|_v = dE\big|_v = m \frac{f}{2}\, R_g\, dT \qquad \rightarrow \qquad c_v = \frac{f}{2}\, R_g \ .$$

Calore specifico a pressione costante. Il differenziale dell'entropia a pressione costante,

$$dH\big|_P = d(E + P\, V)\big|_P = dE\big|_P + \underbrace{dP}_{=0}\, V + P\, dV\big|_P \ ,$$

può essere utilizzato per riscrivere il bilancio di energia intenra a pressione costante,

$$dH\big|_P = dE\big|_P + P\delta V\big|_P = \delta Q^{ext}\big|_P + \delta^+ D\big|_P \ .$$

Nell'ipotesi che la dissipazione sia nulla, (**todo** aggiungere ipotesi di stato di equilibrio una volta per tutte?)), si può quindi legare la variazione di entalpia del sistema all'apporto di calore al sistema, e al calore specifico a pressione costante,

$$m\, c_P\, dT := \delta Q^{ext}\big|_P = dH\big|_P = m\left(\frac{f}{2}+1\right) R_g\, dT \qquad \rightarrow \qquad c_P = \left(\frac{f}{2}+1\right) R_g \ .$$

Esempi: calcolo del calore specifico di gas

Idrogeno molecolare, H_2

Assumendo che l'idrogeno, H_2, con massa molare $M_m = 2.0 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$, si comporti come un gas perfetto nella condizione di interesse, la costante specifica dell'idrogeno molecolare vale

$$R_g = \frac{R}{M_m} = \frac{8314 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}}{2 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} = 4157 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}.$$

e i calori specifici

$$c_v = \frac{5}{2} R_g = \frac{5}{2} 4157 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 10392.5 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$c_P = \frac{7}{2} R_g = \frac{7}{2} 4157 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 14549.5 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

Elio, He

Assumendo che l'elio, He, con massa molare $M_m = 4 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$, si comporti come un gas perfetto nella condizione di interesse, la costante specifica dell'idrogeno molecolare vale

$$R_g = \frac{R}{M_m} = \frac{8314 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}}{4 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} = 2078.5 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}.$$

e i calori specifici

$$c_v = \frac{3}{2} R_g = \frac{3}{2} 2078.5 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 3117.8 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$c_P = \frac{5}{2} R_g = \frac{5}{2} 2078.5 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 5196.2 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

Aria, miscela di gas

L'aria è una miscela di gas (**todo** *riferimento a miscele?*) composta da N_2, O_2,… la cui massa molare è la media pesata delle masse molari dei suoi componenti, $M_m = 28.97 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$. La costante specifica dell'aria è quindi

$$R_g = \frac{R}{M_m} = \frac{8314 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}}{28.97 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}.$$

Essendo composta da molecole di gas biatomiche, i gradi di libertà della singola molecola sono $f = 5$ (3 legati alla traslazione, 2 alla rotazione; manca la rotazione attorno all'asse della molecola, assumendo trascurabile l'inerzia attorno a quell'asse). I calori specifici valgono quindi

$$c_v = \frac{5}{2} R_g = \frac{5}{2} 287 \, \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 717.5 \, \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$c_P = \frac{7}{2} R_g = \frac{7}{2} 287 \, \frac{\text{J}}{\text{kg K}} = 1004.5 \, \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

Variazioni di entropia

La variazione dell'entropia di un gas perfetto può essere scritta in diverse forme partendo dal primo principio della termodinamica e usando l'espressione dell'energia interna e la legge di stato dei gas perfetti per cambiare le variabili indipendenti,

$$\begin{aligned} ds = \frac{1}{T}\left(de + \frac{P}{\rho^2} d\rho\right) = \\ = c_v \frac{dT}{T} + R_g \frac{d\rho}{\rho} = \\ = c_P \frac{dT}{T} + R_g \frac{dP}{P} = \\ = c_P \frac{d\rho}{\rho} + c_v \frac{dP}{P} \, . \end{aligned}$$

13.2 Solidi elastici

13.2.1 Solido elastico lineare 1-dimensionale

Legge costitutiva lineare con espansione termica. Sia data la legge costitutiva elastica che esprime la lunghezza della trave L in funzione dell'azione assiale f e della differenza di temperatura $T - T_0$ rispetto alla temperatura di riferimento T_0,

$$L(f, T) - L_0 = \frac{1}{K} f + \alpha L_0 (T - T_0) \, ,$$

assumendo che la costante elastica isoterma K, e il coefficiente di dilatazione termica a carico costante α siano costanti, parametri caratteristici del materiale e della configurazione di riferimento. Sotto queste ipotesi, è possibile invertire la relazione per scrivere l'azione assiale in funzione dell'allungamento e della temperatura,

$$f(\Delta L, \, \Delta T) = K \Delta L - \alpha \, L_0 \, K \, \Delta T \, .$$

Potenziali termodinamici.

$$dE = T dS + f dL \qquad , \qquad \text{energia interna}$$

$$dH = T dS - L df \qquad , \qquad \text{entalpia, } H = E - f\,L$$

$$dF = -S dT + f dL \qquad , \qquad \text{Helmholtz, } F = E + T\,S$$

$$dG = -S dT - L df \qquad , \qquad \text{Gibbs, } G = H + T\,S$$

Energia libera di Helmholtz.

$$dE = \delta Q^{ext} - \delta L^{int} = T\,dS + f\,dL$$

La variazione dell'energia libera di Helmholtz, $F := E - TS$,

$$dF = dE - T\,dS - S\,dT = f\,dL - S\,dT\ ,$$

permette di riconoscere l'azione assiale e l'entropia come le derivate parziali di F,

$$f = \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_T \qquad , \qquad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_L$$

Integrando la relazione dell'azione assiale, si ottiene

$$F(\Delta L, \Delta T) = \frac{1}{2}\,K\,\Delta L^2 - \alpha\,L_0\,K\,\Delta T\,\Delta L + F_0(T)\ ,$$

avendo introdotto la funzione $F_0(T)$, dipendente al massimo dalla temperatura T, come risultato dell'integrazione in L. Dall'espressione dell'energia libera di Helmholtz si può poi ricavare l'espressione dell'entropia

$$S(\Delta L, \Delta T) = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_L = \alpha\,L_0\,K\,\Delta L - F_0'(T)\ .$$

Calori specifici. Il calore specifico a lunghezza costante viene calcolato direttamente usando l'espressione dell'entropia,

$$C_L = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_L = -T\,F_0''(T)\ .$$

Assumendo che il calore specifico C_L sia costante, l'integrazione ci fornisce un'espressione della funzione $F_0'(T)$,

$$F_0'(T) - F_0'(T_0) = -C_L \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\ ,$$

che consente di esprimere l'entropia in fuznione del calore specifico,

$$S(\Delta L,\ \Delta T) = \alpha\,L_0\,K\,\Delta L + C_L \ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) + S_0$$

Usando la legge costitutiva per esprimere l'allungamento in funzione dell'azione assiale e dell'incremento di temperatura,

$$S(f,\ \Delta T) = \alpha\,L_0\,K\,\left(\frac{1}{K}\,f + \alpha\,L_0\,\Delta T\right) + C_L \ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) + S_0\ ,$$

è possibile calcolare il calore specifico a carico costante,

$$\begin{aligned} C_f = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_f & = \\ & = T\,\left[K\,(\alpha\,L_0)^2 + \frac{C_L}{T}\right] \\ & = TK\,(\alpha\,L_0)^2 + C_L\ . \end{aligned}$$

Coefficienti termodinamici: costanti elastiche, coefficiente di dilatazione. Dall'espressione della legge costitutiva, si definiscono la costante elastica isoterma

$$\frac{1}{K} := \left(\frac{\partial L}{\partial f}\right)_T\ ,$$

e il coefficiente di dilatazione termica a carico costante

$$\alpha_f := \frac{1}{L_0}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_f\ .$$

La costante elastica adiabatica,

$$\frac{1}{K_{ad}} := \left(\frac{\partial L}{\partial f}\right)_S \ ,$$

può essere calcolata derivando la funzione che esprime la lunghezza L in funzione delle variabili indipendente f, S che si può ricavare sostituendo il legame $\Delta T(\Delta L,\, F)$ della relazione costitutiva nell'espressione dell'entropia, per ottenere

$$S = \alpha\, L_0\, K\, \Delta L + C_L \ln\left(1 + \frac{1}{T_0}\frac{1}{\alpha\, L_0\, K}\,(K\,\Delta L - f)\right) + S_0$$

la cui derivata $\frac{\partial}{\partial f}\big|_S$ vale

$$0 = \alpha\, L_0\, K \left(\frac{\partial L}{\partial f}\right)_S + C_L \frac{1}{1 + \frac{K\,\Delta L - f}{\alpha\, T_0\, L_0\, K}} \frac{1}{\alpha\, L_0\, K\, T_0} \left(K \left(\frac{\partial L}{\partial f}\right)_S - 1\right) \ .$$

Introducendo la definizione della costante elastica in condizioni adiabatiche, $K_{ad}(T; K, \alpha)$,

$$\frac{K}{K_{ad}}\left[\frac{(\alpha\, L_0)^2\, T\, K}{C_L} + 1\right] = 1$$

si trova la relazione tra le costanti elastiche isoterma e adiabatica,

$$K_{ad} = K\left(1 + \frac{(\alpha\, L_0)^2\, T\, K}{C_L}\right) = K \frac{1}{1 - \dfrac{(\alpha\, L_0)^2\, K\, T}{C_f}} \ .$$

Energia interna. L'energia interna del sistema può essere ricavata da $E = F + T\, S$,

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\, K\, \Delta L^2 - \alpha\, L_0\, K\, \Delta T\, \Delta L + F_0(T) + T\left(\alpha\, L_0\, K\, \Delta L + C_L \ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) + S_0\right) = \\
&= \frac{1}{2}\, K\, \Delta L^2 + F_0(T) + T\, C_L\, \ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) + T\, S_0 \ .
\end{aligned}$$

E' quindi possibile riconoscere $E_0 := E(\Delta L = 0, \Delta T = 0) = F_0(T_0) + T_0\, S_0$. La variazione di quest'ultima relazione nei confronti delle variabili ΔL, ΔT,

$$\begin{aligned}
dE &= K \Delta L\, dL + \underbrace{F_0'(T)}_{-C_L \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - S_0} dT + C_L\, dT\left[\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + 1\right] + S_0\, dT = \\
&= K \Delta L\, dL + C_L\, dT
\end{aligned}$$

può essere espressa in funzione degli incrementi dL, dS, grazie all'incremento della relazione che lega le tre variabili S, L, T,

$$dS = \alpha\, L_0\, K\, dL + \frac{C_L}{T}\, dT \ ,$$

in

$$\begin{aligned}
dE &= K \Delta L\, dL + C_L\, dT = \\
&= K \Delta L\, dL + T\,(dS - \alpha\, L_0\, K\, dL) = \\
&= (K \Delta L - K\, \alpha\, L_0\, T)\, dL + T\, dS \ .
\end{aligned}$$

todo Controllare! Non torna l'espressione della forza: c'è solo la temperatura, ma ci dovrebbe essere la differenza di temperatura rispetto a quella di riferimento?

CHAPTER

FOURTEEN

MACCHINE TERMICHE

Storia.

- rivoluzione industriale
- …
- macchine termiche oggi: motori a combustione interna, motori aeronautici, centrali di generazione di energia elettrica (conversione di forme di energia),…
- …

Classificazione.

- Combustione: interna/esterna
- Funzionamento: in fasi (o volumetrico; a sua volta alternativo/rotativo)/continuo

Componenti.

- trasformazioni TD e componenti (turbine, compressori, scambiatori di calore,…)
- cicli termodinamici e macchine termiche
  - macchina ideale di Carnot: efficienza massima, formulazioni equivalenti del *secondo principio della TD* per le macchine termiche (Planck, Kelvin)
  - macchine reali

14.1 Cicli termodinamici

Un ciclo termodinamico è una sequenza di trasformazioni termodinamiche che riportano il sistema al suo stato di partenza. In un piano termodinamico, un ciclo termodinamico è rappresentato da una curva chiusa.

- **todo.** Sistemi aperti/sistemi chiusi

Per un **sistema chiuso**, il primo principio della termodinamica

$$dE^{tot} = \delta Q^e + \delta L^e$$

Nell'ipotesi di regime periodico dello stato del sistema descritto da un ciclo termodinamico, alla fine del ciclo

$$0 = \oint_\gamma dE^{tot} = \oint_\gamma \delta Q^e + \oint_\gamma \delta L^e \ ,$$

e da questo segue che il lavoro netto fatto dal sistema $-L^e$ è uguale al calore netto entrato nel sistema Q^e,

$$-L^e = Q^e \ .$$

todo In un sistema in cui sia trascurabile l'energia cinetica del sistema sia trascurabile rispetto alla variazione di energia interna, si può approssimare $E^{tot} = K + E \approx E$

14.2 Macchina termica di Carnot

$$dE^{tot} = \delta Q^{ext} + \delta L^{ext} \ ,$$

$$dS = \frac{\delta Q^{ext}}{T} + \frac{\delta^+ D}{T} \geq \frac{\delta Q^{ext}}{T} \ .$$

$$0 = \oint_\gamma dE^{tot} = \oint_\gamma \delta Q^{ext} + \oint_\gamma \delta L^{ext}$$

Il lavoro fatto in un ciclo è

$$\Delta L^{1-cycle} = -\Delta L^{ext} = \Delta Q^{ext} \ .$$

Ciclo di Carnot. Due adiabatiche ideali e due isoterme ideali.

Principio di Carnot. Il rendimento massimo di una macchina termica che scambia calore con due sorgenti di calore a temperatura costante $T_1, T_2 < T_2$ è

$$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1} \ .$$

14.3 Secondo principio della termodinamica per cicli termodinamici

Esistono due enunciati equivalenti del secondo principio della termodinamica per una macchina termica che realizza un ciclo termodinamico.

Enunciato di Kelvin. Una macchina termodinamica non può trasformare in lavoro tutto il calore assorbito da una sorgente a temperatura costante.

$$dE^{tot} = \delta Q^{ext} + \delta L^{ext} = \delta Q^{ext} - \delta L$$

$$\begin{aligned}
0 = & \oint_\gamma \frac{dE^{tot}}{T_1} = \\
= & \oint_\gamma \frac{\delta Q^{ext}}{T_1} - \oint_\gamma \frac{\delta L}{T_1} \leq \quad \delta Q^{ext} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T} \right) \leq 0 \\
\leq & \oint_\gamma \frac{\delta Q^{ext}}{T} - \frac{L}{T_1} \leq \\
\leq & \underbrace{\oint_\gamma dS}_{=0} - \frac{L}{T_1} \ ,
\end{aligned}$$

che implica

$$L \leq 0 \ ,$$

cioè che una macchina termica che scambia calore unicamente con una sorgente a temperatura costante produce un lavoro negativo, ossia assorbe lavoro esterno, e cede calore.

Enunciato di Planck. Non è possibile trasferire calore da una sorgente a temperatura T_2 a una sorgente a temperatura maggiore $T_1 > T_2$ con una macchina termica che non assorba lavoro.

todo dim

14.4 Ciclo Otto

Storia e applicazioni.

14.4.1 Ciclo Otto reale

…

14.4.2 Ciclo Otto ideale

Un modello ideale del ciclo Otto è formato da:

- $0 \rightarrow 1$ aspirazione a pressione costante, P_1. Durante l'aspirazione, il sistema è aperto: le valvole di aspirazione sono aperte per far entrare l'aria in camera di combustione. Alla fine dell'aspirazione, le valvole vengono chiuse e il sistema di interesse è un sistema chiuso
- $1 \rightarrow 2$ compressione adiabatica in sistema chiuso
- $2 \rightarrow 3$ combustione a volume costante: la combustione avviene in maniera sufficientemente veloce da poter essere modellata come una trasformazione termodinamica a volume costante, in corrispondenza del punto morto superiore; in prima approssimazione, si può trascurare il flusso di massa del combustibile e la variazione delle proprietà chimico-fisiche del fluido di lavoro; la reazione di combustione produce il calore in ingresso al sistema
- $3 \rightarrow 4$ espansione adiabatica
- $4 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$ scarico libero e scarico forzato. **todo** in prima approssimazione, la parte di scarico al punto morto inferiore non produce lavoro poiché $\Delta V_{14} = 0$ e la fase di scarico forzata è equilibrata dalla fase di aspirazione.

14.4.3 Rendimento del ciclo Otto

$$\eta = 1 + \frac{\Delta Q_{41}}{\Delta Q_{23}} = 1 + \frac{m\, c_V\, (T_1 - T_4)}{m\, c_V\, (T_3 - T_2)} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$$

Usando le condizioni, **todo** *usare direttamente le espressioni delle adiabatiche ideali ricavate nella sezione delle trasformazioni termodinamiche con gas ideali*

$$V_2 = V_3 \qquad , \qquad V_1 = V_4$$

$$P_1\, V_1^\gamma = P_2\, V_2^\gamma$$

$$P_3\, V_3^\gamma = P_4\, V_4^\gamma$$

e la legge dei gas ideali, $PV = mRT$, assumendo che sia un'equazione di stato adatta a descrivere il fluido di lavoro, per riscrivere l'equazione delle trasformazioni adiabatiche

$$\begin{aligned} T_1\, V_1^{\gamma-1} = T_2\, V_2^{\gamma-1} \qquad & \rightarrow \qquad (T_4 - T_1)\, V_1^{\gamma-1} = (T_3 - T_2)\, V_2^{\gamma-1} \\ T_3\, V_3^{\gamma-1} = T_4\, V_4^{\gamma-1} \qquad & \rightarrow \qquad \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{1}{\beta^{\gamma-1}} \end{aligned}$$

è possibile riscrivere l'espressione del rendimento del ciclo Otto in funzione unicamente del rapporto di compressione volumetrico $\beta := \dfrac{V_1}{V_2}$,

$$\eta = 1 - \frac{1}{\beta^{\gamma-1}} \ .$$

14.4.4 Funzionamento di un motore a combustione interna

todo

14.4.5 Esempio

todo

14.5 Ciclo Diesel

14.5.1 Ciclo Diesel reale

- aspirazione
- compressione adiabatica
- combustione
- espansione adaibatica
- scarico

14.6 Ciclo Joule-Brayton

Storia e applicazioni. Il ciclo Joule-Brayton rappresenta il ciclo termodinamico ideale per il funzionamento a ciclo continuo delle macchine a gas.

Nelle moderne applicazioni, le turbine a gas possono operare

- a ciclo aperto: motori a getto, ad esempio per propulsione aeronautica
- ciclo chiuso: turbine con rigenerazione
- cicli combinati

Entrambe le configurazioni sono realizzate con macchine termiche continue, che sono **sistemi aperti** **todo** *scrivere la sezione per i sistemi aperti e aggiungere riferimento*

14.6.1 Ciclo Joule-Brayton aperto

14.6.2 Ciclo Joule-Brayton chiuso

Un modello ideale del ciclo Joule-Brayton è formato da:

- $1 \rightarrow 2$ compressione adiabatica in compressore, tipicamente dinamico assiale - sistema aperto
- $2 \rightarrow 3$ combustione a pressione costante: la combustione avviene in camera di combustione aperta e viene modellata come una trasformazione termodinamica a pressione costante; in prima approssimazione, si può trascurare il flusso di massa del combustibile e la variazione delle proprietà chimico-fisiche del fluido di lavoro; la reazione di combustione produce il calore in ingresso al sistema
- $3 \rightarrow 4$ espansione adiabatica in turbina - sistema aperto
- $4 \rightarrow 1$, raffreddamento a pressione costante

14.6.3 Rendimento del ciclo Joule-Brayton

$$\eta = 1 + \frac{\dot{Q}_{41}}{\dot{Q}_{23}} = 1 + \frac{\dot{m}\, c_P \,(T_1 - T_4)}{\dot{m}\, c_P \,(T_3 - T_2)} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$$

Usando le condizioni, **todo** *usare direttamente le espressioni delle adiabatiche ideali ricavate nella sezione delle trasformazioni termodinamiche con gas ideali*

$$P_2 = P_3 \qquad , \qquad P_1 = P_4$$

$$P_1\, V_1^\gamma = P_2\, V_2^\gamma$$

$$P_3\, V_3^\gamma = P_4\, V_4^\gamma$$

e la legge dei gas ideali, $PV = mRT$, assumendo che sia un'equazione di stato adatta a descrivere il fluido di lavoro, per riscrivere l'equazione delle trasformazioni adiabatiche

$$\begin{aligned} P_1^{1-\gamma}\, T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma}\, T_2^\gamma \qquad & \rightarrow \qquad (T_4 - T_1)\, P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = (T_3 - T_2)\, P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ P_3^{1-\gamma}\, T_3^\gamma = P_4^{1-\gamma}\, T_4^\gamma \qquad & \rightarrow \qquad \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1}{\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \end{aligned}$$

è possibile riscrivere l'espressione del rendimento del ciclo Otto in funzione unicamente del rapporto di compressione $\beta := \dfrac{P_2}{P_1}$,

$$\eta = 1 - \frac{1}{\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \ .$$

14.6.4 Esempio

todo

14.7 Ciclo Rankine

Il ciclo Rankine rappresenta il ciclo termodinamico ideale per il funzionamento a ciclo continuo delle macchine a vapore.

Il sistema sfrutta il cambio di fase tra liquido e vapore di un fluido di lavoro, di solito acqua, oggi anche ORC

- ciclo aperto nelle applicazioni storiche, come nelle prime locomotive
- ciclo chiuso nelle moderne applicazioni nelle centrali elettriche

Nelle moderne applicazioni, alcune modifiche/migioramenti:

- con surriscaldamento
- con rigenerazione
- cicli combinati

14.8 Problemi

Problema 1. Testo…

Soluzione.

Problema 2. Testo…

Soluzione.

CHAPTER

FIFTEEN

MECCANISMI DI TRASMISSIONE DEL CALORE

Part IV

Elettromagnetismo

CHAPTER SIXTEEN

ELETTROMAGNETISMO

Presentazione libro I contenuti sono suddivisi in quattro diverse sezioni:

1. **Introduzione all'elettromagnetismo.** Viene presentata la cronologia e una la descrizione dei **concetti** e le prime **esperienze** che hanno permesso di riconoscere i principi fisici che governano i fenomeni elettromagnetici e di costruire una teoria consistente, la teoria dell'elettromagnetismo classico;
2. **Principi dell'elettromagnetismo.** Partendo dai concetti e dalle esperienze, vengono formalizzati i principi dell'elettromagnetismo **todo**
3. **Principi di elettrotecnica.** Partendo dai principi generali dell'elettromagnetismo, viene introdotta l'**approssimazione circuitale** per ridurre il problema elettromagnetico alla soluzione di circuiti. **todo**
4. **Onde elettromagnetiche. todo**

CHAPTER

SEVENTEEN

INTRODUZIONE ALL'ELETTROMAGNETISMO

17.1 Breve storia dell'elettromagnetismo

todo …

Applicazioni.

- trasferimento energia:
- trasferimento informazione:
  - studi primordiali di Lesage, 1774
  - telegrafo
  - onde EM
- Antichità: …
- Primi esperienze e strumenti:
  - elettrizzazione
  - macchine elettrostatiche, bottiglia di Leida
  - …
- 1747, B.Franklin intuisce la legge di conservazione della carica elettrica, *"not created by the the friction, but collected"*
- 1784, C.A.Coulomb formula la legge di Coulomb usando una bilancia a torsione
- 1800, A.Volta: pila. Conversione di energia chimia in energia elettrica.
  - **todo** principi di funzionamento ed esercizio
- 1806: H.Davy dà origine all'elettrochimica, usando una pila per scomporre sostanze. **todo** *negli anni successivi, conclusioni su natura elettricità prodotta in maniera differente, ed energia*
- Elettromagnetismo:
  - 1820, Oersted
  - 1820-27, Ampére
  - 1831-55, Faraday:
    - induzione EM
    - …
- Applicazioni e sviluppi della matematica in fisica, "nascita della fisica matematica":

- Poisson
- 1828, Green *An Essay on the Application on Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*
- 1884, O.Heaviside riformula le equazioni di Maxwell nella forma attualmente conosciuta, usando gli strumenti del calcolo differenziale

• Strumenti:
  – 1822-37, galvanometri: Schweigger, Weber + Gauss; galvanometro a riflessione?

• Elettricità e termodinamica:
  – 1821, Seeback
  – 1827, Ohm
  – 1834, Peltier

• 1850, Kirchhoff e leggi sui circuiti
• Primi generatori/motori elettrici; circuiti in AC
• **Maxwell**
  – correzione e formalizzazione delle equazioni dell'elettromagnetismo
  – onde EM: velocità di propagazione del campo EM ~ velocità della luce
• Hertz e onde EM
• Elettromagnetismo negli ultimi anni del XIX secolo
• Elettromagnetismo all'inizio del XX secolo:
  – crisi e nuove teorie

17.2 Esperienze ed esperimenti

17.2.1 Elettrizzazione

…

17.2.2 Conservazione della carica

Conservazione della carica, e corrente elettrica

17.2.3 Coulomb

Legge di Coulomb

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 \, q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{r}_{21} \ ,$$

avendo definito il vettore $\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

- bilancia a torsione
- esercizi
  - bilancia a torsione

- bilancia lineare
- pendolo …

17.2.4 Campo elettrico ed energia del campo elettrico

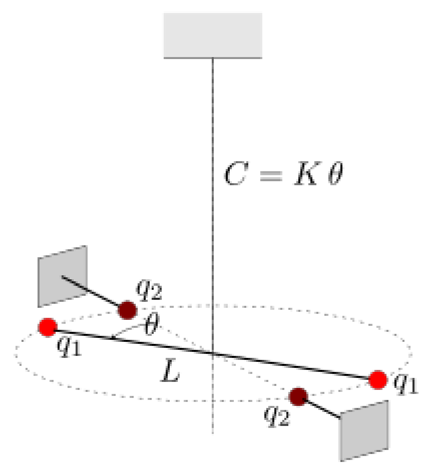
…

17.2.5 Pila di Volta

… applicazione delle leggi della termodinamica …

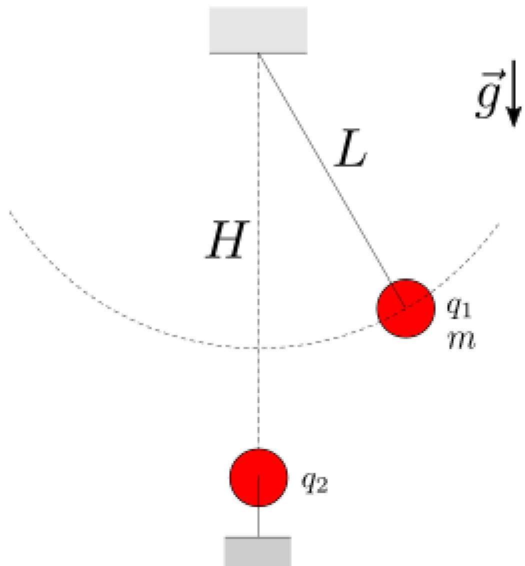
17.2.6 ...

17.3 Problemi



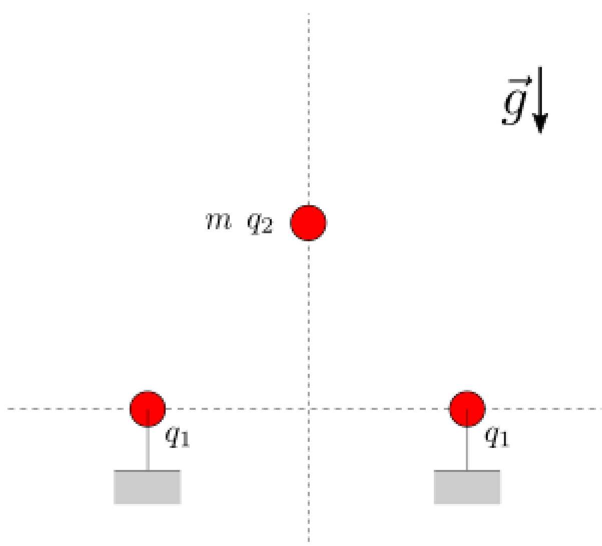
Problema … Bilancia a torsione

Soluzione.



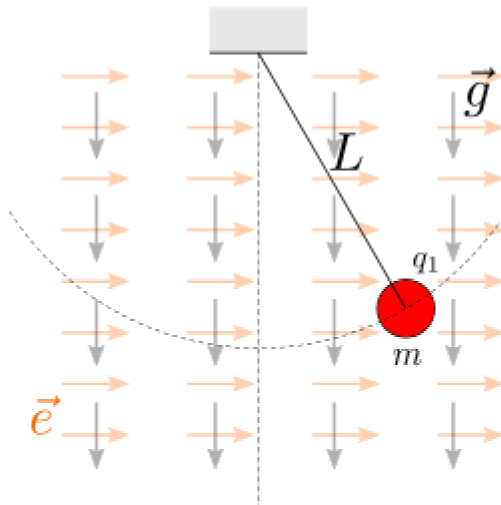
Problema …

Soluzione.



Problema …

Soluzione.



Problema …

Soluzione.

CHAPTER

EIGHTEEN

FONDAMENTI DI ELETTROMAGNETISMO

In questa sezione vengono ripresi i concetti e le esperienze fondamentali per formulare i **principi** dell'elettromagnetismo:

- principio di conservazione della carica elettrica
- equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico
- forza di Lorentz, agente su cariche elettriche in un campo magnetico

Lo sviluppo della materia include dei cenni sul comportamento dei materiali sottoposti a fenomeni elettromagnetici, riassumibile con le equazioni costitutive del materiale, e alcune applicazioni.

La presentazione degli argomenti segue qualitativamente un'ordine cronologico e di complessità della descrizione dei fenomeni coinvolti.

Elettrostatica. Partendo dalla *forza di Coulomb* scambiata tra due cariche puntiformi in quiete nello spazio, viene introdotto il concetto di *campo elettrico* tramite una sua definzione operativa. Il campo elettrico è *conservativo in regime stazionario* ed è quindi possibile introdurre un'*energia potenziale* e un *potenziale elettrico*. Viene descitta la risposta in un campo elettrico di materiali suscettibili alla *polarizzazione*. Vengono riassunte le proprietà del campo elettrico in regime stazionario in termini di *flusso* e *circuitazione*, con quelle che saranno le prime due equazioni di Maxwell: la *legge di Gauss per il campo elettrico* e la *legge di Faraday* in regime stazionario. Infine vengono analizzati modelli ideali di *condensatore*, componente elementare di molti circuiti elettrici.

Corrente elettrica. Viene introdotto il concetto di *corrente elettrica*, partendo da una descrizione microscopica del moto di cariche elementari discrete. Viene formulato il *principio di conservazione della carica eletttrica*. Infine viene discusso il fenomeno della conduzione elettrica in diversi materiali: viene descritto il modello ideale di *resistenza elettrica (di Ohm)*, componente elementare di molti circuiti elettrici; la conduzione elettrica nei gas permette di discutere dei primi esperimenti sulla natura della materia; l'analisi dei semiconduttori permette di discutere materiali e componenti elettrici fondamentali per l'elettronica contemporanea.

Magnetismo ed elettromagnetismo stazionario. Vengono introdotti i fenomeni magnetici. Con le esperienze di Faraday, Oersted e Ampére, viene descritto il legame "monodirezionale" in regime stazionario tra fenomeni elettrici e fenomeni magnetici: la corrente elettrica produce un magnetico, descritto dalla *legge di Biot-Savart*. I risultati dell'esperienza di Faraday permettono la descrizione di versioni rudimentali degli strumenti di misura della corrente e della differenza di potenziale. Le proprietà del campo magnetico vengono riassunte in termini di *flusso* e *circuitazione* con quelle che saranno altre due equazioni di Mawell: la *legge di Gauss per il campo magnetico* e la *legge di Ampére*. Queste leggi fisiche vengono utilizzate per l'analisi di modelli ideali di *induttore*, componente elementare di molti circuiti elettrici, elettromagnetici ed elettromeccanici. Viene presentata infine la *correzione di Maxwell* della legge di Ampére con l'aggiunta del termine non-stazionario che la rende compatibile con l'equazione di conservazione della carica elettrica: la versione corretta viene infine applicata al processo di carica di un condensatore.

Elettromagnetismo. Con la *legge di induzione di Faraday*, viene introdotto l'accoppiamento inverso a quello descritto nella sezione precedente: un flusso di campo magnetico variabile nel tempo, induce un campo elettrico.

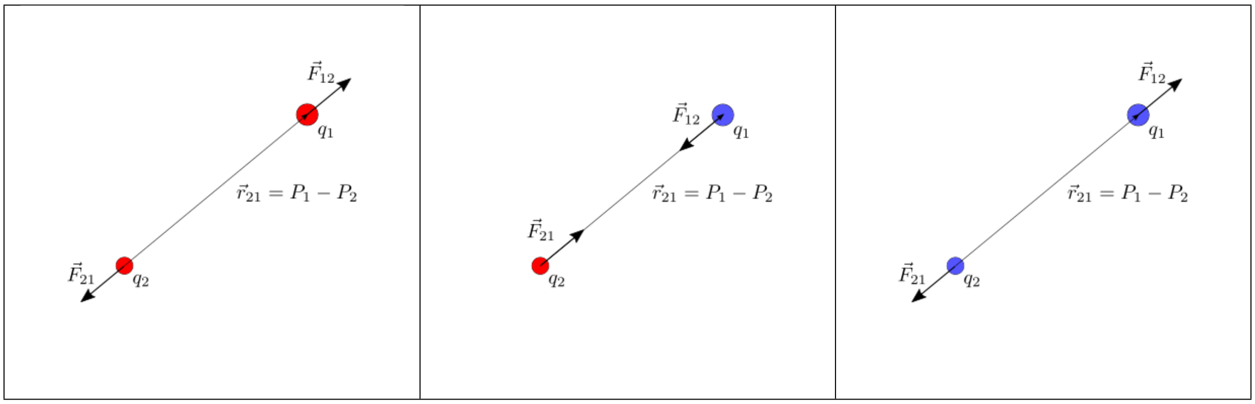
18.1 Elettrostatica

18.1.1 Legge di Coulomb

Date due cariche elettriche puntiformi q_1, q_2, nella posizione P_1, P_2 nello spazio, la forza

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1\, q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\, \hat{r}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1\, q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\, \hat{r}_{21}$$

essendo $\vec{r}_{21}$ il vettore che congiunge il punto P_2 con il punto P_1, $\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.



La scelta della definizione della costante di proporzionalità, $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$, viene fatta per ottenere un'espressione della *legge di Gauss per il campo elettrico* senza fattori numerici.

La costante ε viene definita costante dielettrica del mezzo. Per cariche elettriche posizionate nello spazio "vuoto" (di materia ma non di proprietà fisiche), nell'espressione della legge di Coulomb compare la **costante dielettrica nel vuoto**,

$$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\, C^2\, N^{-1}\, m^{-2}\ .$$

Materiali isotropi lineari non dispersivi possono essere caratterizzati da una sola costante, la costante dielettrica del materiale. Questa caratteristica del materiale viene di solito definita come multiplo della costante dielettrica del vuoto, tramite la costante dielettrica relativa ε_r,

$$\varepsilon = \varepsilon_r\, \varepsilon_0\ .$$

Vale il **principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti**. In presenza di 3 cariche puntiformi, q_1, q_2, q_3, la forza totale agente sulla carica q_1 è uguale alla somma delle forze dovute a q_2 e q_3,

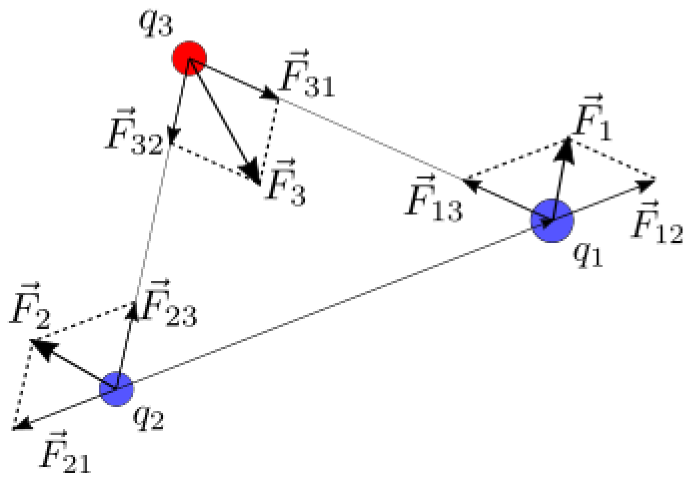
$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = \frac{q_1\, q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} + \frac{q_1\, q_3}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2}\ .$$

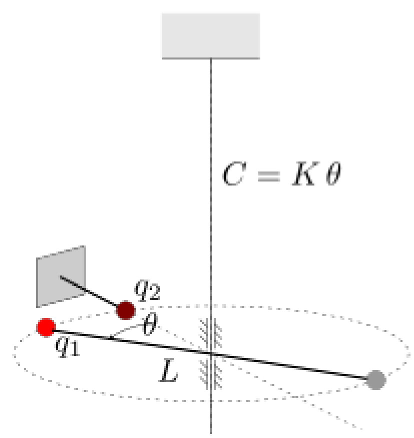
Misura della carica elettrica

Un elettrometro è uno strumento di misura della carica elettrica. Una versione rudimentale di un elettrometro è la bilancia di torsione usata da Coulomb nei suoi esperimenti.

Il momento generato dalla forza di Coulomb sulla carica elettrica incognita q_1 dalla carica elettrica q_2 equilibria il momento elastico della bilancia di torsione. Se la struttura ha una equazione costitutiva il momento strutturale è proproporzionale alla rotazione, $M_z = K\, \theta$.

todo *svolgere conti qui o rimandare a esercizi?*


q_3
$\vec{F}_{31}$
$\vec{F}_{32}$
$\vec{F}_3$
$\vec{F}_1$
$\vec{F}_{13}$
$\vec{F}_{12}$
q_1
$\vec{F}_2$
$\vec{F}_{23}$
q_2
$\vec{F}_{21}$


$C = K\,\theta$
q_2
θ
q_1
L

18.1.2 Il campo elettrico

Data una distribuzione di cariche nello spazio, è possibile descriverla tramite l'effetto che avrebbe su una carica qualsiasi posta in un punto arbitrario dello spazio, introducendo la definizione di campo elettrico.

Viene data qui una **definizione operativa** del campo elettrico. Data una distribuzione di cariche, q_i, nei punti dello spazio P_i, si prende una carica test - di prova - di intensità nota q^{test}, che può essere posizionata in ogni punto P dello spazio. E' inoltre possibile misurare la forza $\vec{F}(P; q^{test})$ agente sulla carica di prova dovuta all'interazione con la distribuzione di cariche in esame,

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{test}(P, q^{test}) &= \sum_i \vec{F}_{test,i}(P) = \\
&= \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_i\, q_{test}}{|\vec{r}_{i,test,i}|^2}\, \hat{r}_{i,test} = \\
&= q_{test} \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_i}{|\vec{r}_{i,test,i}|^2}\, \hat{r}_{i,test} = \\
&= q_{test}\, \vec{e}(P;\, q_i,\, P_i) \ .
\end{aligned}$$

Poichè la forza sulla carica di prova è proporzionale alla sua carica elettrica, è possibile descrivere l'effetto della distribuzione nota di cariche nello spazio con la funzione $\vec{e}(P;\, q_i,\, P_i)$. Questa funzione viene definita **campo elettrico** della distribuzione delle cariche.

Viceversa, noto il campo elettrico di una distribuzione di cariche, la forza agente su una carica elettrica q posta nel punto P dello spazio è

$$\vec{F} = q\, \vec{e}(P) \ .$$

- **todo** Poichè il PSCE vale per la forza, il **PSCE** vale per il campo elettrico

Campo conservativo

Come mostrato (**todo** ah sì? fare riferimenti qui?) per il campo gravitazionale, anche il campo elettrostatico è un campo conservativo.

Il lavoro fatto dal campo su una carica che descrive una traiettoria γ, con estremi A, B è uguale a

$$\begin{aligned}
L &= \int_\gamma \vec{F}(P) \cdot d\vec{r} = -\int_\gamma \nabla U(P) \cdot d\vec{r} = -\Delta U = U(A) - U(B) \\
&= q \int_\gamma \vec{e}(P) \cdot d\vec{r} = -q \int_\gamma \nabla V(P) \cdot d\vec{r} = -q\, \Delta V = q\, \left(V(A) - V(B)\right)
\end{aligned}$$

avendo definito l'**energia potenziale** $U(P)$ del sistema di cariche che produce il campo elettrico $\vec{e}(P)$ e il **potenziale elettrico** $V(P)$ come l'energia potenziale per unità di carica q. Sia l'energia potenziale sia il potenziale sono definiti a meno di una costante additiva.

Il potenziale generato da una carica q_i posizionata punto "potenziante" P_i nel punto "potenziato" P

$$V_i(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_i}{|\vec{r}_i|} \ ,$$

con $\vec{r}_i = P - P_i$. Poichè il PSCE vale per la forza e il campo elettrico, il **PSCE** vale per il potenziale, e quindi il potenziale elettrico generato da un sistema di cariche è la somma del potenziale elettrico generato dalle singole cariche,

$$V_i(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}_i|}$$

Energia potenziale di una distribuzione di cariche

L'energia potenziale di un sistema di cariche è uguale al lavoro (delle forze esterne = - lavoro forza elettrica) fatto per costruire tale distribuzione. Poiché in meccanica classica l'energia è definita a meno di una costante additiva arbitraria, si può considerare la condizione di riferimento con le cariche poste all'"infinito" o, meglio, infinitamente distanti una dalle altre.

Per un sistema di cariche puntiformi, l'energia potenziale del sistema è uguale alla somma dell'energia potenziale tra le singole coppie di cariche

$$E^{pot} = \sum_{\{i,j\},i\neq j} V_{ij} = \sum_{\{i,j\},i\neq j} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_i \, q_j}{r_{ij}} \ ,$$

senza ripetere la sommatoria sulle coppie con gli elementi invertiti.

Seguono due dimostrazioni di questa formula, ottenute costruendo il sistema di cariche dall'infinito in due maneire diverse.

todo

Posizionando una carica alla volta

$$\begin{aligned}
L_1^{ext} & = 0 \\
L_2^{ext} & = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 \, q_2}{r_{12}} \\
L_3^{ext} & = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 \, q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_2 \, q_3}{r_{23}} \\
& \dots \\
L_n^{ext} & = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 \, q_n}{r_{1n}} \\
E^{pot} = L^{ext} & = \sum_i L_i^{ext} = \sum_{\{i,j\},i\neq j} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 \, q_j}{r_{ij}} \ .
\end{aligned}$$

Posizionando le cariche contemporaneamente

Posizionando tutte le cariche contamporaneamente con una "scalatura" delle distanze, $\vec{r}_i(\alpha) = \frac{\vec{r}_i}{\alpha}$, $\alpha \in (0,1]$, il lavoro delle forze elettriche è

$$\begin{aligned}
dL_i(\alpha) & = \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij}(\alpha) \cdot d\vec{r}_i(\alpha) = \\
& = \sum_{j\neq i} \frac{q_i \, q_j}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\left|\frac{\vec{r}_i}{\alpha} - \frac{\vec{r}_j}{\alpha}\right|^2} \hat{r}_{ji} \cdot \left(-\frac{\vec{r}_i}{\alpha^2}\right) \, d\alpha = \\
& = -\sum_{j\neq i} \frac{q_i \, q_j}{4\pi\varepsilon} \frac{\hat{r}_{ji} \cdot \vec{r}_i}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|^2} \, d\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dL(\alpha) &= \sum_i dL_i = \\
&= -\sum_i \sum_{j\neq i} \frac{q_i\, q_j}{4\pi\varepsilon} \frac{\hat{r}_{ji}\cdot\vec{r}_i}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|^2}\, d\alpha = \\
&= -\sum_{\{i,j\},i\neq j} \frac{q_i\, q_j}{4\pi\varepsilon} \frac{\hat{r}_{ji}\cdot\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|^2}\, d\alpha = \\
&= -\sum_{\{i,j\},i\neq j} \frac{q_i\, q_j}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r_{ij}}\, d\alpha\ ,
\end{aligned}$$

e il lavoro diventa

$$L = \int_{\alpha=0}^{1} dL(\alpha) = -\int_{\alpha=0}^{1} \sum_{\{i,j\},i\neq j} \frac{q_i\, q_j}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_{ij}}\, d\alpha = -\sum_{\{i,j\},i\neq j} \frac{q_i\, q_j}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r_{ij}}\ .$$

18.1.3 Campo elettrico nei materiali

- polarizzazione…

Per materiali lineari isotropi,

$$\vec{d} := \varepsilon\vec{e} = \varepsilon_0\vec{e} + \vec{p}$$

todo polarizzazione, cariche libere e cariche "vincolate"

18.1.4 Verso le equazioni di Maxwell

Legge di Gauss per il flusso del campo elettrico

$$\Phi_{\partial V}(\vec{d}) = Q_V$$

Dimostrazione della legge di Gauss

Dimostrazione per una carica puntiforme e una superficie sferica. Il calcolo diretto del flusso del campo elettrico generato da una carica puntiforme attraverso una superficie sferica di raggio r centrata nella carica

$$\Phi_{S^{sphere}}(\vec{d}) = \oint_{S^{sphere}} \vec{d}\cdot\hat{n} = \oint_{S^{sphere}} \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{=1}\ .$$

L'integranda è costante, essendo r costante sulla superficie sferica, e quindi si riduce al prodotto della funzione integranda per l'estensione del dominio di integrazione, qui la superficie estenra della sfera. Ricordando che la superficie di una superficie sferica di raggio r è $S = 4\pi r^2$, si ottiene l'espressione della legge di Gauss per il campo elettrico di una carica puntiforme attraverso una superficie sferica,

$$\Phi_{S^{sphere}}(\vec{d}) = 4\,\pi\, r^2 \frac{1}{4\,\pi\, r^2} q = q\ .$$

todo obs: andamento del campo come r^{-2} implica andamento del flusso costante attraverso superfici che sottengono lo stesso **angolo solido**

todo … altra osservazione che ora non ricordo…

Dimostrazione per una carica puntiforme e per una superficie arbitraria. Usando l'osservazione sull'andamento del campo, e la definizione di angolo solido

$$\oint_S \frac{q}{4\pi}\frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{n}\,dS = \oint_\Omega \frac{q}{4\pi}\,d\Omega = q$$

Dimostrazione per una distribuzione di carica qualsiasi e superficie arbitraria. Avendo dimostrato la legge di Gauss per una carica puntiforme attraverso una superficie arbitraria, la legge di Gauss per il campo $\vec{d}$ generato da una distribuzione di carica qualsiasi segue immediatamente, ricordando che vale il PSCE

$$\Phi_{\partial V}(\vec{d}_i) = q_i$$

$$\sum_i \Phi_{\partial V}(\vec{d}_i) = \Phi_{\partial V}\left(\sum_i \vec{d}_i\right) = \sum_i q_i$$

$$\Phi_{\partial V}(\vec{d}) = Q_V$$

Legge di Faraday, in elettrostatica

- La legge di Faraday in elettrostatica è una diretta conseguenza della conservatività del campo elettrico

$$\Gamma_\ell(\vec{e}) = \oint_\ell \vec{e}\cdot\hat{t} = 0\ .$$

- Questa equazione è valida **solo** in un regime elettrostatico: la forma generale dell'equazione di Faraday prevede un termine dipendente dal tempo, che è identicamente nullo nel regime elettrostatico.

Dimostrazione della legge di Faraday

Dimostrazione per una carica puntiforme e un percorso circolare. Il calcolo diretto della circuitazione del campo elettrico generato da una carica puntiforme lungo un percorso circolare di raggio r centrato nella carica

$$\Gamma_{\ell circle}(\vec{e}) = \oint_{\ell circle} \vec{e}\cdot\hat{t} = \oint_{S sphere} \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{t}}_{=0} = 0\ ,$$

poiché il versore tangente al percorso circolare è ortogonale al campo elettrico, diretto in direzione radiale.

Dimostrazione per una carica puntiforme e un percorso arbitrario.

Dimostrazione per una distribuzione di carica qualsiasi e percorso arbitrario. Avendo dimostrato la legge di Faraday nel caso stazionario per una carica puntiforme lungo un percorso arbitrario, la legge di Faraday in regime stazionario per il $\vec{e}$ generato da una distribuzione di carica qualsiasi segue immediatamente, ricordando che vale il PSCE

$$\Gamma_{\partial S}(\vec{e}_i) = 0$$

$$\sum_i \Gamma_{\partial S}(\vec{e}_i) = \Gamma_{\partial S}\left(\sum_i \vec{e}_i\right) = 0$$

$$\Gamma_{\partial S}(\vec{e}) = 0$$

18.1.5 Moto di una carica in un campo elettrico

Il moto di una corpo puntiforme di massa m e carica elettrica q in una regione dello spazio nel quale c'è un campo elettrico $\vec{e}(\vec{r})$ è soggetto a una forza esterna $\vec{F}^{el} = q\,\vec{e}(P)$. L'equazione del moto diventa quindi

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{R}^{ext} = q\,\vec{e}(P) + \vec{F}^{\text{non}\,\vec{e}}$$

- **todo** esempi

18.1.6 Condensatore

Condensatore infinito piano

$$e = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$Q = \sigma\,A$$

$$\Delta V = \int_\ell \vec{e}\cdot d\vec{r} = \ell\,e$$

$$Q = \sigma\,A = \varepsilon\,e\,A = \frac{\varepsilon\,\ell}{A}\,\Delta V = C\,\Delta V\ ,$$

C capacità, $C = \frac{\varepsilon\,A}{\ell}$ capacità per un condensatore piano.

Condensatore cilindrico

todo

Condensatore sferico

Tra le sfere del condensatore, il campo elettrico è ha direzione radiale e valore assoluto $\propto r^{-2}$,

$$\vec{e}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}\hat{r}\ .$$

dove la carica totale della superficie sferica con distribuzione di carica uniforme è data dal prodotto della densità superficiale di carica e la superficie, $Q = \sigma\,S_1 = \sigma\,4\pi\,R_1^2$. La differenza di potenziale tra le due armature è quindi

$$\Delta V = -\int_\ell \vec{e}(r)\cdot\hat{r} = \int_{r=R_1}^{R_2}\frac{Q}{4\pi r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}\bigg|_{R_1}^{R_2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\,,Q\ .$$

La formula precedente e la definizione di capacità, \$$Q = C, \Delta V$\$, consente di determinare la capacità di un condensatore sferico ideale,

$$C = 4\pi\,\varepsilon\,\frac{R_1\,R_2}{R_2 - R_1}\ .$$

18.2 Corrente elettrica

- corrente elettrica:
  - descrizione microscopica: materiale elettricamente neutro, con e^- liberi di conduzione
  - def come flusso di carica: dalla descrizione micro alla descrizione macroscopica, media, ("fenomenologica"?)

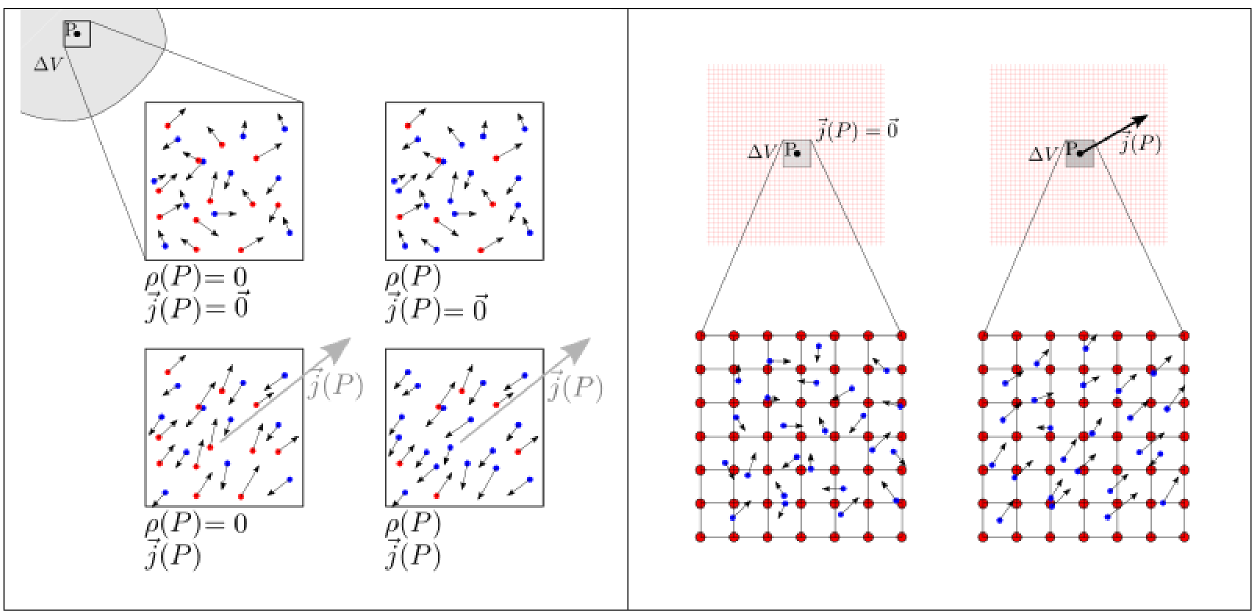
Localmente, è possibile definire una **densità "macroscopica" di corrente elettrica** come la media pesata delle velocità delle cariche, $\vec{v}$.

$$\lim_{\Delta V(P)\to 0} \frac{\sum_{k\in\Delta V(P)} q_k}{\Delta V} = \rho(P)$$

$$\lim_{\Delta V(P)\to 0} \frac{\sum_{k\in\Delta V(P)} q_k \vec{v}_k}{\Delta V_P} = \vec{j}(P)$$

La **corrente elettrica** attraverso una superficie S viene definita come il flusso di carica elettrica attraverso la superficie S,

$$i = I_S = \Phi_S(\vec{j}) \ .$$



Oss. Corrente elettrica in materiali neutri: è possibile avere corrente elettrica anche in materiali elettricamente neutri, anche localmente. Ad esempio, nell'ipotesi di avere due sostanze diverse con carica ρ^+, ρ^- e velocità media delle due sostanze $\vec{v}^+$, $\vec{v}^-$, la corrente densità di corrente elettrica è

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = \rho^+\vec{v}^+ + \rho^-\vec{v}^- \ .$$

Nel caso in cui il materiale sia neutro, la densità di carica elettrica è nulla, $0 = \rho = \rho^+ + \rho^- =$ e quindi $\rho^+ = -\rho^-$ e la densità di corrente elettrica può essere scritta come $\vec{j} = \rho^-(\vec{v}^- - \vec{v}^+)$.

Oss. Corrente elettrica in solidi conduttori neutri. I solidi hanno una struttura microscopica con gli atomi disposti in un reticolo, senza libertà di movimento. Nei solidi conduttori, gli elettroni "più esterni" della struttura atomica non sono localizzati attorno al singolo atono, ma sono "condivisi" e libersi di muoversi tra tutti gli atomi del solido: queste cariche elettriche libere di muoversi permettono una buona conduzione di corrente elettrica, e vengono chiamati **elettroni di conduzione**

Senza "forzanti esterne", come ad esempio campi elettrici, il moto degli elettroni di conduzione non ha direzioni privilegiate: poiché il moto delle cariche libere è casuale senza direzioni privilegiate, la velocità media è nulla (la velocità è una grandezza vettoriale!) e la corrente elettrica è nulla. Se le velocità delle cariche libere ha una direzione preferenziale, la loro velocità media, $\vec{v}^-$, e quindi la corrente elettrica, non è nulla. Assumendo che le cariche elettriche positive abbiano velocità media nulla rispetto all'osservatore $\vec{v}^+ = \vec{0}$, la densità di corrente elettrica diventa $\vec{j} = \rho^- \vec{v}^-$.

18.2.1 Strumenti: misura e generazione

todo

- strumenti per misurare corrente e tensione: amperometro e voltmetro
- generatori di "spinta": generatori di tensione
- resistenza al moto: la resistenza elettica

18.2.2 Legge di conservazione della carica elettrica

Il principio di conservazione della carica elettrica

$$\dot{Q}_V = -\Phi_{\partial V}(\vec{j}) = -I_{\partial V}$$

- **todo** esempi/esercizi con misura della corrente e della carica elettrica, con strumenti di misura (misura o modello di strumento, come bilance)

18.2.3 Conduzione

Conduzione nei solidi "di Ohm"

In un materiale di Ohm, il campo elettrico $\vec{e}$ è proporzionale alla densità di corrente elettrica $\vec{j}$. Per un solido isotropo, senza direzioni preferenziali, la **forma locale - differenziale - della legge di Ohm** è **Legge di Ohm** in forma locale:

$$\vec{j}(P) = \sigma(P)\,\vec{e}(P) \qquad , \qquad \vec{e}(P) = \rho_R(P)\,\vec{j}(P)$$

essendo la resistività ρ_R, e la conduttanza $\sigma = \frac{1}{\rho_R}$ le costanti di proporzionalità, caratteristiche del materiale.

In un cavo conduttore, nell'ipotesi di grandezze uniformi sulla sezione - o riferendosi alle grandezze medie -, si può integrare la legge in forma locale su un tratto di cavo elementare, di lunghezza $d\ell$,

$$\underbrace{e\,d\ell}_{-dv}\;A = \rho_R\;\underbrace{j\,A}_{i}\;d\ell$$

$$\rightarrow \quad dv = -\frac{\rho_R\,d\ell}{A}\,i = -dR\,i\;,$$

avendo introdotto la differenza di potenziale elementare dv tra gli estremi del tratto di cavo elementare, proporzionale alla corrente che transita nel cavo tramite la **resistenza elettrica** elementare dR. Queste relazioni che caratterizzano i materiali di Ohm sono le due leggi di Ohm:

- **Prima legge di Ohm.** La differenza di potenziale agli estremi di un cavo di lunghezza elementare è proporzionale alla corrente, tramite la resistenza elettrica elementare,

$$dv = -dR\,i\;,$$

- **Seconda legge di Ohm.** La resistenza elettrica di un cavo è direttamente proporzionale alla resistività del materiale, alla lunghezza del cavo, e inversamente proporzionale alla sezione del cavo,

$$dR = \frac{\rho_R\,d\ell}{A}\;.$$

Conduzione nei gas

Conduzione nei vuoto?

Conduzione nei semiconduttori

cenni all'elettronica: diodi, transistor, …

18.3 Magnetismo ed elettromagnetismo in regime stazionario

18.3.1 Esperienze elementari su campo magnetico

- cos'è? come costruire un campo magnetico? o avere multipli di un campo magnetico?

18.3.2 Esperienza di Faraday

$$d\vec{F} = -i\,\vec{b} \times d\vec{\ell} \ .$$

todo ha senso associarla a Faraday? Nessuno la conosceva prima? Galvani, Volta,… come misuravano la corrente elettrica?

Il galvanometro

Il galvanometro è uno strumento utilizzato per la misura della corrente elettrica. Sfrutta l'azione meccanica osservata nell'esperienza di Faraday

Il momento meccanico generato dalla corrente nel cavo elettrico equilibria un momento generato da componenti meccanici "noti", realizzabili e tarabili con la precisione richiesta.

todo *Serve questo riferimento qui?*

- azioni elettro-meccaniche:…, cenni al motore elettrico in corrente continua? serve accoppiamento $\vec{e} \leftrightarrow \vec{b}$ di Faraday

18.3.3 Esperienze di Oersted e Ampere

- interazione tra corrente elettrica e campo magnetico, in regime stazionario:
  - esperienze di Oesrted e Ampére:

Legge di Ampére

Forza (**todo** per unità di lunghezza; usare notazione vettoriale per indicare la direzione della forza) scambiata tra due cavi percorsi da corrente elettrica

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu}{2\pi}\frac{i_1\,i_2}{d}$$

Legge di Biot-Savart

Confrontando la legge di Ampére con l'esperienza di Faraday, è possibile ricavare l'espressione del campo magnetico prodotto da un cavo infinito percorso da corrente elettrica,

$$b = \frac{\mu}{2\pi}\frac{i}{d}$$

todo

- campo magnetico prodotto da un cavo rettilineo infinito
- campo magnetico prodotto da un solenoide: lineare infinito, toroidale

Formula generale

Contributo elementare

$$d\vec{b}(\vec{r}_0) = -\frac{\mu}{4\pi} i(\vec{r}) \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \times d\vec{\ell}(\vec{r})$$

$$\vec{b}(\vec{r}_0) = -\frac{\mu}{4\pi} \int_{\gamma(\vec{r})} i(\vec{r}) \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \times d\vec{\ell}(\vec{r})$$

Filo rettilineo infinito

$$z = R\,\tan\theta$$

$$dz = R\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$r^2 = R^2 + z^2 = R^2\left(1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right) = R^2\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\begin{aligned}
\vec{b}(\vec{r}_0) &= -\frac{\mu}{4\pi} i \int_{z=-\infty}^{\infty} \hat{\theta}\frac{r}{r^2}\sin\theta dz = \\
&= -\frac{\mu}{4\pi} i\hat{\theta} \int_{\theta=\pi}^{0} \frac{\cos^2\theta}{R^2}\sin\theta R \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \\
&= \frac{\mu}{4\pi} i\hat{\theta} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{R}\sin\theta\,d\theta = \\
&= \frac{\mu\, i}{2\pi\, R}\hat{\theta}\,.
\end{aligned}$$

Esempi: spira e solenoide

Spira circolare

Sfruttando la simmetria cilindrica del problema, è possibile calcolare il campo magnetico $$ sull'asse di una spira circolare

$$\cos\phi = \frac{R}{r} \qquad , \qquad r^2 = R^2 + z^2$$

$$
\begin{aligned}
\vec{b}(\theta) &= 2\pi R \left(-\frac{\mu}{4\pi} i \frac{\vec{r}}{r^3} \times \hat{\theta} \cdot \hat{z} \right) \hat{z} = \\
&= \frac{\mu\, i}{2} \frac{R}{r^2} \cos\phi \hat{z} = \\
&= \frac{\mu\, i}{2} \frac{R^2}{r^3} \hat{z} = \\
&= \frac{\mu\, i}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{\mu\, i}{2\, R} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \hat{z}
\end{aligned}
$$

Solenoide rettilineo

Applicando la legge di Ampére,

$$N\, i = \Gamma_\gamma(\vec{h}) = \ell\, h = \ell\, \frac{b}{\mu}$$

$$b = \mu \frac{N}{\ell}\, i$$

Il flusso del campo magnetico (uniforme) vale quindi

$$\phi = b\, A = \mu \frac{N\, A}{\ell}\, i$$

Solenoide toroidale

Applicando la legge di Ampère,

$$N\, i = \Gamma_\gamma(\vec{h}) = r\, 2\, \pi\, h = r\, 2\, \pi \frac{b}{\mu}$$

$$b(r) = \mu \frac{N}{2\, \pi\, r}\, i$$

Il flusso del campo magnetico attraverso le sezioni del toro vale

$$\Phi(\vec{b}) = \oint_S b(r)\, dS = \mu \frac{N\, i}{2\pi} \int_{\rho=0}^{a} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{1}{R - \rho\cos\alpha} \rho\, d\rho\, d\alpha =$$

todo

18.3.4 Verso le equazioni di Maxwell

Legge di Gauss per il flusso del campo magnetico

$$\Phi_{\partial V}(\vec{b}) = 0$$

todo *interpretazione: inesistenza del monopolo magnetico? linee di campo chiuse?*

Legge di Ampére

$$\oint_{\ell_S} \vec{h} \cdot \hat{t} = \Gamma_{\ell_S}(\vec{h}) = \Phi_S(\vec{j}) = i_S \ ,$$

essendo $\ell_S = \partial S$ il contorno - chiuso - della superficie S.

- Questa equazione è valida **solo** in un regime elettrostatico: la forma generale dell'equazione di Ampére prevede un termine dipendente dal tempo, che è identicamente nullo nel regime elettrostatico.
- Senza questo termine, l'equazione non sarebbe consistente con l'equazione del bilancio della carica elettrica **todo** (aggiungere riferimento): la correzione di questa inconsistenza da parte di Maxwell è stata l'ultima azione, fondamentale, per ottenere un sistema di equazioni che governano i fenomeni elettromagnetici; la stessa modifica permette anche di riconoscere che i fenomeni EM sono fenomeni ondulatori; il calcolo della misura della velocità di propoagazione delle onde EM, confrontata con le misure disponibili della velocità della luce, permisero di riconoscere la luce come fenomeno EM

Per dimostrare l'incongruenza, è sufficiente applicare la legge di Ampére a una superficie che è il contorno di un volume chiuso, e che quindi ha contorno nullo,

$$S = \partial V \qquad , \qquad \partial S = \ell_S = \emptyset$$

In questo caso, la legge di Ampére diventa

$$0 = i_{\partial V} \ ,$$

mentre le leggi di conservazione della carica elettrica e la legge di Gauss per il campo elettrico

$$\begin{aligned} \dot{Q}_V &= -i_{\partial V} \\ \Phi_{\partial V}(\vec{d}) &= Q_V \end{aligned}$$

implicano

$$i_{\partial V} = -\dot{Q}_V = -\dot{\Phi}_{\partial V}(\vec{d}) \ .$$

La correzione di Maxwell non è altro che l'aggiunta del termine $\dot{\Phi}_{\partial V}(\vec{d})$ all'equazione di Ampére per renderla compatibile con le altre equazioni dell'elettromagnetismo. Con questa modifica, l'**equazione di Ampére-Maxwell** diventa

$$\Gamma_{\partial S}(\vec{h}) - \dot{\Phi}_S(\vec{d}) = i_S$$

18.3.5 Modelli microscopici del magnetismo

18.3.6 Moto di una carica elettrica in un campo elettromagnetico

Forza di Lorentz

$$\vec{F}^{Lorentz} = q\left(\vec{e}(P) + \vec{b}(P) \times \vec{v}\right)$$

Moto di una carica elettrica in un campo elettromagnetico, nell'ipotesi di effetto nullo su di essa del proprio campo elettrico

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{R}^{ext} = q\left(\vec{e}(P) + \vec{b}(P) \times \dot{\vec{r}}\right) + \vec{F}^{\text{non EM}}$$

- **todo** esempi

18.4 Induzione ed elettromagnetismo

18.4.1 Legge di Faraday per l'induzione elettromagnetica

- legge di Faraday: corrente indotta
- corrente alternata:
  - principi e applicazioni:
    - trasformatori
    - generatori e motori elettrici
    - generazione/trasporto/trasformazione/consumo

18.4.2 Correzione di Maxwell dell'equazione di Ampére

Qui o nella sezione di magnetismo ed elettromagnetismo statico?

- correzione di Maxwell della legge di Ampére, per renderla consistente con l'equazione di bilancio della carica elettrica

18.4.3 Equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo

- le equazioni di Maxwell: le equazioni complete dell'elettromagnetismo

CHAPTER

NINETEEN

PRINCIPI DI ELETTROTECNICA

19.1 Circuiti elettrici

- dalle leggi fisiche alle leggi di Kirchhoff, ipotesi (validità e non-validità dell'approccio circuitale)
- componenti:
  - resistenze
  - condensatori
  - induttori
  - generatori
- regimi di funzionamento: in DC, (trascurando gli effetti EM: no campi magnetici esterni, *ogni circuito è una spira*…), e in AC
  - stazionario
    - bilancio di energia: "generatori" di energia elettrica, "perdite" nelle resistenze
      - approfondimenti:
      - pile Collegamento ad altre parti: termodinamica? chimica?
  - transitorio:
    - esempio: carica/scarica condensatore
  - armonico, AC:
    - …

19.2 Circuiti magnetici

- dalle leggi fisiche alle leggi di Kirchhoff per i circuiti magnetici, ipotesi (validità e non-validità dell'approccio circuitale)
- esempi:
  - trasformatori ideali

19.3 Sistemi elettromeccanici e macchine elettriche

CHAPTER

TWENTY

ONDE ELETTROMAGNETICHE

Le equazioni di Maxwell prevedono che, sotto opportune condizioni, il campo elettromagnetico possa propagarsi nello spazio come un fenomeno ondulatorio

- Dalle equazioni di Maxwell alle equazioni delle onde **todo** è possibile arrivarci senza passare dalle equazioni in forma differenziale? Magari con qualche analogia meccanica governata dalle equazioni delle onde. Se sì, in maniera sufficiente formale, figata
- Esperimenti di Hertz:
  - onde elettromagnetiche:
    - esperimento onde EM
    - **risonanza**, tipica dei fenomeni ondulatori
  - esperimento fallimentare su raggi catodici; con lo stesso esperimento, Thompson dimostra l'esistena dell'elettrone
  - effetto fotoelettrico…
  - luce come onda EM: la velocità di propagazione del campo EM prevista dalle equazioni di Maxwell è vicina alle misure della velocità della luce disponibile in quegli anni. E' un caso?

Part V

Fisica moderna

CHAPTER

TWENTYONE

FISICA DEL XX SECOLO