МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МОЭВМ

ОТЧЕТ

О выполнении индивидуального домашнего задания №2
по дисциплине «Дифференциальные уравнения»
Вариант №11

Студент гр. 9383	__________________	Ноздрин В.Я.
Преподаватель	__________________	Юдовин М.Э.

Санкт-Петербург
2022

Цель работы.

Изучение устойчивости однородного линейного уравнения с периодическими коэффициентами при $t \to +\infty$.

Задание.

Дано уравнение $\ddot{x} + a(p, t)\, x = 0$, $a(p, t) = p + b(t)$, $b(t+T) = b(t)$, p – параметр.

Сводим уравнение к системе двух уравнений первого порядка

$u_1(t) = x(t)$, $u_2(t) = \dot{x}(t)$

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = -a(p, t) u_1 \end{cases} \qquad (1)$$

Дальнейшие рассуждения применимы к любой линейной периодической системе, а не только к системе вида (1).

Вариант 11.

$$b(t) = e^{2sint}$$

Порядок действий.

1. Задаем массив значений параметра p. Например, p=0.1:0.05:5. Для каждого значения p проделаем следующий действия.
2. Вычисляем значение фундаментальной матрицы системы (1) при t=T с помощью любой программы численного решения задачи Коши.

Для этого решаем две задачи Коши с начальными векторами $V_1 = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$ и $V_2 = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ на отрезке [0; T]. Пусть вектор-функции $U(t, V_1)$, $U(t, V_2)$ – решения этих задач. Они являются столбцами фундаментальной матрицы $\Phi(t)$, удовлетворяющей условию $\Phi(0) = E$. Основную матрицу C для $\Phi(t)$ получаем из формулы $C = \Phi(T)$. Столбцы матрицы C это векторы $U(T, V_1)$, $U(T, V_2)$.

3. Вычисляем собственные числа матрицы C и ее спектральный радиус, то есть $r(p) = max|\lambda_j|$, $j = 1{,}2$.
4. Вывод об устойчивости или неустойчивости делается в зависимости от значения $r(p)$. Рекомендуется построить график этой зависимости, из которого с достаточной точностью можно определить точку p_0, которая разделяет зоны устойчивости и неустойчивости, в которых $r \le 1$ и $r > 1$. Более точно p_0 вычисляется методом половинного деления.

Матрицу C можно найти только приближенно, решая численно две задачи Коши.
В Matlab'e эти задачи решаются на отрезке $[0;T]$ командами

$$[\sim, u1] = ode45(@(t,u)\ f(t,u,p), [0\ T], [1\ 0]);$$
$$[\sim, u2] = ode45(@(t,u)\ f(t,u,p), [0\ T], [0\ 1]);$$

Здесь $f(t,u,p)$ — вектор-функция, задающая правые части уравнений (ее рекомендуется задавать в том же файле, где решается задача),
в нашей задаче $f(t,u,p) = \left[u(2);\ -\left(p + b(t)\right) * u(1)\right];$
[0 T] – отрезок, на котором ищется решение,
[1 0] и [0 1] - начальные векторы,
u1 и u2 – матрицы размера nx2, i-я строка которых содержит значения решения при t=(i -1)T/(n-1), i=1,2,...,n, n – число строк матриц (оно определяется внутри самой программы автоматически). Число строк матриц u1 и u2 иногда не одинаково, поэтому положим $n1 = size(u1,1)$, $n2 = size(u2,1)$. Отсюда

$$C = \begin{pmatrix} u1(n1,1) & u2(n2,1) \\ u1(n1,2) & u2(n2,1) \end{pmatrix}.$$

Выполнение работы.

$$b(t) = e^{2sint}$$

Сведем данное уравнение к системе

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = -(p + e^{2sint})u_1 \end{cases} \qquad (2)$$

```
>>> function y = bt(t)
        y = exp(2*sin(t))
    end

>   T = [-pi:0.05:pi]
    Bt = []
    for i = 1:length(T)
        res = @bt(T(i))
        Bt = [Bt res]
    end
    figure(1)
    plot(T, Bt)
```

Рисунок 1 – задана функция b(t) и построен ее график на интервале [-π,π].

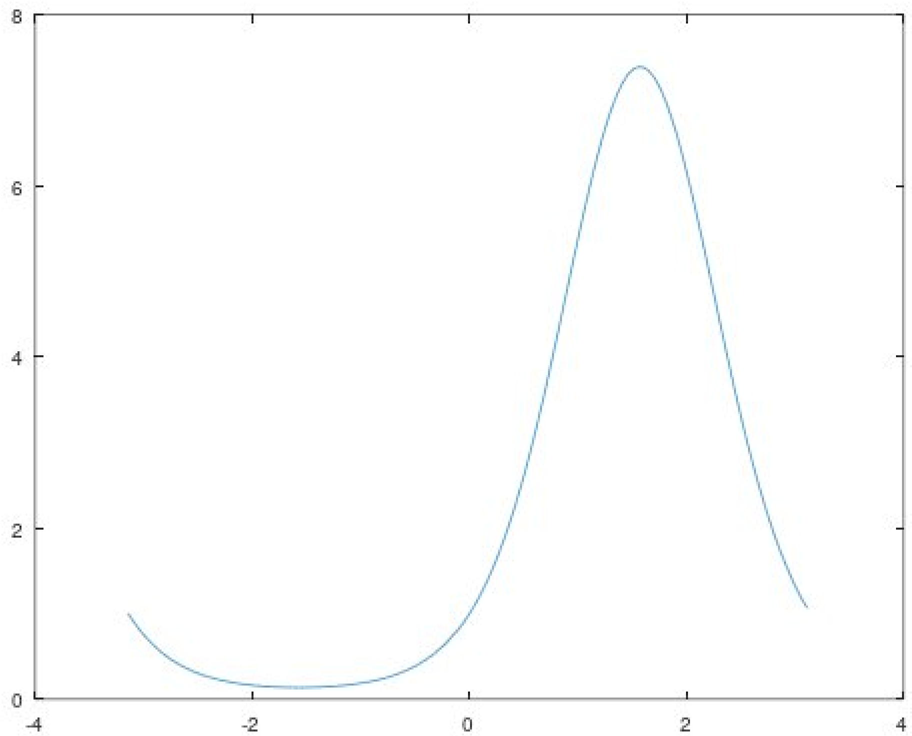

Рисунок 2 – График функции b(t).

Вычислим фундаментальную матрицу системы (2), составим матрицу $C = \Phi(T)$ и вычислим ее собственные числа и спектральный радиус. Спектральные для разных значений параметра радиусы сохраним в массив.

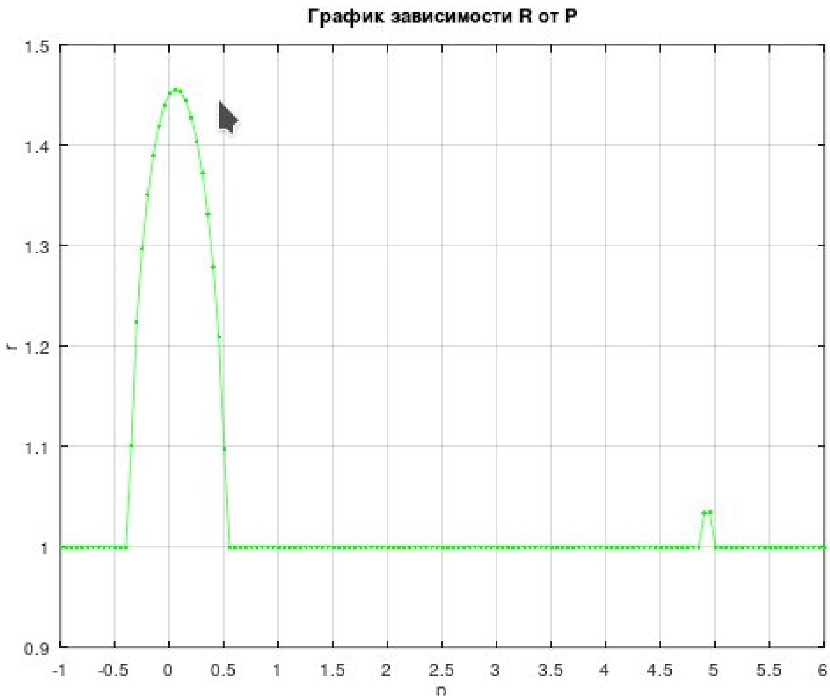

Рисунок 3 – График зависимости спектрального радиуса от параметра.

Далее определим точку p_0 с точностью 0.001

```
r_rev = flip(r)
p_rev = flip(p)
for i = 2:length(r)
    if(abs(r_rev(i)-1) > 0.001)
        p0 = p_rev(i-1)
        r0 = r_rev(i-1)
        break
    end
end
```

Рисунок 4 – программа, вычисляющая p_0.

$p_0 = 5.0$

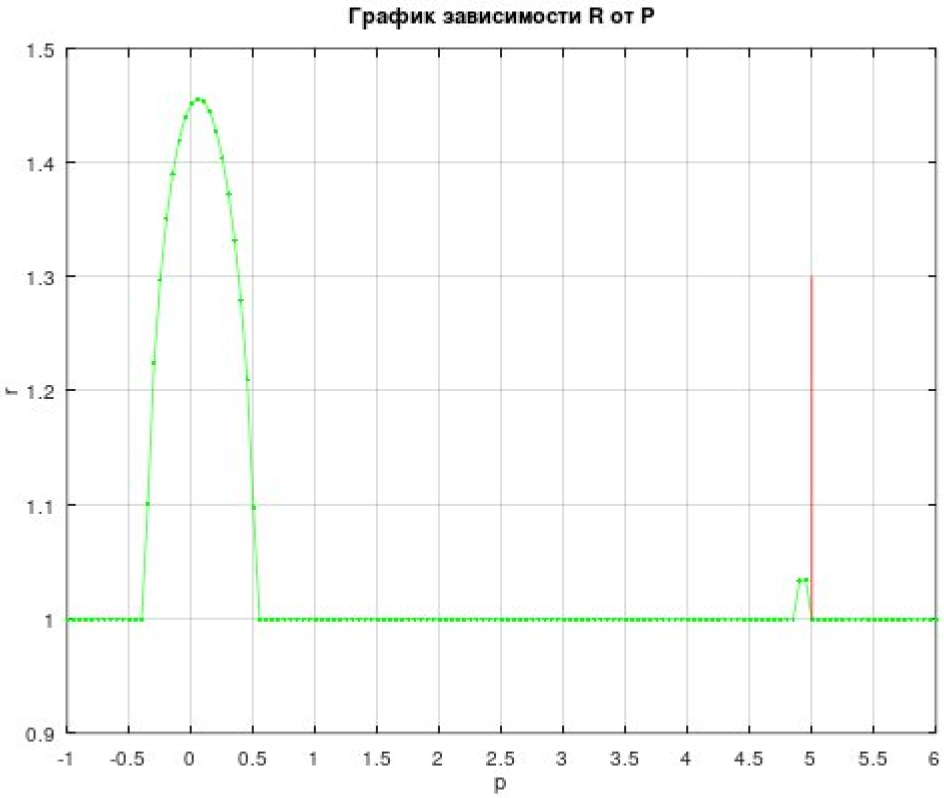

Рисунок 5 – график зависимости спектрального радиуса от параметра p.

Зона устойчивости – при p > 5

Вывод.

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена устойчивость однородного линейного уравнения с периодическими коэффициентами. Также была найдена точка, разделяющая зоны устойчивости и неустойчивости.