

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра АМ

ОТЧЕТ
по индивидуальному домашнему заданию №2
по дисциплине «Элементы функционального анализа»
Тема: Норма линейного оператора

Студент гр. 9383

Ноздрин В.Я.

Преподаватель

Коточигов А.М.

Санкт-Петербург

2022

Цель работы.

Вычислить норму линейного оператора матрицы

Выполнение работы.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{25}{4} & \frac{9}{8} & \frac{3}{4} & \frac{25}{8} \\ \frac{23}{4} & \frac{55}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\ -2 & -1 & 10 & -1 \\ \frac{39}{4} & \frac{39}{8} & -\frac{51}{4} & \frac{55}{8} \end{bmatrix} \text{ — матрица линейного оператора } A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

Норма A в пространстве l_4^1 вычисляется как максимальная сумма в столбцах матрицы.

$$\|A\| = \sup \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Суммы равны соответственно $79/4$, $95/8$, $-11/4$ и $79/8$. Откуда $\|A\| = 19.75$

Достигается на векторе $(25/4 \quad 23/4 \quad -2 \quad 39/4)$

Норма A в пространстве l_4^∞ вычисляется как максимальная сумма в строках матрицы.

$$\|A\| = \sup \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Суммы равны соответственно $45/4$, $21/2$, 6 и $35/4$. Откуда $\|A\| = 11.25$

Достигается на векторе $(25/4 \quad 9/8 \quad 3/4 \quad 25/8)$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.34375 & 0.046875 & -0.28125 & -0.203125 \\ -0.25 & 0.125 & 0.1875 & 0.125 \\ 0.015625 & 0.0078125 & 0.109375 & 0.0078125 \\ -0.28125 & -0.140625 & 0.46875 & 0.359375 \end{bmatrix} \text{ — матрица обратного оператора.}$$

Нормы в пространствах l_4^1 и l_4^∞ равны соответственно 0.484375 и 0.40625 .

Достигаются на векторах $(-0.28125 \quad 0.1875 \quad 0.109375 \quad 0.46875)$

и $(-0.28125 \quad -0.140625 \quad 0.46875 \quad 0.359375)$

Суммы по столбцам равны -0.171875 , 0.0390625 , 0.484375 , 0.2890625 .

Суммы по строкам равны -0.09375 , 0.1875 , 0.140625 , 0.40625 .

$$\|A^{-1}\|_{l_4^1} = 0.484375 \quad \|A^{-1}\|_{l_4^\infty} = 0.40625$$

Число обусловленности оператора A определяется как $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

И равно $19.75 \cdot 0.484375 = 9.56640625$ в пространстве l_4^1

И $11.25 \cdot 0.40625 = 4.5703125$ в пространстве l_4^∞

Теперь составим матрицу $A^* = A^T$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{25}{4} & \frac{9}{8} & \frac{3}{4} & \frac{25}{8} \\ \frac{23}{4} & \frac{55}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\ -2 & -1 & 10 & -1 \\ \frac{39}{4} & \frac{39}{8} & -\frac{51}{4} & \frac{55}{8} \end{bmatrix} \quad A^* = \begin{bmatrix} \frac{25}{4} & \frac{23}{4} & -2 & \frac{39}{4} \\ \frac{9}{8} & \frac{55}{8} & -1 & \frac{39}{8} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 10 & -\frac{51}{4} \\ \frac{25}{8} & \frac{7}{8} & -1 & \frac{55}{8} \end{bmatrix} \quad G = A \cdot A^* = \begin{bmatrix} \frac{1621}{32} & \frac{1467}{32} & -\frac{37}{4} & \frac{2507}{32} \\ \frac{1467}{32} & \frac{2613}{32} & -\frac{107}{4} & \frac{3365}{32} \\ -\frac{37}{4} & -\frac{107}{4} & 106 & -\frac{635}{4} \\ \frac{2507}{32} & \frac{3365}{32} & -\frac{635}{4} & \frac{10517}{32} \end{bmatrix}$$

$\det G = 1048576 > 0$, матрица положительно определена.

Собственные числа равны

$$\lambda_1 \approx 1.304 \quad \lambda_2 \approx 20.471 \quad \lambda_3 \approx 85.453 \quad \lambda_4 \approx 459.741$$

Собственные вектора

$$v_1 \approx \begin{pmatrix} -1.144 \\ -0.202 \\ 1.364 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 \approx \begin{pmatrix} 2.793 \\ -3.322 \\ 1.119 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 \approx \begin{pmatrix} -8.741 \\ -10.278 \\ -9.590 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 \approx \begin{pmatrix} 0.241 \\ 0.341 \\ -0.481 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем число обусловленности оператора A в пространстве l_4^2 .

Норма $A \cdot A^*$ в l_4^2 это максимум из собственных чисел матрицы G , то есть 459.741

Далее вычислим норму $A^{-1} \cdot A^{-1*}$ в l_4^2

$$A^{-1} \cdot A^{-1*} = \{$$

$$\begin{array}{cccc} 493/2048 & -81/512 & -109/4096 & -631/2048 \\ -81/512 & 33/256 & 19/1024 & 95/512 \\ -109/4096 & 19/1024 & 101/8192 & 199/4096 \\ -631/2048 & 95/512 & 199/4096 & 917/2048 \end{array}$$

}

Собственные числа равны

$$\lambda_1 \approx 0.002 \quad \lambda_2 \approx 0.012 \quad \lambda_3 \approx 0.049 \quad \lambda_4 \approx 0.767$$

Норма $A^{-1} \cdot A^{-1*}$ равна 0.767

Число обусловленности равно $\sqrt{459.741} \sqrt{0.767} = 18.78$