Линейные функционалы

Свойства операторов во многом определяются размерностью пространств, в которых они действуют (чем меньше, тем лучше).

Определение

Линейным функционалом называется линейное отображение линейного пространства в множество вещественных или комплексных чисел.

Определение

$f : X \to R,\ ||f|| = \sup\{|f(x)| : ||x|| \leq 1\}$

Линейный функционал является частным случаем линейного оператора и если он действует в нормированном пространстве, то можно говорить о его норме, ограниченности и непрерывности.

Напомним, что для линейных операторов понятия ограниченности и непрерывности совпадают. Линейный функционал не обязательно ограничен, например, линейный функционал $\{x_n\} \to \{nx_n\}$ не ограничен ни в одном из пространств l^p.

Определение

Если X банахово пространство, то множество всех линейных непрерывных функционалов на X называется сопряженным пространством и обозначается X^*

Всюду далее будут рассматриваться только линейные непрерывные функционалы, заданные в банаховых пространствах.

Примеры

1) $(l^p)^* = l^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q},\ 1 < p < \infty$

2) $(l^1)^* = l^\infty$, но $(l^\infty)^* \neq l^1$

3) такая же ситуация и для пространств $L^p(a, b)$

4) пространство $(C[a, b])^*$ содержит в себе $L^1(a, b)$, но неравно ему

Из примеров видно, что $(l^2)^* = l^2$ оказывается это верно для любого гильбертова пространства

Теорема (Рисса-Фишера)

Если H гильбертово пространство, то существует взаимно однозначное непрерывное отображение $J : H \to H^*$ (каждый функционал можно записать как скалярное произведение с подходящим элементом). Причем J^2 является тождественным отображением.

Доказательство имеется в методичке

Важным свойством линейных функционалов, является то, что такой функционал с точностью до постоянного множителя определяется множеством своих нулей.

Определение

Пусть f – линейный функционал на банаховом пространстве X.
Ядром функционала называется множество $\ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}$.

Чтобы доказать вышеупомянутое свойство, надо описать структуру линейных пространств, вложенных одно в другое.

Предложение

Пусть Y – замкнутое подпространство линейного пространства X, тогда равносильны утверждения:

1) для любого $x_0 \in X \setminus Y$ справедливо равенство

$X = \{x = tx_0 + y : y \in Y,\ t \in \mathbb{R}\}$,

при этом пара $x_0,\ x$ однозначно определяет пару $t,\ y$.

2) если Z линейное пространство такое, что $Y \subset Z \subset X$, то $Z = Y$ или $Z = X$.

Доказательство имеется в методичке

Условие замкнутости здесь существенно. Пространство $C[a, b]$ содержит в себе пространство многочленов, но утверждение предложения для него неверно.

Определение

Замкнутое линейное пространство Y, содержащееся в банаховом пространстве X, называется **однородной гиперплоскостью**,

если не существует линейного пространства Z не равного X или Y такого, что $Y \subset Z \subset X$.

Добавление к термину эпитета «однородный» выделяет линейные пространства. В приложениях часто приходится использовать и «просто» гиперплоскости, то есть сдвиги однородных гиперплоскостей. Однородная гиперплоскость в $\mathbb{R}^2$ – это прямая, проходящая через 0, а гиперплоскость – это произвольная прямая.

Однородная гиперплоскость и линейный непрерывный функционал – это практически одно и то же. Трудность возникают только при доказательстве того, что замкнутость ядра гарантирует непрерывность функционала. Здесь необходимо перейти на другой – топологический язык описаний.

Топология – ветвь математики, имеющая дело с множествами, не имеющими ни линейной структуры, ни метрики, наделенными только системой окрестностей, заданных для каждой точки пространства.

Определение непрерывности отображения одного топологического пространства в звучит значительно проще классического :
прообраз любого открытого множества открыт.

Предложение

1) Если f – непрерывный функционал, то его ядро замкнуто.

2) Если Y – однородная гиперплоскость, то любой функционал f с ядром $\ker f = Y$ непрерывен.

Доказательство имеется в методичке

Следствие

Однородная гиперплоскость, являющаяся ядром функционала, определяет его с точностью до константы.

Важным и глубоким утверждением о линейных функционалов является теорема о продолжении линейного функционала.

Теорема Хана-Банаха

Если X -банахово пространство, Y – его замкнутое подпространство,

на Y задан линейный непрерывный функционал,

то его можно продолжит на пространство X с сохранением нормы

то есть: $Y \subset X,\ g \in Y^*$
тогда существует $f \in X^*,\ \forall y \in Y,\ f(y) = g(y),\ ||f|| = ||g||$

Теорема представляется очевидной, и это справедливо пока в банаховом пространстве есть счетный базис, но когда его нет (как например в $L^\infty(a, b)$) возникают большие технические сложности

Рассмотрим план доказательства на простом примере

$X = R^n,\ Y = \{(x_1, \ldots, x_n) : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0,\ b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0\}$

рассмотрим функционал $g \in Y^*$, определенном на базисе в Y, $p_1, \ldots, p_{n-2}$ таком, что $g(p_1) = 1,\ g(p_k) = 0,\ k > 1$

легко проверить, что $||g|| = \frac{1}{||p_1||}$

добавим к базису два элемента $p_{n-1},\ p_n$ ортогональных к p_1 и линейно независимых с $p_2, \ldots, p_{n-2}$

очевидно что это базис в X

определим функционал $f \in X^*$ значениями на базисе $p_k,\ k = 1, \ldots, n$

$f(p_k) = g(p_k),\ k = 1, 2, \ldots, n-2,\ f(p_{n-1}) = 0,\ f(p_n) = 0$

легко видеть, что $\forall y \in Y,\ f(y) = g(x),\ ||f|| = ||g||$

Задача. Реализовать пример в размерности четыре.

Геометрическая формулировка теоремы Хана-Банаха

Теорема об отделимости