Уравнения 1-го порядка, сводящиеся к неопределенным интегралам

Интегрирование уравнений, даже 1-го порядка, обычно не сводится к неопределенным интегралам. Однако существуют некоторые типы уравнений 1-го порядка, интегрирование которых приводит к неопределенным интегралам.
Здесь мы рассмотрим 3 типа таких уравнений.

1. *<u>Уравнения с разделяющимися переменными</u>*

$y' = f(x)g(y)$ (1)

Запишем уравнение в виде

$$dy = f(x)g(y)dx$$

Отсюда

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Интегрируя обе части , получаем общий интеграл

$G(y) = F(x) + c \Longrightarrow G(y) - F(x) = c$ (2)

где $G(y)$, $F(x)$ – первообразные для $\frac{1}{g(y)}$ и $f(x)$ соответственно.

Этим завершается интегрирование уравнения (1).

Уравнение (2) задает решение в неявной форме. Решив его относительно y , (что не всегда возможно), получим общее решение .

<u>Примеры</u>.

1) $y' = x + xy^2$

Разделяем переменные

$$\frac{dy}{1 + y^2} = xdx$$

Интегрируем и получаем общее решение

$$\mathrm{arctg}(y) = 0{,}5x^2 + c.$$

Отсюда $y = \mathrm{tg}(0{,}5x^2 + c)$.

2) Падение тела

$v' = b - kv \Longrightarrow dv/(b - kv) = dt$, $v(0) = v_0$.

Если $v_0 = b/k$, то $v(t) \equiv v_0$ является единственным решением.

Пусть теперь

$$v_0 \neq b/k$$

Интегрируем по t

$-\frac{1}{k}\ln|b - kv| = t + c \Longrightarrow \ln|b - kv| = -kt + c \Longrightarrow c = |b - kv_0|$.

Далее

$\ln\left|\frac{a-v}{a-v_0}\right| = -kt, \ \ a = b/k.$

$\frac{a-v}{a-v_0} = \pm e^{-kt} \Longrightarrow v(t) = a \pm (a - v_0)e^{-kt}.$

Знак $+$ следует отбросить, так как в этом случае получаем

$v_0 = a = b/k$

Окончательно получаем $v(t) = a - (a - v_0)e^{-kt}$.

На рис. 1 показаны интегральные кривые при разных значениях начальной скорости

$v_0 = 0{,}7;\ 0{,}9;\ 1;\ 1{,}1;\ 1{,}3.$

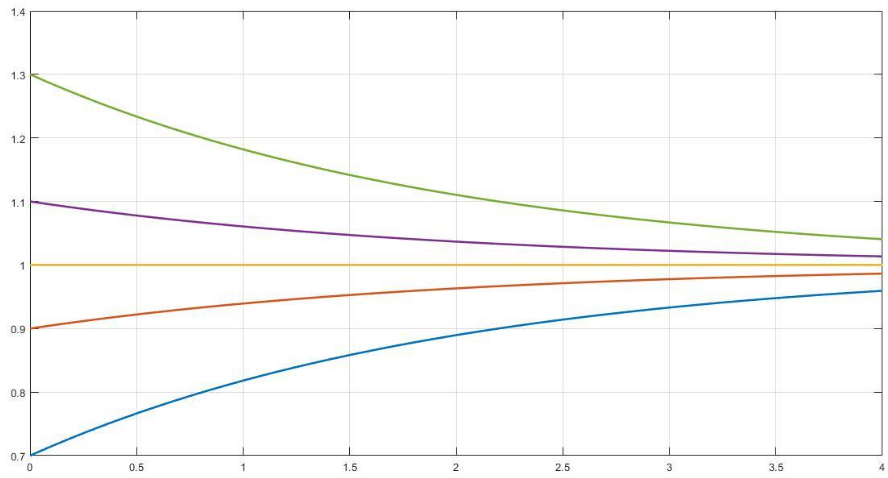

Рисунок показывает, что при любой начальной скорости ($v_0 > b/k$ и $v_0 < b/k$) скорость падения стремится к предельному значению, равному b/k.

<u>Задания</u>.

2. <u>*Однородные уравнения 1-го порядка*</u>

$$y' = f(y/x) \qquad (3)$$

Здесь правая часть зависит только от отношения y/x.

Вводим новую неизвестную функцию $u(x) = y/x$.

Тогда $y' = \big(xu(x)\big)' = u + xu'$. Подставляем в (3)

$$u + xu' = f(u) \Longrightarrow xu' = f(u) - u$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

<u>Пример</u>. $x^2y' = xy + y^2$.

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}.$$

$u = y/x \implies u + xu' = u + u^2 \implies u' = u^2/x.$

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow -\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln|c| = \ln|cx|$$

Отсюда $u = -1/\ln|cx| \Longrightarrow y = xu = -x/\ln|cx|$

3. <u>*Линейные уравнения 1-го порядка*</u>

Общий вид $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$.

Имеется в виду линейность только по переменным y, y', но не по x. Если $a(x) \neq 0$, то уравнение преобразуем к виду

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (4)$$

Ищем решение в виде $y = uv$, где $u, v -$ неизвестные функции.

Отсюда

$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \Longrightarrow u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$ (5)

Решаем вспомогательное уравнение

$v' + p(x)v = 0$ (оно с разделяющимися переменными) и подставляем в (5) .

Получаем

$$u'v = q(x) \Longrightarrow u' = \frac{q(x)}{v(x)} \Longrightarrow u(x) = \int \frac{q(x)}{v(x)} dx$$

В итоге $y(x) = u(x)v(x)$.

<u>Примеры</u>.

1) $y' + y/x = x^2$

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \Longrightarrow u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = x^2$$

$$v' + \frac{1}{x}v = 0 \Longrightarrow \ln v = -\ln x \Longrightarrow v = 1/x$$

$$u'\frac{1}{x} = x^2 \Longrightarrow u' = x^3 \Longrightarrow u = x^4/4 + c$$

$$y = uv = (x^4/4 + c)/x$$

2) Приведем примеры уравнений, которые приводятся к линейному типу путем замены неизвестной функции или независимой переменной.

$y' + p(x)y = q(x)y^n, n \neq 1$, уравнение Бернулли.

$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$.

Новая неизвестная функция $z = y^{1-n} \Longrightarrow z'/(1-n) + p(x)z = q(x)$.

Если зависимость от x в уравнении линейная, то имеет смысл искать зависимость x от y, а не y от x, т.е. поменять местами зависимую и независимую переменные. Например, уравнение $y' = y/(3x - y^2)$ можно так превратить в линейное относительно неизвестной функции $x(y)$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x-y^2} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{3x-y^2}{y} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -y$.

О численном решении задачи Коши

Задачу Коши для дифференциального уравнения самого общего вида можно решить приближенно с высокой точностью. Для этого в большинстве математических пакетов имеются специальные функции. Например, в пакете Matlab есть функция ode45 и другие. Подробнее о них будет рассказано позже. Возникает вопрос: зачем тратить время на уравнения, сводимые к интегралам, которые к тому же могут оказаться неберущимися? Дело в том, что при изучении сложных физических явлений полезно рассматривать упрощенные модели, которые описываются простыми дифференциальными уравнениями и для которых нетрудно найти общее решение. Если же вы пользуетесь функциями типа ode45 , то каждый раз получаете решение при конкретных исходных данных – начального значения и интервала, на котором ищется решение. Поэтому, чтобы получить какое-то представление об общем решении, нужно многократно менять исходные данные. При этом нет гарантии, что эти данные изменялись в нужном диапазоне.

Ортогональные траектории

Пусть A и B два семейства кривых на плоскости.

<u>Определение</u>. Если каждая кривая семейства A пересекает все кривые семейства B под прямым углом, то кривые семейства A называют **ортогональными траекториями** по отношению к семейству B.

A и B вместе образуют ортогональную сетку. Например, такую сетку образуют семейства концентрических окружностей и лучей, выходящих из центра окружностей.
Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ и его решение $y(x)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$. Соответствующая интегральная кривая l, проходит через точку $(x_0; y_0)$. Поэтому угловой коэффициент касательной к l в этой точке равен $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Если какая-либо кривая пересекает под прямым углом кривую l в точке $(x_0; y_0)$, то ее угловой коэффициент равен $-1/f(x_0, y_0)$. Отсюда получаем уравнение ортогональных траекторий к интегральным кривым уравнения $y' = f(x, y)$.

$$z' = -1/f(x, z)$$

Уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка

Решение уравнений 2-го порядка, как правило, более сложная задача, чем для уравнений 1-го порядка, но есть два вида уравнений, для которых процесс решения сводится к последовательному интегрированию двух уравнений 1-го порядка.

1. $f(x, y', y'') = 0$.
   Здесь уравнение содержит только производные от неизвестной функции, но не саму неизвестную функцию.
   Вводим новую неизвестную $p = y'$. Уравнение принимает вид
   $$f(x, p, p') = 0 \qquad (6)$$
   Пусть $p = p(x, c_1)$ — общее решение уравнения (6). Отсюда получаем новое дифференциальное уравнение 1-го порядка, содержащее произвольный параметр c_1.
   $$y' = p(x, c_1) \qquad (7)$$
   Проинтегрировав, получим общее решение исходного уравнения
   $$y(x, c_1, c_2) = P(x, c_1) + c_2 ,$$
   где $P(x, c_1)$ — первообразная для $p(x, c_1)$.
   <u>Пример</u>. Задача о падении тела, $h(t)$ — расстояние до земли, g — ускорение силы тяжести
   $$h'' = bh' - g$$
   Обозначим $p = h'$. Тогда получаем новое уравнение с разделяющимися переменными $p' = bp - g$. Его общее решение
   $$p(t, c_1) = \frac{g}{b} + c_1 e^{bt} \text{(проверьте)} .$$
   Отсюда
   $$h' = \frac{g}{b} + c_1 e^{bt} \Longrightarrow h(t, c_1, c_2) = \int \left(\frac{g}{b} + c_1 e^{bt}\right) dt = \frac{g}{b} t + c_1 e^{bt} + c_2$$
2. $f(y, y', y'') = 0$.
   Здесь отсутствует независимая переменная x. Сначала ищется зависимость между неизвестной функцией y и ее производной в виде уравнения $y' = p(y)$, где $p(y)$ — неизвестная функция . Имеем по правилу дифференцирования сложной функции $y'' = p'(y) \cdot y' = p'(y) \cdot p(y)$. Тогда исходное уравнение принимает вид

$$f(y, p, p \cdot p') = 0. \qquad (8)$$

Предположим, удалось найти его общее решение $p(y, c_1)$. Получаем новое уравнение 1-го порядка

$$y' = p(y, c_1). \qquad (9)$$

Решив его, находим общее решение $y(x, c_1, c_2)$ исходного уравнения.

Замечание.

Практическая реализация описанной схемы решения уравнений 2-го порядка возможна лишь в некоторых простых случаях, так как уравнение (7) часто приводит к неберущимся интегралам, а уравнения (8) и (9) часто и к интегралам не сводятся.

Пример.

Решим задачу Коши: $y'' = (2y + 1)y'$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Ищем зависимость между y' и y в виде $y' = p(y)$, где $p(y)$ – неизвестная функция.

Исходная задача принимает вид

$pp' = (2y + 1)p \Longrightarrow p' = (2y + 1)$, $p(1) = 2$. Далее

$p(y, c_1) = y^2 + y + c_1$.

Из начального условия имеем $p(1) = 2$.

$2 = 1 + 1 + c_1 \Longrightarrow c_1 = 0$.

Отсюда получаем второе вспомогательное уравнение $y' = y^2 + y$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dy}{y^2 + y} = dx \Longrightarrow \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy = dx \Longrightarrow \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = x + \ln c_2,$$

Далее

$\frac{y}{y+1} = c_2 e^x$. Из начального условия $y(0) = 1$ получаем $\frac{1}{1+1} = c_2 e^0 \Longrightarrow c_2 = 0{,}5$

Отсюда $y = e^x/(2 - e^x)$.