Сжимающие отображения

Метрические пространства.

Множество М наз. **метрическим пространством**, если $\exists$ такая функция $\rho(x,y),\ x,y\in M$, что для $\forall x,y\in M$

1. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$
2. $\rho(x,y)\ge 0$
3. $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
4. $\forall x,y,z\in M$, $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$

Примеры.

1. Числовая ось. $\rho(x,y)=|x-y|$
2. Евклидово пространство R^n. $\rho(x,y)=|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$
3. Пространство С непрерывных на $[a;\ b]$ функций . $\rho(x,y)=\max|x(t)-y(t)|$
4. Шар $x\in B(a,r):\rho(x,a)\le r$

$x_n\to a\Leftrightarrow\rho(x_n,a)\to 0$

Последовательность x_n наз. **фундаментальной**, если $\forall\varepsilon>0\quad\exists N>0,$ что $\forall m,n>N$ выполнено

$$\rho(x_m,x_n)<\varepsilon$$

Пространство наз. **полным**, если в нем любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Отображения

$\Phi:x\to y=\Phi(x)$

Элемент $b\in M$ наз. пределом отображения Φ в точке а, если $\forall x_n\to a$ выполняется $\Phi(x_n)\to b$

Отображение Ф наз. **непрерывным** в точке а, если $\lim\limits_{x\to a}\Phi(x)=\Phi(a)$

Отображение Ф наз. **сжимающим**, если существует такое число $0\le\lambda<1$, что

$\forall x_1,x_2\in M:\ \rho(\Phi(x_1),\Phi(x_2))\le\lambda\rho(x_1,x_2)$

Теорема. Сжимающее отображение является непрерывным (докажите).

Элемент x наз. **неподвижной точкой** отображения Ф, если $x=\Phi(x)$

Теорема. Всякое сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство.

Определим последовательность x_n формулой $x_{n+1}=\Phi(x_n), n=1,2,3,\ldots$

$\rho(x_{n+1},x_n)=\rho(\Phi(x_n),\Phi(x_{n-1}))<\lambda\rho(x_n,x_{n-1})$. Отсюда

$\rho(x_{n+1},x_n)<\lambda^{n-1}\rho(x_2,x_1)$

Далее, пусть m > n, тогда

$\rho(x_m,x_n)\le\rho(x_m,x_{m-1})+\rho(x_{m-1},x_n)\le\rho(x_m,x_{m-1})+\rho(x_{m-1},x_{m-2})+\ldots+\rho(x_{n+1},x_n)$.

$\rho(x_m,x_n)\le\rho(x_2,x_1)(\lambda^{m-2}+\lambda^{m-3}+\ldots+\lambda^{n-1})$

$\rho(x_m,x_n)\le\rho(x_2,x_1)\lambda^{n-1}(1+\lambda+\ldots+\lambda^{m-n-1})$

$\rho(x_m,x_n)\le\rho(x_2,x_1)\lambda^{n-1}/(1-\lambda)$ Отсюда следует, что x_n фундаментальная последовательность и, далее, $\exists\, x=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\ \Rightarrow$по непрерывности $x=\Phi(x)$

Докажем единственность неподвижной точки. Предположим, что $\exists y \neq x, \quad y = \Phi(y)$ Тогда
$\rho(x,y) = \rho(\Phi(x),\Phi(y)) \le \lambda\rho(x,y) \Rightarrow \rho(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

Рассмотрим уравнение
$X' = F(t, X)$ (2)
В качестве нормы вектора возьмем $|X| = \max\limits_i |x_i|$, а норма вектор-функции $X(t)$

$$|X(t)| = \max_{1\le i\le n, t\in[a;b]} |x_i(t)|$$

Пусть D – замкнутая область. Например, $D = I_\varepsilon \times B_r$,
где $I_\varepsilon = [t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon]$, $B_r : |X - X_0| \le r$.

Зададим точку $(t_0, X_0) = (t, x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}) \in D$ и поставим задачу Коши:
найти функцию $X(t)$, удовлетворяющую в некоторой окрестности точки t_0 уравнению (1) и начальному условию

$$X(t_0) = X_0 \qquad (3)$$

Область определения решения заранее не указывается, она может зависеть от начальных условий.

Теорема. Если сама функция $F(t, X)$ и ее частные производные по x_j непрерывны в D, то существует отрезок $[t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon]$, в котором решение задачи (2)-(3) существует и единственно..

<u>*Доказательство.*</u> Задача (1)-(2) $\Leftrightarrow X(t) = X_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(\tau, X(\tau))d\tau$ (4)

Определим оператор $\Phi(X) = X_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(\tau, X(\tau))d\tau$. Тогда уравнение (4) принимает вид

$$X = \Phi(X), \qquad (5)$$

т.е. X - **неподвижная точка** оператора Φ.
Рассмотрим множество M функций $X(t)$, определенных и непрерывных в $[t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon]$ и удовлетворяющих условиям

$$X(t_0) = X_0$$
$$\max_{|t-t_0|\le\varepsilon} |X(t) - X_0| \le r \qquad (6)$$

М – полное метрическое (**нелинейное**!) пространство.
Условие (6) означает, что множество значений любой функции из M принадлежит шару B_r. Т.е. траектории не покидают шар, а кривые – цилиндр.
Пусть $C = max\, F(t, X)$ по всем $X(t) \epsilon M$. Если $X(t)$ непрерывна на [t₀ – ε; t₀ + ε], то $\Phi(X)$ тоже непрерывна на [t₀ – ε; t₀ + ε] .
Вообще, если $X(t) \in M$, то не обязательно $\Phi(X(t)) \in M$, но при малом ε это так.

Действительно, $\rho(\Phi(X), X_0) = \max\left|\int\limits_{t_0}^{t} F(\tau, X)d\tau\right| \le \max\int\limits_{t_0}^{t} |F(\tau, X)|d\tau \le C\varepsilon \le r$.

Итак, Ф отображает M в себя.

Осталось доказать, что при достаточно малом ε отображение Φ является **сжимающим**.
Тем самым будет доказано, что уравнение (5) , а значит, и задача (2)-(3), имеет единственное решение.
По условию частные производные F по x_j непрерывны в D. Тогда

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \le A$$

Рассмотрим в множестве M любые две функции $X_1(t), X_2(t)$. Имеем

$$\Phi(X_1(t)) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(\tau, X_1(\tau)\big)d\tau, \quad \Phi(X_2(t)) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(\tau, X_2(\tau)\big)d\tau.$$

Отсюда

$$\rho\big(\Phi(X_1), \Phi(X_2)\big) = \max_{|t-t_0|\le\varepsilon} |\Phi(X_2(t)) - \Phi(X_1(t))| =$$

$$= \max\left|\int_{t_0}^{t}[F(\tau, X_1(\tau)) - F(\tau, X_2(\tau))]d\tau\right| \le \max\int_{t_0}^{t}\left|F(\tau, X_1(\tau)) - F(\tau, X_2(\tau))\right|d\tau$$

Далее,

$$\left|F(\tau, X_1(\tau)) - F(\tau, X_2(\tau))\right| \le \|A(\tau)\|\left|X_1(\tau)) - X_2(\tau)\right|, \quad a_{ij}(\tau) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tau, \tilde{X}(\tau)).$$

Пусть $H = \max_\tau ||A(\tau)||$. Тогда

$$\rho\big(\Phi(X_1), \Phi(X_2)\big) \le H\int_{t_0}^{t} |X_1(\tau) - X_2(\tau)|d\tau \le H\varepsilon\rho(X_1, X_2)$$

При достаточно малом ε имеем $\lambda = H\varepsilon < 1$. Доказано, что сжимающее отображение.
$\varnothing$

Замечания.

1. Область определения решения – отрезок $\left[t_0-\varepsilon; t_0+\varepsilon\right]$. Величина ε зависит только от $r,\ C = max|F(t, X|,\ \ H = max\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, X)\right|$
2. Если $F(t, X)$ непрерывна, а условие (1) не выполнено, то решение задачи (2)-(3) существует, но не обязательно единственное.

Пример.

$x' = 3x^{2/3} \Rightarrow dx/3x^{2/3} = dt \Rightarrow x^{1/3} = t + c \Rightarrow x = (t+c)^3$

Продолжение решений

Теорема гарантирует существование решения лишь в малой окрестности t_0 . На самом деле оно может существовать и в большем интервале. Действительно, решение $X(t)$ непрерывно на $\left[t_0-\varepsilon; t_0+\varepsilon\right]$. Значит, $\exists \lim\limits_{t\to t_0+\varepsilon} X(t) = X(t_0+\varepsilon)$. Обозначим $X_1 = X(t_0+\varepsilon), t_1 = t_0+\varepsilon$. Точка $(t_1; x_1) \in D$ и по теореме $\exists$ решение $Y(t)$ на $\left[t_1; t_1+\varepsilon_1\right]$. В силу единственности
$X(t) \equiv Y(t), t \in \left[t_0-\varepsilon; t_0+\varepsilon\right] \cap \left[t_1; t_1+\varepsilon_1\right]$, поэтому корректно определение
$Z(t) = \begin{cases} X(t), t \in \left[t_0-\varepsilon; t_0+\varepsilon\right] \\ Y(t), t \in \left[t_1; t_1+\varepsilon_1\right] \end{cases}$. $Z(t)$ - решение, определенное на $\left[t_0; t_0+\varepsilon+\varepsilon_1\right]$

называется продолжением вправо решения $X(t)$. Аналогично продолжается влево. Повторяя процесс, получим последовательность отрезков $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[a_n;b_n]=(a;b)$ - максимальный интервал, на котором существует решение. Может оказаться $(a;b)=R$. В общем случае максимальный интервал зависит от начального условия.