Элементы вариационного исчисления

До сих пор рассматривались задачи оптимизации, *приводящие* к математическим моделям с *целевыми функциями одной или нескольких переменных*. Но далеко не всегда качество принятых решений можно охарактеризовать с помощью целевой функции конечного числа переменных, т.к. это решение во многих случаях состоит в выборе не числа или вектора значений управляемых переменных, а *функции*, определяющей, например, режим некоторого процесса.

Так, если с целью улучшения свойств материала необходимо провести его термическую обработку, то возникает *задача об определении* такой *зависимости температуры нагревания* "x" от времени "t", т.е. *функции* "$x(t)$", которая обеспечивает *оптимальный результат* (например, максимальное значение показателя прочности материала).

В задачах оптимизации, к рассмотрению которых мы переходим, *допустимое множество X состоит* не из точек конечномерного пространства R^n, а *из функций*, т.е. *элементов некоторого бесконечномерного функционального пространства*. А числовой критерий оптимизации $Y(x)$ в таких задачах, зависящий от выбранной функции $x(t)\in X$, называется *целевым функционалом*.

Т.о., в данном разделе рассматриваются задачи оптимизации, приводящие к математическим моделям вида:

$J(x) \to \min(\max)$ при $x\in X$,

где $J(x)$ – целевой функционал, а X – заданное множество функций.

В дальнейшем, если не оговорено особо, будем считать, что рассматриваем пространство вещественных скалярных функций x на интервале $[t_0, t_1]$ $\quad x:[t_0, t_1] \to R$.

Обозначим:

$c([t_0,t_1])$ – пространство непрерывных функций на $[t_0, t_1]$ с нормой $\|x(\cdot)\|_0 \overset{def}{=} \max\limits_{[t_0,t_1]}|x(t)|$.

$c^r([t_0,t_1])$ – пространство r-раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[t_0, t_1]$ с нормой $\|x(\cdot)\|_r \overset{def}{=} \max\left\{\|x(\cdot)\|_0, \|\dot{x}(\cdot)\|_0 \ldots, \|x^r(\cdot)\|_0\right\}$.

Выведем необходимые условия экстремумов для некоторых классов задач, традиционно рассматриваемых в классическом вариационном исчислении.

Задача Больца (или основная задача вариационного исчисления)

Задачей Больца называется следующая экстремальная задача без ограничений в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $c^1([t_0,t_1])$:

$$B(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt + f(x(t_0), x(t_1)) \to extr \qquad (*)$$

где $B(x(\cdot))$ – "*функционал*" Больца;

$F(t, x(t), \dot{x}(t))$ – функция трех переменных ("*интегрант*");

$f(x(t_0), x(t_1))$ – функция двух переменных ("*терминант*").

Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным $-\infty < t_0 < t_1 < +\infty$.

Определение. Функция $\hat{x}(\cdot) \in c^1([t_0, t_1])$ доставляет локальный минимум (максимум) задачи (*), если существует $\delta > 0$, такое, что для любой функции $x(\cdot) \in c^1([t_0, t_1])$, для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_1 < \delta$ выполняется неравенство:

$B(x(\cdot) \geq B(\hat{x}(\cdot))$ (локальный min) или

$B(x(\cdot) \leq B(\hat{x}(\cdot))$ (локальный max).

Определение. Экстремальные точки (функции) в вариационном исчислении называются *экстремалями*.

Введем обозначения: $F_x = \dfrac{\partial F}{\partial x}$; $F_{\dot x} = \dfrac{\partial F}{\partial \dot x}$; $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Теорема (необходимые условия экстремума).

Пусть функция $\hat{x}(\cdot) \in c^1\left(\left[t_0, t_1\right]\right)$ доставляет *локальный экстремум* в задаче Больца (*).

Пусть интегрант F непрерывен вместе со своими *частными производными* по x и $\dot{x}$, в некоторой окрестности множества $\left\{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \,\middle|\, t \in [t_0, t_1]\right\}$, а терминант f – непрерывно дифференцируем в окрестности точки $(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$. Тогда

$\hat{F}_{\dot x}(\cdot) \in c^1\left(\left[t_0, t_1\right]\right)$, где $\left(\hat{F}_{\dot x}(t) \overset{def}{=} F_{\dot x}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))\right)$

и справедливы следующие соотношения:

1) $-\dfrac{d}{dt}\hat{F}_{\dot x}(t) + \hat{F}_x(t) = 0$ – *уравнение Эйлера*.

2) $\left.\begin{aligned} \hat{F}_{\dot x}(t_0) &= \hat{f}_{x_0} \\ \hat{F}_{\dot x}(t_1) &= -\hat{f}_{x_1} \end{aligned}\right\}$ – *условия трансверсальности*, где $\left(\hat{f}_{x_i} \overset{def}{=} f_{x_i}(t_i, \hat{x}(t_i), \dot{\hat{x}}(t_i))\right)$

Пример.

$$B(x(\cdot)) = \int_0^1 \underbrace{(\dot{x}^2 - x)}_{F(t,x,\dot x)} dt + \underbrace{x^2(1)}_{f(x_0,x_1)} \to extr$$

Решение

Необходимые условия:

Уравнение Эйлера: $-\dfrac{d}{dt}F_{\dot x} + F_x = 0 \Leftrightarrow -2\ddot{x} - 1 = 0$;

Условие трансверсальности: $F_{\dot x}(0) = f_{x(0)}$; $F_{\dot x}(1) = -f_{x(1)} \Leftrightarrow 2\dot{x}(0) = 0;\ 2\dot{x}(1) = -2x(1)$;

Общее решение уравнения Эйлера: $\ddot{x} = -\dfrac{1}{2}$; $\dot{x} = -\dfrac{1}{2}t + c_1$; $x = -\dfrac{1}{4}t^2 + c_1 t + c_2$;

Ищем c_1 и c_2 : $\dot{x}(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$; $\dot{x}(1) = -x(1) \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} - c_2$; $\Rightarrow c_2 = \dfrac{3}{4}$;

Итак, $\hat{x}(\mathrm{t}) = -\dfrac{1}{4}t^2 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{3 - t^2}{4}$ – единственная допустимая экстремаль.

Поскольку теорема определяет необходимые, но не достаточные условия существования экстремума, то надо убедиться, что найденная экстремаль доставляет экстремум. Проверять это будем с помощью проверки выполнения неравенства в определении локальных минимумов (максимумов) в задаче(*).

Покажем, что найденная экстремаль доставляет абсолютный минимум в задаче.

Действительно, если $h(\cdot) \in c^1([t_0, t_1])$, то

$$B(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - B(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^1 2\dot{\hat{x}}\dot{h}dt + \int_0^1 \dot{h}^2 dt - \int_0^1 h dt + 2\hat{x}(1)h(1) + h^2(1)$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\hat{x}(t) = (3 - t^2)/4$, получим

$$B(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - B(\hat{x}(\cdot)) = 2\dot{\hat{x}}h\Big|_0^1 - \int_0^1 (2\ddot{\hat{x}} + 1)h dt + \int_0^1 \dot{h}^2 dt + 2\hat{x}(1)h(1) + h^2(1) = \int_0^1 \dot{h}^2 dt + h^2(1) \geq 0$$

Ответ: $\hat{x}(t) = (3 - t^2)/4 \in \mathrm{absmin}$.

Простейшая задача классического вариационного исчисления

Простейшей задачей классического вариационного исчисления называется следующая задача в $c^1([t_0, t_1])$:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to extr \ \ (\textit{функционал без терминанта})$$

$x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ – краевые условия на концах.

Функции $x \in c^1([t_0, t_1])$, удовлетворяющие краевым условиям, называются допустимыми.

Теорема (о необходимых условиях экстремума).

Пусть $\hat{x}(\cdot) \in c^1([t_0, t_1])$ доставляет локальный экстремум в простейшей задаче классического вариационного исчисления, а интегрант F непрерывен вместе со своими частными производными по x и $\dot{x}$ в некоторой окрестности множества $\left\{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \middle| t \in [t_0, t_1]\right\}$. Тогда $\hat{F}_{\dot{x}}(\cdot) \in c^1([t_0, t_1])$

и выполнено уравнение Эйлера $-\dfrac{d}{dt}\hat{F}_{\dot{x}}(t) + \hat{F}_x(t) = 0$

Замечания.

1. Набор условий для нахождения допустимой экстремали является полным. Уравнение Эйлера – дифференциальное уравнение второго порядка. Его *общее решение* содержит *две неизвестные константы*. Для определения этих констант имеется *два уравнения – условие на концах*.
2. Теорема сформирована для одномерного случая. Если $x(\cdot)=(x_1(\cdot),...,x_n(\cdot))$, то $F=F(t,x_1,...,x_n,\dot x_1,...,\dot x_n)$ – функция $(2n+1)$-переменных и необходимые условия в простейшей векторной задаче состоит из системы n-уравнений Эйлера и $2n$-условий на концах.

Частные случаи уравнения Эйлера:

Если интегрант $F=F(t,x,\dot x)$ не зависит явно от одной из переменных, то уравнение Эйлера сводится к более простым уравнениям:

- Если интегрант $F = F(t,x)$ – не зависит явно от $\dot x$, то

  $\hat F_x(t)=0$;
- Если интегрант $F = F(t,\dot x)$ – не зависит явно от x, то имеет место

  $\hat F_{\dot x}(t)=const$ (*интеграл импульса*);
- Если интегрант $F = F(t,\dot x)$ – не зависит явно от t, то имеет место

  $\dot{\hat x}\hat F_{\dot x}(t)-\hat F(t)=const$ (*интеграл энергии*).

Для доказательства последнего соотношения рассмотрим:

$$\frac{d}{dt}(\dot x F_{\dot x}-F)=\ddot x F_{\dot x}+\dot x\frac{d}{dt}F_{\dot x}-F_x\dot x-F_{\dot x}\ddot x=\dot x\left(\underbrace{\frac{d}{dt}F_{\dot x}-F_x}_{\substack{=0\\ \text{по уравнению}\\ \text{Эйлера}}}\right)=0\Rightarrow(\dot x F_{\dot x}-F)=const$$

Пример 1.

$$J(x(\cdot))=\int_0^1 \dot x^2 dt\to loc\min;$$

$$x(0)=0;\ x(1)=1$$

Интеграл импульса, не зависит явно от x

Решение

Уравнение Эйлера $\hat F_{\dot x}(t)=const \ \Leftrightarrow\ 2\dot x=const\ \Leftrightarrow\ x=c_1t+c_2$;

Из условий на концах: $c_2=0, c_1=1\Rightarrow\ \hat x=t$ – единственная допустимая экстремаль.

Покажем, что она доставляет глобальный минимум в задаче.

Пусть $h(\cdot)\in c^1([0,1])\Rightarrow\hat x(\cdot)+h(\cdot)$ – допустимая в задаче функция, и

$$J(\hat{x}(\cdot)+h(\cdot))-J(\hat{x}(\cdot))=\int_0^1(\dot{\hat{x}}+\dot{h})^2\,dt-\int_0^1\dot{\hat{x}}^2dt=2\int_0^1\dot{\hat{x}}\dot{h}dt+\int_0^1\dot{h}^2dt\underset{\dot{\hat{x}}\equiv 1}{=}2\int_0^1\dot{h}dt+\int_0^1\dot{h}^2dt=2h(1)-2h(0)+\int_0^1\dot{h}^2dt=\int_0^1\dot{h}^2dt\geq 0$$

В вычислениях использовались следующие из краевых условий соотношения.

$$\hat{x}(\cdot)+h(\cdot)\ -\text{допустимая}\Rightarrow\begin{array}{l}\hat{x}(0)+h(0)=0\quad \&\quad \hat{x}(0)=0\Rightarrow h(0)=0\\ \hat{x}(1)+h(1)=1\quad \&\quad \hat{x}(1)=1\Rightarrow h(1)=0\end{array}.$$

Пример 2.

$$Y(x(\cdot))=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(\dot{x}^2-x^2)dt\to\text{locmin};$$

$$x(0)=x(3\pi/2)=0$$

Решение

Уравнение Эйлера (в общем виде): $-2\ddot{x}-2x=0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{x}+x=0;$

Общее решение: $x(t)=c_1\sin(t)+c_2\cos(t)$;

Из условий на концах: $x(0)=c_2=0;\quad x\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-c_1=0$;

$\Rightarrow$ Единственная допустимая экстремаль $\hat{x}(t)=0$.

Покажем, что $\hat{x}$ не доставляет экстремума.

Рассмотрим последовательность функций:

$$\{x_n(t)\}=\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{2t}{3}\right\}$$

Очевидно, что $x_n(t)$ – допустимая функция и $x_n(\cdot)\to x(\cdot)\equiv 0$ на $c^1\left(\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]\right)$, но при этом:

$$\left[\begin{array}{l}2\cos^2\text{A} = 1 + \cos2\text{A}\\ 2\sin^2\text{A} = 1 - \cos2\text{A}\end{array}\right]$$

$$J(x_n(\cdot))=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left[\frac{1}{n^2}\cdot\frac{4}{9}\cos^2\left(\frac{2t}{3}\right)-\frac{1}{n^2}\sin^2\left(\frac{2t}{3}\right)\right]dt=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\cos^2\left(\frac{2t}{3}\right)dt-\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin^2\left(\frac{2t}{3}\right)dt=$$

$$\left[x_n(t)=\frac{1}{n}\sin\left(\frac{2t}{3}\right);\ \dot{x}_n(t)=\frac{1}{n}\cos\left(\frac{2t}{3}\right)\cdot\frac{2}{3};\ (\dot{x}_n(t))^2=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{4}{9}\cos^2\left(\frac{2t}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{4}{9n^2\cdot 2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(1+\cos\frac{4t}{3}\right)dt-\frac{1}{2n^2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(1-\cos\frac{4t}{3}\right)dt=\frac{2}{9n^2}\left[t\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}}+\sin\left(\frac{4t}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}}\right]-\frac{1}{2n^2}\left[t\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}}-\sin\left(\frac{4t}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{3\pi}{2}\cdot\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5\pi}{12n^2}<0=J(\hat{x}(\cdot))$$

$\Rightarrow$ уравнение Эйлера – необходимое, но не достаточное условие экстремума.

Изопериметрические задачи (ИЗ)

Изопериметрической задачей (с закрепленными концами) в классическом вариационном исчислении называется следующая задача в пространстве $c^1([t_0,t_1])$:

$$J_0(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}F_0(t,x(t),\dot{x}(t))dt\to extr;$$

$$J_j(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}F_j(t,x(t),\dot{x}(t))dt=\alpha_j,\ j=1,...,m$$ – *изопериметрические ограничения типа-равенства*;

$x(t_0)=x_0$; $x(t_1)=x_1$ – *закрепленные концы* (*краевые условия*).

Функции $F_j,\ j=1,...,m$ называются *интегрантами*.

Функции $x(\cdot)\in c^1([t_0,t_1])$, удовлетворяющие изопериметрическим ограничениям и условиям на концах, называются *допустимыми*.

Теорема (необходимые условия экстремума).

Пусть функция $\hat{x}(\cdot)$ доставляет локальный экстремум в изопериметрической задаче. При этом, пусть функции $F_j, F_{jx}, F_{j\dot{x}}\ (j=1,...,m)$ непрерывны в некоторой окрестности множества $\left\{(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))\,\middle|\,t\in[t_0,t_1]\right\}$ (*условия гладкости*).

Тогда найдутся множители Лагранжа $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_m$, не все равные нулю и такие, что для "лагранжиана" $L\overset{def}{=}\sum_{j=0}^{m}\lambda_jF_j(t,x,\dot{x})$, справедливо $\hat{L}_{\dot{x}}(\cdot)\in c^1([t_0,t_1])$,

и выполнено уравнение Эйлера $-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t)+\hat{L}_x(t)=0$.

Пример.

$$\int_0^1\dot{x}^2dt\to\text{locmin}$$

$\int_0^1 xdt=0$ – изопериметрическое условие.

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 1 \end{aligned}\right\}$$ – краевые условия (закрепленные концы).

Решение:

Лагранжиан: $L = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x$ $\qquad \begin{cases} L_{\dot{x}} = 2\lambda_0 \dot{x} \\ L_x = \lambda_1 \end{cases}$

Необходимое условие – условие Эйлера: $-\dfrac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Leftrightarrow -2\lambda_0 \ddot{x} + \lambda_1 = 0$.

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 = 0 \Rightarrow$ все множители Лагранжа – нули. В этом случае допустимых экстремалей нет.

Положим $\lambda_0 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \ddot{x} = \lambda_1 \Rightarrow$ общее решение: $x = c_1 t^2 + c_2 t + c_3$.

Неизвестные константы c_1, c_2, c_3 находятся из условий на концах и изопериметрических условий:

$x(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0$

$x(1) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$

$$\left.\int_0^1 x dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 (c_1 t^2 + c_2 t) dt = 0; \quad \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{2} = 0;\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_2 &= -2 \\ c_1 &= 3 \end{aligned}$$

В задаче имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = 3t^2 - 2t$.

Докажем с помощью непосредственной проверки, что функция $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче.

Возьмем функцию $h(\cdot) \in c^1([t_0, t_1])$, такую, что: $(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot))$ – допустимая.

Для этого надо взять функцию $h(\cdot)$, для которой $h(0) = h(1) = 0$ и $\int_0^1 h dt = 0$.

Тогда для функционала $J(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}^2 dt = 0$ имеем

$$J(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^1 (\dot{\hat{x}} + \dot{h})^2 dt - \int_0^1 \dot{\hat{x}}^2 dt = \int_0^1 2\dot{\hat{x}}\dot{h} dt + \int_0^1 \dot{h}^2 dt \geq 2\int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h} dt .$$

Интегрируя по частям с учетом условий на $h(\cdot)$, получим

$$J(\hat{x}(\cdot) + h(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) \geq 2\int_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h} dt = 2\int_0^1 \dot{\hat{x}} dh = 2\underbrace{\dot{\hat{x}} h\Big|_0^1}_{0} - 2\int_0^1 \underbrace{\ddot{\hat{x}}}_{6} h dt = -12\underbrace{\int_0^1 h dt}_{0} = 0, \text{ ч.т.д.}$$

Задачи со старшими производными
Уравнение Эйлера-Пуассона

Задачей со старшими производными (с закрепленными концами) в классическом вариационном исчислении называется следующая задача в пространстве $c^n([t_0, t_1])$:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t))dt \to \text{locmin}$$

$$\left.\begin{aligned} x^{(k)}(t_0) = x_0^k \\ x^{(k)}(t_1) = x_1^k \end{aligned}\right\} k = 0, 1, \dots, n-1 \text{ – краевые условия.}$$

Здесь *интегрант* $F : R^{n+2} \to R$ – функция (n + 2) переменных.

Функции $x(\cdot) \in c^n([t_0, t_1])$, *удовлетворяющие краевым условиям*, называются *допустимыми*.

Локальный минимум задачи определяется для допустимых функций по норме $\|\ \|_n$.

Теорема.
Пусть функция $\hat{x}(\cdot)$ доставляет локальный минимум в задаче со старшими производными. Пусть интегрант F удовлетворяет условию гладкости:

$$\hat{F}_{x^{(k)}}(\cdot) \in c^k([t_0, t_1]), k = 0, 1, \dots, n.$$

Тогда на экстремали $\hat{x}(\cdot)$ выполняется уравнение Эйлера-Пуассона:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k \hat{F}_{x^{(k)}}(t) = 0$$

Пример.

$$\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \to loc \min;$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0; \dot{x}(1) = 1$$

Решение

Интегрант: $F = \ddot{x}^2$. Необходимое условие –уравнение Эйлера-Пуассона:

$$\frac{d^2}{dt^2} F_{\ddot{x}} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} + F_x = 0 \iff 2\frac{d^2}{dt^2}\ddot{x} = 0 \Rightarrow x^{(4)}(t) = 0.$$

Общее решение: $x(t) = c_1 t^3 + c_2 t^2 + c_3 t + c_4$;

Неизвестные константы определяем из краевых условий:

$$x(0)=0 \Rightarrow c_4 = 0$$
$$\dot{x}(0)=0 \Rightarrow c_3 = 0$$
$$\left.\begin{array}{l} x(1)=0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \\ \dot{x}(1)=1 \Rightarrow 3c_1 + 2c_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x}(t) = t^3 - t^2$.

Покажем, что она доставляет абсолютный минимум в задаче.

Действительно, если $h(\cdot) \in c^2([0,1])$, то

$$J(\hat{x}(\cdot)+h(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^1 (\ddot{\hat{x}} + \ddot{h})^2\, dt - \int_0^1 \ddot{\hat{x}}^2 dt = 2\int_0^1 \ddot{\hat{x}}\ddot{h}\, dt + \int_0^1 \ddot{h}^2 dt\,.$$

Рассмотрим первое слагаемое

$$\int_0^1 \ddot{\hat{x}}\ddot{h}\,dt = \int_0^1 \ddot{\hat{x}}\,d\dot{h} = \ddot{\hat{x}}\dot{h}\Big|_0^1 - \int_0^1 \dddot{\hat{x}}\dot{h}\,dt = -\int_0^1 \dddot{\hat{x}}\,dh = -\dddot{\hat{x}}h\Big|_0^1 + \int_0^1 \hat{x}^{(4)} h\,dt = 0\,.$$

$$(h(\cdot)+\hat{x}(\cdot)) - \textit{допустимая} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h(0)+x(0)=0 \Rightarrow h(0)=0 \\ \dot{h}(0)+\dot{x}(0)=0 \Rightarrow \dot{h}(0)=0 \\ h(1)+x(1)=0 \Rightarrow h(1)=0 \\ \dot{h}(1)+\dot{x}(1)=1 \Rightarrow \dot{h}(1)=0 \end{array}\right\}$$

Итак,

$$J(\hat{x}(\cdot)+h(\cdot)) - J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^1 \ddot{h}^2 dt \ge 0\,,\ \textit{ч.т.д.}$$