

Πρώτη εργασία στο μάθημα “Επιχειρησιακή Έρευνα”

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών “Πληροφορικής και Δικτύων”

Γκόγκος Χρήστος – <https://chgogos.github.io/>
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Άρτα, Μάρτιος 2025

1 Περιγραφή εργασίας

Το πρόβλημα ανάθεσης (assignment problem) είναι ένα κλασικό πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης με εφαρμογές στο χρονοπρογραμματισμό (scheduling), στις μεταφορές και αλλού [FP08]. Στο πρόβλημα ανάθεσης δίνονται n εργασίες και n εργαζόμενοι και ζητείται μια λύση όπου κάθε εργαζόμενος θα έχει αναλάβει μόνο μια εργασία και κάθε εργασία θα έχει ανατεθεί σε έναν μόνο εργαζόμενο. Η ανάθεση μιας εργασίας j σε έναν εργαζόμενο i συνεπάγεται την επιβολή ενός γνωστού κόστους c_{ij} και ο σκοπός είναι η ανάθεση όλων των εργασιών σε εργαζόμενους έτσι ώστε το συνολικό κόστος ανάθεσης να ελαχιστοποιείται.

Ζητείται η συγγραφή κώδικα και η συγγραφή τεχνικής αναφοράς που να παρουσιάζει αποτελέσματα και σύντομο σχολιασμό για τα 3 ακόλουθα ερωτήματα:

1.1 Ερώτημα 1 (50%): Επίλυση προβλημάτων ανάθεσης με μαθηματική μοντελοποίηση

Γράψτε ένα πρόγραμμα (erotimal.py) που να επιλύει το πρόβλημα της ανάθεσης χρησιμοποιώντας μαθηματική μοντελοποίηση και τη βιβλιοθήκη Google OR-Tools¹. Επιλύστε τα ακόλουθα στιγμιότυπα προβλημάτων και καταγράψτε το κόστος της λύσης που προκύπτει και το χρόνο επίλυσης για κάθε περίπτωση:

- assign100.txt πρόβλημα με 100 εργασίες/εργαζόμενους
- assign200.txt πρόβλημα με 200 εργασίες/εργαζόμενους
- assign300.txt πρόβλημα με 300 εργασίες/εργαζόμενους
- assign400.txt πρόβλημα με 400 εργασίες/εργαζόμενους
- assign500.txt πρόβλημα με 500 εργασίες/εργαζόμενους
- assign600.txt πρόβλημα με 600 εργασίες/εργαζόμενους
- assign700.txt πρόβλημα με 700 εργασίες/εργαζόμενους
- assign800.txt πρόβλημα με 800 εργασίες/εργαζόμενους

Τα αρχεία μπορούν να μεταφορτωθούν από το <https://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/files/>. Τα περιεχόμενα (οι πρώτες γραμμές μόνο) του αρχείου assign100.txt είναι τα ακόλουθα:

```
100
52 89 40 77 89 14 9 77 92 77 52 53 96
96 92 76 33 81 92 84 36 81 47 55 87 35
31 71 6 20 8 10 75 54 50 12 38 5 20
93 70 63 95 96 61 53 35 25 60 64 42 46
68 20 61 53 61 28 86 16 51 32 39 19 28
82 31 99 2 30 7 23 53 12 55 60 75 6
8 9 42 45 80 42 77 42 45 13 57 62 66
73 21 94 36 10 100 29 46 69
20 17 80 96 14 43 4 69 5 29 59 18 61
22 82 35 36 8 7 22 15 83 27 33 27 7
7 64 83 32 70 53 92 79 33 46 60 34 43
58 6 9 54 66 66 95 62 95 91 63 74 34
88 40 22 59 43 86 34 31 58 37 35 95 53
63 39 56 27 30 21 48 99 53 5 34 45 32
64 82 9 53 31 38 82 15 51 28 17 28 15
49 89 34 9 57 31 76 88 92
```

...

¹<https://developers.google.com/optimization>

Η πρώτη γραμμή περιέχει το πλήθος των εργασιών και των εργαζόμενων που είναι 100. Στη συνέχεια ακολουθούν 100 τιμές (που καταλαμβάνουν 8 γραμμές κειμένου στο συγκεκριμένο αρχείο) που αντιστοιχούν στο κόστος ανάθεσης της εργασίας 0 σε καθένα από τους εργαζόμενους (π.χ. αν η εργασία 0 ανατεθεί στον εργαζόμενο 0 το κόστος θα είναι 52, στον εργαζόμενο 1 θα είναι 89 ... και στον εργαζόμενο 99 θα είναι 69). Ομοίως, για την εργασία 1, αν ανατεθεί στον εργαζόμενο 0 το κόστος θα είναι 20, στο εργαζόμενο 1 θα είναι 17 ... και στον εργαζόμενο 99 θα είναι 92.

Για κάθε πρόβλημα η λύση που εντοπίζει το πρόγραμμα θα πρέπει να καταγράφεται σε ένα αρχείο κειμένου, έτσι ώστε να μπορεί να φορτωθεί στη συνέχεια και να ελεγχθεί η εγκυρότητα και το κόστος της. Το αρχείο της λύσης θα περιέχει στην πρώτη γραμμή του το κόστος της λύσης και σε κάθε επόμενη γραμμή ξεκινώντας από την πρώτη εργασία και μέχρι την τελευταία εργασία, την τριάδα: αριθμός εργασίας, αριθμός εργαζόμενου στον οποίο έχει ανατεθεί η εργασία και κόστος ανάθεσης (οι τιμές να είναι μεταξύ τους χωρισμένες με κόμματα).

1.2 Ερώτημα 2 (30%): Σύγκριση επίλυσης μαθηματικής μοντελοποίησης με επίλυση μέσω εξειδικευμένου αλγορίθμου για το πρόβλημα ανάθεσης

Συγκρίνατε την επίλυση με μαθηματική μοντελοποίηση με την επίλυση του προβλήματος ανάθεσης με τον Ουγγρικό αλγόριθμο (Hungarian Algorithm [Kuh55]) του `networkx`² (ή άλλης βιβλιοθήκης) για τα στιγμιότυπα προβλημάτων του προηγούμενου ερωτήματος. Η σύγκριση να αφορά χρόνο επίλυσης και κόστος λύσης και να περιλαμβάνει τη δημιουργία γραφημάτων σύγκρισης που θα κατασκευάσετε με το `matplotlib`³ (ή με άλλη βιβλιοθήκη ή με λογισμικό όπως το Excel). Συμπεριλάβετε τον κώδικά σας σε ένα αρχείο με όνομα `erotima2.py`.

1.3 Ερώτημα 3 (20%): Παραλλαγή προβλήματος ανάθεσης

Για κάθε πρόβλημα θεωρείστε ότι για κάθε 5 εργασίες με διαδοχικούς αναγνωριστικούς αριθμούς θα πρέπει τουλάχιστον 2 από αυτές να ανατεθούν σε κάποιους από τους εργαζόμενους με το ίδιο εύρος αναγνωριστικών αριθμών. Για παράδειγμα θα πρέπει 2 τουλάχιστον από τις εργασίες 0, 1, 2, 3, 4 να ανατεθούν σε 2 από τους εργαζόμενους 0, 1, 2, 3, 4 (π.χ. η εργασία 0 στον εργαζόμενο 3 και η εργασία 2 στον εργαζόμενο 1). Ομοίως, θα πρέπει 2 από τις εργασίες 5, 6, 7, 8, 9 να ανατεθούν στους εργαζόμενους 5, 6, 7, 8, 9 (π.χ. η εργασία 6 στον εργαζόμενο 6 και η εργασία 8 στον εργαζόμενο 5), ενώ το ίδιο μοτίβο θα πρέπει να επαναλαμβάνεται για το σύνολο εργασιών και εργαζόμενων.

Δημιουργήστε ένα μοντέλο Ακέραιου Προγραμματισμού που να επιλύει το νέο πρόβλημα και γράψτε πρόγραμμα (`erotima3.py`) που να εντοπίζει λύσεις σε όλα τα στιγμιότυπα προβλημάτων του ερωτήματος 1.

2 Παραδοτέα εργασίας

Τα παραδοτέα της εργασίας είναι τα ακόλουθα:

1. Κώδικας υλοποίησης λύσεων μαζί με οδηγίες εγκατάστασης και εκτέλεσης.
2. Σύντομη τεχνική αναφορά.

3 Παρατηρήσεις

- Η υλοποίηση του κώδικα συνίσταται να γίνει σε Python, εναλλακτικά μπορεί να γίνει σε C++ ή σε Java.
- Η εργασία είναι ατομική και η υποβολή της γίνεται στο <https://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=4204> μέχρι τις 25/04/2025.

Αναφορές

[FP08] Christodoulos A Floudas and Panos M Pardalos. *Encyclopedia of optimization - Assignment and Matching: 106-108*. Springer Science & Business Media, 2008.

[Kuh55] Harold W Kuhn. The Hungarian method for the assignment problem. *Naval research logistics quarterly*, 2(1-2):83–97, 1955.

²https://networkx.org/documentation/stable/reference/algorithms/generated/networkx.algorithms.bipartite.matching.minimum_weight_full_matching.html

³<https://matplotlib.org/>