

## Мера на $[0, 3]$ , заданная функцией $f$

$$f(x) = x^2, \quad 0 \leq x < 1,$$

$$f(x) = 2, \quad 1 \leq x < 2$$

$$f(x) = 4 - (x - 3)^2, \quad 2 \leq x \leq 3$$

$f$  возрастает, непрерывна справа  $f(c) = f(c + 0)$

$$\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{f}(\mathbf{b} - \mathbf{0}) - \mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{0}) (= f(b - 0) - f(a))$$

если  $a$  и  $b$  точки непрерывности, то  $m\langle a, b \rangle = f(b) - f(a)$

### ЗАДАНИЕ

1) покажите, что функция  $f$  измерима

2) для произвольного множества  $A$  опишите дизъюнктное разбиение

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$$

где  $A_k$  либо  $A \cap (\alpha, \beta)$ , либо  $A \cap \{\gamma\}$

удобное для вычисления  $m(A)$

3) какие множества имеют меру ноль

какие множества измеримы (в терминах измеримости по Лебегу)

$$4) A = [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \cup [2, 7/3] \cup [8/3, 3], \quad \mathbf{m}(\mathbf{A}) = ?$$

$$5) \text{ вычислите } \int_0^3 g(x) dm \text{ для } g(x) = 9/4 - (x - 3/2)^2$$

вычислите норму функции  $g$  в пространстве  $L^2((0, 3), dm)$

$$\int_0^3 g^2(x) dm$$

существует ли линейная функция  $h(x) = ax + b$  ортогональная  $g$  в пространстве  $L^2((0, 3), dm)$