

**Вопросы к зачету по курсу**  
**«Обыкновенные дифференциальные уравнения», весенний семестр, 2021/22 уч.год.**

1. Определения:

решение дифференциального уравнения, общее решение, частное решение, интегральная кривая;  
фазовая траектория, фазовое пространство;  
фундаментальная матрица для линейной системы;  
основная матрица фундаментальной матрицы для периодической системы;  
задача Коши для одного уравнения  $n$ -го порядка, для системы  $n$  уравнений 1-го порядка;  
функция Ляпунова;  
устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость;  
орбитальная устойчивость;  
линеаризация.

2. Теоремы и свойства:

теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для общей системы и для линейной системы;  
структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем;  
связь свойств основной матрицы с устойчивостью линейной периодической системы;  
теорема об устойчивости по первому приближению.

3. Практика:

Определить, к какому из трех типов относится данное уравнение 1-го порядка (с разд переменными, однородное, линейное), знать принцип решения ;  
Решить задачу Коши для конкретного уравнения  $x'' + px' + qx = f(t)$ ;  
Определить тип особой точки линейной однородной системы с постоянными коэффициентами ( $n=2$ ).

**Больше, чем на тройку – надо уметь что-нибудь доказывать(2-3 теоремы ).**

**Вопросы для самоконтроля.**

1. Фазовая траектория и интегральная кривая - геометрические образы решений дифференциального уравнения.  
Чем они отличаются друг от друга?
2. Что такое фазовый портрет системы?
3. В чем геометрический смысл задачи Коши?
4. В чем физический смысл задачи Коши (на примере какой-нибудь физической задачи)?
5. Почему понятие «фазовая траектория» не используется для неавтономных систем?
6. Могут ли две интегральные кривые пересекаться?
7. Может ли интегральная кривая самопересекаться?
8. Тот же вопрос для фазовых траекторий.
9. Пусть  $x(t)$  – периодическое решение уравнения  $x'' = f(x, x')$ . Что можно сказать про его фазовую траекторию?
10. Как применять теорию линейных систем 1-го порядка к одному уравнению  $n$ -го порядка?

11. Линейная система – частный случай общей системы. Зачем нужны две отдельные теоремы существования и единственности решения задачи Коши?
12. Дано уравнения  $x' = f(t, x)$ , где  $f(t, x)$  и  $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$  непрерывны на всей плоскости  $(t, x)$ .  
Можно ли утверждать, что решение задачи Коши существует при любом начальном условии и при всех  $t$ ?
13. Тот же вопрос, если  $f(t, x) = a(t)x + b(t)$ .
14. Любое решение некоторой линейной однородной системы с постоянными коэффициентами стремится к 0 при  $t \rightarrow +\infty$ .  
Что можно сказать о собственных числах матрицы этой системы?
15. Аналогичный вопрос про основную матрицу периодической системы.
16. Любое решение некоторой линейной однородной системы с постоянными коэффициентами ограничено на промежутке  $[0; +\infty)$ .  
Что можно сказать о собственных числах матрицы этой системы?
17. Почему для систем общего вида введено понятие устойчивости отдельного решения, а для линейной системы устойчивость отдельного решения не рассматривается?
18. Некоторая линейная однородная система с  $T$ -периодическими коэффициентами имеет  $T$ -периодическое решение  $X(t)$ , удовлетворяющее условию  $X(0) = X_0$ . Укажите какой-нибудь собственный вектор и соответствующее собственное число основной матрицы системы.
19. Как связаны основные матрицы для двух фундаментальных матриц одной и той же системы уравнений?
20. Как связаны их собственные числа?
21. Найдите функцию Ляпунова для уравнения  $\varphi'' + \omega^2 \varphi = 0$