$$X' = F(X), \quad F(0) = 0. \qquad (1)$$

Устойчиво ли положение равновесия?

Напоминание о формуле Тейлора.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2).$$

Если $f''(x)$ непрерывна в окрестности нуля, то формулу можно переписать так

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\theta x)x^2, \ \ |\theta| \leq 1$ *(2)*

Применим этот подход к вектор-функции $F(X)$. Имеем для координаты $f_i(X)$

$df_i(0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(0)x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(0)x_2 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(0)x_n = (\nabla f_i(0), X)$, а для вектора $F(X)$

$dF(0) = (\nabla F(0), X) = AX$, где $A\colon a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)$. Аналогично

$d^2 f_k(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_i x_j = (B_k X, X)$,

где

B_k – матрица с элементами $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(0), \ i, j = 1,2, \dots, n$.

Далее, учитывая, что $F(0) = 0$,

$$f_k(X) = df_k(0) + \frac{1}{2}d^2 f_k(0) + o(|X|^2), \quad k = 1,2, \dots, n\,. \qquad (3)$$

Здесь 2-е и 3-е слагаемые можно объединить аналогично формуле (2).

$$f_k(X) = df_k(0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(\theta X)x_i x_j$$

В итоге имеем

$$F(X) = AX + \frac{1}{2}R(X), \qquad (4)$$

где координаты вектора определяются формулой

$$r_k(X) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(\theta X)x_i x_j$$

Вторые производные ограничены в окрестности нуля, поэтому

$$|R(X)| = O(|X|^2) \leq \alpha |X|^2.$$

Рассмотрим также линейную систему, полученную из (1) описанным выше способом

$$X' = AX \qquad (5)$$

Переход от (1) к (5) называется **линеаризацией**.

Для линейной системы с постоянными коэффициентами вопрос об устойчивости был решен полностью. В следующей теореме указаны условия, при которых из асимптотической устойчивости линеаризованной системы следует асимптотическая устойчивость нулевого решения исходной системы.

Теорема Ляпунова (устойчивость по первому приближению).

а) Если для системы (5) все $Re\lambda_k < 0$, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

б) Если хотя бы одно $Re\lambda_i > 0$, то нулевое решение системы (1) неустойчиво (без док-ва).

Доказательство

Напоминание: для положительно определенной квадратичной формы $L(X)$ найдутся такие положительные числа μ, ν , что

$$\mu|X|^2 \le L(X) \le \nu|X|^2 \qquad (6)$$

Доказательство разобьем на два этапа.

А) *Построим сначала функцию Ляпунова для линеаризованной системы* (5).

Пусть $U(t,X)$- решение линеаризованой системы с начальным вектором X . При фиксированном X это вектор-функция от t. Кроме того, при каждом значении t функция $U(t,X)$ – линейная функция от X. Поэтому $|U(t,X)|^2$ – квадратичная форма (ее коэффициенты зависят от t), а следующая формула определяет квадратичную форму с постоянными коэффициентами .

$$L(X) = \int_0^{+\infty} |U(t,X)|^2 dt \qquad (7)$$

Интеграл сходится, так как $Re\,\lambda_k < 0$, и все координаты вектора $U(t,X)$ содержат $e^{\lambda_k t}$

Форма (7) положительно определенная. Действительно,

$L(X) = 0 \Longrightarrow U(t,X) \equiv 0 \Longrightarrow X = 0$

Обозначим $\dot{L}_5(X)$ производную $L(X)$ в силу системы (5) и докажем, что при некотором $\alpha > 0$ выполняется

$$\dot{L}_3(X) \le -\alpha L(X) \qquad (8)$$

Сначала отметим, что в силу автономности системы (5) (почему?)

$$U\big(\tau, U(t,X)\big) = U(\tau + t, X) \qquad (9)$$

Тогда

$L\big(U(t,X)\big) = \int_0^{+\infty} |U(\tau, U(t,X))|^2 d\tau = \int_0^{+\infty} |U(\tau + t, X)|^2 d\tau$.

После замены $\theta = \tau + t$ получаем

$$L\big(U(t,X)\big) = \int_t^{+\infty} |U(\theta,X)|^2 d\theta$$

$$\dot{L}_5(X) = \frac{d}{dt} L(U(t,X))|_{t=0} = -|U(0,X)|^2 = -|X|^2 \qquad (10)$$

Учитывая (6) , получим $\nu|X|^2 \ge L(X) \Longrightarrow -|X|^2 \le -\frac{1}{\nu} L(X)$.

Обозначив $\alpha = \frac{1}{\nu}$, получаем неравенство

$$\dot{L}_5(X) \le -\alpha L(X). \qquad (9)$$

Итак, мы доказали, что функция $L(X)$ является функцией Ляпунова для линеаризованной системы. Попутно еще раз доказана асимптотическая устойчивость линеаризованной системы (сам этот факт был очевиден еще до доказательства, почему?). Докажем, что $L(X)$ является функцией Ляпунова и для исходной системы (1). Обозначим производную $L(X)$ в силу системы (1) через $\dot{L}_1(X)$. Тогда

$$\dot{L}_1(X) = (\nabla L(X), F(X)) = \left(\nabla L(X), AX + \frac{1}{2} R(X)\right) = (\nabla L(X), AX) + \frac{1}{2}(\nabla L, R(X))$$

Итак,

$$\dot{L}_1(X) = \dot{L}_5(X) + \frac{1}{2}(\nabla L, R(X)) \qquad (10)$$

В малой окрестности точки 0 выполняются оценки

$$|\nabla L| = O(|X|), \qquad \big(\nabla L, R(X)\big) = O(|X|^3)$$

Из (9) и (10) получаем

$$\dot{L}_1(X) \le -\alpha L(X) + O(|X|^3) \qquad (11)$$

Можно выбрать такую малую окрестность точки 0, что $O(|X|^3) \le \varepsilon |X|^2,\ \varepsilon < \alpha$. Обозначим $\gamma = \alpha - \varepsilon$. Тогда из (11) следует

$$\dot{L}_1(X) \le -\gamma L(X)$$

По теореме 2 получаем асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1).

Замечания.

1)Если все собственные числа линеаризованной системы чисто мнимые, то на устойчивость точки равновесия нелинейной системы влияют следующие члены в разложении правой части системы (квадратичные, третьей степени и т.д.) около этой точки. Может оказаться, что линеаризованная система устойчива, а точка равновесия нелинейной системы неустойчива (см. файл Орбитальная устойчивость).

2) Не существует алгоритма, который позволил бы найти функцию Ляпунова для конкретной системы.

Пример**.**

Система, для которой линеаризация не помогает исследовать устойчивость, а с помощью функции Ляпунова выясняется устойчивость нулевого решения .

$$\begin{cases} x_1' = 2x_2 - {x_1}^3 \sin^2 t \\ x_2' = -3x_1 - {x_2}^5 \end{cases}$$

Линеаризованная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = 2x_2 \\ x_2' = -3x_1 \end{cases}$$

Собственные числа чисто мнимые, $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{6}$, линеаризованная система устойчива, но не асимптотически. К исходной системе доказанная теорема неприменима. Рассмотрим функцию $L(X) = 3{x_1}^2 + 2{x_2}^2$. Проверим, что это функция Ляпунова для данной системы. Найдем ее производную в силу системы

$\dot{L}(X) = (\nabla L, F) = 6x_1(2x_2 - {x_1}^3 \sin^2 t) + 4x_2(-3x_1 - {x_2}^5) = -6{x_1}^4 \sin^2 t - 4{x_2}^6 \le 0$.

Значит, нулевое решение устойчиво.