Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начального вектора

Пусть $B_r(X_0)$ — шар радиуса r с центром в X_0, т.е множество точек Y , удовлетворяющих неравенству
$$|Y - X_0| < r$$
Иначе говоря, это – r-окрестность точки X_0.
Пусть Ω — область в (n+1)-мерном пространстве переменных $t,\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, $\Omega = (a;b)\times D$, где D — область в R^n.
$F(t,X)$ и ее частные производные по переменным $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ непрерывна по всем переменным в области Ω .
Приведем без доказательства две теоремы.
Теорема 1. $\forall\, X_0 \epsilon D\ \ \exists\, \varepsilon > 0$, что решение $X(t, X_0)$ задачи Коши
$$X' = F(t,X),\quad X(t_0) = X_0,\quad t_0 \epsilon (a,b)$$
существует, единственно и определено на $(t_0 - \varepsilon,\ t_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$.
<u>*Замечание*</u>. Теорема не гарантирует существования решения на всем интервале (a,b). В теореме речь идет только о малой окрестности точки t_0 .

Пусть $X_1 \epsilon B_\delta(X_0)$ — любая точка . По теореме 1 решение $X(t, X_1)$ также существует и единственно, но интервал $(t_0 - \varepsilon_1,\ t_0 + \varepsilon_1)$, на котором решение определено, может отличаться от интервала $(t_0 - \varepsilon,\ t_0 + \varepsilon)$. Тем не менее справедлива теорема.
Теорема 2. $\forall \sigma > 0\ \ \exists \delta_1 < \delta$ и $\varepsilon_1 < \varepsilon$ что $|X(t,X_1) - X(t,X_0)| < \sigma$ при $\forall t \epsilon\ (t_0 - \varepsilon_1,\ t_0 + \varepsilon_1)$ и $|X_1 - X_0| < \delta_1$.
В упрощенной формулировке Теорема 2 означает, что решение задачи Коши непрерывно зависит от начального вектора, т.е. бесконечно малым изменениям начального вектора соответствуют бесконечно малые изменения решения. При этом близость решений оценивается по
$$\max_{|t - t_0| < \varepsilon_1} |X(t,X_1) - X(t,X_0)|$$
Если же рассматривать $|X(t,X_1) - X(t,X_0)|$ при всех значениях t, то она может оказаться не бесконечно малой даже при бесконечно малой $|X_1 - X_0|$. Иначе говоря, близость начальных векторов не гарантирует близости соответствующих решений при всех $t \ge t_0$.

Устойчивость решений

Рассмотрим систему
$$X' = F(t,X)\,, \qquad (1)$$
где $X(t)$, $F(t,X)$ — вектор-функции в n-мерном пространстве.

Особые точки

Если $\boldsymbol{F(t,X_0) \equiv 0,\ t \ge t_0}$, то $\boldsymbol{X_0}$ наз. **особой точкой** системы или точкой равновесия.

Как и раньше, $X(t,\ X_0)$ — решение задачи Коши с начальным условием $X(t_0) = X_0$

<u>Определение 1</u>
Решение $X(t,\ X_0)$ наз. **устойчивым по Ляпунову**, если
1. $\exists\ B_r(X_0)$, что решение $X(t,Y)$ существует $\forall\ Y \epsilon B_r(X_0)$ и всех $t \ge t_0$;
2. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta \epsilon (0;r)$, что неравенство $|X(t,Y) - X(t,X_0)| < \varepsilon$ выполняется при всех $t \ge t_0$ и всех $Y \epsilon B_\delta(X_0)$.

<u>Пример</u>.
$x' = x - x^2$, две особые точки: $x_1 = 1$; $x_2 = 0$ и соответственно два решения $x(t,1)$, $x(t,0) \equiv 0$
а) Пусть $x_0 < 0$. Тогда $x'(t,x_0) < 0$ и $x(t,x_0)$ убывает, т.е. отходит от $x(t,0)$ как бы ни была мала величина $|x_0|$ и, значит, неустойчиво.
б) Пусть $0 < x_0 < 1$. Тогда $x'(t,x_0) > 0$ и $x(t,x_0)$ возрастает .
Поэтому $x(t,x_0) \to 1$ при $t \to +\infty$. (почему?). Аналогично при $x_0 > 1$ имеем $x'(t,x_0) < 0$ и $x(t,x_0)$

убывает . Поэтому снова $x(t, x_0) \to 1$ при $t \to +\infty$. (почему?). Согласно определению 1 решение $x(t, 1)$ устойчиво по Ляпунову.

<u>Определение 2</u>
Решение $X(t,\ X_0)$ наз. **асимптотически устойчивым**, если
1. оно устойчиво по Ляпунову ;
2. $\exists\ \beta \le \delta$, что при всех $Y \epsilon B_\beta(X_0)$ выполняется

$$X(t, Y) - X(t, X_0) \to 0 \text{ при } t \to +\infty$$

В рассмотренном выше примере решение $x(t, 1)$ устойчиво по Ляпунову.

<u>Определение 3</u>
Решение $X(t,\ X_0)$ наз. **неустойчивым**, если не выполняется п.2 из определения 1.
Равносильная формулировка:
$\exists\ \varepsilon > 0$ и такая последовательности начальных точек $Y_k \to X_0$ и чисел $t_k \to +\infty$, для которых при всех k и $t \ge t_0$ выполняется

$$|X(t_k, Y_k) - X(t_k, X_0)| > \varepsilon$$

Вопрос об устойчивости любого решения $X(t,\ X_0)$ сводится к вопросу об устойчивости точки покоя, причем ее можно считать нулевой. Действительно, обозначим
$U(t) = X(t, Y) - X(t, X_0)\ \Rightarrow\ U(t_0) = Y - X_0$.
$U' = X'(t, Y) - X'(t, X_0) =\ F\big(t, X(t, X_0) + U(t)\big) - F\big(t, X(t, X_0)\big)$
Здесь $X(t,\ X_0)$ —заданное решение, а $U(t)$ — отклонение от него. Обозначим

$$G(t, U) = F\big(t, X(t, X_0) + U(t)\big) - F\big(t, X(t, X_0)\big)$$

Тогда получим задачу Коши для новой системы
$U' = G(t, U), \quad U(t_0) = Y - X_0$ (2)
Устойчивость решения $X(t,\ X_0)$ системы (1) равносильна устойчивости нулевого решения системы (2).

Об устойчивости линейной системы

Если некоторое решение линейной системы устойчиво, то и все решения системы будут устойчивы
$X' = A(t)X + F(t)$ (3)
Пусть $X(t, X_0)$ — устойчивое решение, а $X(t, Y)$ другое решение.
Тогда $U(t, U_0) = X(t, Y) - X(t, X_0)$ решение однородной системы.
Устойчивость $X(t, X_0)$ означает, что $|U(t, U_0)| < \varepsilon$ при всех $t \ge t_0$, если $|Y - X_0| < \delta$. Это и есть устойчивость нулевого решения однородной системы.
Поэтому, в отличие от системы общего вида, для линейной системы можно говорить об устойчивости самой системы, а не отдельного решения.

Устойчивость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами (двумерный случай)

Рассмотрим систему $\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_1' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$ (4)
Требуется исследовать устойчивость системы и нарисовать ее фазовый портрет и исследовать устойчивость системы в каждом из рассмотренных ниже случаев (фазовые портреты, см. рис)
Пусть
$\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}$ — собственные числа матрицы коэффициентов.
Выбирая подходящую замену $= BY$, приводим систему к простейшему виду. Возможны следующие случаи.
1. $\boldsymbol{\lambda_1} \ne \boldsymbol{\lambda_2}$, вещественные. Тогда преобразованная система принимает вид

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

Общее решение

$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t};\ \ y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (5)$$

При построении фазовых траекторий следует рассмотреть разные варианты.

а) $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2}$ одного знака

Если собственные числа положительны, то система неустойчива (объясните, почему).

Если собственные числа отрицательны, то система асимптотически устойчива (объясните, почему).

Здесь особая точка (0;0) называется **узлом**.

б) $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2}$ разных знаков.

Здесь особая точка (0;0) называется **седлом**.

Система неустойчива, так как одно из собственных чисел положительно.

в) $\boldsymbol{\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0.}$

Если $\lambda_2 < 0$, то имеет место асимптотическая устойчивость (почему?).

Если $\lambda_2 > 0$, то имеет место неустойчивость.

2. $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda}$, вещественные. Тогда преобразованная система принимает вид

$$\begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 \end{cases}$$

Общее решение

$$y_1 = c_1 t e^{\lambda t};\ \ y_2 = c_2 e^{\lambda t} \qquad (6)$$

Здесь особая точка (0;0) называется **диакритической**. Система асимптотически устойчива при $\lambda < 0$ и неустойчива при $\lambda \leq 0$. (почему?)

3. $\boldsymbol{\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i}$, комплексные. Тогда преобразованная система принимает вид

$$\begin{cases} y_1' = \alpha y_1 - \beta y_2 \\ y_2' = \beta y_1 + \alpha y_2 \end{cases} \qquad (7)$$

Общее решение

$$y_1 = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t\,;\ \ y_2 = c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$$

Если $\alpha \neq 0$, то особая точка (0;0) называется **фокусом**. Устойчивость или неустойчивость определяется знаком α.

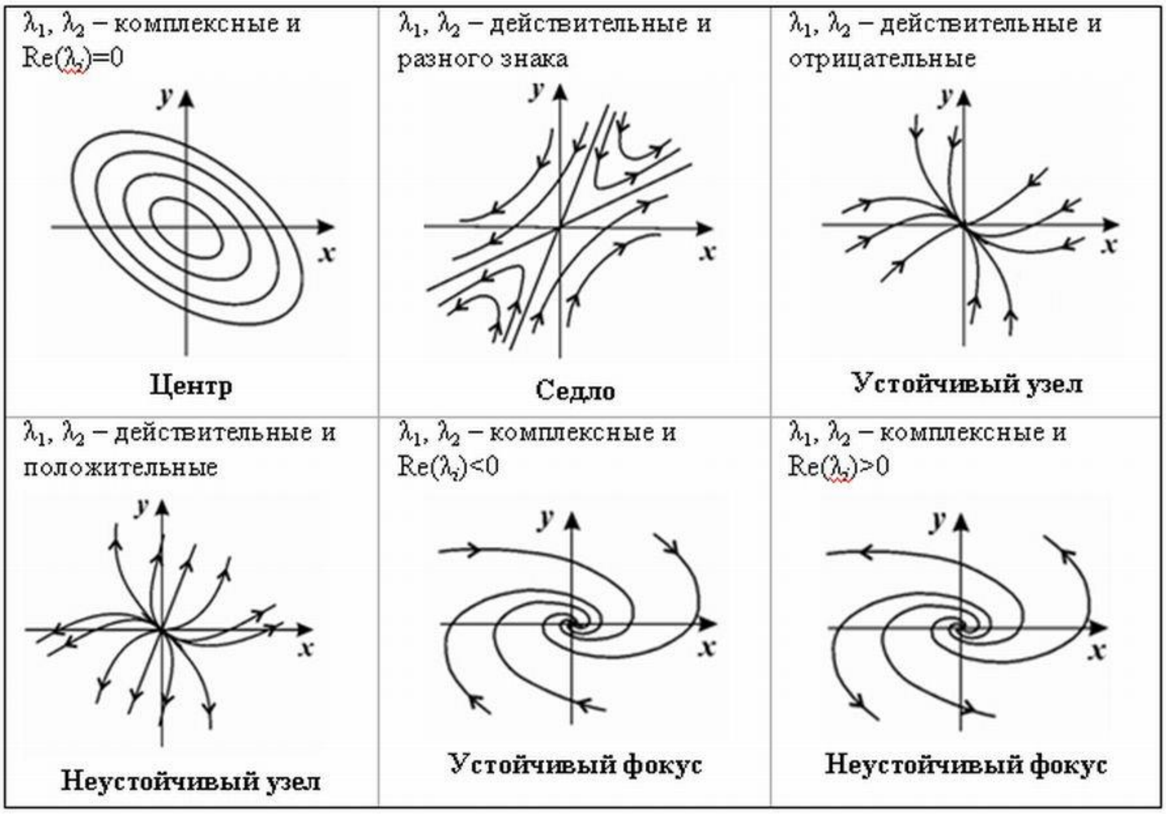
Если $\alpha = 0$, то особая точка (0;0) называется **центром**. Система устойчива, но не асимптотически.

Замечание . Фазовый портрет для исходной системы не отличается качественно от портрета преобразованной системы, так как линейное преобразование сводится к растяжению(сжатию) и повороту.

Упражнение.

Случаи 1., 2., 3., нужно разобрать для следующих частных случаев.

1. а) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2;$ б) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2.$
2. $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$,.
3. $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$.



Устойчивость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами (общий случай)

Пусть λ_k, $\mathrm{k} = 1,2, \dots, \mathrm{n}$ – собственные числа матрицы А.

1. Если все $Re\lambda_k < 0$, то система асимптотически устойчива.
2. Если хотя бы для одного собственного числа $Re\lambda_k > 0$, то система неустойчива.
3. Если все $Re\lambda_k \leq 0$, но все чисто мнимые собственные числа некратные, то точка покоя устойчива по Ляпунову, но не асимптотически.
4. Если все $Re\lambda_k \leq 0$, но среди чисто мнимых собственных чисел есть кратные, то система неустойчива.

Идея доказательства

Каждая координата вектора $X(t)$ это линейная комбинация функций вида $t^m e^{\lambda_k t}$. Поведение этих функций при $t \to +\infty$ определяет устойчивость системы. Некоторого пояснения, может быть, требует пункт 3. В этом случае решение представимо в виде $X(t) = \Phi(t)X_0$, причем все элементы матрицы Ф это линейные комбинации синусов и косинусов, т.е. ограничены. Поэтому

$$|X(t)| \leq M|X_0|$$

и отсюда следует устойчивость по Ляпунову (почему?). Объясните, почему в этом случае не может быть асимптотической устойчивости.

Упражнения

1. $x'' + \omega^2 x = 0;$
2. $x'' + 2x' + 10x = 0$
3. $x'' + 2x' + x = 0$

Устойчивость линейной однородной системы с периодическими коэффициентами

$$X' = A(t)X, \quad A(t+T) = A(t). \qquad (8)$$

Было доказано ранее, что решение системы (7) представимо в виде

$$X(t) = \Phi(t)X_0 \qquad (9)$$

где $\Phi(t)$ − фундаментальная матрица системы (7), удовлетворяющая у,словию $\Phi(t_0) = E$, а X_0 − начальный вектор. Также было доказано, что существует такая матрица C , называемая основной, что

$$\Phi(t + mT) = \Phi(t)C^m \qquad (10)$$

Пусть $t = \tau + mT,\ \ 0 \le \tau < T.$ Тогда из (9) и (8) получим

$$X(t) = \Phi(\tau)C^m X_0 \qquad (10)$$

Множитель $\Phi(\tau)$ ограничен на отрезке $[0;T]$ в силу непрерывности, поэтому поведение $X(t)$ при $t \to +\infty$ определяется поведением C^m при $m \to +\infty$, а оно зависит от собственных чисел матрицы C.

Действительно, если все собственные числа некратные, то матрица C подобна диагональной, т.е. существует такая невырожденная матрица B , что $C = B^{-1}DB,$ где D − диагональная матрица, у которой на диагонали собственные числа. Имеем $C^m = B^{-1}D^m B$.
Матрица D^m тоже диагональная с диагональными элементами λ_k^m. В случае кратных собственных чисел матрица C приводится к форме Жордана. Тогда D не диагональная матрица и D^m имеет более сложную структуру. Убедитесь в этом сами на простом примере $D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, вычислив D^m . Тем не менее справедлива

Теорема. Пусть λ_k , $k = 1,2, \dots, n,$ − собственные числа основной матрицы (характеристические множители системы).

1. Если $|\lambda_k| < 1,\ k = 1,2, \dots, n,$ то система асимптотически устойчива.
2. Если хотя бы для одного k выполняется $|\lambda_k| > 1,$ то система неустойчива.
3. Если $|\lambda_k| = 1,\ k = 1,2, \dots, n,$ и нет кратных собственных чисел, то система устойчива, но не асимптотически.
4. Если $|\lambda_k| = 1,\ k = 1,2, \dots, n,$ и есть кратные собственные числа, то система неустойчива.