
Meccanica classica

basics

Jan 17, 2025

CONTENTS

I	Newton Mechanics	3
1	Kinematics	5
1.1	Space and time	5
1.2	Models	5
1.3	Point	5
1.4	Rigid Body	5
1.5	Rotations	6
1.6	Continuous Medium	8
1.7	Relative Kinematics	8
2	Actions	11
2.1	Forze, momenti, forze distribuite	11
2.2	Lavoro e potenza	12
2.3	Azioni conservative	13
2.4	Reazioni vincolari	13
2.5	Esempi	14
3	Inertia	15
4	Dynamics	17
4.1	Principles of Newton mechanics	17
4.2	Equations of motion	18
4.3	Moti particolari	22
4.4	Equilibrium and Stability	23
II	Analytical Mechanics	25
5	Lagrangian Mechanics	27
5.1	Point	28
5.2	System of points	29
5.3	Rigid Body	29
6	Hamiltonian Mechanics	33

Classical mechanics deal with the motion of systems and its causes.

Different formulations of mechanics are available. Newton formulation was developed at the end of XVII century and starts from mass conservation and Newton's three principles of dynamics, summarised in invariance under Galileian transformations, the relation between force and the change of momentum of a system, and action/reaction principle. Analytical mechanics was developed in the following centuries by D'Alembert and Lagrange and starts from variational principles, leading to Lagrange or Hamiltonian equations of motion.

Newton Mechanics.

Kinematics

Actions

Inertia

Dynamics

Analytical Mechanics.

Lagrangian Mechanics

Hamiltonian Mechanics

Classical mechanics provides a reliable and useful theory for systems:

- much larger than atomic scales; at atomic scales, [quantum mechanics](#) is needed
- with velocity much slower than the speed of light or in domains where the finite value of finite speed of interactions can be neglected, as classical mechanics relies on instantaneous action at distance; if these assumptions fail, Einstein theory is needed either [special relativity](#) - as a consistent theory of mechanics and [electromagnetism](#) - or [general relativity](#) - as a theory of gravitation.
- with a small number of components, so that the integration of the governing equations of motion is feasible; continuous model of the systems are object of classical continuum mechanics, relying on the equations of classical mechanics and thermodynamics; systems with large number of components can be approached with the techniques developed in [statistical mechanics](#).

Under these assumptions, mass conservation (Lavoisier principle) holds, inertial reference frames are related by Galileian relativity and the equations of motions are deterministic and can be solved with a reasonable effort - compared to the information and detail contained in the results - either analytically or numerically. Classical mechanics treats time and space as individually absolute physical quantities: this can be a good model whenever Einstein relativity effects are negligible.

Part I

Newton Mechanics

KINEMATICS

Kinematics deals with the motion of mechanical systems, without taking into account the causes of motion.

1.1 Space and time

Classical mechanics relies on the concepts of **absolute 3-dimensional Euclidean space**, E^3 , and **absolute time**.

Briefly, what is space? It's something you can measure with ruler (for distances) and square (for angles), or other space-measurement devices. What is time? It's something you can measure with a clock or other timekeeping devices.

1.2 Models

Different models of physical systems can be derived with an abstraction and modelling process, depending on the characteristics of the system under investigation and on the level of detail required by the analysis.

These models can be classified by:

- dimensions: 0: point; 1: line; 2: surfaces; 3: volume solid
- deformation: deformable or rigid components

A system can be composed of several components, either free or connected with constraints.

Here, the focus goes to the kinematics of *points* and *rigid bodies*, while deformable bodies are described in *continuous mechanics* - *kinematics*.

While space and time are absolute, the motion of a system is usually the **motion relative to an observer** or to a reference frame. After treating the kinematics of points and rigid bodies w.r.t. a given reference frame, *relative kinematics* provides the description of the motion of the same system w.r.t. 2 different observers/reference frames in relative motion.

1.3 Point

1.4 Rigid Body

1.4.1 Rigid motion

Rigid motion preserves distance between any pair of points, and thus angles. Rotations are described by rotation matrices.

The configuration of a material vector \vec{a} undergoing a rotation is described by the product of the rotation tensor \mathbb{R} by the reference configuration \vec{a}^0 ,

$$\vec{a} = \mathbb{R} \cdot \vec{a}^0 .$$

A rotation tensor is unitary to preserve distance,

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \cdot \mathbb{R}^T = \mathbb{R}^T \cdot \mathbb{R} \quad (1.1)$$

so that its time derivative reads,

$$\mathbb{0} = \frac{d}{dt} (\mathbb{R} \cdot \mathbb{R}^T) = \dot{\mathbb{R}} \cdot \mathbb{R}^T + \mathbb{R} \cdot \dot{\mathbb{R}}^T$$

It follows that the 2-nd order tensor $\dot{\mathbb{R}} \cdot \mathbb{R}^T = -\mathbb{R} \cdot \dot{\mathbb{R}}^T$ is anti-symmetric, and thus it can be written as

$$\dot{\mathbb{R}} \cdot \mathbb{R}^T =: \vec{\omega}_{\times} , \quad (1.2)$$

being the vector $\vec{\omega}$ the angular velocity. Since \mathbb{R} is unitary by (1.1), multiplying (1.2) with the dot-product on the right by \mathbb{R} , it follows

$$\dot{\mathbb{R}} = \vec{\omega}_{\times} \cdot \mathbb{R} ,$$

and the expression of the time derivative of a material vector \vec{a} ,

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \dot{\mathbb{R}} \cdot \vec{a}^0 = \vec{\omega}_{\times} \cdot \mathbb{R} \cdot \vec{a}^0 = \vec{\omega}_{\times} \cdot \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{a} .$$

1.4.2 Kinematics of rigid body

Rigid motion allows to describe the kinematics of a rigid body - determining position, velocity and acceleration of all of its points - given the position of a material point P and its orientation with respect to the reference frame, as an example using a rotation tensor \mathbb{R} .

Orientation.

Angular velocity.

Angular acceleration.

1.5 Rotations

1.5.1 Rotation tensor

Given 2 Cartesian bases $\{\hat{e}_i^0\}_{i=1:3}$, $\{\hat{e}_j^1\}_{j=1:3}$, the rotation tensor providing the transformation

$$\hat{e}_i^1 = \mathbb{R}^{0 \rightarrow 1} \cdot \hat{e}_i^0 ,$$

is

$$\mathbb{R}^{0 \rightarrow 1} = R_{ij}^{0 \rightarrow 1} \hat{e}_i^0 \otimes \hat{e}_j^0 = R_{ij}^{0 \rightarrow 1} \hat{e}_i^1 \otimes \hat{e}_j^1$$

with $R_{ij}^{0 \rightarrow 1} = \hat{e}_i^0 \cdot \hat{e}_j^1$.

Angular velocity.

$$\vec{\omega}_{\times}^{01} = \Omega^{01} = \dot{\mathbb{R}}^{01} \cdot \mathbb{R}^{01,T}$$

Using index notation

$$\varepsilon_{ijk}\omega_j = \dot{R}_{ij}R_{kj}$$

and the identities

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jl}\delta_{im}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = \delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jl} = 3\delta_{il} - \delta_{il} = 2\delta_{il}$$

it follows

$$\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{ijk}\omega_j = \varepsilon_{ilk}\dot{R}_{ij}R_{kj}$$

$$2\delta_{lj}\omega_j = \varepsilon_{ilk}\dot{R}_{ij}R_{kj}$$

$$\omega_l = \frac{1}{2}\varepsilon_{ilk}\dot{R}_{ij}R_{kj} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{lik}\dot{R}_{ij}R_{kj} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{lij}\Omega_{ij}$$

Successive rotations

Given 3 Cartesian bases $\{\hat{e}_i^0\}_{i=1:3}$, $\{\hat{e}_j^1\}_{j=1:3}$, $\{\hat{e}_k^2\}_{k=1:3}$,

$$\begin{aligned}\hat{e}_i^2 &= \mathbb{R}^{1 \rightarrow 2} \cdot \hat{e}_i^1 = \\ &= \mathbb{R}^{1 \rightarrow 2} \cdot \mathbb{R}^{0 \rightarrow 1} \cdot \hat{e}_i^0\end{aligned}$$

Time derivative w.r.t. reference frame 0 is indicated as the standard time derivative

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = \frac{{}^0da}{dt},$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbb{R}^{21} &= \frac{d}{dt}[R_{ik}^{21}\hat{e}_i^1 \otimes \hat{e}_k^1] = \\ &= \dot{R}_{ik}^{21}\hat{e}_i^1 \otimes \hat{e}_k^1 + \Omega^{10} \cdot \mathbb{R}^{21} - \mathbb{R}^{21} \cdot \Omega^{10} = \\ &= \frac{{}^1d}{dt}\mathbb{R}^{21} + \Omega^{10} \cdot \mathbb{R}^{21} - \mathbb{R}^{21} \cdot \Omega^{10} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega^{20} &= \dot{\mathbb{R}}^{20} \cdot \mathbb{R}^{20,T} = \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbb{R}^{21} \cdot \mathbb{R}^{10}) \cdot \mathbb{R}^{20,T} = \\ &= \left\{ \left[\frac{{}^1d}{dt}\mathbb{R}^{21} + \Omega^{10} \cdot \mathbb{R}^{21} - \mathbb{R}^{21} \cdot \Omega^{10} \right] \cdot \mathbb{R}^{10} + \mathbb{R}^{21} \cdot \dot{\mathbb{R}}^{10} \right\} \cdot \mathbb{R}^{01} \cdot \mathbb{R}^{12} = \\ &= \frac{{}^1d}{dt}\mathbb{R}^{21} \cdot \mathbb{R}^{12} + \Omega^{10} = \\ &= \Omega^{21} + \Omega^{10}.\end{aligned}$$

Linearization of rotations

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \cdot \mathbb{R}^T$$

Increment

$$\mathbb{0} = \delta \mathbb{R} \cdot \mathbb{R}^T + \mathbb{R} \cdot \delta \mathbb{R}^T$$

and thus the antisymmetric tensor can be written as

$$\delta \theta_{\times} := \delta \mathbb{R} \cdot \mathbb{R}^T$$

so that

$$\delta \theta_l = -\frac{1}{2} \varepsilon_{lij} \delta R_{ik} R_{jk}$$

1.5.2 Quaternions

1.6 Continuous Medium

1.7 Relative Kinematics

Relative kinematics is discussed here using two Cartesian reference frames.

$$P - O_0 = x_{P/O_0}^{0i} \hat{e}_i^0$$

$$O_1 - O_0 = x_{O_1/O_0}^{0i} \hat{e}_i^0$$

$$P - O_1 = x_{P/O_1}^{1i} \hat{e}_i^1$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_i^1 &= \hat{e}_i^1 \cdot \hat{e}_k^0 \hat{e}_k^0 = \hat{e}_j^1 \cdot \hat{e}_k^0 \hat{e}_k^0 \otimes \hat{e}_j^0 \cdot \hat{e}_i^0 = \\ &= R_{kj}^{0 \rightarrow 1} \hat{e}_k^0 \otimes \hat{e}_j^0 \cdot \hat{e}_i^0 = \mathbb{R}^{0 \rightarrow 1} \cdot \hat{e}_i^0 . \end{aligned}$$

1.7.1 Points

Position. Given two reference frames Ox^i , $O'x^{i'}$, for the position of a point P reads

$$(P - O) = (P - O') + (O' - O) ,$$

i.e. the position vector $P - O$ of the point P w.r.t. point O - origin of the reference frame Ox^i - is the sum of the position vector $P - O'$ of the point P w.r.t. to the point O' - origin of the reference frame $O'x^{i'}$ - and the position vector $O' - O$, of the origin O' w.r.t. to O .

Velocity.

Acceleration.

1.7.2 Rigid bodies

Orientation.

Angular velocity.

Angular acceleration.

ACTIONS

Cos'è una forza? Newton lega il concetto di azione, che comprende i concetti di forza e momento, alle cause che distinguono il *moto vero* dal *moto relativo*: per Newton, queste cause sono le forze.

Argomenti.

- Forza
- Momento di una forza e coppia di forze
- Azioni distribuite: cenni su sforzo e pressione
- Lavoro e potenza
- Azioni conservative
- **Reazioni vincolari**
- Esempi di forze:
 - legge di attrazione di gravità generale
 - forza di gravità nei pressi della superficie terrestre
 - legge costitutiva elastica della molla e molle senza massa
 - attrito
 - legge costitutiva di smorzatori lineari
 - reazioni vincolari

basics

Jan 17, 2025

0 min read

2.1 Forze, momenti, forze distribuite

Forza. Grandezza vettoriale, caratterizzata da intensità, direzione, verso, e punto di applicazione.

Momento. Il momento di una forza rispetto a un polo H

$$\mathbf{M}_H = (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_H) \times \mathbf{F} .$$

Forze distribuite. todo

basics

Jan 17, 2025

1 min read

2.2 Lavoro e potenza

2.2.1 Lavoro e potenza di una forza

Lavoro. Il lavoro elementare di una forza \mathbf{F} applicata in un punto di applicazione \mathbf{r}_P che subisce uno spostamento $d\mathbf{r}$ viene definito come

$$\delta L = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} .$$

Per uno spostamento finito del punto P dal punto \mathbf{r}_A al punto \mathbf{r}_B lungo la linea ℓ_{AB} , è necessario sommare i contributi elementari (e quindi integrare) lungo il percorso ℓ_{AB}

$$L = \int_{\ell_{AB}} \delta L = \int_{\ell_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_P .$$

todo In generale il lavoro di una forza o di un campo di forze **dipende dal percorso di integrazione** ℓ_{AB} . Sarebbe meglio usare δL per ricordare questa proprietà del lavoro, che quindi non è un **differenziale esatto**.

Potenza. La potenza di una forza \mathbf{F} applicata in un punto di applicazione \mathbf{r}_P che ha velocità \mathbf{v}_P viene definita come

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_P ,$$

cioè come la derivata nel tempo del lavoro,

$$\frac{dL}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}_P}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_P = P .$$

2.2.2 Lavoro e potenza di una coppia di forze

Una coppia di forze è definita come il momento generato da due forze con uguale intensità e verso opposto, $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$,

$$\mathbf{C} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1 .$$

Potenza. La potenza di una coppia di forze è la somma della potenza generata da entrambe le forze,

$$P = P_1 + P_2 = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{F}_1 \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) .$$

Se la coppia di forze è applicata a una coppia di punti che descrivono un atto di moto rigido,

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) ,$$

si può riscrivere la potenza della coppia di forze come

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1 = \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \end{aligned}$$

basics

Jan 17, 2025

1 min read

2.3 Azioni conservative

In generale, il lavoro di una forza o di un campo di forze dipende dalla traiettoria ℓ_{AB} del punto di applicazione tra i punti iniziale e finale $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$.

In alcuni casi, il lavoro è indipendente dal percorso ℓ_{AB} , ma dipende solo dai suoi punti estremi. Se questo è vero per tutti i percorsi, il lavoro è svolto da una **forza conservativa**.

In questo caso, l'integrale di linea può essere riscritto senza indicare esplicitamente la dipendenza dal percorso ℓ_{AB} , ma indicandone solo gli estremi

$$L = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} ,$$

e il suo valore può essere calcolato come differenza di una funzione scalare della variabile spaziale $U(\mathbf{r}) = -V(\mathbf{r})$ valutata nei due estremi del percorso,

$$L_{AB} = U(\mathbf{r}_B) - U(\mathbf{r}_A) = -V(\mathbf{r}_B) + V(\mathbf{r}_A).$$

o in forma differenziale,

$$\delta L = dU = -dV .$$

Sotto l'ipotesi di sufficiente regolarità (**todo**), e confrontando le espressioni del lavoro infinitesimale di un campo di forze $\mathbf{F}(\mathbf{r})$,

$$\delta L = dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} ,$$

si può scrivere il campo di forze come il gradiente della funzione U ,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla U(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) .$$

Per le proprietà dei campi e degli operatori vettoriali, se un campo vettoriale può essere scritto come gradiente di una funzione scalare, il suo rotore è nullo,

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} .$$

basics

Jan 17, 2025

1 min read

2.4 Reazioni vincolari

I vincoli cinematici agiscono su un sistema limitandone la possibilità di movimento, esercitando forze e momenti su di esso, definibili come reazioni vincolari.

In generale, in corrispondenza di un vincolo **ideale** (**todo** dare definizione di vincolo ideale, e trattare/accennare/rimandare all'attrito) nasce un'azione vincolare corrispondente a ogni grado di libertà vincolato: così ad esempio il vincolo della traslazione di un punto in una direzione ha come reazione corrispondente una forza in quella direzione; il vincolo della rotazione attorno a un asse ha come azione corrispondente un momento allineato con quell'asse.

Queste condizioni possono essere ricavate dalle equazioni della dinamica per sistemi senza massa, come spesso considerato nel modello ideale dei vincoli.

2.4.1 Esempi 2D

- Incastro
- Cerniera
- Pattino
- Carrello
- Manicotto

2.4.2 Esempi 3D

- Incastro
- Cerniera sferica
- Cerniera cilindrica
- Pattino
- Carrello
- Manicotto

basics

Jan 17, 2025

0 min read

2.5 Esempi

INERTIA

Inertia deals with mass and mass distribution of systems.

But what is mass? Mass is a physical quantity, a property of the system, that manifests itself:

- in gravitational attraction (being both the origin of gravitational force and the property that makes a system sensible to gravitational attraction),
- in resistance to change of motion of a system under external *actions*, as it will be clear in *dynamics*

In the range of application of classical mechanics **mass conservation** holds, as stated by **Lavoisier principle**: the mass of a closed system is constant.

DYNAMICS

Dynamics provides the link between the motion of a body and the forces causing that motion.

Newton's principles of dynamics and the cardinal equations of dynamics are the physical laws that govern the motion of mechanical systems: *Newton's principles* agree with the experimental observations (for systems with negligible quantum and Einstein relativity effects) and are the starting point - the principles - of Newton's formulation of mechanics; from these principles, *equations of motion* of mechanical systems are derived. These physical laws are formulated in terms of certain physical quantities, such as momentum, angular momentum, or the kinetic energy of the system - already discussed in the section about *inertia*. These dynamic quantities have the property of being additive (by definition), and making it particularly easy to write and interpret a general form of the equations governing motion. In general, these equations relate the time derivatives of these dynamic quantities to the causes of their variation. In the absence of net causes, conservation principles hold.

4.1 Principles of Newton mechanics

Primo principio della dinamica. Un corpo (o meglio, il baricentro di un corpo) sul quale agisce una forza netta nulla, persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema di riferimento inerziale.

Secondo principio della dinamica. Rispetto a un sistema di riferimento inerziale, la variazione della quantità di moto di un sistema è uguale all'impulso delle forze esterne agenti su di esso,

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{I}^e .$$

Nel caso di moto regolare, in cui la quantità di moto può essere rappresentata da una funzione continua e differenziabile in funzione del tempo, si può scrivere il secondo principio della dinamica in forma differenziale,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^e ,$$

essendo la risultante delle forze esterne, $\mathbf{R}^e = \frac{d\mathbf{I}^e}{dt}$, la derivata nel tempo dell'impulso.

Terzo principio della dinamica. Se un sistema i esercita su un sistema j una forza \mathbf{F}_{ji} , allora il sistema j esercita sul sistema i una forza \mathbf{F}_{ij} "uguale e contraria", con modulo uguale e verso opposto,

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} .$$

4.2 Equations of motion

Starting from *principles of Newton mechanics*, it's possible to derive dynamical equations governing the motion of mechanical systems. The general form of these equations are easily expressed in terms of dynamical quantities discussed in the inertia section,

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^e \quad (\text{momentum balance equation})$$

$$\frac{d\vec{\Gamma}_H}{dt} = -\vec{r}_H \times \vec{Q} + \vec{M}_H^e \quad (\text{angular momentum balance equation})$$

$$\frac{dK}{dt} = P^{tot} \quad (\text{kinetic energy balance equation})$$

for every mechanical (closed) mechanical system.

Utilizzando i concetti di quantità di moto, momento della quantità di moto ed energia cinetica di un sistema, si possono scrivere le 3 equazioni cardinali della dinamica in una forma valida per **ogni sistema chiuso**. Nel caso siano soddisfatte alcune condizioni, e solo in questo caso, le equazioni cardinali della dinamica rappresentano dei principi di conservazione delle quantità dinamiche: osservando le espressioni delle equazioni cardinali, è facile intuire che la condizione da soddisfare per ottenere un principio di conservazione è l'annullamento di tutti i termini ad eccezione della derivata temporale della quantità conservata.

4.2.1 Equazioni cardinali

Bilancio della quantità di moto. La derivata nel tempo della quantità di moto è uguale alla risultante delle forze esterne,

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{R}^e. \quad (4.1)$$

Bilancio del momento della quantità di moto rispetto a un polo H . La derivata nel tempo del momento della quantità di moto rispetto a un punto H , a meno di “un termine di trasporto” è uguale alla risultate dei momenti esterni rispetto al polo H

$$\dot{\vec{L}}_H + \dot{\vec{x}}_H \times \vec{Q} = \vec{M}_H^e. \quad (4.2)$$

Bilancio dell'energia cinetica. La derivata nel tempo dell'energia cinetica è uguale alla potenza totale agente sul sistema, risultato della somma della potenza delle azioni esterne e della potenza delle azioni interne al sistema

$$\dot{K} = P^{tot} = P^e + P^i \quad (4.3)$$

4.2.2 Principi di conservazione

Conservazione della quantità di moto, in presenza di forze esterne con risultante nulla. Se la risultante delle forze esterne è nulla, $\vec{R}^e = \vec{0}$, dal bilancio della quantità di moto segue immediatamente

$$\dot{\vec{Q}} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{Q} = \bar{\vec{Q}} = \text{cost.}$$

Conservazione del momento della quantità di moto, in presenza di momenti esterni con risultante nulla. Se la scelta del polo H rende nullo il termine di trasporto, $\dot{\vec{r}}_H \times \vec{Q} = \vec{0}$, se la risultante dei momenti esterni è nulla, $\vec{M}_H^e = \vec{0}$, dal bilancio del momento della quantità di moto segue immediatamente

$$\dot{\vec{L}}_H = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{L}_H = \bar{\vec{L}}_H = \text{cost.}$$

Conservazione dell'energia cinetica, in presenza di potenza totale nulla. Se la potenza totale delle azioni sul sistema è nulla, $P^{tot} = 0$, dal bilancio dell'energia cinetica segue immediatamente

$$\dot{K} = 0 \quad \rightarrow \quad K = \bar{K} = \text{cost.}$$

Conservazione dell'energia meccanica, in assenza di azioni non conservative. Ai tre principi di conservazione direttamente ottenibili dalle equazioni cardinali, si aggiunge il principio della conservazione dell'energia meccanica, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del sistema,

$$E^{mech} = K + V,$$

in assenza di azioni non conservative. Se non ci sono forze non conservative, la potenza delle azioni agenti sul sistema può essere scritta come l'opposto della derivata nel tempo dell'energia potenziale del sistema,

$$P^{tot} = -\dot{V}$$

Dal bilancio dell'energia cinetica segue

$$\dot{K} = -\dot{V} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(K + V) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{E}^{mech} = 0 \quad \rightarrow \quad E^{mech} = \bar{E}^{mech} = \text{const.}$$

basics

Jan 17, 2025

0 min read

4.2.3 Equazioni cardinali della dinamica: punto materiale

Quantità dinamiche.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_P &:= m_P \mathbf{v}_P \\ \mathbf{L}_{P,H} &:= (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_H) \times \mathbf{Q} = m_P (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_H) \times \mathbf{v}_P \\ K &:= \frac{1}{2} m_P \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_P = \frac{1}{2} m_P |\mathbf{v}_P|^2 \end{aligned}$$

Bilancio della quantità di moto. Il bilancio della quantità di moto di un punto materiale P , $\mathbf{Q}_P = m \mathbf{v}_P$ segue direttamente dal secondo principio della dinamica di Newton,

$$\dot{\mathbf{Q}}_P = \mathbf{R}_P^e$$

Bilancio del momento della quantità di moto. La derivata nel tempo del momento della quantità di moto viene calcolata usando la regola del prodotto,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_{P,H} &= \frac{d}{dt} [m_P (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_H) \times \mathbf{v}_P] = \\ &= m [(\dot{\mathbf{r}}_P - \dot{\mathbf{r}}_H) \times \mathbf{v}_P + m_P (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_H) \times \dot{\mathbf{v}}_P] = \\ &= -m_P \dot{\mathbf{r}}_H \times \mathbf{v}_P + m_P (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_H) \times \dot{\mathbf{v}}_P = \\ &= -\dot{\mathbf{r}}_H \times \mathbf{Q} + \mathbf{M}_H^{ext}. \end{aligned}$$

Bilancio dell'energia cinetica.

$$\begin{aligned} \dot{K}_P &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_P \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_P \right) = \\ &= m_P \dot{\mathbf{v}}_P \cdot \mathbf{v}_P = \\ &= \mathbf{R}^e \cdot \mathbf{v}_P = \\ &= \mathbf{R}^{tot} \cdot \mathbf{v}_P = P^{tot}. \end{aligned}$$

basics

Jan 17, 2025

2 min read

4.2.4 Equazioni cardinali della dinamica: sistemi discreti di punti materiali

Partendo dalle equazioni dinamiche per un punto, si calcolano le equazioni dinamiche per un sistema di punti, sfruttando il terzo principio della dinamica di azione/reazione. Lo sviluppo delle equazioni permette di comprendere che la natura additiva delle grandezze dinamiche (quantità di moto, momento della quantità di moto, energia cinetica) segue direttamente dalla loro definizione.

Bilancio della quantità di moto. E' possibile scrivere il bilancio della quantità di moto per ogni punto i del sistema, scrivendo la risultante delle forze esterne agente sul punto come la somma delle forze esterne all'intero sistema agenti sul punto e le forze interne scambiate con gli altri punti del sistema,

$$\mathbf{R}_i^{ext,i} = \mathbf{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}.$$

L'equazione di bilancio per la i -esima massa diventa quindi

$$\dot{\mathbf{Q}}_i = \mathbf{R}_i^{ext,i} = \mathbf{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}.$$

Sommando le equazioni di bilancio di tutte le masse, si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{\mathbf{Q}}_i &= \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} = \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} + \sum_{\{i,j\}} \underbrace{(\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji})}_{=0} \end{aligned}$$

e definendo la quantità di moto di un sistema come la somma delle quantità di moto delle sue parti e la risultante delle forze esterne come somma delle forze esterne agenti sulle parti del sistema,

$$\mathbf{Q} := \sum_i \mathbf{Q}_i$$

$$\mathbf{R}^e := \sum_i \mathbf{F}_i^{ext}$$

si ritrova la forma generale del bilancio della quantità di moto,

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^e.$$

Bilancio del momento della quantità di moto. E' possibile scrivere il bilancio del momento della quantità di moto per ogni punto i del sistema, scrivendo la risultante dei momenti esterni agente sul punto come la somma dei momenti esterni all'intero sistema agenti sul punto e i momenti interni scambiate con gli altri punti del sistema,

$$\mathbf{M}_{H,i}^{ext,i} = \mathbf{M}_{H,i}^{ext} + \sum_{j \neq i} \mathbf{M}_{H,ij}.$$

Nel caso le parti del sistema interagiscano tramite forze, il momento rispetto al polo H generato dalla massa j sulla massa i vale

$$\mathbf{M}_{H,ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_H) \times \mathbf{F}_{ij}.$$

L'equazione di bilancio per la i -esima massa diventa quindi

$$\dot{\mathbf{L}}_{H,i} + \dot{\mathbf{r}}_H \times \mathbf{Q}_i = \mathbf{M}_{H,i}^{ext,i} = \mathbf{M}_{H,i}^{ext} + \sum_{j \neq i} \mathbf{M}_{H,ij}.$$

Sommando le equazioni di bilancio di tutte le masse, si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_i (\dot{\mathbf{L}}_i + \dot{\mathbf{r}}_H \times \mathbf{Q}_i) &= \sum_i \mathbf{M}_{H,i}^{ext} + \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{M}_{H,ij} = \\ &= \sum_i \mathbf{M}_{H,i}^{ext} + \sum_{\{i,j\}} \underbrace{(\mathbf{M}_{H,ij} + \mathbf{M}_{H,ji})}_{=0} \end{aligned}$$

e riconoscendo la quantità di moto del sistema e definendo il momento della quantità di moto di un sistema come la somma del momento della quantità di moto delle sue parti e la risultante dei momenti esterni come somma dei momenti esterni agenti sulle parti del sistema,

$$\mathbf{L}_H := \sum_i \mathbf{L}_{H,i}$$

$$\mathbf{M}_H^e := \sum_i \mathbf{M}_{H,i}^{ext}$$

si ritrova la forma generale del bilancio del momento della quantità di moto,

$$\dot{\mathbf{L}}_H + \dot{\mathbf{r}}_H \times \mathbf{Q} = \mathbf{M}_H^e.$$

Bilancio dell'energia cinetica. E' possibile ricavare il bilancio dell'energia cinetica del sistema, moltiplicando scalarmente il bilancio della quantità di moto di ogni punto,

$$\mathbf{v}_i \cdot m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i \cdot \left(\mathbf{F}_i^e + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \right),$$

riconoscendo nel primo termine la derivata nel tempo dell'energia cinetica dell' i -esimo punto,

$$\dot{K}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \right) = m_i \mathbf{v}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i,$$

e sommando queste equazioni di bilancio per ottenere

$$\sum_i \dot{K}_i = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_i^e + \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}.$$

Definendo l'energia cinetica di un sistema come la somma dell'energia cinetica delle sue parti, e definendo la potenza delle forze esterne/interne agenti sul sistema come la somma della potenza di tutte le forze esterne/interni al sistema,

$$K := \sum_i K_i$$

$$P^e := \sum_i P_i^{ext} = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_i^e$$

$$P^i := \sum_i P_i^{int} = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}$$

si ritrova la forma generale del bilancio dell'energia cinetica,

$$\dot{K} = P^e + P^i = P^{tot}.$$

basics

Jan 17, 2025

0 min read

4.2.5 Equazioni cardinali della dinamica: corpo rigido

basics

Jan 17, 2025

0 min read

4.2.6 Equazioni cardinali della dinamica: mezzi continui

basics

Jan 17, 2025

1 min read

4.3 Moti particolari

In questa sezione verranno studiati alcuni moti particolari, interessanti e utili da analizzare per motivi didattici, storici, e applicativi.

- moto rettilineo uniforme
- moto uniformemente accelerato
- moto circolare uniforme
- moti oscillatori e oscillatori smorzati:
 - oscillazioni libere:
 - * sistema massa-molla(-smorzatore)
 - * pendolo
 - oscillazioni forzate:
 - * primo passo verso l'analisi strutturale e non solo (“ogni sistema fisico è un sistema di tanti oscillatori armonici”)
 - * concetti di risposta in frequenza e risonanza. **todo** video e/o script su risposta in frequenza di strutture e strutture antisismiche, mass-damper,...
- **Gravitazione:** partendo dalla legge di gravitazione universale fornita da Newton, si studia il moto dei corpi celesti in sistemi a due corpi, scoprendo che le loro traiettorie descrivono le sezioni coniche (cerchio, ellisse, parabola, iperbole), e dimostrando le leggi di Keplero
- rotazione di un corpo attorno a un punto fisso, moti di Poincot

4.4 Equilibrium and Stability

basics

Jan 17, 2025

0 min read

4.4.1 Gravitazione: problema dei due corpi

Part II

Analytical Mechanics

LAGRANGIAN MECHANICS

Classical mechanics can be re-formulated starting from variational principles, usually referred as **analytical mechanics**. Under some assumptions, that will be discussed during the derivation, analytical mechanics is equivalent to Newton mechanics.

Here, the equivalence of analytical mechanics and Newton mechanics is stressed, by means of the derivation of the principle of analytical mechanics starting from the equations of motions derived in Newtonian mechanics, relying on the conservation of mass and the three principles of Newton mechanics. The process is shown in the following sections for *point systems*, *systems of points*, *extended rigid bodies* and follows these steps:

- **strong form of equations.** Starting point is the dynamical equations of Newton mechanics, here also referred as the strong form of equations
- **weak form of equations.** Strong form are recast in weak form, also referred as **D'Alembert approach** or **virtual work formulation**, multiplying strong form of equations for arbitrary test functions
- **Lagrange equations.** A proper choice of test functions as a function of generalized coordinates, and some manipulation, leads to Lagrange equations. While the choice of test functions depends on the nature of the system, their expression always reads

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = Q_{q^k} ,$$

being $q^k(t)$ the generalized coordinates, $\mathcal{L}(\dot{q}^k(t), q^k(t), t) = K(\dot{q}^k(t), q^k(t), t) + U(q^k(t), t)$ the Lagrangian function of the system, defined as the sum of the kinetic energy K and the potential function $U = -V$, being V the potential energy - s.t. the conservative vector field reads $\vec{F} = -\nabla V$, and Q_q the generalized force.

- Lagrange equations can be interpreted as a result of a stationary principle of a functional, S , defined **action functional**, as it can be shown with the tools of **calculus of variations**. Here, **assuming** $Q_{q^k} = 0$, and multiplying by $w^k(t)$, integrating over time from t_0, t_1 , and assuming that $w(t_0) = w(t_1) = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} w^k(t) \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \right] dt = \\ &= w^k(t) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[\dot{w}^k(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} + w^k(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \right] dt . \end{aligned}$$

If $w^k(t)$ is equal to zero for t equal to t_0 and t_1 , first term vanishes

$$\begin{aligned}
 0 &= - \int_{t_0}^{t_1} \left[\dot{w}^k(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} + w^k(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \right] dt \\
 &= - \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon \left[\dot{w}^k(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} (\dot{q}^l(t), q^l(t), t) + w^k(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} (\dot{q}^l(t), q^l(t), t) \right] dt = \\
 &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon \left[\dot{w}^k(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} (\dot{q}^l(t), q^l(t), t) + w^k(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} (\dot{q}^l(t), q^l(t), t) \right] dt \right\} = \\
 &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} [\mathcal{L}(\dot{q}^l(t) + \varepsilon \dot{w}^l(t), q^l(t) + \varepsilon w^l(t), t) - \mathcal{L}(\dot{q}^l(t), q^l(t), t)] dt + o(\varepsilon) \right\} = \\
 &= -\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\dot{q}^l(t), q^l(t), t) dt =: -\delta S[q^k(t)] ,
 \end{aligned}$$

i.e. Lagrange equations are equivalent to the stationary condition of the action functional

$$S[q^k(t)] := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\dot{q}^l(t), q^l(t), t) dt .$$

5.1 Point

Newton dynamical equations - strong form. Dynamical equation governing the motion of a point P reads

$$m \dot{\vec{v}}_P = \vec{R}^e ,$$

being m the mass of the system, \vec{v}_P the velocity of point P , $\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P$ its acceleration and \vec{R}^e the net external force acting on the system..

Weak form. Weak form of dynamical equations is derived with scalar multiplication of the strong form by an arbitrary test function \vec{w} ,

$$\vec{0} = \vec{w} \cdot (m \dot{\vec{v}} - \vec{R}^e) \quad \forall \vec{w} \quad (5.1)$$

Lagrange equations. Lagrange equations are derived from a proper choice of the test function. The position of the point P is written as a function of the generalized coordinates $q^k(t)$ and time t

$$\vec{r}_P(t) = \vec{r}(q^k(t), t) ,$$

so that its velocity can be written as

$$\vec{v}_P(t) := \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \dot{q}^k(t) \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k}}_{\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}^k}}(q^l(t), t) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(q^l(t), t) = \vec{v}(\dot{q}^k(t), q^k(t), t) ,$$

from which the relation between partial derivatives

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}^k} . \quad (5.2)$$

follows. Choosing the test function \vec{w} as

$$\vec{w} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}^k} ,$$

applying the rule of derivative of product, using Schwartz theorem to switch order of derivation, and exploiting relation (5.2) it's possible to recast weak form (5.1) as

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}^k} \cdot (m\dot{\vec{v}} - \vec{R}^e) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}^k} \cdot m\vec{v} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} \cdot m\vec{v} - \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} \cdot (\vec{R}^{e,c} + \vec{R}^{e,nc}) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}^k} \cdot m\vec{v} \right) - \frac{\partial \vec{v}}{\partial q^k} \cdot m\vec{v} - \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} \cdot (\nabla U + \vec{R}^{e,nc}) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial K}{\partial q^k} - \frac{\partial U}{\partial q^k} - \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} \cdot \vec{R}^{e,nc}}_{=: Q^k} .\end{aligned}$$

Introducing the **Lagrangian function**

$$\mathcal{L}(\dot{q}^k(t), q^k(t), t) := K(\dot{q}^k(t), q^k(t), t) + U(q^k(t), t) ,$$

and recalling that potential function U is not a function of velocity and thus of time derivatives of the generalized coordinates \dot{q}^k , it's possible to recast the dynamical equation as the **Lagrange equations**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = Q^k ,$$

being Q^k the **generalized force** not included in the gradient of the potential ∇U - usually a non conservative contribution -, $Q^k = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} \cdot \vec{R}^{e,nc}$.

5.2 System of points

Newton dynamical equations - strong form.

Weak form.

Lagrange equations.

5.3 Rigid Body

Newton dynamical equations - strong form. Dynamical equations governing the motion of a rigid body, referred to its center of mass G read

$$\begin{cases} \dot{\vec{Q}} = \vec{R}^e \\ \dot{\vec{\Gamma}}_G = \vec{M}_G^e , \end{cases}$$

with momentum $\vec{Q} = m\vec{v}_G$ and angular momentum $\vec{\Gamma}_G = \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega}$.

Weak form. Weak form of dynamical equations is derived with scalar multiplication of the strong form by an arbitrary test functions \vec{w}_t, \vec{w}_r

$$\vec{0} = \vec{w}_t \cdot (m\dot{\vec{v}}_G - \vec{R}^e) + \vec{w}_r \cdot (\dot{\vec{\Gamma}}_G - \vec{M}_G^e) \quad \forall \vec{w}_t, \vec{w}_r \quad (5.3)$$

Lagrange equations. Lagrange equations are derived from the weak form, with a proper choice of the weak test functions. The “translational part” is recasted after choosing

$$\vec{w}_t = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^k} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}^k} .$$

Following the same steps show to derive *Lagrange equations for a point system*, the translational part becomes

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K^{tr}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial K^{tr}}{\partial q^k} - \frac{\partial U^{tr}}{\partial q^k} = Q_k^{tr},$$

being $K^{tr} = \frac{1}{2}m|\vec{v}_G|^2$ the contribution to kinetic energy of the velocity of the center of mass G deriving from the momentum equation, U^{tr} the contribution to the potential energy U from the momentum equation, and Q_k^{tr} the contribution to the generalized force from the momentum equation.

The “rotational part” is recasted after choosing

$$\vec{\omega}_r = \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial q^k} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}^k}$$

Angular velocity $\vec{\omega}$ can be written w.r.t the inertial $\{\hat{e}_i\}$ or the material reference frame $\{\hat{E}_i\}$,

$$\vec{\omega} = \omega_i \hat{e}_i = \sigma_j \hat{E}_j,$$

and the inertia tensor as

$$\mathbb{I}_G = I_{ij} \hat{E}_i \otimes \hat{E}_j,$$

being the components I_{ij} constant.

$$0 = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}^k} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega}) - \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}^k} \cdot \vec{M}_G^e = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}^k} \cdot \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}^k} \cdot \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega} - \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial q^k} \cdot \vec{M}_G^e$$

The first term becomes

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \dot{q}^k} \cdot \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \sigma_a}{\partial \dot{q}^k} I_{ab} \sigma_b \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \left(\frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial K^{rot}}{\partial \dot{q}^k}$$

The second term becomes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial q^k} \cdot \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega} &= \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{d \vec{\theta}}{dt} \cdot \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega} = \\ &= \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial q^k} \cdot \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega} = \\ &= \frac{\partial}{\partial q^k} (\sigma_a \hat{E}_a) \cdot \hat{E}_b I_{bc} \sigma_c = \\ &= \frac{\partial \sigma_a}{\partial q^k} \underbrace{\hat{E}_a \cdot \hat{E}_b}_{=\delta_{ab}} I_{bc} \sigma_c + \sigma_a \underbrace{\frac{\partial \hat{E}_a}{\partial q^k} \cdot \hat{E}_b}_{=0} I_{bc} \sigma_c = \\ &= \frac{\partial}{\partial q^k} \left(\frac{1}{2} \sigma_a I_{ab} \sigma_b \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial q^k} \left(\frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega} \right) = \frac{\partial K^{rot}}{\partial q^k}. \end{aligned}$$

The third term can be written as the sum of the derivative of a potential function and a generalized force,

$$\frac{\partial \vec{\theta}}{\partial q^k} \cdot \vec{M}_G^e = \frac{\partial U^{rot}}{\partial q^k} + Q_{q^k}^{rot}$$

The rotational part of the wak form becomes

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K^{rot}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial K^{rot}}{\partial q^k} - \frac{\partial U^{rot}}{\partial q^k} = Q_{q^k}^{rot},$$

being $K^{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega}$ the contribution to kinetic energy of the rotation around the center of mass G deriving from the angular momentum equation, U^{rot} the contribution to the potential energy U from the angular momentum equation, and Q_k^{rot} the contribution to the generalized force from the angular momentum equation.

Adding together the contributions of the momentum and the angular momentum equations, the Lagrange equation can be formally written with the same expression found for the system of points,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = Q_{q^k} ,$$

being $\mathcal{L} = K + U$ the Lagrangian function of the system, and $K = K^{tr} + K^{rot}$, $U = U^{tr} + U^{rot}$, $Q_{q^k} = Q_{q^k}^{tr} + Q_{q^k}^{rot}$ the kinetic energy the potential function and the generalized force of the system, defined as the sum of the contributions coming from the momentum and the angular momentum equations.

HAMILTONIAN MECHANICS

Riformulazione ulteriore della meccanica di Newton, a partire dalla meccanica di Lagrange. Fornisce le basi per un approccio moderno anche in altre teorie della Fisica. **dots...**

Starting from Lagrange equations derived in *Lagrangian mechanics*,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = Q_q$$

the **generalized moment** is defined as

$$p_k := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} ,$$

and the **Hamiltonian function** as

$$\mathcal{H}(q^k(t), p_k(t), t) := p_k \dot{q}^k - \mathcal{L}(\dot{q}^l(q^k, p_k, t), q^l(t), t) ,$$

its differential reads

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= dq^k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} + dp_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} + dt \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \\ &= dp_k \dot{q}^k + \underbrace{p_k d\dot{q}^k - d\dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}}_{=0} - dq^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned}$$

and thus it follows

$$\begin{cases} \dot{q}^k &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} . \end{cases}$$

Recasting Lagrange equations as

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = -Q_{q^k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) = -Q_{q^k} + \dot{p}_k$$

Hamilton equations follow

$$\begin{cases} \dot{q}^k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q^k} + Q_{q^k} . \end{cases}$$