Цель работы – изучение устойчивости однородного линейного уравнения с периодическими коэффициентами при $t \to +\infty$.

Дано уравнение

$x'' + a(p,t)x = 0,\ a(p,t) = p + b(t),\ b(t+T) = b(t),\ p -$ параметр.

Сводим уравнение к системе двух уравнений 1-го порядка

$u_1(t) = x(t),\ \ u_2(t) = x'(t).$

$$\begin{cases} u_1{}' = u_2 \\ u_2{}' = -a(p,t)u_1 \end{cases} \qquad (1)$$

Дальнейшие рассуждения применимы к любой линейной периодической системе, а не только к системе вида (1).

Порядок действий

1. Задаем массив значений параметра p. Например, $p = 0.1{:}\,0.05{:}\,5$. Для каждого значения p проделаем следующие действия (в теле цикла).
2. Вычисляем значение фундаментальной матрицы системы (1) при $t = T$ с помощью любой программы численного решения задачи Коши.

Для этого решаем две задачи Коши с начальными векторами $V_1 = \binom{1}{0}$ и $V_2 = \binom{0}{1}$ на отрезке $[0;T]$. Пусть вектор-функции $U(t,V_1),\ U(t,V_2)$ — решения этих задач. Они являются столбцами фундаментальной матрицы $\Phi(t)$, удовлетворяющей условию $\Phi(0) = E$. Основную матрицу C для $\Phi(t)$ получаем из формулы $C = \Phi(T)$. Столбцы матрицы C это векторы $U(T,V_1),\ U(T,V_2)$.
3. Вычисляем собственные числа матрицы C и ее спектральный радиус, т.е. $r(p) = \max(|\lambda_j|),\ j = 1,2.$

В результате имеем массив значений $r(p)$.
4. Вывод об устойчивости или неустойчивости делается в зависимости от значения $r(p)$.

Рекомендуется построить график этой зависимости (например, команда $plot(p,r)$) , из которого с достаточной точностью можно определить точку p_0 , которая разделяет зоны устойчивости и неустойчивости, в которых $r \le 1$ и $r > 1$. Более точно p_0 вычисляется методом половинного деления.

Матрицу C можно найти только приближенно, решая численно две задачи Коши.
В Matlab'e эти задачи решаются на отрезке $[0;T]$ командами

$$[\sim, u1] = ode45(@(t,u)\ f(t,u,p), [0\ T], [1\ 0]);$$
$$[\sim, u2] = ode45(@(t,u)\ f(t,u,p), [0\ T], [0\ 1]);$$

Здесь $f(t,u,p)$ — вектор-функция, задающая правые части уравнений (ее рекомендуется задавать в том же файле, где решается задача),
в нашей задаче $f(t,u,p) = \left[u(2);\ -\big(p + b(t)\big) * u(1)\right];$
[0 T] – отрезок, на котором ищется решение,
[1 0] и [0 1] - начальные векторы,
u1 и u2 – матрицы размера nx2, i-я строка которых содержит значения решения при t=(i -1)T/(n-1), i=1,2,…,n, n – число строк матриц (оно определяется внутри самой программы автоматически). Число строк матриц u1 и u2 иногда не одинаково, поэтому положим $n1 = size(u1,1),\ n2 = size(u2,1)$. Отсюда

$$C = \begin{pmatrix} u1(n1,1) & u2(n2,1) \\ u1(n1,2) & u2(n2,1) \end{pmatrix}.$$