

Краевая задача для уравнения 2-го порядка

Рассматривается следующая краевая задача.

$$\text{Дано уравнение: } y'' = f(x, y), \quad a < x < b \quad (1)$$

$$\text{и граничные условия } y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (2)$$

Требуется найти решение задачи (1)-(2) и построить его график. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$y(a) = y_a, \quad y'(a) = h \quad (3)$$

План решения основан на многократном решении задачи Коши (1), (3). Значение решения задачи Коши при $x = b$ является функцией от h .

Задача сводится к отысканию такого значения переменной h , при котором выполнено условие на правом конце отрезка, т.е. должно выполняться

$$y(b, h) = y_b. \quad (4)$$

Это уравнение с одним неизвестным h .

Для его решения можно применить стандартный метод половинного деления.

Схема решения

1. Задаем наугад число h_0 , решаем задачу Коши. Например, в Octave или Matlab можно пользоваться функцией ode45. Далее вычисляем $y(b, h_0)$.

Если оказалось, что $y(b, h_0) = y_b$, то вам сильно повезло – вы решили краевую задачу. Но это маловероятно. Пусть, например, $y(b, h_0) > y_b$.

2. Выберем шаг Δh и решаем несколько раз задачу Коши при $h_1 = h_0 + \Delta h$. Если снова получили $y_b < y(b, h_1)$ причем $y_b < y(b, h_1) < y(b, h_0)$ решаем задачу Коши при $h_2 = h_1 + \Delta h$ и т.д. Процесс повторяется пока не получим неравенство $y(b, h_m) < y_b$. Это означает, что искомое значение попало в “вилку”, т.е. $h \in (h_{m-1}; h_m)$. Шаг Δh не должен быть слишком маленьким, иначе процесс сильно затянется. Знак шага также не известен заранее, может оказаться, что нужно не увеличивать наклон, а уменьшать.

3. Далее применяется стандартный процесс половинного деления к уравнению (4).

4. Процесс останавливаем, когда выполнится неравенство $|y(b, h_m) - y(b, h_{m-1})| < 0.001$.

5. Возможен случай, когда ни одна интегральная кривая не проходит через точку $(b; y_b)$, т.е. задача не имеет решения. Поэтому нужно ограничить число шагов.

Процесс останавливается при $m > M$, где M – заданное число, например, 100.

6. Процесс легко запрограммировать в любой системе, содержащей функции решения задачи Коши.

Варианты заданий

Везде $a = 0$; $b = 2$

Вариант	$f(x, y)$	y_a	y_b
1	$tg^2(0,5x) + y^2$	1	2
2	$tg(\sqrt{x}) * y^2$	3	4
3	$2^{-x}(x + y)$	2	-1
4	$2^{-x}(x - y)$	4	1
5	$2^{-x}(xy)$	3	-3
6	$\sin(x + y^2)$	2	-2
7	$\cos(xy)$	5	1
8	$\sqrt{2 + xy}$	3	3
9	$x/(y^2 + 1)$	1	-3
10	$y/(x^2 + 1)$	4	-2
11	$\ln(x + 1) \cdot y^2$	1	2
12	$2^x/(x + y)$	3	4
13	$2^x/(x^2 + y^2)$	2	-1
14	$2^x + 3^y$	4	1
15	$\sin(x - y^2)$	3	-3
16	$\ln(x + 1) \cdot \sin(2y)$	1	2
17	$\sqrt{ 2 + xy }$	3	4
18	$x/(\cos^2 y + 1)$	2	-1