Progetto Controlli Automatici

SuS

Dicembre 2022

1 Sistema in forma di stato

Al fine di esprimere il sistema in forma di stato, andiamo ad individuare lo stato x, l'ingresso u e l'uscita y del sistema

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}, \quad u := \tau, \quad y := \omega$$

Coerentemente con questa scelta, ricaviamo dal sistema la seguente espressione per le funzioni f e h

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-\beta x_2 - g m_i e_i sin(x_1) + u}{m_i e_i^2 + I_e} \end{bmatrix}$$

$$h(x,u) = x_2$$

Una volta calcolate f e h scriviamo il sistema nella seguente forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-\beta x_2 - g m_i e_i sin(x_1) + u}{m_i e_i^2 + I_e} \end{bmatrix}$$

$$y = x_2$$

Troviamo ora la coppia di equilibrio ponendo a 0 il primo membro e, dunque, ottenendo

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-\beta x_2 - g m_i e_i sin(x_1) + u}{m_i e_i^2 + I_e} \end{bmatrix}$$

Risolvendo il sistema di equazioni otteniamo

$$x_e := \begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \theta_e \\ 0 \end{bmatrix}, u_e = \frac{g m_i e_i}{2}$$

2 Linearizzazione e funzione di trasferimento del sistema

Definiamo le variabili alle variazioni $\delta x, \delta u$ e δy come

$$\delta x = x - x_e$$

$$\delta u = u - u_e$$

$$\delta y = y - y_e$$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può essere approssimativamente descritta mediante il seguente sistema lineare

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u$$

$$\delta y = C\delta x + D\delta u$$

dove le matrici A, B, C e D sono

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=x_e, u=u_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-gm_i e_i cos(x_1)}{m_i e_i^2 + I_e} & \frac{\beta}{m_i e_i^2 + I_e} \end{bmatrix}_{x_1=\frac{\pi}{6}, x_2=0, u=u_e}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-gm_i e_i \sqrt{3}}{2(m_i e_i^2 + I_e)} & \frac{\beta}{m_i e_i^2 + I_e} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{x=x_e, u=u_e} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_i e_i^2 + I_e} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=x_e, u=u_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{x=x_e, u=u_e} = 0$$