Линейные системы дифференциальных уравнений

$X' = A(t)X + F(t)$, $a < t < b$ (1) неоднородное уравнение

$X' = A(t)X$ (2) однородное уравнение

$X(t_0) = X_0$ (3) начальное условие

Обозначения:
Матрица $A(t) = \{a_{ij}(t), i,j = 1,2,\dots,n\}$,
векторы-столбцы $F(t) = \{f_j(t), j = 1,2,\dots,n\}$, $X(t) = \{x_j(t), j = 1,2,\dots,n\}$

Линейное уравнение n-го порядка можно рассматривать как частный случай системы n уравнений первого порядка.

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$$

Действительно, введем новые неизвестные функции :
$y_1(t) = x(t),\ y_2(t) = x'(t),\ y_3(t) = x''(t),\ \dots\ ,\ y_n(t) = x^{(n-1)}(t)$
Тогда

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots\dots \\ y_n' = -a_{n-1}(t)y_n - \cdots - a_1(t)y_2 - a_0(t)y_1 \end{cases}$$

Введем вектор
Y=$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$. Тогда система принимает вид $Y' = A(t)Y$, где матрица

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0\ \ 1\ \ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 1\ \dots\ 0 \\ \dots\dots\dots.. \\ -a_0(t) - a_1(t) \dots - a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Все результаты, полученные для системы n уравнений, верны и для соответствующего уравнения n-го порядка.
В дальнейшем термин “дифференциальное уравнение” будет применяться и к системе уравнений и к одному уравнению.

О нормах

В дальнейшем нам понадобятся следующие понятия – **нормы вектора и оператора** .
Существуют разные определения нормы вектора n-мерном векторном пространстве, но все они эквивалентны друг другу. Это означает следующее. Пусть $|X|_1$ и $|X|_2$ две различные векторные нормы. Тогда для любой последовательности $X_m, m = 1,2,\dots$, выполняется

$$\lim_{m\to+\infty}|X_m - X_0|_1 = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{m\to+\infty}|X_m - X_0|_2 = 0$$, т.е.

сходимость по одной норме равносильна сходимости по любой другой норме.
Далее мы будем пользоваться в основном следующими определениями норм.
Норма вектора $|X| = \max_i |x_i|$, (*)
Норма оператора $\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$. (**)
Обе нормы легко вычисляются даже без калькулятора. В общем случае норма оператора определяется формулой

$$\|A\| = \max \frac{|AX|}{|X|} \qquad (4)$$

или равносильной $\|A\| = \max_{|X|=1}|AX|$

Если вектор и оператор зависят от t , то их нормы тоже являются функциями от t.

Из (4) следует $|A(t)X(t)| \le \|A(t)\| \cdot |X(t)|$.

Обозначим наибольшие значения этих норм на $[a; b]$

$$M = \max_{a\le t\le b}|X(t)|, \quad C = \max_{a\le t\le b}\|A(t)\| \qquad (5)$$

Непрерывность векторных и матричных функций определяется так же, как и для скалярных функций. Она следует из непрерывности координат.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Если $A(t), F(t)$ - непрерывны на $[a;b]$, то решение задачи Коши существует и единственно.

Доказательство.

Задача (1)-(3) равносильна интегральному уравнению (почему?).

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau)X(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} F(\tau)d\tau$$

Запишем это уравнение в виде

$$X(t) = BX(t) + G(t), \qquad (6)$$

где $BX(t) = \int_{t_0}^{t} A(\tau)X(\tau)d\tau, \quad G(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau)d\tau$

Предположим, что решение существует, докажем его единственность.

Из (6) получаем

$$X = B(BX + G) + G = B^2X + BG + G$$

$$X = B(B^2X + BG + G) + G = B^3X + B^2G + BG + G$$

$$X(t) = \sum_{k=0}^{n} B^kG + B^{n+1}X . \qquad (7)$$

Докажем, что $\left|B^{n+1}X\right| \to 0, \quad n \to +\infty.$

$$BX(t) = \int_{t_0}^{t} A(\tau)X(\tau)d\tau \Rightarrow \left|BX(t)\right| \le \int_{t_0}^{t} \left|A(\tau)X(\tau)\right| d\tau \le \int_{t_0}^{t} \left\|A(\tau)\right\| \cdot \left|X(\tau)\right| d\tau \le C\int_{t_0}^{t} \left|X(\tau)\right| d\tau .$$

$\left|BX(t)\right| \le CM(t - t_0)$. Отсюда

$$\max_{t_0\le\tau\le t}|BX(\tau)| \le \max_{t_0\le\tau\le t}|CM(\tau - \tau_0))| \le CM(t - t_0) \qquad (8)$$

$$B^2X(t) = B\big(BX(t)\big) = \int_{t_0}^{t} A(\tau)(BX(\tau))d\tau \;\Rightarrow |B^2X(t)| \le \int_{t_0}^{t} |A(\tau)(BX(\tau))|d\tau$$

Далее $|B^2X(t)| \le \int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\| |BX(\tau)| d\tau$

$$|B^2X(t)| \le C^2M\int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)d\tau \le C^2M(t - t_0)^2/2$$

Аналогично, $\left|B^nX(t)\right| \le C^nM(t - t_0)^n / n! \to 0, \quad n \to +\infty.$

Из уравнения (7) при $n \to +\infty$ получаем представление решения в виде суммы равномерно сходящегося ряда.

$$X(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} B^i G(t)$$

Отсюда следует единственность .

То, что это выражение действительно решение, проверяется непосредственной подстановкой в (6). Обозначим его $Y(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} B^i G(t)$ и подставим $Y(t)$ вместо $X(t)$ в правую часть уравнения (6)

$BY + G = B\left(\sum_{i=0}^{+\infty} B^i G(t)\right) + G(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} B^{i+1} G(t) = Y$ что и требовалось доказать.

Замечания.

1) Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейной и нелинейной систем существенно отличаются друг от друга. Сравните их и сформулируйте, в чем отличие.

2) В доказанной теореме матрица $A(t)$ предполагалась непрерывной. Если же $A(t)$ имеет точки разрыва, то в таких точках уравнение (1) не выполняется. Изменим постановку задачи так, чтобы задача сохранила смысл и для системы с разрывными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение (6). Его можно рассматривать как обобщение задачи (1)-(3), а (1)-(3) как частный случай задачи (6). Уравнение (6) не теряет смысла и при разрывной матрице $A(t)$. Единственное условие – она должна быть **абсолютно интегрируемой**. Это означает, что должны существовать интегралы $\int_a^b \left|a_{i,j}(t)\right| dt, \;\; i,j = 1,2,\ldots,n$. Тогда решение $X(t)$ уравнения (6) уже не обязательно непрерывно дифференцируемо, но теорема существования и единственности решения сохраняется.

3) Процесс, примененный в доказательстве теоремы, подсказывает метод численного решения задачи. Строится последовательность функций $X_m = BX_{m-1} + G, \;\; m = 1,2,3,\ldots,$ и доказывается ее сходимость.

Решения однородной системы

Теорема о пространстве решений.

Множество P всех решений линейной однородной системы (2) является n-мерным линейным пространством.

Доказательство.

а) Линейность.

Пусть $X_1(t), X_2(t)$ - решения. Тогда функция $L(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$ тоже решение.

$$L'(t) = c_1 X_1'(t) + c_2 X_2'(t) = c_1 A(t) X_1(t) + c_2 A(t) X_2(t) = A(t)(c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)) = A(t)L$$

б) Размерность равна n.

Вектор-функции $X_i(t), i = 1,2,\ldots,n$, называются линейно независимыми, если при всех $t \epsilon [a;b]$ их значения образуют систему линейно независимых векторов.

Пусть $Y_i -$ n-мерные векторы линейно независимые векторы, $X(t, Y_i) -$ решения задачи Коши, удовлетворяющие начальным условиям $X(t_0) = Y_i, i = 1,\ldots,n$. Докажем, что векторы $X(t, Y_i)$ линейно независимы.

Пусть не так. Тогда при некотором $t = t_1$ линейная комбинация векторов $Z(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i X(t, Y_i)$ равна нулю, и при этом не все коэффициенты c_i равны 0 . Это означает, что $Z(t)$ – решение задачи Коши, удовлетворяющее начальному условию $Z(t_1) = 0$. Но этому начальному условию удовлетворяет нулевое решение, а в силу доказанной в пункте а) единственности другого решения нет. Тогда $Z(t_0) = 0 \;\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i X(t_0, Y_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i = 0$, а это противоречит линейной независимости векторов Y_i .

Структура общего решения однородной системы

<u>Определение</u>.
Матрица $\Phi(t)=\left\{\varphi_{ij}, i, j=1,2,...,n\right\}$ наз. **фундаментальной матрицей** однородной системы (2) , если все ее столбцы являются линейно независимыми решениями этой системы.

Пусть $\Phi_1(t),\Phi_2(t),...,\Phi_n(t)$ - столбцы фундаментальной матрицы.
Вообще верна формула $\Phi'(t)=A(t)\Phi(t)$. (почему?)
Пусть столбцы матрицы удовлетворяют начальным условиям $\Phi_i(t_0)=E_i \quad i=1,2,...,n$, где E_i – i-й столбец единичной матрицы. В матричной записи это выглядит так

$$\Phi(t_0)=E \qquad (9)$$

Пусть $\Phi(t)$ - любая фундаментальная матрица, а C — вектор-столбец произвольных постоянных.

Теорема об общем решении однородной системы .

Общее однородной системы решение имеет вид

$$\Phi(t)C \qquad (10)$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $X(t)$ – решение задачи (2)-(3) . Ищем его в виде

$$X(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k\Phi_k(t)=\Phi(t)C .$$

При $t=t_0$ имеем $X_0=\Phi(t_0)C \Rightarrow C=\Phi^{-1}(t_0)X_0$.
Итак, всякое решение однородного уравнения можно представить в виде (10), т.е. выражение $\Phi(t)C$ является общим решением однородного уравнения. Теорема доказана.

Наиболее удобная форма общего решения получается, если $\Phi(t)$ удовлетворяет начальному условию (9). Тогда

$$X(t_0)=\Phi(t_0)C=EC=X_0 \Rightarrow C=X_0$$

Значит, решение однородной системы (2) с начальным условием (3) представимо в виде

$$X(t,X_0)=\Phi(t)X_0 \qquad (11)$$

Структура общего решения неоднородной системы

Теорема об общем решении неоднородной системы.
Общее решение неоднородной системы есть сумма общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы.
<u>Доказательство.</u>
Пусть U - некоторое частное решение, а V - любое другое решение уравнения (1) .
Тогда функция $X=V-U$ - решение уравнения (2). Значит, $V-U=\Phi(t)C \Rightarrow V=U+\Phi(t)C$.
$\varnothing$

Метод вариации произвольных постоянных

Метод позволяет найти частное решение неоднородного уравнения.
Пусть теперь $C(t)$ – вектор-столбец, координаты которого – неизвестные функции, а

$\Phi(t)$ – фундаментальная матрица однородного уравнения. Ищем решение $U(t)$ неоднородного уравнения в виде

$$U(t)=\Phi(t)C(t)$$

и подставим в уравнение (1). Отсюда, учитывая, что $(\Phi C)'=\Phi' C+\Phi C'=A\Phi C+\Phi C'$, имеем

$$A\Phi C+\Phi C'=A\Phi C+F \Leftrightarrow \Phi C'=F \ .$$

Так как $\Phi(t)$ невырожденная матрица, то $C'=\Phi^{-1}F \Rightarrow C(t)=C(0)+\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau$.

Метод полезен с теоретической точки зрения, но практически неудобен, так как требует двух громоздких операций – обращения матрицы в символьной форме и затем интегрирования.

Пример.

$$\begin{cases} x_1'=4x_1+3x_2+t \\ x_2'=-6x_1-5x_2+e^{3t} \end{cases}$$

Ищем $Y(t)=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}e^{\lambda t} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_1=-2; \lambda_2=1$

$\lambda=-2$

$6c_1+3c_2=0 \Rightarrow c_2=-2c_1 \Rightarrow Y_1(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-2t}$

$\lambda=1$

$3c_1+3c_2=0 \Rightarrow c_2=-c_1 \Rightarrow Y_2(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t}$

Общее решение однородного уравнения $c_1Y_1(t)+c_2Y_2(t)=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-2t}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t}$

$$\begin{cases} x_1(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{t} \\ x_2(t)=-2c_1e^{-2t}-c_2e^{t} \end{cases}$$

Фундаментальная матрица $\Phi(t)=\begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{t} \\ -2e^{-2t} & -e^{t} \end{pmatrix}$.

$$U'(t)=\Phi^{-1}(t)F(t)=\begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{t} \\ -2e^{-2t} & -e^{t} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} t \\ e^{3t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -e^{2t} & -e^{2t} \\ 2e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} u_1'(t)=-te^{2t}-e^{t} \\ u_2'(t)=2te^{-t}+e^{2t} \end{cases}$ и т.д.