Controlli Automatici - T

Progetto Tipologia c - Traccia 3

Controllo di un rotore con deformazione

Gruppo Z

Autori, ...

Il progetto riguarda il controllo di un rotore ad asse orizzontale con posizione angolare $\theta(t)$ e velocità angolare $\omega(t)$ rispetto all'asse del rotore, la cui dinamica viene descritta dalla seguente equazione differenziale

$$(m_i e_i^2 + I_e)\dot{\omega} = -\beta\omega - g m_i e_i sin(\theta) + \tau, \tag{1a}$$

dove la variabile d'ingresso $\tau(t)$ rappresenta la coppia angolare applicata al rotore, il termine $-\beta\omega$ modella l'attrito dell'aria, con $\beta \in \mathbb{R}$. Il termine $-g m_i e_i sin(\theta)$, dove $g \in \mathbb{R}$ rappresenta l'accelerazione gravitazionale, modella l'effetto di una deformazione di massa $m_i \in \mathbb{R}$ posta ad una distanza $e_i \in \mathbb{R}$ dall'asse di rotazione. Infine, il parametro $I_e \in \mathbb{R}$ rappresenta il momento di inerzia del rotore senza deformazione. Si suppone di poter misurare la posizione angolare $\theta(t)$.

1 Espressione del sistema in forma di stato e calcolo del sistema linearizzato intorno ad una coppia di equilibrio

Innanzitutto, esprimiamo il sistema (1) nella seguente forma di stato

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2a}$$
$$y = h(x, u). \tag{2b}$$

Pertanto, andiamo a individuare lo stato x, l'ingresso u e l'uscita y del sistema come segue

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}, \quad u := \tau, \quad y := \theta$$

Coerentemente con questa scelta, ricaviamo dal sistema (1) la seguente espressione per le funzioni f ed h

$$f(x, u) := \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-\beta x_2 - g m_i e_i sin(x_1) + u}{m_i e_i^2 + I_e} \end{bmatrix}$$
$$h(x, u) := x_1$$

Una volta calcolate f ed h esprimiamo (1) nella seguente forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-\beta x_2 - g m_i e_i sin(x_1) + u}{m_i e_i^2 + I_e} \end{bmatrix} \tag{3a}$$
$$y = x_1 \tag{3b}$$

Per trovare la coppia di equilibrio (x_e, u_e) di (3), andiamo a risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-\beta x_2 - g m_i e_i sin(x_1) + u}{m_i e_i^2 + I_e} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

dal quale otteniamo

$$x_e := \begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \theta_e \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_e := \frac{g m_i e_i}{2}. \tag{5}$$

Definiamo le variabili alle variazioni δx, δu e δy come

$$\delta x = x - x_e, \quad \delta u = u - u_e, \quad \delta y = y - y_e.$$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può essere approssimativamente descritta mediante il seguente sistema lineare

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \tag{6a}$$
$$\delta y = C\delta x + D\delta u, \tag{6b}$$

dove le matrici A, B, C e D vengono calcolate come

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-gm_ie_icos(x_1)}{m_ie_i^2+I_e} & \frac{\beta}{m_ie_i^2+I_e} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=\frac{\pi}{6} \\ x_2=0 \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-gm_ie_i\sqrt{3}}{2(m_ie_i^2+I_e)} & \frac{\beta}{m_ie_i^2+I_e} \end{bmatrix} \tag{7a}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_ie_i^2+I_e} \end{bmatrix} \tag{7b}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7c}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = 0 \tag{7d}$$

2 Calcolo Funzione di Trasferimento

In questa sezione, andiamo a calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ dall'ingresso δu all'uscita δy mediante la seguente formula

$$G(s) = C(sI_3 - A)^{-1}C + D = \frac{0.01998}{s^2 + 0.999s + 0.08479}. \tag{8}$$

Dunque il sistema linearizzato (6) è caratterizzato dalla funzione di trasferimento (8) con 2 poli $p_1 = -0.9054$, $p_2 = -0.0936$ e nessuno zero. In Figura 1 mostriamo il corrispondente diagramma di Bode.

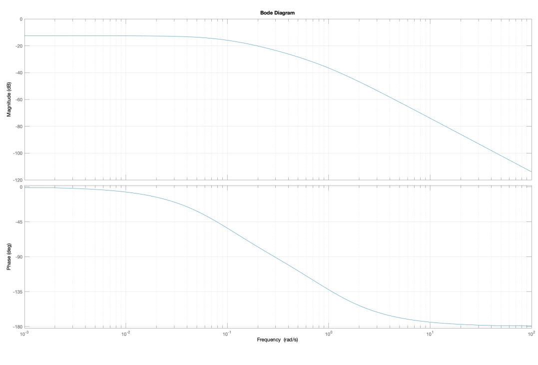

Figura 1: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$

3 Mappatura specifiche del regolatore

Le specifiche da soddisfare sono

1) Errore a regime $|e_\infty| \leq e^\star = 0.01$ in risposta a un gradino $w(t) = \frac{\pi}{6} \cdot 1(t)$ e $d(t) = \frac{\pi}{6} \cdot 1(t)$

2) Margine di fase $M_f \geq 45^\circ$.

3) Sovraelongazione percentuale massima del 5%: $S\% \leq 5\%$.

4) Il tempo di assestamento all' $\epsilon\% = 5\%$ deve essere inferiore al valore fissato: $T_{a,\epsilon} = 0.075$s.

5) Il disturbo sull'uscita $d(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni [0,0.1], deve essere abbattuto di almeno 50 dB.

6) Il rumore di misura $n(t)$, con una banda limitata di pulsazioni $[10^3, 10^6]$, deve essere abbattuto di almeno 35 dB.

Andiamo ad effettuare la mappatura punto per punto le specifiche richieste.

$$\xi = \frac{\ln(S_p)}{\sqrt{\ln(S_p)^2 + \pi^2}} = \frac{\ln(5)}{\sqrt{\ln(5)^2 + \pi^2}} = 0.4559 \tag{9a}$$

$$M_{f,spec} = \xi \cdot 100 = 45.59 \tag{9b}$$

$$\omega_{c,min} = \frac{300}{M_{f,spec} T_{a,\epsilon}} = \frac{300}{45.59 \cdot 0.075} = 87.7290 \tag{9c}$$

Pertanto, in Figura 2, mostriamo il diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$ con le zone proibite emerse dalla mappatura delle specifiche.

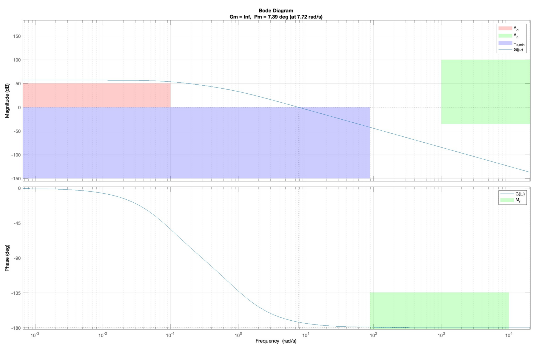

Figura 2: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$ con specifiche

Come si può notare dalla figura, la funzione di trasferimento $G(s)$ interseca l'asse 0dB, pertanto il criterio di Bode per la stabilità di un sistema è applicabile.

4 Sintesi del regolatore statico

In questa sezione progettiamo il regolatore statico $R_s(s)$ partendo dalle analisi fatte in sezione 3.

...

Dunque, definiamo la funzione estesa $G_e(s) = R_s(s)G(s)$ e, in Figura 3, mostriamo il suo diagramma di Bode per verificare se e quali zone proibite vengono attraversate. ...

Al fine di garantire il rispetto del vincolo 1 abbiamo progettato il regolatore statico nel seguente modo. Dalle specifiche sull'errore a regime risulta che il guadagno del regolatore statico μ_r deve essere maggiore di $\mu^\star$.

$$\mu_r \geq \mu^\star = \frac{D^\star + W^\star}{e^\star} \tag{10a}$$

Sostituendo otteniamo

$$\mu^\star = \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}}{0.01} \simeq 104.72$$

Infine noi abbiamo scelto $\mu_r = 0.3 \cdot 10^4$ per soddisfare il vincolo sull'attenuazione del disturbo.

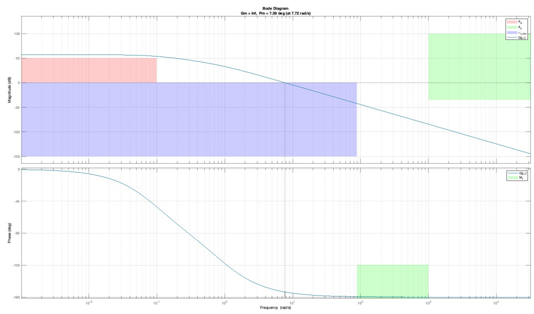

Figura 3: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G_s(s)$

5 Sintesi del regolatore dinamico

In questa sezione, progettiamo il regolatore dinamico $R_d(s)$. Dalle analisi fatte in Sezione 4, notiamo di essere nello Scenario di tipo B. Dunque, progettiamo $R_d(s)$ ricorrendo a una rete anticipatrice.

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{(1 + \alpha\tau s)(1 + \frac{1}{4 \cdot 10^2} s)} \tag{11a}$$

Con

$$\tau = \frac{M^\star - cos(\varphi^\star)}{\omega_c^\star sin(\varphi^\star)}$$

e

$$\alpha\tau = \frac{cos(\varphi^\star) - \frac{1}{M^\star}}{\omega_c^\star sin(\varphi^\star)}$$

In Figura 4, mostriamo il diagramma di Bode della funzione d'anello $L(s) = R_d(s)G_e(s)$

6 Test sul sistema linearizzato

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul sistema linearizzato con $w(t) = 20 \cdot 1(t)$, $d(t) = \sum_{k=1}^{4} 0.1 \cdot \sin(0.025kt)$ e $n(t) = \sum_{k=1}^{4} 0.6 \cdot \sin(10^3 kt)$.
In figura 5 osserviamo la risposta del sistema ponendo un gradino $w(t) = 20 \cdot 1(t)$ all'ingresso.

Mentre nelle figure 6 e 7 osserviamo l'andamento dell'uscita del sistema rispettivamente a fronte di un disturbo $d(t)$ e $n(t)$.

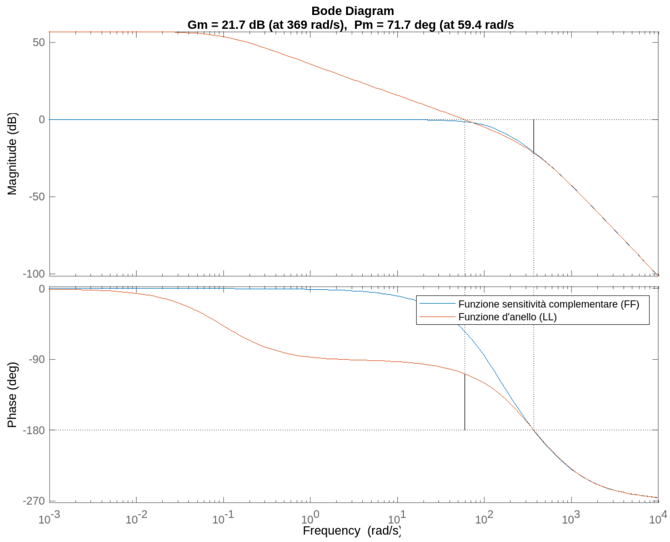

Figura 4: Diagramma di Bode della funzione $L(s)$

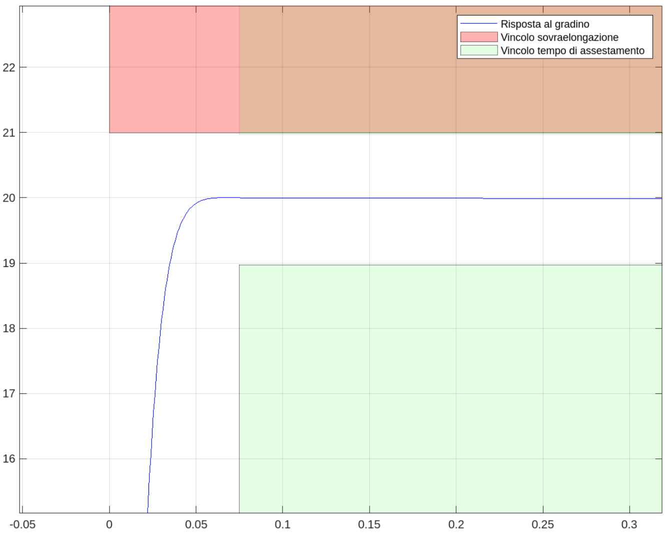

Figura 5: Risposta al gradino

7 Test sul sistema non lineare

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul modello non lineare con $w(t) = 20 \cdot 1(t)$, $d(t) = \sum_{k=1}^{4} 0.1 \cdot \sin(0.025kt)$ e $n(t) = \sum_{k=1}^{4} 0.6 \cdot \sin(10^3 kt)$.

Per testarne l'efficacia, utilizziamo Simulink. Per farlo creiamo un modello per il disturbo $n(t)$, uno per il disturbo $d(t)$ e uno per il sistema non lineare, ottenuto tramite combinazione di blocchi somma, gain e integratore (nel quale è possibile definire le condizioni iniziali del sistema). Infine, colleghiamo i vari modelli creati insieme al blocco del regolatore (definito dalla sua funzione di trasferimento) e simuliamo il sistema con un ingresso gradino. In Figura x si mostra l'uscita del sistema risultante

8 Punti opzionali

8.1 Primo punto

L'animazione della pala è stata creata partendo dall'oggetto "antenna.Polygon" che permette di creare un poligono su un piano X-Y e di farlo ruotare attorno al proprio asse. Per la durata dell'intervallo di

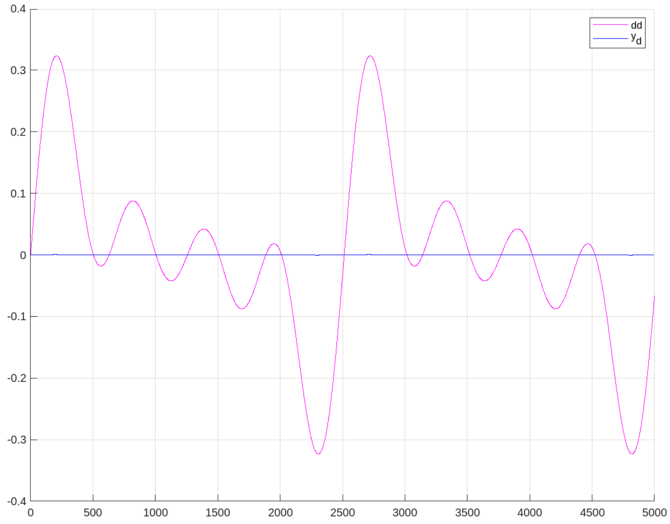

Figura 6: Attenuazione del disturbo $d(t)$

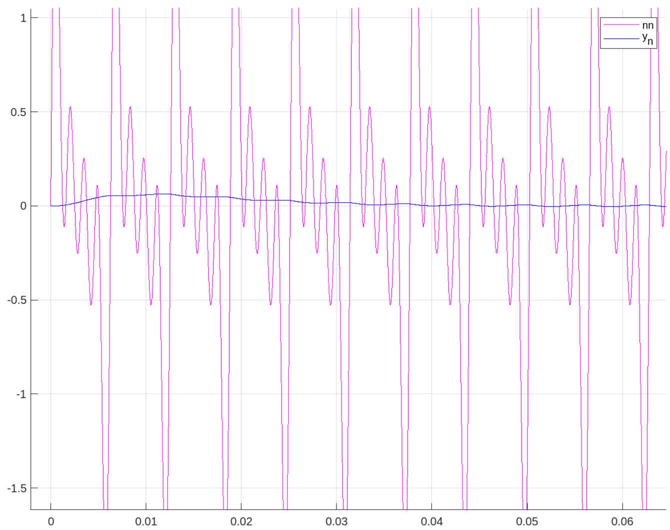

Figura 7: Attenuazione del disturbo $n(t)$

integrazione, calcolando la posizione in alcuni istanti di tempo è stato possibile ruotare il poligono di quell'angolo e dunque di simulare la rotazione del rotore attorno all'asse Z.

8.2 Secondo punto

...

8.3 Terzo punto

...

9 Conclusioni

...

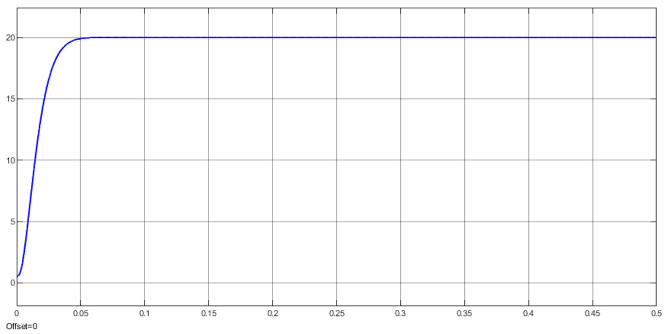

Figura 8: Uscita del sistema non linearizzato