
Introduzione alla programmazione per le scuole superiori

basics

Nov 07, 2024

CONTENTS

I	Introduzione alla programmazione	3
1	Introduzione alla programmazione - in Python	5
2	Variabili, tipi e funzioni elementari built-in	7
2.1	Commenti	7
2.2	Tipi built-in	7
3	Controllo del flusso	11
3.1	Alternativa	11
3.2	Iterazione	12
4	Funzioni	15
4.1	Default value of function arguments	15
5	Classi	17
6	Librerie	19
II	Introduzione al calcolo numerico	21
7	Introduzione al calcolo scientifico	23
7.1	Sistemi lineari	24
7.2	Problemi non lineari	27
7.3	Approssimazione di funzioni	30
7.4	Derivate di funzioni	30
7.5	Integrali	31
7.6	Equazioni differenziali ordinarie	31
7.7	Ottimizzazione	32
7.8	Introduzione ai metodi in AI	33
III	Supporto tecnico	35
8	Supporto tecnico	37

Questo libro fa parte del materiale pensato per [le scuole superiori](#)

Obiettivi generali. Questo lavoro punta ad essere un'opera di *formazione alla* **tirchieria, prigrizia e onestà**, almeno in ambito informatico. I più benvolenti potranno riassumere questo obiettivo come il desiderio di *non buttare nel WC soldi, tempo, e pazienza*.

Oltre alle nozioni minime, l'obiettivo principale di questo libro è la formazione a:

- **indipendenza** in ambito informatico: evitare di pagare per qualcosa che non serve; evitare di pagare per qualcosa di inutile o dannoso in presenza di alternative libere; meglio dedicare le risorse a ciò che vale la pena pagare
- **ordine**: i moderni strumenti informatici permettono di lavorare in maniera ordinata, risparmiando tempo, soldi e pazienza
- **trasparenza e onestà**: anche se spesso in maniera non lineare, la conoscenza procede seguendo il metodo scientifico: i risultati mostrati e le tesi proposte devono essere supportate da dati e logica; i dati e le analisi svolte per poter produrre risultati devono essere disponibili, controllabili e soggetti a critica. Tutto il resto, almeno qui, almeno nell'ambito della conoscenza che procede con il metodo scientifico, sarà considerata confusione nella migliore delle ipotesi o direttamente *merda*.

Questo stesso libro è scritto seguendo questi criteri: oltre al dispositivo elettronico usato per consultare il materiale (online o offline, una volta scaricato), non è necessaria la spesa per nessun altro dispositivo o infrastruttura informatica; i sorgenti del materiale è sviluppato localmente, ospitato e disponibile su [Github](#) all'indirizzo <https://github.com/Basics2022/bbooks-programming-hs>.

necessità di una connessione internet, se non si porta il progetto su un sistema locale, con tutti gli strumenti necessari - non tanti, e standard, ma comunque devono esserci “per funzionare”

Metodo.

- **Impostazione degli strumenti necessari. todo...**
- **Linguaggio di programmazione.** In questa introduzione si sceglie di usare **Python** come linguaggio di programmazione. Un approccio più generale all'informatica e alla programmazione prevederebbe l'utilizzo di altri linguaggio di programmazione (come C). Considerata la **diffusione** di Python, la quantità di **librerie disponibili** (con eventuali binding a librerie sviluppate usando linguaggi di programmazione più efficienti) e strumenti per la **programmazione collaborativa** e remota (**Colab, Jupyter,...**), Python risulta comunque una buona scelta per un corso improntato alla presentazione delle basi di programmazione dirette a un'applicazione abbastanza immediata.

Verranno posta attenzione sulla sintassi “particolare” di Python quando si discosta maggiormente dagli altri linguaggi di programmazione.

- **Argomenti. todo...**

Part I

Introduzione alla programmazione

INTRODUZIONE ALLA PROGRAMMAZIONE - IN PYTHON

L'introduzione alla programmazione in Python userà le risorse messe a disposizione da [Google](#) con il progetto [Jupyter](#) per lo sviluppo di codice open-source, con open-standard e servizi interattivi utilizzabili su diversi dispositivi usando diversi linguaggi di programmazione, come [Python](#), [Julia](#) o [R](#)

Oltre al dispositivo elettronico utilizzato per consultare al materiale, non è necessario nessun altro dispositivo informatico: un account Google personale permette l'accesso libero ai servizi base di cloud computing di [Colab](#)

VARIABILI, TIPI E FUNZIONI ELEMENTARI BUILT-IN

- tipi
- variabili
 - ...
 - by-reference o by-value

2.1 Commenti

```
# I commenti permettono di aggiungere brevi descrizione al codice

# In Python, è possibile aggiungere commenti al codice con il carattere #: tutto_
↳quello
# che viene dopo il carattere # su una riga è considerato un commento, e non codice da
# eseguire

# E' buona regola aggiungere qualche commento al codice, e sarebbe bene iniziare a_
↳farlo
# in lingua inglese:
# - il codice non è auto-esplicativo!
# - il codice potrebbe essere usato da altri in giro per il mondo, ed è più probabile_
↳che
#   si conosca l'inglese invece dell'italiano

# So let's switch to English for scripts, both for comments and "for variable names"

# Comments are not documentation! todo Add some paragraph about documentation!
```

2.2 Tipi built-in

- numero: intero, reale, complesso
- booleano
- stringa
- bytes
- lista
- tupla

- insieme
- dizionario, dict

2.2.1 Numeri

```
"""
Numbers

in Python, variables are not declared. Thus, a number variable is not defined
as an integer, a real or a complex variable, but its type is inferred by its
initialization
"""

# Numbers
a_int = 1
a_real = 1.
a_complex = 1.+ 0.j

# Strings
a_str = '1.0'

print(f"type(a_int)      : {type(a_int)}")
print(f"type(a_real)    : {type(a_real)}")
print(f"type(a_complex): {type(a_complex)}")
print(f"type(a_str)     : {type(a_str)}")
```

```
type(a_int)      : <class 'int'>
type(a_real)     : <class 'float'>
type(a_complex): <class 'complex'>
type(a_str)      : <class 'str'>
```

2.2.2 Booleani - logici

2.2.3 Stringhe

```
"""
Strings

strings are character
"""
```

```
'\nStrings\n\nstrings are character \n'
```

2.2.4 Liste, tuple e insiemi

2.2.5 Dizionari

CONTROLLO DEL FLUSSO

Nei paradigmi di *programmazione imperativa* (**todo** fare riferimento ai paradigmi di programmazione. Ha senso questa distinzione?), vengono usate delle strutture di controllo del flusso di esecuzione di un programma.

Si possono distinguere due categorie delle strutture di controllo:

- condizionale ed alternativa: if, if-then, if-then-else
- iterazione: for, while, ...

3.1 Alternativa

3.1.1 if-then statement

```
""" if-then example """
# Try this script changing the user input

# User input
a = 2          # a is initialize as an integer
# a = 2.1      # if a is initialized as a real, a % 2 perform automatic casting,
↳int(a) % 2    # uncomment previous line and try!

word = 'odd'
if ( a % 2 == 0 ):    # automatic casting into an int -> a % 2 = floor(a) % 2
    word = 'even'

print(f"User input ({a}) is an {word} number")
```

```
User input (2) is an even number
```

3.1.2 if-then-else statement

```
""" if-then-else example"""
# Try this script changing the user input

# User input
a = 15

if ( a % 3 == 1 ):      # First condition
    reminder = 1
elif ( a % 3 == 2 ):   # Other condition
    reminder = 2
else:                  # All the other conditions
    reminder = 0

print(f"User input ({a}). {a} % 3 = {reminder}")
```

```
User input (15). 15 % 3 = 0
```

3.2 Iterazione

3.2.1 for loop

```
""" for loop examples

Loops over:
- elements of a list
- elements in range
- keys, values of a dict
- ...
"""

# Loop over elements of a list
seq = ['a', 3, 4. , {'key': 'value'}]

print("\nLoop over elements of the list: seq = {seq}")
for el in seq:
    print(f"element {el} has type {type(el)}")

# Loop over elements of a tuple
# ...

# Loop over elements of a range
n_el = 5
range_el = range(5)
print("\nLoop over elements of the list, seq = {seq}")
print(f"range({n_el}) has type: {type(range_el)}")
print(f"range({n_el}): {range_el}")

for i in range_el:
    print(i)
```

(continues on next page)

(continued from previous page)

```
# Loop over keys, values of a dict
d = {'a': 1., 'b': 6, 'c': {'c1': 1, 'c2': True}}
print(f"\nLoop over elements of the dict, d = {d}")

for i,k in d.items():
    print(i, k)
```

```
Loop over elements of the list: seq = {seq}
element a has type <class 'str'>
element 3 has type <class 'int'>
element 4.0 has type <class 'float'>
element {'key': 'value'} has type <class 'dict'>
```

```
Loop over elements of the list, seq = {seq}
range(5) has type: <class 'range'>
range(5): range(0, 5)
0
1
2
3
4
```

```
Loop over elements of the dict, d = {'a': 1.0, 'b': 6, 'c': {'c1': 1, 'c2': True}}
a 1.0
b 6
c {'c1': 1, 'c2': True}
```

3.2.2 while loop

```
""" while loop example """

a = 3

while ( a < 5 ):
    a += 1
    print(f">> in while loop, a: {a}")

print(f"after while loop, a: {a}")
```

```
>> in while loop, a: 4
>> in while loop, a: 5
after while loop, a: 5
```

3.2.3 altri cicli

todo

FUNZIONI

```
#> Define a function to tell if a number is positive or not
def is_positive(x):
    """ Function returning True if x>0, False if x<=0 """
    return x > 0

#> User input to test the function: tuple of numbers
n_tuple = [ -1, 2., .003, 1./3., -2.2, 0, -7.4 ]

#> Test function on all the elements in the user-defined tuple
for n in n_tuple:
    if ( is_positive(n) ):
        string = ' '
    else:
        string = 'not '

    print(f'{n} is '+string+'positive')
```

```
-1 is not positive
2.0 is positive
0.003 is positive
0.3333333333333333 is positive
-2.2 is not positive
0 is not positive
-7.4 is not positive
```

4.1 Default value of function arguments

```
#> Define a user function to tell if the first argument is greater than the second.
# If no second argument is given, it's set = 0 (default value, defined in the
↪function)
def is_greater_than(x, y=0):
    """ """
    return is_positive(x-y)

a, b = -2, -3
print(f"Is {a} greater than {b}? is_greater_than({a}, {b}):"+str(is_greater_than(a,
↪b)))
print(f"Is {a} greater than 0 ? is_greater_than({a},      ):"+str(is_greater_than(a)))
```

```
Is -2 greater than -3? is_greater_than(-2, -3):True  
Is -2 greater than 0 ? is_greater_than(-2,    ):False
```

CLASSI

- classi, metodi, oggetti
- ereditarietà, overloading

LIBRERIE

- Definizione del concetto
- librerie “standard”, scritte da qualcun’altro
- scrivere una libreria

Part II

Introduzione al calcolo numerico

INTRODUZIONE AL CALCOLO SCIENTIFICO

In questa introduzione al calcolo numerico, vengono presentati alcuni algoritmi. Dove sensato, viene implementata la versione elementare di alcuni di questi algoritmi. Per usi non didattici, e quando possibile, si raccomanda l'uso di algoritmi implementati in librerie disponibili, per questioni di tempo ed efficienza: è lavoro già fatto, da persone che lo sanno fare meglio di noi, controllato, migliorato nel corso degli anni, ottimizzato per ogni sistema e spesso in linguaggi di programmazione diversi da Python, come C o Fortran.

In questa introduzione viene fatto affidamento e uso di alcune librerie disponibili per Python:

- librerie con algoritmi e strumenti matematici per il calcolo numerico: [NumPy](#), [SciPy](#),...
- librerie per la creazione di grafici: [Matplotlib](#), [Plotly](#),...
- librerie per l'analisi dati e la statistica: [pandas](#),...
- librerie per il machine learning: [sci-kit](#), [PyTorch](#),...
- ...

Introduzione al calcolo numerico

- Equazioni lineari
- Equazioni non lineari
- Approssimazione di funzioni
- Derivate
- Integrali
- Equazioni differenziali ordinarie:
 - problema di Cauchy ai valori iniziali
 - problema ai valori al contorno
- Ottimizzazione, vincolata e non

Metodi per la statistica

Introduzione al machine learning

7.1 Sistemi lineari

La soluzione di sistemi lineari è un problema che compare in molte altre applicazioni di calcolo numerico.

Formalismo matriciale. Con il formalismo matriciale, un sistema di equazioni lineari può essere scritto come

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Classificazione. In generale, i sistemi di equazioni lineari possono essere classificati:

- in base al numero di incognite n_u ed equazioni indipendenti n_e : $n_e = n_u$ sistemi determinati con un'unica soluzione; $n_e > n_u$ sistemi sovradeterminati: con nessuna soluzione in generale; $n_e < n_u$ sistemi indeterminati, con infinite soluzioni in generale
- in base alla “struttura” del sistema:
 - diagonale, tridiagonale, ...
- in base al numero di coefficienti non-nulli della matrice \mathbf{A} : sistemi con matrice \mathbf{A} piena o **sparsa**; questa distinzione non è netta, ma il più delle volte risulta chiara dalla particolare applicazione/metodo.

Algoritmi. Esistono due grandi classi di metodi/algoritmi per la soluzione di sistemi lineari:

- i **metodi diretti**, che si basano su una fattorizzazione della matrice
- i **metodi indiretti**, che si basano sul calcolo di prodotti matrice-vettore

7.1.1 Sistemi lineari quadrati con matrici piene

In questa sezione si discute la soluzione di sistemi lineari quadrati con matrici piene con le funzioni disponibili nella libreria NumPy.

Esempio 1. Sistema quadrato determinato

Il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

può essere riscritto con il formalismo matriciale nella forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

e risolto grazie alla funzione `solve(A, b)` della libreria `numpy.linalg`.

```

"""
Linear systems with full square non-singular matrices
"""

import numpy as np

A = np.array([[1., 2., 0.], [1., 0., 1.], [1., 1., 1.]])
b = np.array([0., -1., 1.])

x = np.linalg.solve(A, b)

print(f"Sol, x: {x}")
print(f"Proof : Ax = {A @ x}")    # Check that Ax = b
print(f"      b = {b}")

```

```

Sol, x: [-4.  2.  3.]
Proof : Ax = [ 0. -1.  1.]
           b = [ 0. -1.  1.]

```

Esempio 2. Sistemi quadrati non determinati

I sistemi lineari

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

sono due sistemi quadrati non determinati. Il primo sistema non ha soluzioni, mentre il secondo ne ha infinite della forma

$$(x_1, x_2, x_3) = (-2, 1, 1) + \alpha(2, -1, -2), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dopo aver riscritto i sistemi lineari con il formalismo matriciale, si può provare a risolverli usando la funzione `solve(A, b)` della libreria `numpy.linalg`. In entrambi i casi, la funzione `solve(A, b)` restituisce un errore, segnalando che la matrice del sistema lineare è singolare, definizione equivalente di sistemi non determinati.

- **todo** dare interpretazione geometrica, fare grafico?
- **todo** spiegare motivo?
 - Esistono algoritmi che trovano almeno una soluzione nel caso in cui ne esistano infinite?: discutere gli algoritmi implementati nella funzione `numpy.linalg.solve()` e rimandare alla documentazione della libreria; discutere altri algoritmi che rendono possibile trovare una soluzione
 - Esistono algoritmi che trovano una soluzione approssimata nel caso in cui non ne esistano?: **minimi quadrati**, minimizzano l'errore, dare un'interpretazione geometrica

```

"""
Linear systems with full square singular matrices
"""

import numpy as np

A = np.array([[1., 2., 0.], [1., 0., 1.], [2., 2., 1.]])
b = np.array([1., -1., 1.])
# b = np.array([0., -1., 1.])

```

(continues on next page)

(continued from previous page)

```
x = np.linalg.solve(A, b)

print(f"Sol, x: {x}")
print(f"Proof : Ax = {A @ x}")    # Check that Ax = b
print(f"      b = {b}")
```

```
-----
LinAlgError                                Traceback (most recent call last)
Cell In[2], line 11
      8 b = np.array([1.,-1.,1.])
      9 # b = np.array([0.,-1.,1.])
--> 11 x = np.linalg.solve(A, b)
     13 print(f"Sol, x: {x}")
     14 print(f"Proof : Ax = {A @ x}")    # Check that Ax = b

File <__array_function__ internals>:200, in solve(*args, **kwargs)

File ~/local/lib/python3.8/site-packages/numpy/linalg/linalg.py:386, in solve(a, b)
     384 signature = 'DD->D' if isComplexType(t) else 'dd->d'
     385 extobj = get_linalg_error_extobj(_raise_linalgerror_singular)
--> 386 r = gufunc(a, b, signature=signature, extobj=extobj)
     388 return wrap(r.astype(result_t, copy=False))

File ~/local/lib/python3.8/site-packages/numpy/linalg/linalg.py:89, in _raise_linalgerror_singular(err, flag)
     88 def _raise_linalgerror_singular(err, flag):
--> 89     raise LinAlgError("Singular matrix")

LinAlgError: Singular matrix
```

7.1.2 Matrici sparse

Una matrice sparsa ha un elevato numero di elementi nulli.

Esempio 1 - Matrice di rigidezza di elementi finiti

Il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

è descritto da una matrice, $N = 5$, $N \times N = 25$, che ha $N + (N - 1) + (N - 1) = 13$ elementi non nulli. Il rapporto tra il numero di elementi non nulli e il numero di elementi totali è $\frac{3N-2}{N^2} \sim \frac{3}{N}$. Al crescere della dimensione del problema, la matrice A diventa sempre più sparsa e diventa sempre più conveniente definirla come matrice sparsa, ed usare gli algoritmi pensati per questo tipo di matrici.

```

"""
Linear systems with square non-singular matrices, in sparse format
"""

from scipy import sparse

# Printout level: the higher the number, the more verbose the script
printout_level = 1

n_nodes = 5
i_nodes = list(np.arange(5))

# Build sparse stiffness matrix, I: row indices, J: col indices, E: matrix elems
I = np.array(i_nodes+i_nodes[:-1]+i_nodes[ 1:])
J = np.array(i_nodes+i_nodes[ 1:]+i_nodes[:-1])
E = np.array(n_nodes*[2]+(n_nodes-1)*[-1]+(n_nodes-1)*[-1])

A = sparse.coo_array((E, (I,J))).tocsr()

if ( printout_level > 50 ): # print matrix in sparse format
    print(f" I: {I}\n J: {J}\n E: {E}")
    print(f" A:\n {A}")

if ( printout_level > 60 ): # convert and print matrix in full format
    print(f" A.todense(): {A.todense()}")

# RHS
b = np.array(5*[1])

# Solve linear system
x = sparse.linalg.spsolve(A, b)

print(f"Sol, x: {x}")

```

```
Sol, x: [2.5 4.  4.5 4.  2.5]
```

7.2 Problemi non lineari

7.2.1 Metodo di bisezione

Il metodo di bisezione per la ricerca degli zeri di una funzione continua $F(x)$ si basa sul teorema dei valori intermedi per le funzioni continue.

Dati due numeri reali a, b tali che $f(a)f(b) < 0$, allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

```

"""
Example of bisection method

Find the solution of the problem  $f(x) = 0$ 
with  $f(x) = e^x - x$ 
"""

```

(continues on next page)

(continued from previous page)

```

import numpy as np
from time import time

# Function f and its derivative
f = lambda x: np.exp(x) + x
df = lambda x: np.exp(x) + 1

# Parameters of the bi-section method
tol = 1e-6
max_niter = 100

t1 = time()

# Find 2 values so that  $f(a) f(b) < 0$ 
a, b = -2., 0.
niter = 0

if ( not f(a) * f(b) < 0 ):
    print("Bisection algorithm can't start, f(a)f(b)>= 0")
else:
    x = .5 * (a+b)
    fx = f(x)
    while ( np.abs(fx) > tol and niter < max_niter ):

        if ( f(x) * f(a) <= 0 ): # new range [a,c]
            b = x
        else: # new range [a,b]
            a = x

        # Update solution and residual
        x = .5 * (a+b)
        fx = f(x)

        # Update n.iter
        niter += 1

print("Bisection method summary")
if ( niter < max_niter ):
    print(f"solution, x = {x}")
    print(f"res : {f(x)}")
    print(f"niter: {niter}")
    print(f"etime: {time()-t1}")
else:
    print(f"max n.iter reached without convergence")
    print(f"res: {f(x)}")

```

```

Bisection method summary
solution, x = -0.567143440246582
res : -2.348157265297246e-07
niter: 20
etime: 0.0008826255798339844

```


7.2.2 Metodo di Newton

Per trovare la soluzione del problema non lineare

$$F(x) = 0,$$

il metodo di Newton sfrutta l'espansione in serie troncata al primo grado della funzione $F(x)$, per scrivere

$$0 = F(x^n + \Delta x) \approx F(x^n) + F'(x^n)\Delta x$$

e ottenere l'incremento della soluzione Δx come soluzione del sistema lineare

$$F'(x^n)\Delta x = -F(x^n)$$

e aggiornare la soluzione $x^{n+1} = x^n + \Delta x$.

```

"""
Example of Newton method

Find the solution of the problem f(x) = 0
with f(x) = e^x - x

"""

# import numpy as np (already imported?)

# # Function f and its derivative (already defined?)
# f = lambda x: np.exp(x) + x
# df = lambda x: np.exp(x) + 1

# Parameters of the Newton method, for stopping criteria
tol = 1e-6          # tolerance on the residual |f(x)| < tol
max_niter = 10      # max n. of iterations          niter > max_niter

t1 = time()

# Initial guess, residual and number of iterations
x = -1.
res = f(x)
niter = 0

# Newton algorithm
while ( np.abs(res) > tol and niter < max_niter ):
    # Solve linear approximation step, and update solution
    dx = - res / df(x)
    x += dx

    #> Evaluate new residual and n. of iter
    res = f(x)
    niter += 1

print("Newton method summary")
if ( niter < max_niter ):
    print(f"solution, x = {x}")
    print(f"res   : {res}")
    print(f"niter: {niter}")
    print(f"etime: {time()-t1}")

```

(continues on next page)

(continued from previous page)

```
else:
    print(f"max n.iter reached without convergence")
    print(f"res: {res}")
    print(f"etime: {time()-t1}")
```

```
Newton method summary
solution, x = -0.567143285989123
res : 6.927808993140161e-09
niter: 3
etime: 0.0010170936584472656
```

7.3 Approssimazione di funzioni

7.3.1 Interpolazione

7.3.2 Regressione

7.4 Derivate di funzioni

7.4.1 Differenze finite

Il calcolo della derivata di una funzione $f(x)$ derivabile in un punto x_0 può essere svolto utilizzando l'espansione locale in serie di Taylor di una funzione.

Derivata prima

Usando le espansioni

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{\Delta x^2}{2} + f'''(x)\frac{\Delta x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{\Delta x^2}{2} - f'''(x)\frac{\Delta x^3}{3!} + o(x^3)$$

si possono ricavare gli schemi del primo ordine

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + o(\Delta x)$$

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + o(\Delta x)$$

e lo schema del secondo ordine usando le differenze centrate

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + o(\Delta x^2)$$

Derivata seconda

Usando le stesse espansioni in serie, si può ottenere uno schema del secondo ordine per la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2)$$

7.5 Integrali

7.5.1 Integrazione di Newton-Cotes

- Formula del punto medio
- Formula del trapezio

7.5.2 Integrazione di Gauss

L'integrazione di Gauss permette di calcolare in maniera esatta l'integrale di una funzione polinomiale $p^{(n)}(x)$ su un intervallo $[a, b]$, come somma pesata della funzione valutata in alcuni punti dell'intervallo,

$$\int_a^b p^{(n)}(x) dx = \sum_g w_g f(x_g) .$$

Per motivi di generalizzazione dell'algoritmo, nella definizione dei **pesi** w_i e dei **nodi di Gauss** x_i , l'integrale viene riportato all'integrale su un intervallo di riferimento, tramite una trasformazione di coordinate.

Per domini 1D, l'intervallo di riferimento per la quadratura di Gauss è l'intervallo $\xi = [-1, 1]$ e il cambio di variabili è

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}(\xi - 1) ,$$

così che l'integrale originale può essere scritto come

$$\begin{aligned} \int_{x=a}^b p^{(n)}(x) dx &= \int_{\xi=-1}^1 p^{(n)}(x(\xi)) \frac{dx}{d\xi} d\xi = \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{\xi=-1}^1 p^{(n)}(x(\xi)) d\xi = \frac{b-a}{2} \sum_g w_g p^{(n)}(x(\xi_g)) \end{aligned}$$

7.6 Equazioni differenziali ordinarie

7.6.1 Problemi di Cauchy ai valori iniziali

Approccio a un problema di Cauchy di ordine n

Un problema di Cauchy di ordine n

$$\begin{cases} F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y'(x), y(x), x) = 0 \\ y(x_0) = y^0 \\ y'(x_0) = y'^0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1),0} \end{cases}$$

con funzione incognita $y(x) : D \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, può essere riscritto come un problema di “ordine 1” per la funzione incognita $\mathbf{z}(x) : D \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definita come

$$\mathbf{z}(x) = (z_0(x), z_1(x), \dots, z_{n-1}(x)) := (y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) .$$

Esplicitando le relazioni tra le componenti di $\mathbf{z}(x)$ e le derivate della funzione $y(x)$, $z_k(x) = y^{(k)}(x) = y^{(k-1)'}(x) = z'_{k-1}(x)$, il problema di Cauchy può essere riformulato come

$$\begin{cases} z'_0 - z_1 = 0 \\ z'_1 - z_2 = 0 \\ \dots \\ z'_{n-2} - z_{n-1} = 0 \\ F(z'_{n-1}(x), z_{n-1}(x), \dots, z_1(x), z_0(x)) = 0 \end{cases}, \quad \text{i.c.} \quad \begin{cases} z_0(x_0) = y^0 \\ z_1(x_0) = y'^0 \\ \dots \\ z_{n-1}(x_0) = y^{(n-1),0} \end{cases}$$

che può essere riscritto con il formalismo vettoriale come

$$\begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{z}'(x), \mathbf{z}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{z}(x_0) = \mathbf{z}_0 \end{cases}$$

Caratteristiche (cenni)

- accuratezza, consistenza, convergenza
- stabilità: 0-, A- condizionata e incondizionata

Schemi numerici

Schemi numerici a un passo

Schemi numerici multi-step

7.6.2 Problemi al contorno

Differenze finite

Elementi finiti

Volumi finiti

7.7 Ottimizzazione

Le tecniche di ottimizzazione sono alla base di molti metodi di interesse, dall'approssimazione di funzioni, alla regolazione e controllo, agli algoritmi usati in intelligenza artificiale

7.8 Introduzione ai metodi in AI

- SL, supervised learning: regression and classification
- UL, unsupervised learning: clustering
- ML, machine learning: control

Part III

Supporto tecnico

SUPPORTO TECNICO

- git
- Servizi Google
- TeX