Функция Ляпунова

1. Наводящий пример.

Уравнение гармонических колебаний.
Умножим на x'и про интегрируем уравнение

$$x''+\omega^2 x=0 \Rightarrow x'^2+\omega^2 x^2=c \Leftrightarrow x_2^2+\omega^2 x_1^2=c \ . \qquad (1)$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\omega^2 x_1 \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь $x_1 = x(t);\ x_2 = x'(t)$. В фазовом пространстве переменных x_1 и x_2 уравнение (1) задает эллипс. Если начальная точка $\left(x_1(t_0);\ x_2(t_0)\right)$ находится на некотором эллипсе, то при всех t точка $\left(x_1(t);\ x_2(t)\right)$ будет оставаться на этом же эллипсе.

Если учитывать трение, то получим уравнение вида $x'' + kx' + \omega^2 x = 0$ (3)

Равносильная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -kx_2 - \omega^2 x_1 \end{cases} \qquad (4)$$

Рассмотрим функцию $L(x_1\,, x_2) = \omega^2 x_1^2 + x_2^2$. Ее линии уровня – эллипсы, причем оси эллипса тем меньше, чем ближе начальная точка к точке $(0; 0)$.
Подставим в нее решение системы (4) $\left(x_1(t);\ x_2(t)\right)$, получим $L\left(x_1(t), x_2(t)\right)$.
Продифференцируем полученное выражение по t . По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial L}{\partial x_2} x_2' = 2\omega^2 x_1 x_2 + 2x_2(-kx_2 - \omega^2 x_1) = -2kx_2^2$$

Отсюда следует, что $L\left(x_1(t), x_2(t)\right)$ - убывающая функция от t. Иначе говоря, точка $\left(x_1(t);\ x_2(t)\right)$ при возрастании t переходит с большего эллипса на меньший и в пределе получаем $\left(x_1(t);\ x_2(t)\right) \to (0; 0)$ при $t \to +\infty$. Это означает, что нулевое решение асимптотически устойчиво.

Этот пример показывает, что исследование поведения функции L вдоль решения позволяет ответить на вопрос об устойчивости. При этом не нужно решать дифференциальное уравнение.

2. Положительно определенная функция

Функция $\Phi(X)$ наз. положительно определенной в шаре **B**: $|X| \le R$, если
а) $\Phi(X) > 0$ при $X \ne 0$
б) $\Phi(0) = 0$.

Далеее считаем $\Phi(X)$ непрерывной в **B**.

Лемма. 1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |X| < \delta \Rightarrow \Phi(X) < \varepsilon$
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \Phi(X) < \delta \Rightarrow |X| < \varepsilon$

<u>*Доказательство*</u>.
1) Из непрерывности $\Phi(X)$ следует $\lim\limits_{X \to 0} \Phi(X) = \Phi(0)$.
По условию б) имеем $\Phi(0) = 0$. Итак, $\lim_{X \to 0} \Phi(X) = 0$, что и тр.доказать.
2) Пусть не так, т.е. из малости $\Phi(X)$ не следует малость X.
Тогда $\exists X_n : \Phi(X_n) \to 0$, но при этом $|X_n| \ge \varepsilon$.
Выберем сходящуюся подпоследовательность $X_n \to X_0$. Тогда в силу непрервности
$\lim\limits_{X_n \to X_0} \Phi(X_n) = \Phi(X_0) = 0$. Но $|X_n| \ge \varepsilon \Rightarrow |X_0| \ge \varepsilon$
Противоречит пункту а) определения положительно определенной функции!

3. Производная в силу системы

Обозначим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; F(X) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

и рассмотрим систему

$$X' = F(X), \quad F(0) = 0$$

Рассмотрим произвольную функцию $L(X)$.
Функция

$$\dot{L}(X) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_j} f_j(X) \qquad (2)$$

называется производной от L в силу системы (1).
Если подставить в L решение $X(t)$, то $\dot{L}(X(t)) = \frac{d}{dt} L(X(t))$,т.е. $\dot{L}$ в этом стучае совпадает с обычной произвдной по переменной t . Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{d}{dt} L\big(X(t)\big) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_j} x_j{}'$$

Учитывая , что $x_j' = f_j(X)$, получаем $\dot{L}(X(t)) = \frac{d}{dt} L\big(X(t)\big)$.
Далее будем рассматривать $\dot{L}(X)$ просто как функцию переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Функция $L(X)$ называется функцией Ляпунова системы (1), если

а) положительно определена в некотором шаре B: $|X| < R$;

б)$\dot{L}(X) \leq 0, \quad X \epsilon B$.

4. Теоремы об устойчивости

Теорема 1 .

Если для (1) существует функция Ляпунова, то нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Рассмотрим три множества

$$B_1: |X| \leq \varepsilon, \; B_2: L(X) \leq \delta, \; B_3: |X| \leq \delta_1$$

По доказанной выше лемме можно выбрать константы $\varepsilon, \delta, \delta_1$ так, чтобы $B_3 \subset B_2 \subset B_1$. По теореме существования решение $X(t, X_0), \quad X_0 \in B_3$, существует и единственно при $0 \leq t < t_{max}$.

Кроме того, решение не выходит из B_2 , следовательно, и из B_1. Докажем, что t_{max} не может быть конечным числом.

Уравнение (1) равносильно интегральному уравнению

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F(\tau, X(\tau)) d\tau, \quad 0 \leq t < t_{\max} \qquad (3)$$

Решение непрерывная функция и, кроме того ограниченная, так как решение не выходит из B_2 . Поэтому в (3) можно перейти к пределу при $t \to t_{max}$. Отсюда

$$X_1 = X_0 + \int_0^{t_{\max}} F(\tau, X(\tau)) d\tau, \qquad X_1 = \lim_{t \to t_{\max}} X(t).$$

При этом X_1 тоже принадлежит B_2 . Но тогда можно продолжить решение дальше, взяв X_1 в качестве начального вектора это противоречит определению t_{max} . Итак, решение существует при всех t > 0 и |X(t)|<ε. **Нулевое решение устойчиво!**

Теорема 2 . Если функция Ляпунова вместо свойства б) удовлетворяет условию

в) $\dot{L}(X) \leq -M(X), \forall X \in B$,

$M(X)-$ положительно определенная непрерывная функция, то нулевое решение асимптотически устойчиво.

<u>Доказательство</u>.

Обозначим $a = \inf L(X(t,X_0))$, $b = \inf M(X(t,X_0))$. Докажем , что $a = 0$. Отсюда будет следовать асимптотическая устойчивость.

Пусть не так, т.е. $a > 0$. Тогда $|X(t,X_0)| > r > 0$, но тогда и $b > 0$, иначе для некоторой последовательности значений $X(t,X_0)$ выполнялось бы $M(X(t,X_0)) \to 0$, а это противоречит положительной определенности функции $M(X)$. Итак, $b > 0$, и из условия в) получаем

$$\frac{d}{dt}L(X(t,X_0)) \le -b$$

Интегрируя от 0 до t, получаем $L(X(t,X_0)) \le L(X_0) - bt$. Отсюда $L(X(t,X_0)) \to -\infty, \quad t \to +\infty,$ что противоречит положительной определенности.