Примеры физических задач, приводящих к дифференциальным уравнениям

1. **Падение тела в атмосфере.**
   Обозначения:
   $h(t)$ – расстояние до поверхности земли в момент времени t;
   $h_0 = h(0)$;
   m – масса тела.
   Тогда $v(t) = \left(h_0 - h(t)\right)' = -h'(t)$ скорость падения, $a(t) = v'(t) = h''(t)$ – ускорение.
   На тело действуют сила тяжести mg и сопротивление воздуха, пропорциональное скорости. По второму закону Ньютона
   $ma = mg - kv \Longrightarrow mv' = mg - kv \Longrightarrow v' = g - \frac{k}{m}v$.
   Обозначив, $b = \frac{k}{m}$, получим
   $$v' = g - bv \qquad (1)$$
   и
   $$h'' = bh' - g \qquad (2)$$
   Уравнение (1) описывает закон изменения скорости падения, а уравнение (2) - закон изменения расстояния до земли. Чтобы получить для $v(t)$, $h(t)$ зависимость от времени в явном виде, нужно решить эти уравнения. Это будет сделано позже.
   Покажем, что можно извлечь из уравнения (1), не решая его.
   Обозначим $v_0 = v(0)$ – начальная скорость тела. Рассмотрим три случая.
   а) $v_0 = g/b$.
   В этом случае $v(t) \equiv g/b$, $v'(t) \equiv 0$. Это означает, что во время падения скорость постоянна и равна g/b.
   б) $v_0 > g/b$. Тогда в начале движения $v'(t) < 0$, $v(t) \searrow$. Физический смысл понятен. Действительно, если начальная скорость достаточно велика, то сопротивление воздуха велико, поэтому движение замедляется. Монотонно убывающая ограниченная функция имеет предел при $t \to +\infty$. Очевидно, этот предел $\geq g/b$. Можно доказать, что он равен g/b. (Почему?).
   в) $v_0 < g/b$. Здесь начальная скорость мала, поэтому сопротивление воздуха мало и основную роль играет сила тяжести. Тогда в начале движения $v'(t) > 0$, $v(t) \nearrow$. Монотонно возрастающая ограниченная функция имеет предел при $t \to +\infty$. Можно доказать, что он и в этом случае равен g/b.
   Итак, независимо от начальной скорости при падении с большой высоты скорость стабилизируется и становится практически равной g/b.
2. **Вытекание воды из сосуда**
   Сосуд в виде конуса вершиной вниз. Вода вытекает из через тонкую трубку, приделанную к вершине конуса. Пусть $V(t)$ – объем воды в момент t, а $h(t)$ – высота водяного столба над вершиной. Очевидно, $V(t) = ah^3(t)$, коэффициент пропорциональности a зависит от формы конуса. Скорость вытекания равна

$$V'(t) = a3h^2(t)h'(t)$$

Та же скорость вытекания определяется законом Торричелли

$$b\sqrt{h(t)}$$

Получаем дифференциальное уравнение

$$a3h^2h' = -b\sqrt{h} \implies h' = -kh^{-1,5}, \quad k = b/(3a)\,.$$

Пусть $h(0) = h_0$. Запишем уравнение в виде

$$dh/dt = -kh^{-1,5} \Rightarrow h^{1,5}dh = -kdt$$

Интегрируем обе части от 0 до t

$$\int_{h_0}^{h} h^{1,5}dh = \left(h^{2,5} - h_0^{2,5}\right)/2,5 = -kt$$

Отсюда $\quad h(t) = \left(h_0^{2,5} - 2,5kt\right)^{1/2,5}$.

Вычислим T — время, за которое вся вода вытечет из сосуда. Имеем

$$h(T) = 0 \implies h_0^{2,5} - 2,5kT = 0 \Rightarrow T = 0,4\,h_0^{2,5}/k$$

3. **Колебания маятника.**

Маятник в виде стержня, один конец которого закреплен в точке подвеса, а к другому концу прикреплена масса m. Пусть l — длина стержня, а φ — угол отклонения от положения равновесия. Массу самого стержня не учитываем.
В процессе колебаний масса m перемещается по дуге окружности радиуса l. Колебания порождаются только составляющей силы тяжести вдоль касательной к этой дуге.
По второму закону Ньютона получаем уравнение

$$ml\varphi'' = -mg\sin\varphi \Rightarrow \varphi'' + \omega^2\sin\varphi = 0, \quad \omega^2 = g/l \qquad (3)$$

Уравнение (3) описывает колебания маятника при отсутствии трения. При наличии трения в уравнение (3) добавляется еще одно слагаемое. Обычно силу трения считают пропорциональной скорости колебания, т.е. $F_{\text{тр}} = a\varphi'$. Получим уравнение

$$\varphi'' + a\varphi' + \omega^2\sin\varphi = 0. \qquad (3')$$

Для малых колебаний имеем $\sin\varphi \sim \varphi$, получим уравнение

$$\varphi'' + a\varphi' + \omega^2\,\varphi = 0.$$

Решением таких уравнений займемся позже.

Основные определения

<u>Определение</u>**.** Уравнение

$$f\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (4)$$

называется **обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка**.
Здесь
x — независимая переменная, $y, y', \dots, y^{(n)}$ — неизвестная функция и ее производные до n-го порядка включительно.
Часто дифференциальное уравнение записывают в другой форме

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \qquad (5)$$

В рассмотренных выше физических задачах получились уравнения 1-го и 2-го порядков.

<u>Определение</u>**.** Функция $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ называется **решением** дифференциального уравнения, если при подстановке ее в уравнение вместо y уравнение превращается в тождество.
<u>Определение</u>**.** График решения называется **интегральной кривой**.

Процесс решения дифференциального уравнения, как и процесс вычисления интеграла, называется **интегрированием.**

<u>Пример</u>**.**
$y' = -y^2$ (6)
Запишем уравнение в виде

$$dy = -y^2 dx \Longrightarrow -\frac{dy}{y^2} = dx$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получаем

$$\frac{1}{y} = x + c \Longrightarrow y = \frac{1}{x+c} \qquad (7)$$

Полученное решение содержит произвольную постоянную. При любом конкретном значении постоянной получаем решение уравнения (6). Значит, дифференциальное уравнение имеет **бесконечно много решений**. Можно доказать, что любое решение уравнения (6), кроме нулевого(почему?), получается из (7) при подходящем значении постоянной. Такое выражение называется **общим решением** дифференциального уравнения.
Дадим более точное определение общего решения для уравнения 1-го порядка

$$y' = f(x, y) \qquad (8)$$

<u>Определение</u>.
Функция $y(x, c)$ называется **общим решением** уравнения (8) в области $D \subset R^2$, если для каждой точки $(x_0; y_0) \epsilon D$ найдется такое значение постоянной с , при котором функция $y(x, c)$ будет решением уравнения (8) , определенным в окрестности точки $(x_0; y_0)$, и удовлетворяющим условию

$$y(x_0, c) = y_0 \qquad (9)$$

Другими словами, для каждой точки $(x_0; y_0) \epsilon D$ найдется такое значение постоянной с , при котором график функции $y(x, c)$, т.е. интегральная кривая, проходит через точку $(x_0; y_0)$.
Общему решению соответствует **семейство интегральных кривых**, заполняющее область D .
В примере функция $y(x, c) = \frac{1}{x+c}$ является общим решением уравнения (6) в любой

области, не содержащей точки $(0;0)$ (почему?) . Интегральные кривые – это гиперболы.

Задача Коши

1. Для уравнения 1-го порядка

Дано: уравнение $y' = f(x,y)$ и два числа $(x_0; y_0)$.

Требуется: найти решение $y(x)$, определенное в окрестности точки x_0 и удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0. \qquad (10)$$

На языке геометрии задача Коши состоит в отыскании интегральной кривой, проходящей через данную точку $(x_0; y_0)$

2. Для уравнения 2-го порядка

Дано: уравнение $y'' = f(x,y,y')$ и три числа $(x_0; y_0; y_1)$.

Требуется: найти решение $y(x)$, определенное в окрестности точки x_0 и удовлетворяющее условию

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1. \end{cases} \qquad (11)$$

На языке геометрии задача Коши состоит в отыскании интегральной кривой, проходящей через данную точку $(x_0; y_0; y_1)$ трехмерного пространства.

Фазовое пространство

Условия (10) и (11) называются начальными. Они определяют исходное состояние системы.

Под термином **состояние системы** для уравнения 1-го порядка понимается число $y(x)$ – состояние системы в точке x.

В примере с вытеканием воды состояние системы это $V(t)$ – объем воды в сосуде в момент t, а в примере с маятником состояние в момент времени t это пара чисел $(\varphi(t); \varphi'(t))$, т.е. отклонение от положения равновесия и угловая скорость .

Очевидно, состояние системы меняется с изменением независимой переменной.

Таким образом, задача Коши состоит в определении состояния данной системы при любом значении независимой переменной (часто это время), если задано начальное состояние системы.

Множество состояний системы называется **фазовым пространством**.

Состояние системы – это точка фазового пространства. Размерность фазового пространства совпадает с порядком дифференциального уравнения.

Пример. Вернемся к рассмотренному выше примеру

Задача Коши: $y' = -y^2, \quad y(0) = -1.$

Имеем общее решение $y = \frac{1}{x+c}$. Используем начальное условие

$$\frac{1}{0+c} = -1 \Rightarrow c = -1.$$

Решение задачи $y(x) = 1/(x-1)$.
Заметим, что это решение имеет точку бесконечного разрыва при $x = 1$, хотя по виду дифференциального уравнения ничто не указывало на наличие разрыва. Это типичная ситуация для нелинейных уравнений.
Для нелинейных дифференциальных уравнений не всегда можно предсказать заранее, на каком интервале независимой переменной существует решение задачи Коши.

Приведем без доказательства **достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши**
Ограничимся формулировкой для уравнения 1-го и 2-го порядков.

Теорема
Если $f(x,y)$ и $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ непрерывны в некоторой области $D \subset R^2$, то для каждой точки $(x_0; y_0) \epsilon D$ $\exists \varepsilon > 0$, что решение $y(x)$ задачи Коши с начальными данными $(x_0; y_0)$ существует и единственно на интервале $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$.

Для уравнения 2-го порядка формулировка Теоремы аналогична. Требуется непрерывность функций $f(x, y, y')$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,y')$, $\frac{\partial}{\partial y'} f(x,y,y')$.
Замечания.
1. Дифференцируемости по переменной x не требуется, достаточно только непрерывности.
2. Число ε, определяющее длину интервала существования решения, в общем случае зависит от точки $(x_0; y_0)$.
3. Если известно общее решение в явном виде, то его можно использовать для решения задачи Коши. Например, для уравнения 1-го порядка подставив начальное условие в общее решение, получим уравнение для неизвестной постоянной c : $y(x_0, c) = y_0$. Теорема гарантирует, что решение существует и единственно.

Краевая задача

Дано: уравнение $y'' = f(x, y, y'), a < x < b,$ (13)
и два числа $(y_a; y_b)$.
Требуется: найти решение уравнения (13), удовлетворяющее условиям
$$\begin{cases} y(a) = y_a \\ y(b) = y_b. \end{cases} \quad (14)$$

Такая задача называется **краевой**, а условия (14) – **краевыми или граничными**.
По сравнению с задачей Коши, краевая задача более сложна и с теоретической и с практической точек зрения. Она не всегда имеет решение, а когда решение существует, оно не всегда единственно.

Пример краевой задачи.

$y'' = -\omega^2 y, 0 < x < 1\ , \begin{cases} y(0) = y_0 \\ y(1) = y_1 \end{cases}.$

Примем без доказательства, что общее решение имеет вид (это будет доказано позже)

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 \cos \omega x + c_2\ \sin \omega x$$

Из краевых условий имеем

$$\begin{cases} c_1 = y_0 \\ c_1 \cos \omega + c_2\ \sin \omega = y_1 \end{cases}.$$

Отсюда $c_2\ = (y_1 - y_0 \cos \omega)/\sin \omega$. Возможны следующие варианты:

а) $\omega \neq \pi n$. Решение существует и единственно:

$y(x) = y_0 \cos \omega x + \frac{(y_1 - y_0 \cos \omega)}{\sin \omega} \sin \omega x;$

б) $\omega = \pi n,\ \ y_1 - y_0 \cos \omega \neq 0.$ Нет решения;

в) $\omega = \pi n,\ \ y_1 - y_0 \cos \omega = 0.$ Бесконечно много решений. Действительно, например, при $\omega = 2\pi$ получим $y_1 - y_0 = 0.$ Тогда решение имеет вид $y(x) = y_0 \cos 2\pi x + c_2\ \sin 2\pi x$, где c_2 — произвольная постоянная.