Орбитальная устойчивость

Пусть $X(t, X_0)$ — решение автономной системы и γ_0 — его траектория (орбита) в фазовом пространстве, а $d(P, \gamma_0) = \min_{t\geq 0}|X(t, X_0) - P|$ – расстояние от точки P до γ_0.
Множество P точек фазового пространства, для которых $d(P, \gamma) < \varepsilon$ назовем
-окрестностью траектории γ.
Пусть γ_1 — траектория решения $X(t, X_1)$.

<u>Определение</u>. Решение $X(t, X_0)$ называется **орбитально устойчивым**, если
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, что при всех X_1, для которых $|X_1 - X_0| < \delta$, траектория γ_1 принадлежит -окрестности траектории γ_0.

А) Из устойчивости по Ляпунову следует орбитальная устойчивость.
Б) Обратное утверждение неверно.

Утверждение А) очевидно (сравните оба определения).
Утверждение Б) поясним на примере.
Сначала рассмотрим две задачи

$$x'' + \omega^2 x = 0\ ,\quad x(0) = 1;\ x'(0) = 0 \qquad (1)$$

$$x'' + \omega^2 x = 0\ ,\quad x(0) = 1 + \delta;\ x'(0) = 0 \qquad (2)$$

Умножаем на x' и интегрируем от 0 до t.

$(x'(t))^2 + (x(t))^2 = 1$ и $(x'(t))^2 + (x(t))^4 = (1 + \delta)^2$

Переходим к фазовым переменным

$$x_2^2 + \omega^2 x_1^2 = 1 \qquad (3)$$

$$x_2^2 + \omega^2 x_1^2 = (1 + \delta)^2 \qquad (4)$$

Орбиты, задаваемые уравнениями (3) и (4), - эллипсы . Они при малом δ практически не отличимы друг от друга. Орбитальная устойчивость очевидна. Имеет место и устойчивость по Ляпунову (не асимптотическая), так как $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$. Точка $\left(x_1(t); x_2(t)\right)$ фазового пространства перемещается по этим орбитам с одинаковым периодом $T = 2\pi/\omega$. При этом из близости начальных точек следует близость решений при всех $t \geq 0$, как и должно быть при устойчивости по Ляпунову..

Теперь рассмотрим нелинейные уравнения

$$x'' + 2x^3 = 0\ ,\quad x(0) = 1;\ x'(0) = 0 \qquad (5)$$

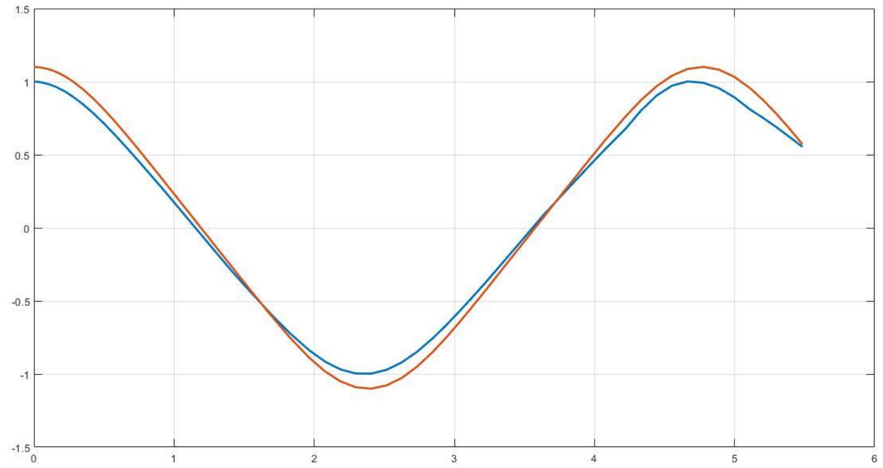
$$x'' + 2x^3 = 0\ ,\quad x(0) = 1 + \delta;\ x'(0) = 0. \qquad (6)$$

Здесь ситуация существенно иная.
В фазовых переменных из (5) и (6) получаем

$$x_2^2 + x_1^4 = 1 \qquad (7)$$

$$x_2^2 + x_1^4 = (1 + \delta)^4 \qquad (8)$$

Орбиты (7) и (8) похожи “сдавленный” по вертикали эллипс и при малом δ практически не отличимы друг от друга. Поэтому орбитальная устойчивость имеет место. В то же время устойчивости по Ляпунову здесь нет. Ограничусь правдоподобными рассуждениями. Заметим, что все решения задач (1), (2), (5) и (6) – периодические (почему?), но для (1) и (2) период одинаковый - $T = 2\pi/\omega$. Поэтому фазовые точки перемещаются по своим орбитам синхронно.
Для задач (5) и (6) это не так. На рис.1 изображены графики функций $x_1(t, 0)$ и $x_1(t, \delta)$ (решений задач (5) и (6), при $\delta = 0{,}1$). Видно, что периоды этих решений не совпадают. Поэтому движение фазовых точек $\left(x_1(t, 0); x_2(t, 0)\right)$ и $\left(x_1(t, \delta); x_2(t, \delta)\right)$ по своим орбитам “рассогласовано”, близость начальных точек теряется с увеличением t.


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
1
2
3
4
5
6