О фазовом пространстве

Рассмотрим некоторую физическую систему, состояние которой меняется в зависимости от времени. Что понимается под словом состояние? Это зависит от конкретной системы. Например, система – обычный маятник. Пусть $x_1 = \varphi(t)$ —его отклонение от положения равновесия в момент t, а $x_2 = \varphi'(t) -$ скорость . Эти две величины определяют состояние маятника в момент t . На геометрическом языке состояние – это точка на плоскости $(x_1; x_2)$. Эта плоскость называется **фазовой** . Если фазовых переменных больше двух, то говорят о фазовом пространстве. При возрастании t точка $(x_1(t); x_2(t))$ перемещается по некоторой кривой, называемой **фазовой траекторией**.

Изменение состояния системы определяется физическим законом, которому подчиняется данная система. В случае маятника это второй закон Ньютона. Применение этого закона приводит для малых колебаний к уравнению

$$\varphi'' + \omega^2\varphi = 0$$

или в фазовых переменных – к системе

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2{}' = -\omega^2 x_1 \end{cases} \qquad (1)$$

Размерность фазового пространства зависит от конкретной системы. Например, если система – это ракета, летящая по сложной траектории, то фазовые переменные – три координаты положения в пространстве и три координаты вектора скорости. Итого 6.

Если размерность фазового пространства конечна, применение соответствующего закона физики приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Бывают системы с бесконечномерным фазовым пространством. Они описываются уравнениями с частными производными и изучаются в курсе математической физики.

Автономные и неавтономные системы

Рассмотрим задачу Коши для двух систем

$$X' = F(t, X), \quad X(t_0) = X_0 \qquad (1)$$

$$Y' = F(Y) \qquad Y(t_0) = Y_0 \qquad (2)$$

Система (2) называется автономной, а (1) – неавтономной. С физической точки зрения неавтономность означает , что в процессе перехода от одного состояния к другому изменяются не только сами состояния, но и некоторые свойства самой системы. Например, если рассмотреть маятник с колеблющейся точкой подвеса, то в уравнении колебаний самого маятника коэффициент ω^2 будет зависеть от времени.

Для описания решения $X(t)$ с геометрической точки зрения используются два понятия – **интегральная кривая и фазовая траектория** .

Интегральная кривая – множество точек $(t,\ x_1(t),\ x_2(t), \dots,\ x_n(t))$ в (n+1)-мерном пространстве, а **фазовая траектория** (орбита) **–** множество точек $(x_1(t),\ x_2(t), \dots,\ x_n(t))$ в n-мерном пространстве.

Рассмотрим в примере с маятником интегральную кривую с начальным состоянием $\varphi(0) = 1,\ \varphi'(0) = 0$. Кривая состоит из точек $(t,\ \cos\omega t\ ,\ \sin\omega t/\omega\ )$. На рис. 1 изображена кривая при $\omega = 8$.

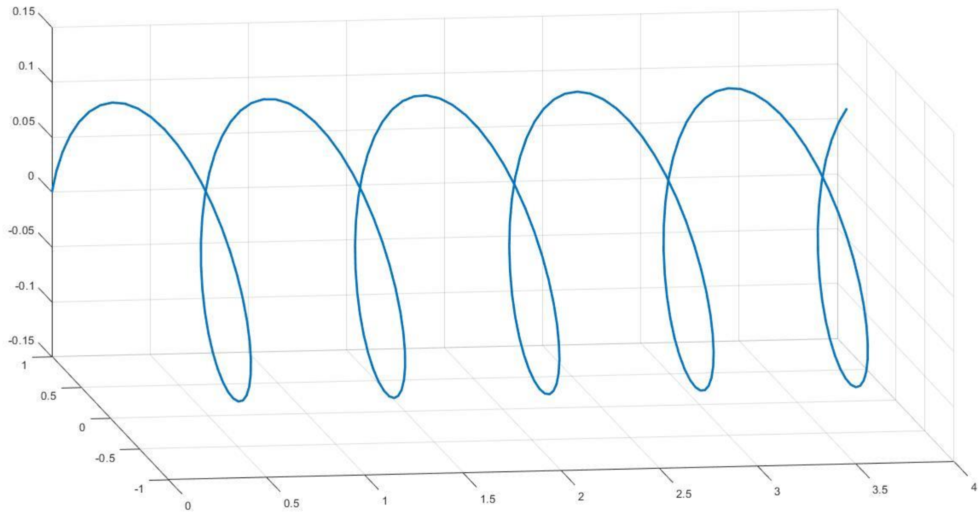


Рис.1

Кривая наматывается на цилиндр, основанием которого в плоскости $(x_1;\ x_2)$ служит эллипс $\omega^2 x_1^2 + x_2^2 = \omega^2$.

Этот эллипс является фазовой траекторией, соответствующей данной интегральной кривой. Из этого примера видно, что фазовая траектория – проекция интегральной кривой на фазовую плоскость.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $X(t, t_0, X_0)$, $Y(t, Y_0)$ − решения задач (1) и (2). Здесь в обозначениях указаны начальные векторы, а начальный момент t_0 указан только в $X(t, t_0, X_0)$. Для задачи (1) решения $X(t, t_0, X_0)$ могут существенно отличаться друг от друга при разных значениях t_0. Обычно t_0, а часто и X_0, опускают, чтобы не усложнять обозначения.

Для автономной задачи (2) начальный момент t_0 не имеет существенного значения. Действительно, пусть $Y(t)$ и $\tilde{Y}(t, Y_0)$ два решения автономной системы (2), удовлетворяющие начальным условиям $Y(t_0) = Y_0$ и $\tilde{Y}(t_1) = Y_0$. Т.е. их фазовые траектории проходят одну и ту же точку Y_0, но в разные моменты времени. Докажем, что их фазовые траектории совпадают. Обозначим $\tau = t_1 - t_0$. Рассмотрим функцию $Z(t) = \tilde{Y}(t + \tau)$. Легко доказать два ее свойства

а) удовлетворяет уравнению (2);

б) удовлетворяет начальному условию, т.е. $Z(t_0) = Y_0$.

Иначе говоря, $\tilde{Y}(t + \tau)$ − решение задачи (2). Но в силу теоремы о единственности решения задачи Коши получаем, что $\tilde{Y}(t + \tau)$ совпадает с решением $Y(t)$. Соответствующие точки перемещаются по одной и той же фазовой траектории со сдвигом во времени $(t_1 - t_0)$. Отсюда следует, что через любую точку на фазовой плоскости проходит единственная траектория. Фазовую плоскость (в случае большей размерности – пространство) можно представлять как множество фазовых траекторий. Это множество называется **фазовым портретом** системы. Для неавтономной системы через каждую точку проходит бесконечно много траекторий, поэтому понятие фазового портрета для такой системы теряет смысл.

Из всего сказанного следует, что фазовые траектории не могут пересекаться, но при наличии так называемых **особых точек** фазовый портрет выглядит так, как будто траектории пересекаются.

Определение. Пусть $F(Y) \neq 0$ при $Y \neq Y_0$ в некоторой окрестности точки Y_0, причем $F(Y_0) = 0$. Тогда Y_0 называется **изолированной особой точкой** системы (2).

Из изолированной особой точки не выходит ни одна траектория (почему?), но фазовый портрет в окрестности особой точки выглядит так, как будто из этой точки выходит множество траекторий. Такие точки называют точками **равновесия или покоя**, так как в этом случае $Y(t, Y_0) \equiv Y_0$, т.е. траектория, начавшаяся в точке Y_0, в ней и остается. Покажем это на примере системы двух уравнений.

Система двух уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему $\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_1' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases}$ (4)

Единственная особая точка системы (0; 0).
Выбирая подходящую замену $X = BY$, приводим систему к простейшему виду. Возможны следующие случаи (все они проиллюстрированы в приведенной ниже таблице).
1. $\boldsymbol{\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0}$, вещественные и простые. Тогда матрица преобразованной системы диагональная и система принимает вид

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

Общее решение

$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}; \ y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (5)$$

а)Если $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2}$ одного знака, то особая точка (0;0) называется **узлом**.

Пусть, например, $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -2$. Выберем (1;1) в качестве начальной точки, т.е. $y_1(0) = 1, \ y_2(0) = 1$. Тогда решение

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{-t} \\ y_2(t) = e^{-2t} \end{cases}$$

Очевидно, $(y_1(t), y_2(t)) \to (0,0)$ при $t \to +\infty$. Кроме того, очевидно, имеем $y_2 = {y_1}^2$, т.е. фазовая траектория – парабола . Итак, при $t \to +\infty$ точка $(y_1(t), y_2(t))$ перемещается по параболе и приближается к началу координат. Аналогично выглядят фазовые траектории при любой начальной точке, если собственные числа одного знака. При положительных собственных числах отличие лишь в том, что точка перемещается не к началу координат, а от него.

б) $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2}$ разных знаков.
Особая точка (0;0) называется **седлом**.
Пусть, например, $\lambda_1 > 0, \ \lambda_2 < 0$. Тогда $y_1(t) \to +\infty, \ y_2(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Все траектории, которые начинаются не в точке (0;0), обходят эту точку. Траектории напоминают гиперболу. Рассмотрите пример при $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -2$.

2. $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda}$, вещественные, кратные . Тогда преобразованная система принимает вид

$$\begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 \end{cases}$$

Общее решение

$$y_1 = c_1 t e^{\lambda t}; \ y_2 = c_2 e^{\lambda t} \qquad (6)$$

Такая особая точка называется **диакритической**. (В таблице этот случай отсутствует, он принципиально не отличается от предыдущего.)

3. $\boldsymbol{\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i}$, комплексные. Как и раньше, преобразованная система принимает вид

$$\begin{cases} y_1' = (\alpha+i\beta)y_1 \\ y_2' = (\alpha-i\beta)y_2 \end{cases} \qquad (7)$$

Отсюда решения $y_{1,2} = e^{(\alpha\pm i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t \pm i\sin\beta t)$. Чтобы перейти от комплексных решений и к вещественным, вводим функции

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha t}\cos\beta t\,; \quad \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha t}\sin\beta t$$

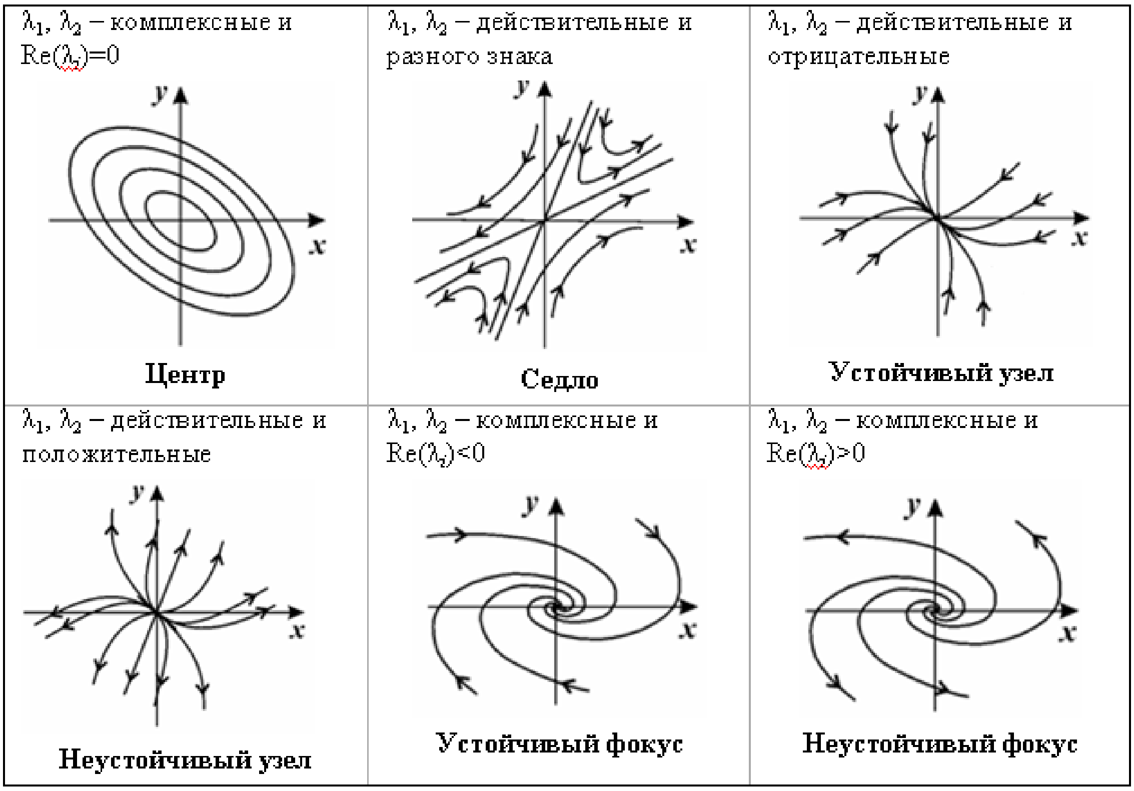
Эти функции также являются решениями исходной системы (4) (почему?). Я сохраню для них обозначение y_1, y_2. Итак, имеем

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t \\ y_2(t) = c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t \end{cases} \qquad (8)$$

Уравнения (8) при $\alpha \neq 0$ задают спираль, которая закручивается или раскручивается в зависимости от знака α. Действительно, расстояние $r(t)$ точки $(y_1; y_2)$ от (0;0) содержит множитель $e^{\alpha t}$? (почему?). Поэтому $r(t) \to 0$ или $r(t) \to +\infty$ в зависимости от знака α при $t \to +\infty$.

Если $\alpha \neq 0$, то особая точка (0;0) называется **фокусом**.

Если $\alpha = 0$, то спираль превращается в эллипс, а особая точка (0;0) называется **центром**.



Замечания . Фазовый портрет для исходной системы не отличается качественно от портрета преобразованной системы, так как линейное преобразование сводится к растяжению(сжатию) и повороту.