МЕРА ЛЕБЕГА. ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Определение

на подмножествах E отрезка

$[0,1]$ задана мера m, обладающая следующими свойствами:

1) $m(E) \geqslant 0$ (*неотрицательность*);

2) для любых непересекающихся множеств, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, выполнено $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$ (*аддитивность*),

то же верно для счетного числа слагаемых (*счетная аддитивность*);

3) $m(E) = m(E+x)$ для всех вещественных чисел x (*инвариантность по сдвигу*).

Толчком к построению теории меры послужил, построенный Кантором пример маленького множества, в котором содержится очень много точек. Конструкция множества очень проста: из отрезка $[0,1]$ удаляется средний отрезок $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$, эта процедура применяется к двум оставшимся отрезкам и так далее. Легко понять, что общая длина удаленных отрезков в пределе даст 1, но удалены не все точки. Остались, например, точки $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Более тщательный анализ показывает, что останутся все точки вида $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{3^n}$, $\varepsilon_n \in \{0,2\}$ (заметим, что $\frac{1}{3} = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{3^n}$). Но равномощное множество $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_n}{2^n}$, $\delta_n \in \{0,1\}$, представляет собой двоичную запись координат всех точек отрезка $[0,1]$, то есть множество этих точек несчетно.

Решая задачи, связанные с функциями, невозможно уклониться от предельных переходов, и здесь очень важно, чтобы мера обладала свойством счетной аддитивности, то есть мера счетного объединения непересекающихся измеримых множеств равнялась бы сумме мер этих множеств. Если принять это требование, то окажется, что даже на отрезке (в размерности один) не существует меры, заданной на всех подмножествах отрезка $[0, 1]$.

Предположим, что на всех подмножествах E отрезка $[0, 1]$ задана мера m, обладающая следующими свойствами:

1) $m(E) \geqslant 0$ (*неотрицательность*);

2) для любых непересекающихся множеств, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, выполнено $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$ (*аддитивность*),
то же верно для счетного числа слагаемых (*счетная аддитивность*);

3) $m(E) = m(E+x)$ для всех вещественных чисел x (*инвариантность по сдвигу*).

Чтобы доказать, что такой меры не существует, построим счетную систему множеств, для которой не выполнено условие аддитивности.

Множество удобно строить на единичной окружности $T = \{e^{i\pi t} : t \in [0,1]\}$. Фиксируем иррациональное число $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, и для каждого числа $t \in [0,1]$ определим множество $A(t) = \{e^{i(\pi t + \alpha n)}\}$.

все множества $A(t)$ счетны;

множества либо совпадают, либо не пересекаются: если существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $t_1 - t_2 = m\alpha$, то $A(t_1) = A(t_2)$, иначе $A(t_1) \cap A(t_2) = \varnothing$.

Воспользуемся аксиомой выбора и выберем из всех различных множеств $A(t)$ по одному элементу. Полученное множество обозначим B_0. Рассмотрим семейство поворотов множества B_0: $B_n = \{\tau e^{i\alpha n} : \tau \in B_0\}$. Эти множества обладают следующими свойствами:

они не пересекаются – это следует из того, что не пересекаются множества $A(t)$, участвующие в построении;

объединение множеств дает всю окружность – любая точка окружности принадлежит одному из множеств $A(t)$, в множестве $A(t)$ имеется точка t_*, принадлежащая множеству B_0, следовательно, найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $t \in B_n$.

В силу инвариантности по сдвигам $m(B_n) = m(B_0) = \Delta$. Но счетная аддитивность меры гарантирует равенства

$$2\pi = m(T) = m\Big(\bigcup_n B_n\Big) = \sum_n m(B_n) = \Delta \cdot \infty = \infty,$$

$\Delta = 0 \to 0$

$2\pi \neq 0$

$2\pi \neq \infty$

Для краткости здесь будет описано построение меры на отрезке $[0, 1]$. Построение меры на прямой и в евклидовых пространствах более высоких размерностей отличается только техническими деталями.

Первый этап $$m([a, b]) = b - a.$$

Второй этап – определение меры на множествах, полученных из отрезков с использованием стандартных операций над множествами: объединения $A \cup B$, пересечения $A \cap B$ и дополнения $[0, 1] \setminus A$.

Если эти операции применяются конечное число раз (такие множества называют *элементарными*), то в результате всегда будет получаться множество, состоящее из конечного числа непересекающихся отрезков и определение меры не вызывает затруднений. Все требуемые свойства меры, очевидно, выполняются.

Третий этап – расширение совокупности элементарных множеств за счет рассмотрения бесконечных объединений и пересечений элементарных множеств. Существенным моментом конструкции становится проверка счетной аддитивности. Доказательство этого факта использует важное топологическое понятие компактного множества

Если компактное множество покрыто системой

открытых интервалов, то из них всегда можно выбрать конечное число интервалов так, что выбранные интервалы по-прежнему покрывают множество.

Теорема 6.1 (о монотонности). Если множество B и множества A_n, $n = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ являются элементарными и $B \subset \bigcup_n A_n$, то

$$m(B) \leqslant \sum_n m(A_n).$$

Следствие (счетная аддитивность меры). Пусть множество B и множества A_n, $n = 1, 2, \ldots$, являются элементарными, $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и множества A_n попарно не пересекаются. Тогда

$$m(B) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Пример

Всякое конечное множество A измеримо.

Всякое счетное множество A измеримо.

Всякое открытое множество измеримо. Переходя к дополнениям, получим, что всякое замкнутое множество измеримо. В частности, измеримо канторово множество, определенное в начале этого параграфа.

Четвертый этап – определение измеримых множеств. Временно пожертвуем условием счетной аддитивности и введем суррогат меры, заданный на всех множествах.

Определение *Внешней мерой* множества A называется

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} m(B_k) : B_k - \text{открытые множества}, \ A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k \right\}.$$

Замечание. Внешняя мера элементарного множества совпадает с мерой, определенной выше. Для внешней меры можно доказать аналог теоремы 6.1 (о монотонности), но счетной аддитивности гарантировать не удастся (поскольку бывают неизмеримые множества).

Определение

Внутренняя мера множества A – это внешняя мера его дополнения – $m^*([0,1] \setminus A)$.

Измеримыми называются те множества, для которых внешняя мера равна внутренней. Совокупность всех измеримых множеств будет обозначаться через $\mathfrak{M}$.

эквивалентное определение измеримости.

Теорема 6.2. Множество A измеримо тогда и только тогда, когда для любого положительного ε существует элементарное множество B, такое что $m^*(A \triangle B) < \varepsilon$.

$$A \triangle B = (([0,1] \setminus A) \cap B) \cup (([0,1] \setminus B) \cap A).$$

Проверка того, что так определенная на $\mathfrak{M}$ мера является положительной, счетноаддитивной и инвариантной по сдвигам, требует только тщательной работы с уже имеющимися определениями. Познакомиться с доказательством можно по книге [4].

Замечание. Теория меры переносится на случай двух и более измерений. Все, что требуется изменить – это перейти от отрезков к параллелепипедам, соответствующей размерности (см. [4]). Более того, все эти конструкции, можно проводить в произвольном банаховом пространстве. Но там возникнут большие трудности, связанные со сложностью описания компактных множеств в этих пространствах. Несложно показать, что шар в бесконечномерном банаховом пространстве не является компактом.

Отметим еще одно важное обстоятельство – в приложениях часто возникает необходимость рассматривать меры, не являющиеся инвариантными по сдвигу. Типичным примером являются задачи теории вероятностей;