ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Определение Вещественная функция f, заданная на отрезке $[0,1]$, называется *измеримой*, если для любого вещественного числа t измеримо множество $E_t = \{x \in [0,1] : f(x) < t\}$.

$$\{x \in [0,1] : f(x) \leqslant t\}, \ \{x \in [0,1] : f(x) \geqslant t\}.$$

Если функции измеримы, то измеримы их сумма, произведение, частное (при условии, что знаменатель не обращается в ноль) и суперпозиция.

Если функции f_n измеримы и для каждого $x \in [0,1]$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то предельная функция f тоже измерима.

$$\{x : f(x) < t\} = \bigcup_k \left(\bigcup_n \left(\bigcap_{j>n} \left\{ x : f_j(x) < t - \frac{1}{k} \right\} \right) \right)$$

Определение Две измеримые функции f и g называются *эквивалентными*, если множество, где они не равны, имеет меру ноль:

$$m(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Определение . Говорят, что функции f_n *сходятся* к функции f *почти всюду*, если существует множество A нулевой меры, такое что для любой точки x вне его ($x \in [0,1] \setminus A$) имеет место сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Предложение . Если функции f_n измеримы и п. в. существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то предельная функция f тоже измерима.

Это утверждение является простым следствием того, что на множестве меры ноль измерима любая функция.

Как и интеграл Римана, интеграл Лебега вначале определяется на простых объектах.

Определение Функция f называется *простой*, если она постоянна на измеримых множествах A_n, которые попарно не пересекаются и в объединении дают весь отрезок $[0,1]$: $f(x) = \sum\limits_n c_n \chi_n(x)$, где $c_n \in \mathbb{R}$, $\chi_n(x) = 1$ при $x \in A_n$, $\chi_n(x) = 0$ при $x \notin A_n$.

Легко проверить, что всякая простая функция измерима.

Предложени Функция f измерима тогда и только тогда, когда существует последовательность простых функций f_n таких, что

$$\sup\{|f(x) - f_n(x)| : x \in [0,1]\} = 0.$$

Доказательство. Достаточно положить $f_n(x) = \frac{k}{n}$, когда $\frac{k}{n} \leqslant \leqslant f(x) < \frac{k+1}{n}$. ■

Определение *Интегралом Лебега* $\int\limits_0^1 f(x)dm$ от простой функции $f(x) = \sum\limits_n c_n\chi_n(x)$ по отрезку $[0,1]$ называется $\sum\limits_n c_n m(A_n)$, если ряд сходится.

$$f_+(x) = f(x), \text{ когда } f(x) \geqslant 0, \ f_+(x) = 0, \text{ когда } f(x) < 0;$$
$$f_-(x) = -f(x), \text{ когда } f(x) < 0, \ f_-(x) = 0, \text{ когда } f(x) \geqslant 0.$$

Чтобы избежать появления условной сходимости, вводится еще одно понятие.

Определение 7.6. Простая функция $\sum\limits_n c_n\chi_n(x)$ называется *суммируемой*, если

$$\sum_n |c_n|\, m(A_n) < \infty.$$

ПРИМЕР не суммируемые функции $f(x) = (-1)^n n, \ x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$

Определение Функция f называется *интегрируемой по Лебегу*, если существуют последовательность измеримых простых функций f_n, таких что $\lim\limits_n f_n(x) = f(x)$, и предел $\lim\limits_n \int\limits_0^1 f_n(x)dm = I$; тогда число I называют *интегралом Лебега от функции* f и обозначают $\int\limits_0^1 f(x)dm$.

Интеграл по любому измеримому множеству A определяется равенством

$$\int\limits_A f(x)dm = \int\limits_0^1 f(x)\chi_A(x)dm,$$

где $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ при $x \notin A$.

свойства интеграла Лебега,

1) Интеграл Лебега линеен, счетно аддитивен, инвариантен по сдвигу.

2) Функция и ее модуль интегрируемы или нет одновременно.

3) На множестве меры ноль интегрируема любая функция и интеграл всегда равен нулю.

4) Если измеримые функции эквивалентны (иначе говоря, *почти всюду совпадают*), то интегралы от них по любому множеству равны.

Определение Пространство $L^p(a,b)$ состоит из классов эквивалентных функций. Норма определяется как $\left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dm\right)^{1/p}$; здесь f – любой представитель рассматриваемого класса (свойство 4 предложения 7.5 гарантирует, что определение не зависит от выбора функции f).

‘неравенство Чебышева’

Если f – положи-
тельная измеримая функция, A – измеримое множество, c – положительная постоянная, то

$$m(\{x : f(x) > c,\ x \in A\}) \leqslant \frac{1}{c}\int\limits_A f(x)dm.$$

Доказательство. Обозначим через $B = \{x : f(x) > c,\ x \in A\}$. Нужная оценка получается из аддитивности и монотонности интеграла

$$\int\limits_A f(x)dm = \int\limits_B f(x)dm + \int\limits_{A\setminus B} f(x)dm \geqslant C \geqslant c \cdot m(B). \blacksquare$$

абсолютная непрерывность меры Лебега

Если f – суммируемая функция, A – измеримое множество, то для любого положительного ε найдется $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого $B \subset A$ из условия $m(B) < \delta$ следует $\left|\int\limits_B f(x)dm\right| \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. Обозначим через A_n множество $\{x : n \leqslant |f(x)| < < n+1\}$. Свойства интеграла позволяют получить оценку

$$\left|\int\limits_A f(x)dm\right| \leqslant \int\limits_A |f(x)|dm = \sum_n \int\limits_{A_n} |f(x)|dm.$$

Из суммируемости функции следует существование такого числа N, что $\sum\limits_{n>N} \int\limits_{A_n} |f(x)|dm < \frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим $B_N = B \bigcap \left(\bigcup\limits_{n \leqslant N} A_n\right)$, $C_N = D \setminus B_N$.
Выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$, тогда для $m(B) < \delta$ будем иметь:

$$\left|\int\limits_B f(x)dm\right| \leqslant \int\limits_B |f(x)|dm = \int\limits_{B_n} |f(x)|dm + \int\limits_{C_n} |f(x)|dm \leqslant N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

Следствие. Если f – положительная измеримая функция, то формула

$$\mu(A) = \int\limits_A f(x)dm$$

задает на измеримых множествах счетно аддитивную меру, но не инвариантную по сдвигу

Замечание. Исторически первым обобщением интеграла Римана был *интеграл Стилтьеса*. Он определяется через возрастающую функцию g (для каждой функции свой интеграл) по формуле

$$\int\limits_0^1 f(x)dg(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{n}{N}\right)\left(g\left(\frac{n}{N}\right) - g\left(\frac{n-1}{N}\right)\right).$$

Теорема (Лебега). Если суммируемые функции f_n сходятся к функции f почти всюду и существует число M такое, что $\int\limits_0^1 f_n(x)dm \leqslant M$, то предельная функция f тоже суммируема.

Теорема (Фату). Если положительные суммируемые функции f_n сходятся к функции f почти всюду и существует положительная измеримая функция g такая, что $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, то предельная функция f тоже суммируема.

Теорема (Леви). Если суммируемые функции f_n сходятся к функции f почти всюду, существует число M такое, что при любом n $\int\limits_0^1 f_n(x)dm \leqslant M$, и выполнены неравенства $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, то предельная функция f тоже суммируема.