МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра АМ

ОТЧЕТ

по индивидуальному домашнему заданию №2

по дисциплине «Элементы функционального анализа»

Тема: Норма линейного оператора

Студент гр. 9383	___________________	Ноздрин В.Я.
Преподаватель	___________________	Коточигов А.М.

Санкт-Петербург

2022

Цель работы.

Вычислить норму линейного оператора матрицы

Выполнение работы.

Определение.

Нормой оператора A является $\sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \|A\|$

$A = \begin{bmatrix} \frac{25}{4} & \frac{9}{8} & \frac{3}{4} & \frac{25}{8} \\ \frac{23}{4} & \frac{55}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\ -2 & -1 & 10 & -1 \\ \frac{39}{4} & \frac{39}{8} & -\frac{51}{4} & \frac{55}{8} \end{bmatrix}$ — матрица линейного оператора A: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

Теорема.

Норма A в пространстве l_4^1 вычисляется как максимальная сумма в столбцах матрицы.

$$\|A\| = Sup\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Суммы равны соответственно 79/4, 95/8, -11/4 и 79/8. Откуда $\|A\| = 19.75$

Достигается на столбце $(25/4 \quad 23/4 \quad -2 \quad 39/4)$, на векторе (1,0,0,0)

Теорема.

Норма A в пространстве l_4^∞ вычисляется как максимальная сумма в строках матрицы.

$$l_4^\infty = \{(x_k) |\ max(x_k) = \|x\|\} \qquad \|A\| = Sup\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Суммы равны соответственно 45/4, 21/2, 6 и 35/4. Откуда $\|A\| = 11.25$

Достигается на строке $(25/4 \quad 9/8 \quad 3/4 \quad 25/8)$, на векторе (1,1,1,1)

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.34375 & 0.046875 & -0.28125 & -0.203125 \\ -0.25 & 0.125 & 0.1875 & 0.125 \\ 0.015625 & 0.0078125 & 0.109375 & 0.0078125 \\ -0.28125 & -0.140625 & 0.46875 & 0.359375 \end{bmatrix}$ — матрица обратного оператора.

Нормы в пространствах l_4^1 и l_4^∞ равны соответственно 0.484375 и 0.40625.

Достигаются на столбце $(-0.28125 \quad 0.1875 \quad 0.109375 \quad 0.46875)$ и строке $(-0.28125 \quad -0.140625 \quad 0.46875 \quad 0.359375)$.

Суммы по столбцам равны -0.171875, 0.0390625, 0.484375, 0.2890625.

Суммы по строкам равны -0.09375, 0.1875, 0.140625, 0.40625.

$\left\|A^{-1}\right\|_{l_4^1} = 0.484375 \quad \left\|A^{-1}\right\|_{l_\infty^1} = 0.40625$

Неравенство для оценки относительной погрешности.

$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$, для уравнения $Ax = b$

Число обусловленности оператора A определяется как $cond(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\|$

Для данного оператора A число обусловленности равно *19.75*0.484375*=9.56640625 в пространстве l_4^1

И *11.25*0.40625*=4.5703125 в пространстве l_4^∞

Рассмотрим транспонированную матрицу A^T

$$A = \begin{bmatrix} \frac{25}{4} & \frac{9}{8} & \frac{3}{4} & \frac{25}{8} \\ \frac{23}{4} & \frac{55}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\ -2 & -1 & 10 & -1 \\ \frac{39}{4} & \frac{39}{8} & -\frac{51}{4} & \frac{55}{8} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} \frac{25}{4} & \frac{23}{4} & -2 & \frac{39}{4} \\ \frac{9}{8} & \frac{55}{8} & -1 & \frac{39}{8} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 10 & -\frac{51}{4} \\ \frac{25}{8} & \frac{7}{8} & -1 & \frac{55}{8} \end{bmatrix} \quad G = A\cdot A^T = \begin{bmatrix} \frac{1621}{32} & \frac{1467}{32} & -\frac{37}{4} & \frac{2507}{32} \\ \frac{1467}{32} & \frac{2613}{32} & -\frac{107}{4} & \frac{3365}{32} \\ -\frac{37}{4} & -\frac{107}{4} & 106 & -\frac{635}{4} \\ \frac{2507}{32} & \frac{3365}{32} & -\frac{635}{4} & \frac{10517}{32} \end{bmatrix}$$

$detG = 1048576 > 0$

Собственные числа неотрицательны и равны

$\lambda_1 \approx 1.304 \quad \lambda_2 \approx 20.471 \quad \lambda_3 \approx 85.453 \quad \lambda_4 \approx 459.741$

Матрица G положительно определена.

Собственные вектора (образуют ортонормированный базис):

$$v_1 \approx \begin{pmatrix} -1.144 \\ -0.202 \\ 1.364 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 \approx \begin{pmatrix} 2.793 \\ -3.322 \\ 1.119 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 \approx \begin{pmatrix} -8.741 \\ -10.278 \\ -9.590 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 \approx \begin{pmatrix} 0.241 \\ 0.341 \\ -0.481 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем число обусловленности оператора A в пространстве l_4^2.

Вычислим норму $G = A\cdot A^T$ в l_4^2, как максимум из собственных чисел матрицы, то есть 459.741

Далее вычислим норму $A^{-1}\cdot(A^{-1})^T$ в l_4^2

$A^{-1}\cdot(A^{-1})^T$ = {

493/2048	-81/512	-109/4096	-631/2048
-81/512	33/256	19/1024	95/512
-109/4096	19/1024	101/8192	199/4096
-631/2048	95/512	199/4096	917/2048

}

Собственные числа равны

$\lambda_1 \approx 0.002 \quad \lambda_2 \approx 0.012 \quad \lambda_3 \approx 0.049 \quad \lambda_4 \approx 0.767$

Норма $A^{-1}\cdot(A^{-1})^T$ равна *0.767*

Число обусловленности равно $\sqrt{459.741}\cdot\sqrt{0.767} = 18.78$