Чем вам может быть полезен это курс...

Обучение и технический прогресс

До 60-х годов студент технического вуза изучал "аналитическую геометрию"

(Евклид + Декарт на плоскости без матриц и прочей линейной алгебры)

Бурный рост вычислительной техники заставил ввести такой курс в вузах

Это прошло гладко – большинство преподавателей это знали

этому давно учили в университетах

заодно решили ввести дифференциальное исчисление в школы

но там не было людей готовых этому учить

в результате в школ настоящая геометрия заменилась фиктивной производной

но навык учить производной все же есть

сложнее с программированием

Кемени Ввеение...

программисты без компьютера

"аналоговое обучение"

Линейные нормированные пространства

аналог R^n

должно быть: сложение элементов, умножение на число

Пример (из рядов Фурье – равенство Парсевля)

функции на отрезке $[-\pi,\ \pi]$ такие, что $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$

коэффициенты Фурье $\{c_n\} : \sum |c_n|^2 < \infty$

Функциональный анализ – наследник математического анализа.

Должны быть определены пределы

здесь (!) рассматриваются нормированные пространства

Определение

Нормой в линейном пространстве X называется любая функция, отображающая пространство X в множество вещественных неотрицательных чисел $x \to ||x||$ такая, что

1) для любого $x \in X$ и для любого $k \in K$ выполнено равенство $||kx|| = |k|||x||$;

2) для любых $x, y \in X$ справедливо неравенство $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$;

3) для любого $x \in X$ справедливо неравенство $||x|| \geq 0$, причем равенство $||x|| = 0$ возможно только для $x = 0$.

Норма позволяет измерять расстояние $||x - y||$ между парой элементов линейного пространства $x, y \in X$. Следовательно, можно говорить о пределах последовательностей $x_n \in X : x_n \to x_0$, если $||x_n - x_0|| \to 0$.

Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ образует линейное пространство. Норма там есть. Но последовательность рациональных чисел, сходящуюся к числу $\sqrt{2}$, нельзя назвать сходящейся в смысле нашего определения.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n, k > N \quad \|x_n - x_k\| < \epsilon.$$

Приняв такое определение, всегда можно **расширить** исходное пространство так, что всякая фундаментальная последовательность в нем имеет предел.

Определение нормы допускает множество реализаций в одном и том же линейном пространстве.

Примеры

1) $l_n^1 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : ||x|| = |x_1| + \ldots + |x_n|\}$.

2) $l_n^2 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : ||x|| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}\}$ – это стандартное n-мерное евклидово пространство.

3) $l_\infty^1 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : ||x|| = \max\{|x_k|, k = 1, \ldots, n\}\}$.

В этих примерах для малых размерностей легко изобразить шары графически.

Конечномерные пространства (то есть **пространства с конечным базисом**) играют в ФА вспомогательную роль.

Главный предмет изучения бесконечномерные пространства.

1a) $l^1 = \{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) : ||x|| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$.

2a) $l^2 = \{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) : ||x|| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} < \infty\}$

3a) $l^\infty = \{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) : ||x|| = \sup\{|x_k|, k = 1, \ldots, n, \ldots\} < \infty\}$.

Необходимо проверить что введенные в примерах функции являются нормами – удовлетворяют свойствам, перечисленным в определении. Первое и третье свойство очевидны. Проверка неравенства треугольника в первом и третьем примерах переводится на координаты и сводится к числовым неравенствам

$$|a+b| \le |a| + |b|, \quad \max\{|a|, |b|\} \le |a| + |b|.$$

Свойство 3 –неравенство треугольника в l^2
легко вывести из неотрицательности нормы :

$$0 \le ||x - \lambda y||^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \lambda y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

Из неотрицательности квадратного трехчлена следует, что его дискриминант меньше либо равен 0. Это дает оценку (неравенство Коши–Буняковского)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) \text{ и далее}$$

$$||x+y||^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^2 \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^2 = (||x|| + ||y||)^2.$$

Переход к бесконечной размерности вносит специфику в работу с таким объектами большие трудности.
Например, приходится заменять максимум на супремум.

$$A = \sup\{x_n\}, \text{ если } \forall n \ \ x_n \le A \text{ и } \forall \epsilon > 0 \ \exists n : A - x_n < \epsilon.$$

Еще одно отличие заключается в том, что эти пространства существенно различаются по составу элементов:

если $x = (1, \dots, 1, \dots)$, то $x \in l^\infty$, но $x \notin l^1$, $x \notin l^2$;

если $x = (1, 1/2, \dots, 1/n, \dots)$, то $x \in l^2$, но $x \notin l^1$.

Это обстоятельство естественно увязывается с геометрией шаров.

Все возможные нормы можно описать в геометрических терминах – они соответствуют выпуклым множествам, для которых 0 является внутренней точкой и центром симметрии.

Определение

Пусть W - выпуклое множество

0 является его внутренней точкой и **точкой симметрии.**

Нормой Минковского, порожденной множеством W, называется

$$||x|| = \inf\left\{\lambda : \frac{x}{\lambda} \in W,\ \lambda > 0\right\}$$

В бесконечномерных пространствах требуется более аккуратное описание множества. Например, в конечномерном пространстве открытое выпуклое множество W, в котором существует такая точка w, что для любого $x \in X$ найдется число $\epsilon(x) > 0$ такое, что множество W содержит отрезок $w + tx$, при всех $t \in (-\epsilon(x); \epsilon(x))$ является выпуклым. Однако в бесконечномерных пространствах это не так ....пример

Теорема Минковского

Если W – выпуклое ограниченное тело и 0 является его внутренней точкой,

W – симметрично относительно точки 0

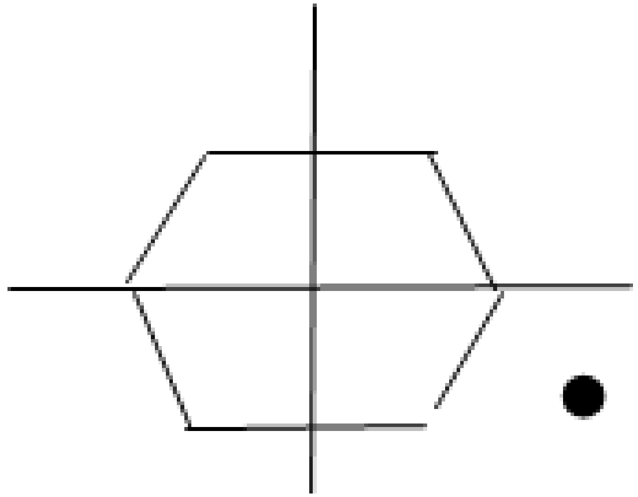
то выражение $||x|| = = \inf\left\{\lambda : \frac{x}{\lambda} \in W,\ \lambda > 0\right\}$ задает норму в пространстве X.

Верно и обратное, единичный шар в линейном нормированном пространстве является выпуклым ограниченным множеством и 0 является его внутренней точкой.

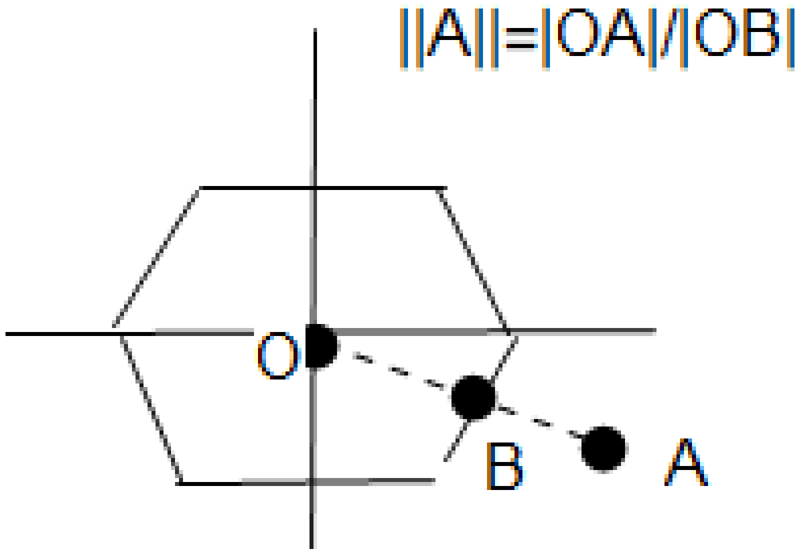
Доказательство теоремы имеется в методичке.

Домашнее задание 1. Норма, заданная многогранником в R^3

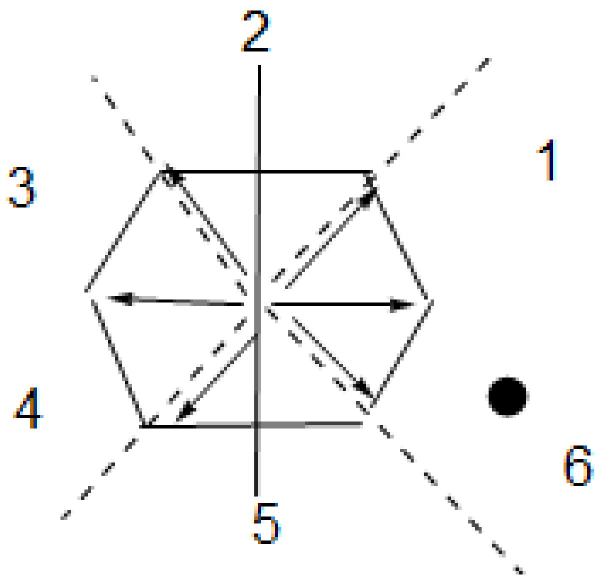
Простой пример: вычисление нормы в R^2, заданной шести угольником



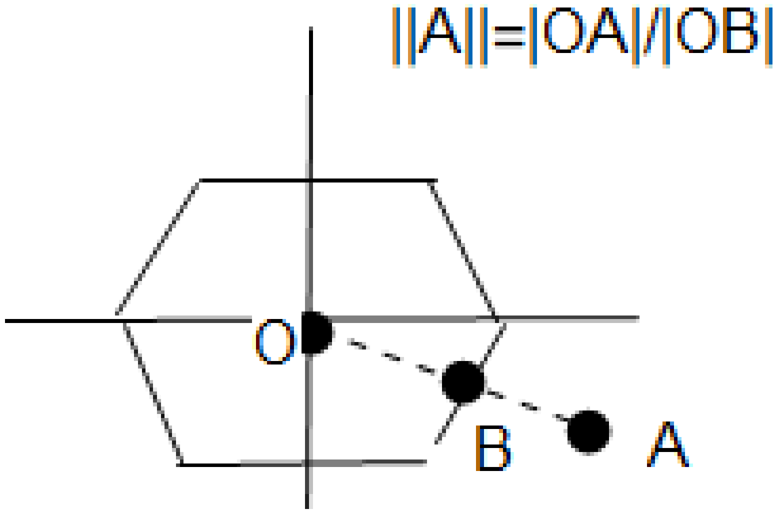
Теорема Минковского



Алгоритм вычисления нормы

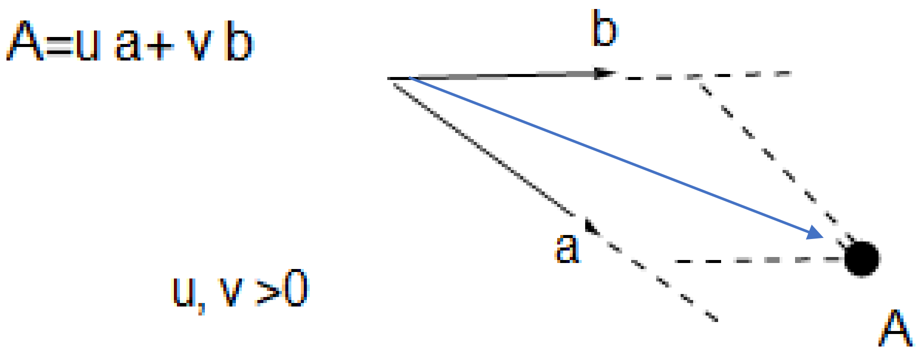


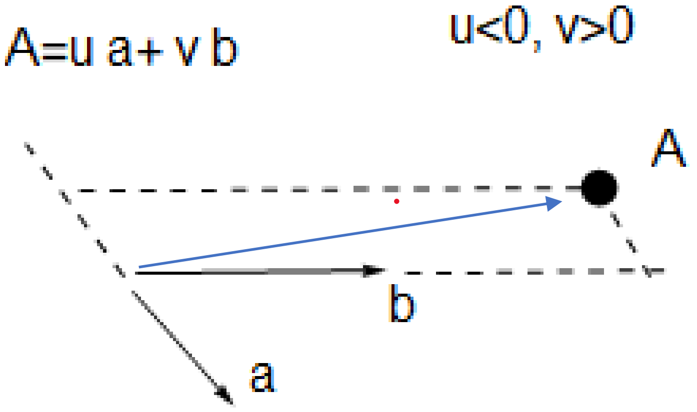
Для точки в "угле"алгоритм понятен



Надо выяснить , в каком из "углов"находится точка

Разложение точки по базису угла





Точка в угле тогда и только тогда, когда коэффициенты положительны

Техника разложения – биортогональный базис

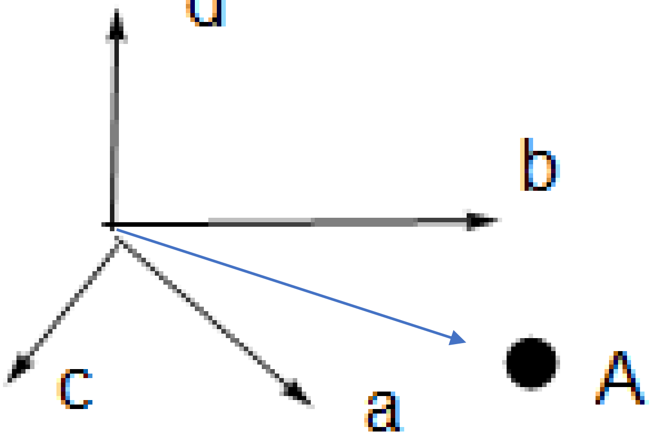
$(c,a)=0$

$(c,b)=1$

$(d,b)=0$

$(d,a)=1$

$A = u\,a + v\,b$



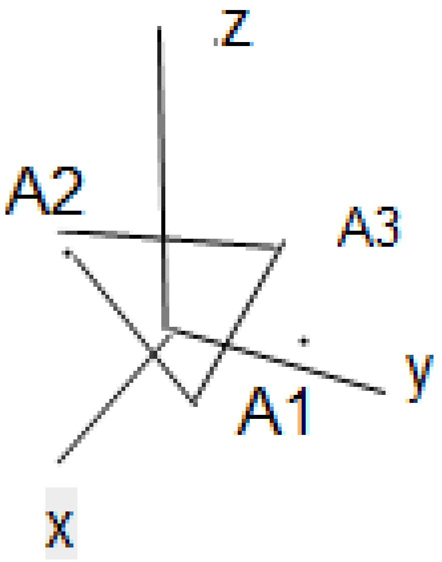
$u=(A,d)$ $\qquad$ $v=(A,c)$

Докажите: $||A||=u+v$

В задание входит построение выпуклого, центрально симметричного многогранника на мудле будет папка «Условия», куда надо отправить список вершин на проверку

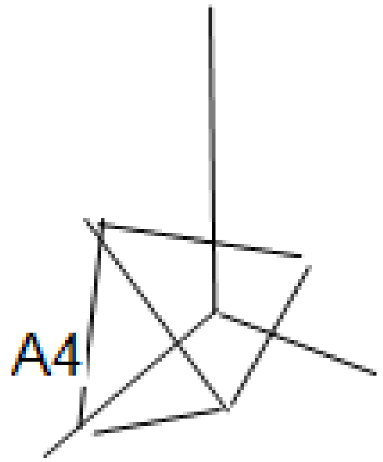
Стоим многоугольник симметричны относительно координатных плоскостей
ГЛАВНОЕ построить вершины в первом квадранте

Первый шаг: выбираем три точки $A_1,\ A_2,\ A_3$ в координатных плоскостях, это первая грань многоугольника



$A_1(a_{11}, a_{12}, 0)$
$A_2(a_{21}, 0, a_{23})$
$A_3(0, a_{32}, a_{33})$

A_4 выбираем на оси oX

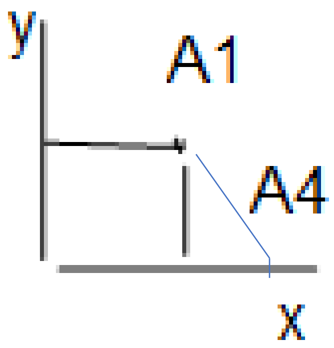


$$A_4(a_{41}, 0, 0)$$

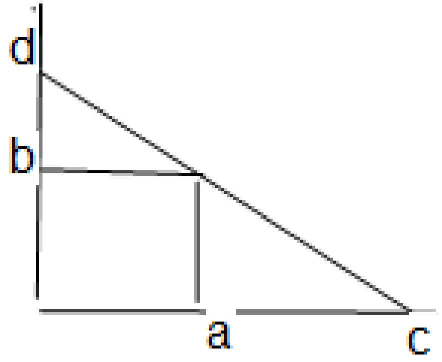
так чтобы

$$a_{41} > a_{11}$$

a_41 > a_21



для дальнейшей работы потребуется формула, переводящая a, b, c в d



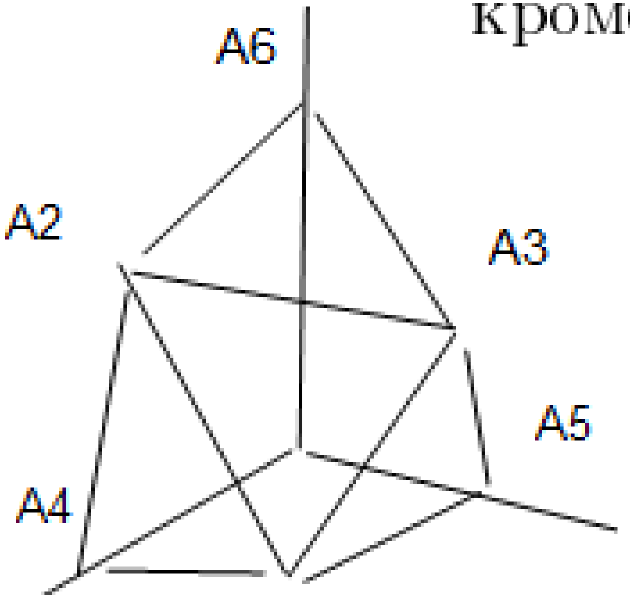
a,b,c → d

A_5 выбираем на оси oY, $A_4 = (0, a_{52}, 0)$, $a_{52} > a_{12}$

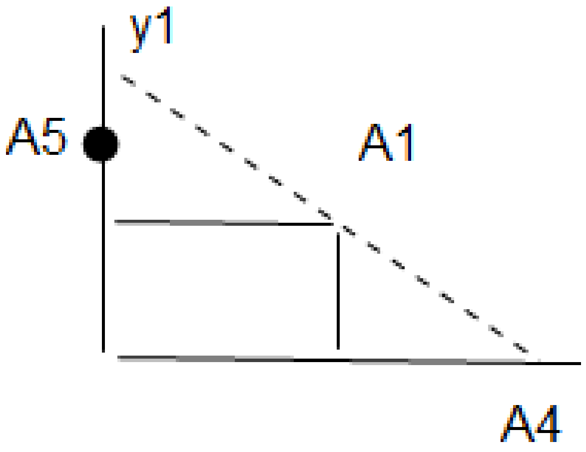
A_5

$a_{52} > a_{32}$

кроме того A_5 должна находится под прямой A_1, A_4



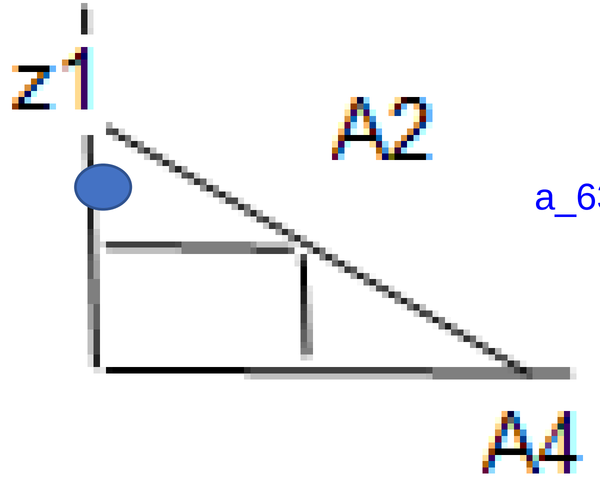
$a_{52}<a_{12}\, a_{41}/(a_{41}-a_{11})$



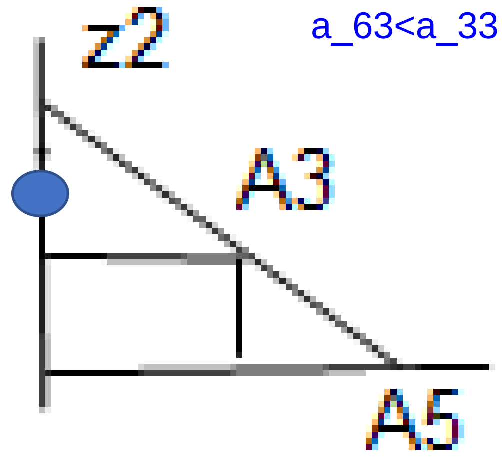
аналогично строим точку на оси oZ, $A_6 = (0, 0, a_{63})$

$$a_{63} > a_{23}, \quad a_{63} > a_{33}$$

кроме того A_6 должна находится под прямыми A_2, A_4 и A_3, A_5

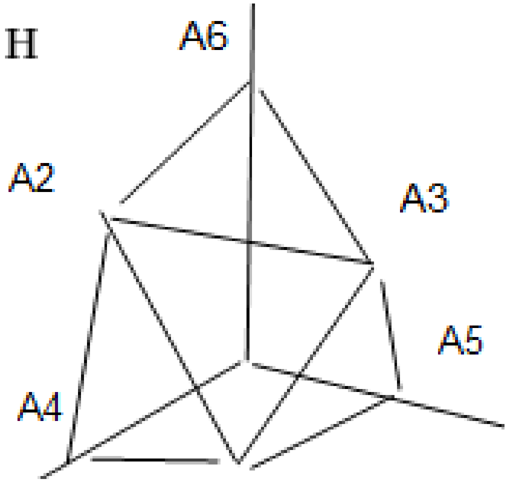


$a_{63}<a_{23}\, a_{41} /(a_{41}-a_{21})$



$a_{63}<a_{33}\, a_{52} /(a_{52}-a_{32})$

многоугольник в первом квадранте построен



Продолжение по симметрии из $x, y, z > 0$ в $x < 0, y, z > 0$

$$(x, y, z) \to (-x, y, z)$$

A_3, A_5, A_6 – неподвижны

$$A_1 \to A_7,\ A_2 \to A_8,\ A_4 \to A_9$$

Продолжение по симметрии из $x \in R,\ y, z > 0$ в $x, y \in R,\ z > 0$

$(x, y, z) \to (x, -y, z)$

$A_2, A_4, A_6, A_8, A_9,\ !y = 0$ – неподвижны

$A_1 \to A_{10},\ A_3 \to A_{11},\ A_4 \to A_{12},\ A_7 \to A_{13}$

Продолжение по симметрии из $x, y \in R,\ z > 0$ в $x, y, z \in R$

$(x, y, z) \to (x, y, -z)$

$A_1, A_3, A_4, A_7, A_9, A_{11},\ !z = 0$ – неподвижны

$A_2 \to A_{14},\ A_5 \to A_{15},\ A_6 \to A_{16},\ A_8 \to A_{17}$

многоугольник

построен

Проверка выпуклости

условие выпуклости равносильно

Все вершины должны лежать по одну сторону каждой из граней (там же где и ноль)

В силу симметрии конструкции достаточно проверить грани первого квадранта

Для плоскости точек A_1, A_2, A_3 это очевидно

Рассмотрим плоскость точек A_1, A_2, A_4

Ее уравнение $L(x) = 0$, $L(x)$ -смешанное произведение – определитель

$$L : ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

Надо проверить, что числа $L(0)$, $L(A_k)$, $k = 1, ..., 17$ имеют одинаковый знак

Алгоритм вычисления нормы

аналог конструкции в R^2

надо разбить пространство на углы образованные гранями

например, угол отвечающий грани $A_1,\ A_2,\ A_4$ описывается как множество точек вида

$$\vec{w} = pO\vec{A}_1 + qO\vec{A}_2 + rO\vec{A}_4, \quad p,\ q,\ r \geq 0$$

вектора образуют базис, поэтому любой вектор допускает разложение
$\vec{w} = pO\vec{A}_1 + qO\vec{A}_2 + rO\vec{A}_4, \quad p,\ q,\ r \in R$

чтобы вычислить коэффициенты, достаточно найти биорогональный базис

$\vec{n_1}$ – векторное произведение $\vec{OA_1}$ и $\vec{OA_2}$

такой, что $(\vec{n_1}, \vec{OA_4}) = 1$

$\vec{n_2}$ – векторное произведение $\vec{OA_1}$ и $\vec{OA_4}$

такой, что $(\vec{n_2}, \vec{OA_2}) = 1$

$\vec{n_3}$ – векторное произведение $\vec{OA_2}$ и $\vec{OA_2}$

такой, что $(\vec{n_3}, \vec{OA_1}) = 1$

тогда, $p = (\vec{w}, \vec{n_3})$, $q = (\vec{w}, \vec{n_2})$, $r = (\vec{w}, \vec{n_1})$

для того, чтобы вычислить норму $\vec{w}$ надо найти тот угол, в котором

$$p,\ q,\ r \geq 0$$

$$\text{тогда } ||\vec{w}|| = p + q + r$$

Заключительная часть задания

сформировать пару точек $\vec{w_1} = (w_{11}, -w_{12}, w_{13})$ и $\vec{w_2} = (w_{21}, w_{22}, -w_{23})$,

где w_{kj} случайные натуральные числа

и вычислить $||\vec{w_1}||$, $||\vec{w_2}||$, $||\vec{w_1} + \vec{w_2}||$