Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0 \qquad (1)$$

Одно уравнение n-го порядка равносильно системе 1-го порядка с n уравнениями, поэтому основные свойства решений уравнения (1) следуют из общих теорем о линейных системах. Однако при решении конкретных уравнений вида (1) удобней их решать, не переходя к системе уравнений.

Ищем решение в виде $e^{\lambda t}$. Подставив в (1), получим

$$e^{\lambda t}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0) = 0$$

Функция $e^{\lambda t}$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда $\lambda -$ корень характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad (2)$$

Рассмотрим возможные случаи.

1. Уравнение (2) имеет n различных вещественных корней.
   Докажем, что решения $e^{\lambda_j t}, j = 1,2, \dots, n$ линейно независимы.
   Действительно, пусть не так, т.е.
   $$\sum_1^n c_j e^{\lambda_j t} = 0,$$
   причем хотя бы одно из чисел $c_j \neq 0$. Продифференцируем $(n-1)$ раз, получим при $t = 0$ систему из n однородных уравнений относительно неизвестных c_j. Определитель системы – определитель Вандермонда не равен 0 (почему?). Значит, система имеет только нулевое решение. Противоречие! Линейная независимость доказана.
2. Уравнение (2) имеет n различных корней, среди которых есть и комплексные.
   Как и раньше, имеем n линейно независимых решений $e^{\lambda_j t}, j = 1,2, \dots, n.$ Некоторые пары решений будут комплексными. Вещественным λ_j, как и в пункте 1., соответствуют решения $e^{\lambda_j t}$. Каждой паре комплексных корней соответствует пара комплексных решений.
   Например, при $\lambda_j = \alpha \pm \beta i$ имеем
   $$x_1(t) = e^{(\alpha + i\beta)t}, \qquad x_2(t) = e^{(\alpha - i\beta)t}$$
   Строим пару линейно независимых вещественных решений
   $$y_1(t) = \frac{1}{2}\big(x_1(t) + x_2(t)\big) = e^{\alpha t}\cos\beta t,$$
   $$y_2(t) = \frac{1}{2i}\big(x_1(t) - x_2(t)\big) = e^{\alpha t}\sin\beta t. \qquad \text{(почему линейно независимы?)}$$
3. Имеются кратные корни.
   Пусть $\lambda -$ вещественный корень кратности k. Ему соответствуют k линейно независимых решений вида $P(t)\, e^{\lambda t}$, где $P(t) -$ некоторый многочлен степени не выше (k-1). Это будет доказано при рассмотрении систем уравнений.
   В случае кратного комплексного корня решения имеют вид
   $$P(t)e^{\alpha t}\cos\beta t, \qquad Q(t)\, e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Практическое решение однородного уравнения

Задача Коши

Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$x^{(m)}(t_0) = x_m, m = 0,1,2, \dots, n-1 \qquad (2)$$

Выписываем общее решение в виде суммы следующих слагаемых.
Каждому вещественному корню λ кратности k соответствует слагаемое вида

$$(c_0 + c_1 t + \dots + c_{k-1} t^{k-1}) e^{\lambda t}$$

с неопределенными коэффициентами.
Каждой паре комплексных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ кратности k соответствует слагаемое вида

$$(c_0 + c_1 t + \dots + c_{k-1} t^{k-1}) e^{\alpha t} cos\beta t + (d_0 + d_1 t + \dots + d_{k-1} t^{k-1}) e^{\alpha t} sin\beta t$$

Подставив общее решение в (2), получим систему n уравнений для n неизвестных.
Из общей теории следует, что эта система однозначно разрешима.

Теперь перейдем от одного уравнения n-го порядка к системе n уравнений 1-го порядка.

Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (3)$$

В матричной записи система (3) выглядит так

$$X' = AX \qquad (3')$$

<u>Как построить базис в этом пространстве?</u>
Пусть набор векторов $U_1, U_2, \dots, U_n$ образует базис в пространстве R^n. Ранее было доказано, что взяв базисные векторы в качестве начальных векторов, получим базис в пространстве решений

$$X(t,U_1), X(t,U_2), \dots, X(t,U_n).$$

<u>Как выглядят эти решения?</u>
Для системы уравнений с переменной матрицей A получить базисные решения в явном виде как правило невозможно. Если же матрица A постоянна, то отыскание этих решений сводится к известной задаче линейной алгебры. Идея та же, что и для одного уравнения. Ищем какое-нибудь решение уравнения (3) в виде $X(t) = Ue^{\lambda t}$, $U -$ неизвестный вектор. Подставим в (3')

$\lambda U = AU$. Поэтому функция $Ue^{\lambda t}$ является решением системы тогда и только тогда, когда $\lambda -$ собственное число оператора A, а $U -$ собственный вектор . Собственные числа являются корнями характеристического уравнения

$$|A - \lambda E| = 0.$$

При этом собственные числа являются **инвариантами системы**.
Действительно, при переходе другому базису вектор переменных преобразуется по формуле $X = BY$, где B невырожденная постоянная матрица. Имеем

$BY' = ABY \Longrightarrow Y' = B^{-1}ABY$. Обозначим $D = B^{-1}AB$. Итак, Y является решением системы

$$Y' = DY \qquad (4)$$

Матрицы A и C, связанные соотношением $D = B^{-1}AB$ называются подобными. Их собственные числа совпадают.
Матрицу B можно выбрать так, что преобразованная матрица системы будет иметь наиболее простой вид, т.е. форму Жордана. Матрица D состоит из блоков, называемых ящиками Жордана.

Каждому собственному числу λ кратности k соответствует блок в виде квадратной матрицы размера k. Например, при $k = 3$

А) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ или Б) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Вариант А) соответствует собственному числу, у которого ровно один собственный вектор и $(k-1)$ присоединенных векторов.

Присоединенные векторы строятся так. Пусть U_1 - собственный вектор, а $U_2, U_3, \dots, U_k$ цепочка присоединенных векторов, соответствующих вектору U_1. Тогда

$(A-\lambda E)u_1 = 0; \quad (A-\lambda E)u_2 = u_1; \ \dots \ (A-\lambda E)u_k = u_{k-1}$ (5)

Вариант Б) соответствует собственному числу, у которого ровно k линейно независимых собственных векторов и нет присоединенных. Сюда входит и случай $k = 1$.

Рассмотрим, какой вид принимает система (3) в случаях А) и Б).

1. *<u>Все собственные числа вещественные и нет присоединенных векторов</u>*
   В этом случае матрица D диагональная, а система (3) распадается на n скалярных уравннений типа $x' = \lambda x$. Собственные векторы U_j образуют базис в R^n и соответствующие решения $X_j(t) = U_j e^{\lambda_j t}$ образуют базис в пространстве решений. Общее решение имеет вид
   $$X(t, c_1, c_2, \dots, c_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, U_j e^{\lambda_j t}$$
   Каждая координата вектора $X(t, c_1, c_2, \dots, c_n) -$ линейная комбинация экспонент.

2. *<u>Все собственные числа вещественные и некоторые собственные числа имеют присоединенные векторы</u>*
   В этом случае можно построить базис из собственных и присоединенных векторов. При этом матрица D имеет блочную структуру и система (3) распадается на несколько независимых подсистем. Рассмотрим одну такую подсистему. Пусть, например, $k = 4$.
   $$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 + x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 + x_3 \\ x_3' = \lambda x_3 + x_4 \\ x_4' = \lambda x_4 \end{cases}$$
   Имеем один собственный вектор U_1и три присоединенных вектора $U_j, j = 2{,}3{,}4$.
   Определим многочлены, коэффициентами которых являются эти векторы
   $$W_1(t) = U_1, W_2(t) = U_2 + tU_1, W_3(t) = U_3 + tU_2 + \frac{t^2}{2!}U_1, W_4(t) = U_4 + tU_3 + \frac{t^2}{2!}U_2 + \frac{t^3}{3!}U_1$$
   Свойства многочленов: $\dfrac{dW_j}{dt} = W_{j-1}, \quad AW_j = \lambda W_j + W_{j-1}$
   Отсюда получаем линейно независимые решения
   $$X_j(t) = W_j(t)e^{\lambda t}, \ j = 1, \dots, 4 \qquad (6)$$
   Действительно, $\dfrac{dX_j}{dt} = \dfrac{dW_j}{dt}e^{\lambda t} + \lambda W_j e^{\lambda t} = (W_{j-1} + \lambda W_j)e^{\lambda t} = AW_j e^{\lambda t} = AX_j$
   Кроме того, $X_j(0) = U_j$.

3. *Среди собственных чисел имеются комплексные.*

Матрица А вещественная. Пусть $\lambda = \alpha + \beta i, \overline{\lambda} = \alpha - \beta i$ два собственных числа. Им соответствуют две цепочки сопряженных собственных и присоединенных векторов.

$U_j, \overline{U}_j$. Аналогично получаем два комплексных решения $X_j(t) = W_j(t)e^{\lambda t}, \quad \overline{X}_j(t) = \overline{W}_j(t)e^{\overline{\lambda}t}$ и наконец, два вещественных решения

$$Y_j(t) = (X_j(t) + \overline{X}_j(t))/2; \quad Y_j(t) = (X_j(t) - \overline{X}_j(t))/2i$$

Каждая компонента решения системы (1) - линейная комбинация экспонент $e^{\alpha t}$, умноженных на некоторую степень t и на $sin\beta t$ или $cos\beta t$.

Выводы.

1) Каждая координата вектора решения системы (1) - линейная комбинация экспонент $e^{\lambda_j t}$, возможно, с комплексными показателями, а в случае кратных корней характеристического уравнения экспоненты умножаются на некоторую степень переменной t.

2) Экспоненты с комплексными показателями преобразуются к виду $e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $e^{\alpha t}\sin\beta t$.

3) Поведение решений при $t \to +\infty$ зависит от знаков вещественных частей собственных чисел матрицы системы, т.е. от знака α.

Примеры.

1. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = -x_1 + 2x_2 \end{cases} \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3; \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + 2x_2 \end{cases} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^t;$$

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^t + c_2 (t-1) e^t \\ x_2(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases} \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}; \quad W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix}, W_2 = \overline{W}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}t + i\sin\sqrt{2}t \\ \sqrt{2}\, i\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\,\sin\sqrt{2}t \end{pmatrix}; \quad X_2(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}t - i\sin\sqrt{2}t \\ -\sqrt{2}\, i\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\,\sin\sqrt{2}t \end{pmatrix}$$

$$V_1(t) = [X_1(t) + X_2(t)]\frac{1}{2} = e^t \begin{pmatrix} 2\cos\sqrt{2}t \\ -2\sqrt{2}\,\sin\sqrt{2}t \end{pmatrix}; \quad V_2(t) = [X_1(t) - X_2(t)]\frac{1}{2i} = e^t \begin{pmatrix} \sin\sqrt{2}t \\ -\sqrt{2}\,\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}$$

$$c_1V_1 + c_2V_2 = e^t \begin{pmatrix} 2c_1\cos\sqrt{2}t + c_2\sin\sqrt{2}t \\ -2\sqrt{2}\,c_1\sin\sqrt{2}t - c_2\sqrt{2}\,\cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}$$

Зададим начальные условия $x_1(0) = 1$; $x_2(0) = 2$. Тогда

$2c_1 = 1$; $c_2\sqrt{2} = 2$. $\begin{cases} x_1(t) = e^t\left(\cos\sqrt{2}t + 2\sin\sqrt{2}t\right) \\ x_2(t) = e^t\left(-2\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\right) \end{cases}$