Линейная однородная система с периодическими коэффициентами

$$X' = A(t)X \,,\; A(t+T) = A(t),\;\; t \geq 0 \qquad (1)$$

Пусть $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица системы (1), т.е. ее столбцы – линейно независимые решения уравнения (1). В матричной записи это выглядит так: $\Phi' = A(t)\Phi$. Обозначим $\Psi(t) = \Phi(t+T)$.

Ранее было доказано, что если $X(t) -$ решение линейной автономной системы, то $X(t+\tau)$, где $\tau -$ любое число, является решением этой системы. Если же система неавтономная, то это неверно. но периодическая с периодом T, то $X(t+T) -$ тоже решение. Действительно, подставим $X(t+T)$ в уравнение (1)

$$X(t+T)' = A(t+T)X(t+T) = A(t)X(t+T)$$

Доказанное утверждение верно и для матрицы Φ , так как ее столбцы являются решениями уравнения (1). Значит, столбцы матрицы Ψ тоже образуют базис в пространстве решений.

Два базиса в одном линейном пространстве связаны матрицей перехода. Это можно записать так $\Phi(t+T) = \Phi(t)C$. $C -$ невырожденная матрица перехода от одного базиса к другому.

Определение. Матрица С, удовлетворяющая условию

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C,\;\; \forall t \geq 0, \qquad (2)$$

называется **основной** для фундаментальной матрицы $\Phi(t)$.

Итак, *сдвиг на период в аргументе фундаментальной матрицы равносилен умножению ее на основную матрицу*.

Теорема. Спектр основной матрицы не зависит от выбора фундаментальной матрицы.

Доказательство.

Докажем, что основные матрицы, соответствующие двум фундаментальным матрицам, подобны друг другу. Пусть $\Psi(t)$ новая фундаментальная матрица, а C_1 - ее основная матрица. Очевидно, существует невырожденная постоянная матрица G , что $\Psi(t) = \Phi(t)G$ (почему?). Тогда

$$\Psi(t+T) = \Psi(t)C_1 = \Phi(t)GC_1,$$

С другой стороны имеем $\Psi(t+T) = \Phi(t+T)G = \Phi(t)CG$. Отсюда следует

$$GC_1 = CG \Rightarrow C_1 = G^{-1}CG \,.$$

Итак, основные матрицы подобны между собой что т.д. .

Как известно, собственные числа подобных матриц совпадают. Теорема доказана.

Определение**. С**обственные числа основной матрицы С, называются **характеристическими числами** системы (1).

Различным фундаментальным матрицам, очевидно, соответствуют различные основные матрицы, однако собственные числа у них одни и те же, т.е. характеристические числа – **инварианты системы** (1).

Поведение решения однородной периодической системы при $t \to +\infty$

Формула (2) означает, что сдвиг на период T в аргументе фундаментальной матрицы равносилен умножению ее справа на основную матрицу C. Отсюда следует, что для любого натурального m

$$\Phi(t+mT) = \Phi(t)C^m \qquad (3)$$

Представим произвольное t в виде $t = \tau + mT,\;\; 0 \leq \tau < T$. Тогда из (3) получим

$$\Phi(t) = \Phi(\tau+mT) = \Phi(\tau)C^m \qquad (4)$$

Пусть $X(t) -$ любое решение системы (1) с начальным условием $X(t_0) = X_0$, а $\Phi(t) -$ фундаментальная матрица с начальным условием $\Phi(t_0) = E$. Ранее было получено представление для решения $X(t) = \Phi(t)X_0$ (оно верно для любой линейной однородной системы с переменными коэффициентами). Применим формулу (4)

$$X(t) = \Phi(\tau)C^m X_0 \qquad (5)$$

Отсюда

$$|X(t)| \le \|\Phi(\tau)\| \cdot |C^m X_0| \quad (6)$$

Норма $\|\Phi(\tau)\|$ является непрерывной функцией на отрезке $[0;T]$ и, значит, ограниченной, т.е. $\|\Phi(\tau)\| \le M$, где $M -$ некоторая постоянная.

Окончательно получаем

$$|X(t)| \le M \cdot |C^m X_0| \qquad (7)$$

Из формул (5),(6) и (7) следует, что поведение $X(t)$ при $t \to +\infty$ определяется поведением C^m при $m \to +\infty$.

О поведении степеней матрицы

Вопрос о поведении степеней матрицы важен в задачах вычислительной математики, в которых применяются итерационные процессы. Действительно, в них решение является пределом последовательности X_m, определяемой уравнением вида $X_{m+1} = AX_m \Longrightarrow X_m = A^m X_0$.

<u>Определение</u>. **Спектральным радиусом** матрицы A называется максимум модуля ее собственных чисел.

Обозначение:

$$\rho(A) = \max_{0 \le j \le n} |\lambda_j|$$

Выясним, что происходит со степенями матрицы в зависимости от значения $\rho(A)$.

А) $\rho(A) > 1$.

Тогда хотя бы для одного собственного числа выполнено неравенство $|\lambda| > 1$. Пусть $X -$ соответствующий этому λ нормированный собственный вектор, т.е. $|X| = 1$. Тогда

$$AX = \lambda X \Longrightarrow A^m X = \lambda^m X \Longrightarrow |A^m X| = |\lambda|^m \to +\infty \text{ при } m \to +\infty.$$

Отсюда

$$\|A^m\| \to +\infty ,$$

так как $\|A^m\| \ge |A^m X|$.

Б) $\rho(A) \le 1$ и жорданова форма матрицы A диагональна (существует базис из собственных векторов).

В этом случае имеем $A = G^{-1}DG$, $D -$ диагональная матрица, на ее диагонали собственные числа. По условию $|\lambda_j| \le 1$, $j = 1, \dots n$. Тогда $A^m = G^{-1}D^m G \Longrightarrow \|A^m\| = \|C^m\| = 1$ ограничены.

В) $\rho(A) = 1$ и жорданова форма матрицы A не диагональна (базис содержит не только собственные, но и присоединенные векторы).

Пусть $X -$ собственный вектор , $X_1 -$ присоединенный вектор. Имеем

$$AX_1 = \lambda X_1 + X \Longrightarrow A^2 X_1 = \lambda A X_1 + AX = \lambda(\lambda X_1 + X) + \lambda X = \lambda^2 X_1 + 2\lambda X$$

Аналогично

$$A^3 X_1 = \lambda^2 A X_1 + 2\lambda A X = \lambda^2(\lambda X_1 + X) + 2\lambda^2 X = \lambda^3 X_1 + 3\lambda^2 X \text{ и т.д.}$$

$$A^m X_1 = \lambda^m X_1 + m\lambda^{m-1} X. \qquad (8)$$

Отсюда следует, что при $|\lambda| = 1$ последовательность $A^m X_1$ не ограничена, а при $|\lambda| < 1$ будет $A^m X_1 \to 0$ при $m \to +\infty$.

Г) $\rho(A) < 1$. Из пунктов Б) и В) следует $\|A^m\| \to 0$ при $m \to +\infty$.

Следствием этого исследования является
Теорема. Для того, чтобы $A^m \to 0$ при $m \to +\infty$ необходимо и достаточно, чтобы $\rho(A) < 1$.

Вернемся к формуле (7). Теперь понятно, что *поведение при* $t \to +\infty$ *решения однородной системы с периодическими коэффициентами полностью определяется ее характеристическими числами*.
Здесь в отличие от системы с постоянными коэффициентами определяющую роль играют не собственные числа матрицы A коэффициентов системы, а собственные числа основной матрицы C.
Вычислить характеристические числа можно только приближенно с помощью численных методов решения дифференциальных уравнений. Схема решения этой задачи будет дана ниже.
Пример.

$$x'' + a(t)x = 0,\ a(t) = p + q\sin t\,,\ T = 2\pi, \quad a(t+T) = a(t).$$

Обозначим $x_1 = x,\ x_2 = x'$. Получим равносильную систему.

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -a(t)x_1 \end{cases} \qquad (8)$$

Найдем фундаментальную матрицу $\Phi(t)$, удовлетворяющую начальному условию $\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{pmatrix}$. Векторы-столбцы $\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \\ \varphi_{21}(t) \end{pmatrix},\ \Phi_2(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{22}(t) \end{pmatrix}$ являются решениями системы (8), удовлетворяющими начальным условиям

$$\Phi_1(0) = \binom{1}{0} \qquad (9) \quad \text{и}$$

$$\Phi_2(0) = \binom{0}{1} \qquad (10)$$

соответственно. Найти эти решения можно только приближенно, решив задачу Коши с помощью какой-нибудь компьютерной программы. Например, в пакете Matlab можно использовать функцию ode45. Применим эту функцию для решения задачи Коши.

Схема решения задачи в пакете Matlab
(почти так же решается и в Octave)

Для вычисления вектора-столбца $\Phi_1(t)$, фундаментальной матрицы, вводим в командную строку Matlab'a

$$[\sim, X] = ode45(@f, [0\ T], [1\ 0]);$$

Здесь
T – период, [0 T] – отрезок, на котором ищется решение;
[1 0] - начальный вектор;
@f – вызов вектор-функции, задающей правые части уравнений (она должна задаваться либо в отдельном файле либо в том же файле, где решается задача);
X – матрица размера nx2, i-я строка которых содержит значения функций $\varphi_{11}(t)$ и $\varphi_{21}(t)$ при $t = (i-1)T/(n-1)\,, i = 1,2, \dots, n$, где n – число строк матрицы (оно определяется внутри самой программы автоматически, его точное значение нам не нужно);
последняя, т.е. n-я, строка матрицы X состоит из чисел $\varphi_{11}(T)$ и $\varphi_{21}(T)$.

Точно так же вычисляется столбец $\Phi_2(t)$ командой

$$[\sim, X] = ode45(@f, [0\ T], [0\ 1]);$$

Отсюда $C = \Phi(T) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(T) & \varphi_{12}(T) \\ \varphi_{21}(T) & \varphi_{22}(T) \end{pmatrix}$.

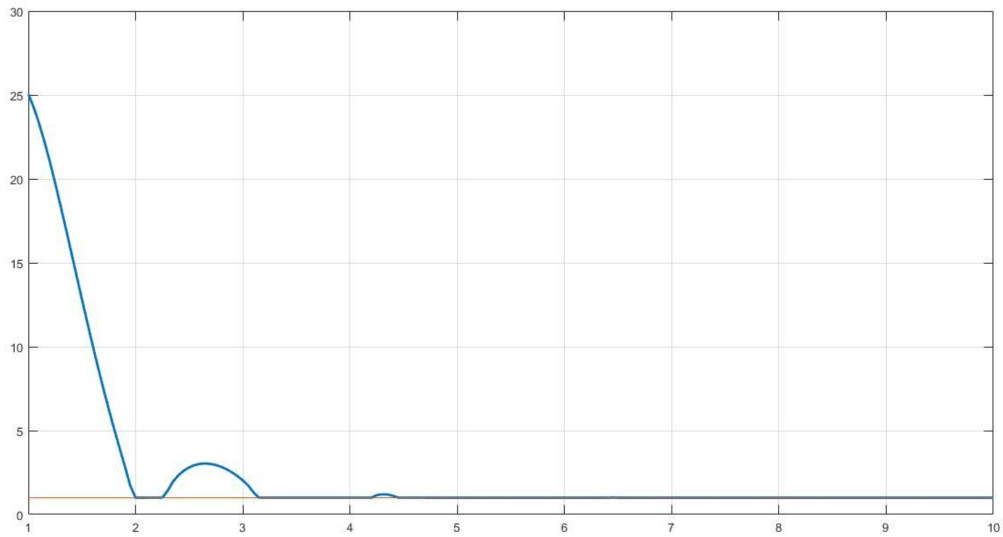
Последний шаг – вычисление собственных чисел и спектрального радиуса.

$L = eig(C)$;

$r(C) = max(abs(L))$;

Пример.

Зависимость спектрального радиуса основной матрицы от параметра p при $q = 3$ и значениях p от 1 до 10 показаны на графике функции $r(p)$.



Из графика видно, что на отрезке $1 \leq p \leq 10$ есть интервалы, на которых $r(p) > 1$. При таких значениях p по крайней мере часть решений системы не ограничена на $[0; +\infty)$, и система неустойчива. Первый интервал неустойчивости примерно $(1; 2)$. За ним располагается небольшой отрезок, примерно $[2; 2.2]$, на котором $r(p) = 1$. При таких значениях p все решения системы ограничены на $[0; +\infty)$, и система устойчива. Далее снова интервал неустойчивости примерно $(2.2; 3.1)$, затем идут большой интервал устойчивости, малый интервал неустойчивости и, наконец, при $p \geq 4.4$ (примерно) зона устойчивости.