Продолжение линейного функционала

алгоритм решения в простейшей ситуации

теорема Хана-Банаха утверждает, что линейный непрерывный функционал, заданный на подпространстве банахова пространства, можно продолжить на все пространство с сохранением нормы.

Эта теорема является одни из самых сильных результатов функционального анализа. но область ее применения не выходит за рамки математики, поскольку ее доказательство не дает никакого алгоритма продолжения

Однако, в гильбертовых пространствах со счетным базисом нетрудно описать алгоритм, который в конечномерном пространстве всегда можно довести до конца.

Чтобы показать нетривиальность теоремы, я предлагаю вам разобраться в решении задачи о продолжении функционал с трехмерного подпространства в R^4 на все R^4

Ниже будет описан план решения и в отдельном файле представлен числовой материал, иллюстрирующий решение конкретного примера

Вам надо научиться объяснять, почему приведенные вычисления дают решение поставленной задачи

План решения

В основе конструкции лежит несколько свойств линейных функционалов

(1) если $kerf$ – ядро линейного функционала и x_0 – любой элемент, не принадлежащий ядру, то всякий элемент пространства можно представить в виде

$x = kx_0 + y, \ y \in kerf$

(2)Теорема Рисса-Фишера позволяет любой функционал в гильбертовом пространстве отождествить с некоторым элементом этом пространстве

$f : H \to R, f(x) = (f, x)$

то есть функционал можно реализовать как скалярное произведение

(3)Вычислить норму функционала в гильбертовом пространстве, можно построив в нем базис «подстроенный» под функционал

это ортогональный нормированный базис $e_k, \ k = 1, 2, \dots, n$

такой, что $(f, e_1) \neq 0, \ \ (f, e_k) = 0, \ k > 1$

тогда $||f|| = \max(|(f, x)| : ||x|| = 1)$

$||f|| = \max(|(f, x_1e_1 + \cdots + x_ne_n))| : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1)$

$||f|| = \max(|x_1(f, e_1))| : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1)$

видно, что максимум достигается на $x = (1, 0, \ldots, 0)$, $||f|| = |(f, e_1|$

Постановка задачи

K– подпространство размерности три в R^4, оно задано вектором нормали $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3, k_4)$

$K = \{x \in R^4 : (k, x) = 0\}$

функционал g задан на пространстве K формулой $g(x) = g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3 + g_4x_4$, здесь g– фиксированный вектор в R^4

нужно продолжить функционал на R^4 сохранением нормы
то есть найти $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ такой, что

$1) f(y) = g(y), \forall y \in K$

$2) ||g|| = \{\max |g(y)| : y \in K\} = ||f|| = \{\max |f(x)| : x \in R^4\}$

функционал g задан так, что его можно применить к любому элементу из R^4, но это не решает задачу, поскольку норма его почти всегда возрастет

чтобы убедится в этом, проведем работу в несколько этапов

первый этапы – вычисление нормы g как функционала на R^4

второй этапы – вычисление нормы g как функционала на K

третий этап – продолжение функционала

первые две задачи решаются по схеме описанной выше –путем построения базиса, «подстроенного» под функционал

продолжение функционала оказывается простым следствием конструкции второго этапа

вычисление нормы g как функционала на R^4

строим базис под функционал, как это описано выше

первое приближение базиса
g и три вектора ему ортогональных (просто базис без ортогональности и нормировки)

проводим ортогонализацию базиса по Граму–Шмидту (сохраняя вектор g)

нормализуем элементы базиса

вычисляем норму функционала

$||g|| = (g, e_1),\ e_1 = g/\delta,\ \delta$-евклидова норма g

вычисление нормы g как функционала на K

строим черновой базис под функционал $a,\ b,\ c,\ d$

такой, что выполнены соотношения

$(a, k) = 0,\ (a, g) = 1 -$ в подпространстве, но вне ядра

$(b, k) = 0,\ (b, g) = 0-$ в подпространстве и в ядре

$(c, k) = 0,\ (c, g) = 0-$ в подпространстве и в ядре

$(d, a) = 0,\ (d, b) = 0,\ (d, c) = 0 -$ вне подпространства

$a,\ b,\ c$ ищутся как решения систем из двух уравнений, (две координаты заранее полагаются единицам)

вектора $k,\ g$ подобраны так, чтобы матрицы коэффициентов не вырождались

вектор d определяется своими соотношениями с точностью до постоянного множителя

черновой базис надо переделать в ортогональный и нормированный

!! СОХРАНЯЯ при этом соотношения для $a,\ b,,\ d$

используя приведенный алгоритм, вычисляем норму g в K
$||g|| = |(g, a)|$!! она всегда меньше нормы в R^4

продолжение функционала

достаточно определить функционал на базисе
$f(a) = g(a),\ f(b) = f(c) = f(d) = 0$

проверьте, что этот функционал решает задачу продолжения с сохранением нормы.