考研高等数学笔记

GRE Advanced Mathematics Note

作者：BasinChen

组织：中国高校联盟

时间：April 28, 2019

版本：3.07

ElegantLaTeX Program

Victory won't come to us unless we go to it. — M. Moore

目　录

第 1 章 极限

1.1 函数极限的定义

定义 1.1. 极限

$$\lim_{x\to\cdot} f(x) = A \qquad 其中 \begin{cases} x \to x_0 \\ x \to \infty \end{cases} \qquad 满足 \forall \varepsilon > 0 , x \to \cdot , |f(x) - A| < \varepsilon$$

♣

性质：

1. A 的唯一性：极限若存在，必唯一。

$$应用 \begin{cases} 左右极限 \\ 导数 \end{cases}$$

例如：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan \pi x}{|x|(x^2-1)} \qquad I_+ = \lim_{x\to 0^+} \frac{\pi x}{x(x^2-1)} = -\pi \quad 同理可得 \quad I_- = \pi$$

2. A 是一个数！

$$\lim_{x\to\cdot} f(x) = A$$

例题 1.1:

$$已知 \lim_{a\to 1} f(x) 存在, f(x) = \frac{x - \arctan(x-1) - 1}{(x-1)^3} + 2x^2 e^{x-1} \cdot \lim_{x\to 1} f(x)$$

求 $f(x)$：

解：

$$记：\lim_{x\to 1} f(x) = A, 所以 \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{(x-1) - \arctan(x-1)}{(x-1)^3} + 2A$$
$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} f(x) = \frac{t - \arctan t}{t^3} + 2A = \frac{1}{3} + 2A = A$$
$$\Rightarrow A = -\frac{1}{3}$$

3. 有界性

$$\lim x \to \cdot \qquad |f(x)| \leqslant M$$

例题 1.2:

$$若 \lim_{x\to x_0} = \frac{f(x)}{x-x_0} = A（存在）求 \lim_{x\to x_0} f(x) \tag{1.1}$$

解：

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x-x_0}(x-x_0) = 0（有界乘以无穷小） \tag{1.2}$$

4. 保号性

通俗说来，$x \to \cdot$ 时，若 $A > 0, f(x) > 0$（局部）不等式脱帽法，即：

$$\lim_{x\to\cdot} f(x) = A > 0 \;\Rightarrow\; f(x) > 0 \;(x \to \cdot)$$

例题 1.3:

证明: 当$x \to 0^+ 0 < \tan^2 x - x^2 < x^4$ 成立.

解：

$$分析：\lim_{x\to 0^+} \frac{tan^2 x - x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\tan x + x)(\tan x - x)}{x \cdot x^3} = \frac{2}{3} < 1$$

$$故 \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{\tan^2 x - x^2}{x^4} - 1\right] < 0 \Rightarrow \frac{\tan^2 x - x^2}{x^4} - 1 < 0$$

$$即 \tan^2 x - x^2 < x^4$$

$$又 x \to 0^+ \quad \tan x > x$$

$$\Rightarrow 0 < \tan^2 x - x^2 < x^4$$

5. 等式脱帽

$\Leftrightarrow \qquad f(x) = A + \alpha \qquad \lim_{x\to\cdot} \alpha = 0$

注 1. 主要适用于抽象函数 $f(x)$，多用于已知某一极限求另一极限。2.$f(x,y)$

例题 1.4:

$$设 \lim_{x\to 0} \frac{\ln[1 + \frac{f(x)}{\sin x}]}{a^x - 1} = A \qquad a > 0 \quad a \neq 1, 求 \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} \tag{1.3}$$

解:

分析:等式脱帽法,解出$f(x)$

即$\dfrac{\ln[1+\frac{f(x)}{\sin x}]}{a^x-1}=A+\alpha$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$ $\ln[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}]=(a^x-1)(A+\alpha)$

$\Rightarrow 1+\dfrac{f(x)}{\sin x}=e^{(a^x-1)(A+\alpha)}, f(x)=[e^{(a^x-1)(A+\alpha)}-1]\sin x$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{((e^{(a^x-1)(A+\alpha)}-1))\sin x}{x^2}=x\ln a$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a^x-1)(A+\alpha)}{x}=A\ln a$

1.2 函数极限的计算

七种未定式:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty\cdot 0,\ \infty-\infty,\ \infty^0,\ 0^0,\ 1^\infty$$

I. 先化简:

(1) 等价替换(当 $x\to 0$ 时)

$$\begin{aligned}
\sin x &\sim x & 1-\cos x &\sim \frac{1}{2}x^2\\
\arcsin x &\sim x & \arctan x &\sim x\\
\ln(1+x) &\sim x & e^x-1 &\sim x\\
a^x-1 &\sim x\ln a & (1+x)^\alpha-1 &\sim \alpha x
\end{aligned}$$

$$\bigstar 若\alpha=o(\beta)即\lim_{x\to\cdot}\frac{\alpha}{\beta}\overset{''\frac{0}{0}''}{=}0$$

(2) 化简

$$\begin{cases}\text{提取公因式}\\ \text{换元}\\ \text{通分}\\ u^v=e^{v\ln u}\\ \text{公式}\end{cases}\qquad \text{换元}\begin{cases}x=\frac{1}{t}\\ x-x_0=t\\ a^n-b^n\text{因式分解}\\ \text{有理化}\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\end{cases}$$

(3) 及时提出极限不为 0 的因式

II. 洛必达法则：

1. $\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f(x)}{g(x)}\overset{``\frac{0}{0}"}{=}\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$
2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}\overset{``\frac{0}{0}"}{=}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_a^{\phi(x)} f(t)\mathrm{d}t}{\int_a^{\psi(x)} g(t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(\phi(x))\phi'(x)}{g(\psi(x))\psi'(x)}$

例题 1.5:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+2\tan x)^2-3^x}{3sin^2x+x^3\cos\frac{1}{x}}\qquad(\frac{0}{0}\text{型})\tag{1.4}$$

解：

$$[\text{分析}]\text{由于}\lim_{x\to 0}\frac{x^3cos\frac{1}{x}}{3\sin^2 x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$$

$$\xrightarrow[\text{低阶}]{\text{高阶}}x^3\cos\frac{1}{x}=o(3\sin^2 x)$$

$$\therefore 3\sin^2 x+x^3\cos\frac{1}{x}\sim 3\sin^2 x\sim 3x^2$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x[(1+\frac{2}{3}\tan x)^x-1]}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(1+\frac{2}{3}\tan x)}-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+\frac{2}{3}\tan x)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{2}{3}\tan x}{3x^2}=\frac{2}{9}$$

例题 1.6:

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x\frac{\sin 2t}{\sqrt{4+t^2}\int_0^x(\sqrt{t+1}-1)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

解：

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\frac{\sin 2t}{\sqrt{4+t^2}}\mathrm{d}t}{\int_0^x(\sqrt{t+1}-1)\mathrm{d}t}=(\text{洛})\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{\sqrt{4+x^2}}}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{4+x^2}(\sqrt{x+1}-1)}=2$$

例题 1.7:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\cos x\cdot\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}\quad(\frac{\infty}{\infty})$$

解:

$$=\cos 3\cdot\lim_{x\to 3^+}\frac{\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}=\cos 3\cdot\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}\cdot\frac{e^x-e^3}{e^x}=\frac{1}{e^3}\cos 3\cdot\lim_{x\to 3^+}\frac{e^x-e^3}{x-3}$$
$$=\frac{\cos 3}{e^3}\lim_{x\to 3^+}\frac{e^x}{1}=\cos 3$$

[及时提出极限不为 0 的因式]

例题 1.8:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1+x}{1-e^x}-\frac{1}{x})\quad(\infty-\infty)$$

解:

[分析] 有分母,则通分

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{(1-e^{-x})\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-e^{-x}}{2x}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

例题 1.9:

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}(1+\frac{1}{x})^{x^2}\qquad u^v=v\ln n$$

解:

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}e^{-x}\cdot e^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]}\overset{x=\frac{1}{t}}{=}e^{\lim\limits_{t\to 0}[\frac{\ln(1+t)}{t^2}-\frac{1}{t}]}$$
$$e^{\lim\limits_{t\to 0}[\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}]}=e^{-\frac{1}{2}}$$

例题 1.10:

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\ln(\frac{\ln x-1}{\ln x+1})}\qquad(0^0)$$

解:

$$u^v=r^{v\ln u}$$
$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(\frac{\ln x-1}{\ln x+1})\cdot\ln x}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(1-\frac{2}{\ln x+1})\cdot\ln x}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\ln x}{1\cdot\ln x+1}}=e^{-2}$$

例题 1.11:

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}\qquad(1^\infty)$$

解：

$$\lim u^v \overset{1^\infty}{=} e^{\lim v \ln u} = e^{\lim v(\ln(1+u-1))}$$
$$= e^{\lim v(u-1)}$$
$$\text{原式} = e^{\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{1-\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sin x - x}{\frac{1}{2}x^2\cdot x}} = e^{-\frac{1}{3}}$$

III. 泰勒公式：

$$f(x) = (\quad)x^0 + (\quad)x^1 + \cdots + (\quad)x^n + \ldots \qquad \text{其中}, x^\alpha\text{成为“基”}$$

(1) 熟记公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n}$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$
$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$
$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \ldots$$

(2) 展开原则

$\frac{A}{B}$ 上下同阶原则

例题 1.12:

$$\lim_{x\to0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{\frac{x^2}{2}})\sin \frac{x^2}{2}}$$

解：

$$\text{原式} = \frac{-\frac{1}{8}x^4}{-\frac{x^4}{2}}$$

$A - B$ 型——幂次最低

例题 1.13:

$$\cos x - e^{\frac{x^2}{2}} \sim ax^b \qquad x \to 0$$

解:

$$\begin{aligned}
&\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\
&e^{\frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\
&\cos x - e^{\frac{x^2}{2}} = -x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

例题 1.14:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \frac{6}{x^6 - x^5})$$

解:

$$\begin{aligned}
&令x = \frac{1}{t}: \\
&\lim_{t\to 0^+} (\sqrt[6]{\frac{1}{t^6} + \frac{1}{t^5}} - \sqrt[6]{\frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^5}}) \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt[6]{1+t}}{t} - \frac{\sqrt[6]{1-t}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{(1+t)^{\frac{1}{6}} - (1-t)^{\frac{1}{6}}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1 + \frac{1}{6}t - (1 - \frac{1}{6}t) + o(t)}{t} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

无穷小比阶及其反问题

$$\lim_{x\to\cdot} \frac{f(x)}{g(x)} = (\frac{0}{0}) \begin{cases} 0 & 高阶 \\ c \neq 0 & 同阶 \\ \infty & 低阶 \end{cases}$$

例题 1.15:

$$当x \to 0^+时，\alpha = \int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t \ \beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} \mathrm{d}t \ \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \tan t^3 \mathrm{d}t$$

解：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin^3 t\mathrm{d}t}{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{\frac{2}{3}}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}=0$$

$\Rightarrow\gamma$更高阶$\gamma=o(\alpha)$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x\cdot 2x}{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}=0$$

$\Rightarrow\beta=o(\gamma)$

$\beta>\gamma>\alpha$

1.3 函数极限的存在性

1. 具体型，但洛必达法则失效——夹逼准则

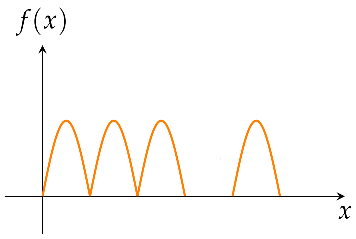
例题 1.16:

记：$s(x)=\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t$

(i)证明：当$n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$时，$2n\leqslant s(x)\leqslant 2(n+1)$

(ii)求：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t}{x}$

解：



(i)由图可知：$S(n\pi)=n\cdot 2$

$[(n+1)\pi]=(n+1)\cdot 2$

$S'(x)>0$

当$n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$

$2n=S(n\pi)\leqslant S(x)\leqslant S(n+1)\pi=2(n+1)$

(ii)由于：$2n\leqslant\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t\leqslant 2(n+1)$，$\dfrac{1}{(n+1)\pi}\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{n\pi}$

$$\Rightarrow\frac{2n}{(n+1)\pi}\leqslant\frac{\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t}{x}\leqslant\frac{2(n+1)}{n\pi}$$

$n\to\infty$时，$\dfrac{2n}{(n+1)\pi}=\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{2(n+1)}{n\pi}$

故：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t}{x}=\dfrac{2}{\pi}$

2. 抽象型——单调有界准则

若$f(x)$递增，且有上界。则，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \exists$

例题 1.17:

$$\text{设}, x \geqslant 0,\ f(x)\text{满足}f'(x) = \frac{1}{x^{+}f^2(x)}\ f(0) = 1\ \text{证明}$$

$$(1).\ f'(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2} \quad x \geqslant 0$$

$$(2).\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\text{存在，且小于}1+\frac{\pi}{2}$$

解：

$$(1).\ \text{由于}f'(x) > 0 \therefore f(x) \uparrow \therefore f'(x) = \frac{1}{x^2+f^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2+1}$$

$$(2).\ f(x) = f(a) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$$

$$\therefore f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{1}{t^2+f^2(t)}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant 1 + \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = 1 + \arctan x < 1 + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{且，}\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 + \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+f^2(t)}\mathrm{d}t = 1 + \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t = 1 + \frac{\pi}{2}$$

1.4 连续与间断

$$\text{由于一切初等函数在其定义区间内必连续，故只研究两类特殊点}\begin{cases}\text{无定义点} & \text{一定}\\ \text{分段点} & \text{不一定}\end{cases}$$

2. 连续:

(1). 内点处：$\overset{(i)}{\lim\limits_{x\to x_0^+}} f(x) = \overset{(ii)}{\lim\limits_{x\to x_0^+}} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x)$在$x_0$连续

(2). 端点处：左端点看右连续，右端点看左连续。

3. 间断 (前提是左右两侧有定义):

$$\left.\begin{array}{l}(i)(ii)\text{存在}(i) \neq (i) \Rightarrow \text{跳跃间断点}\\ (i)(ii)\text{存在}(i) = (i) \neq (iii) \Rightarrow \text{可去间断点}\end{array}\right\}\text{第一类间断点}$$

$$\left.\begin{array}{l}(i)(ii)\text{至少一个不存在}(\infty) \Rightarrow \text{无穷间断点}\\ (i)(ii)\text{至少一个不存在(震荡)} \Rightarrow \text{震荡间断点}\end{array}\right\}\text{第二类间断点}$$

例题 1.18:

$$\text{当}x \in (-\frac{1}{2}, 1]\text{时，确定}f(x) = \frac{\tan \pi x}{|x|(x^2-1)}\text{的间断点}$$

解：

可能的点有：$x=0,\ x=1,\ x=\frac{1}{2}$

$$x=0:\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\pi x}{x(x^2-1)}=-\pi\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\pi x}{-x(x^2-1)}=\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \text{跳跃间断点}$$

$$x=1:\ \frac{\tan\pi x}{x(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\tan\pi x}{x-1}=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow \text{可去间断点}$$

$$x=\frac{1}{2}:\ \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\tan\pi x}{x(x^2+1)}=\infty\ \Rightarrow \text{无穷间断点}$$

1.5 数列极限的定义与应用

定义 1.2. 数列极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ n>N,\ |x_n-a|<\varepsilon$$

♣

如果满足以上条件，那么它有如下性质：

1. $\Rightarrow a$唯一（极限若存在，必有唯一性）
2. $\Rightarrow$ 极限是一个数
3. $\Rightarrow x_n$有界
4. $\Rightarrow$ 若$a>0,\ \Rightarrow n\to\infty$时，$x_n>0$(★脱帽法)
5. $\Rightarrow$ 极限若存在，则所有子列x_nk均收敛于a.

例如，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

$$\bigstar\begin{cases}\text{正推}\begin{cases}\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)=A>B\ \Rightarrow\ f(x)>B\\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>b\ \Rightarrow\ x_n>b\end{cases}\\ \text{逆推}\begin{cases}f(x)\geqslant B\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to\cdot}f(x)(\text{若存在})\geqslant B\\ x_n\geqslant B\Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant B\end{cases}\end{cases}$$

例题 1.19:

假设数列$\{a_n\}$满足：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$，则：C

$A.\{a_n\}$有界　　$B.\{a_n\}$不存在极限

$C.\{a_n\}$自某项起同号　　$D.\{a_n\}$自某项起单调

解：

$$C: \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0 \Rightarrow \exists N > 0,\ n > N,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$$

例题 1.20:

已知：$\{a_n\}$单调，下列说法正确的是：B

$A.\ \lim\limits_{n\to\infty}(e^{a_n}-1)$存在　　$B.\ \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1+a_n^2})$存在

$C.\ \lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n$存在　　$D.\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-a_n^2}$存在

解：

$A:$ 取$a_n = n$

$B:$ 若$\{a_n\}\uparrow$ 且有上界 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \exists$

若$\{a_n\}\downarrow$ 且有下界 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \exists$

若无上界，$a_n \to +\infty$，若无下界，$a_n \to -\infty$.

以上情况原式均存在。

$D:$ 取$a_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

1.6 数列极限的存在性与计算

1. 归结原则（Heine）若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$则，$\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$

例题 1.21:

$$\lim_{n\to\infty} n^3(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sin\frac{2}{n})$$

解：

$$\xlongequal{x=\frac{1}{n}} \lim_{x\to0^+}\frac{\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x}{x^3} = \lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

2. 直接计算法

例题 1.22:

设，$a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n^2 + a_n,\ n = 1, 2, \ldots$　　求：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n})$

解：

$$a_{n+1}=a_n^2+a_n>a_n\Rightarrow\{a_n\}\uparrow$$

如果有上界 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A\Rightarrow A=A^2+A\Rightarrow A=0$

$\because a_n\geqslant3\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}=A\geqslant3$矛盾 $\therefore\{a_n\}$无上界 $\Rightarrow+\infty$

又：$a_{n+1}=a_n(a_n+1)$

$$\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(a_n+1)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+1}$$

$$\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$$

故，原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-\cdots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}})=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{3}$$

3. 定义法

构造 $''|x_n-a|''\to0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$(先斩后奏)

例题 1.23:

设：$x_1=1,\ x_n=1+\dfrac{1}{1+x_{n-1}}\ \ n=2,3,\ldots$ 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其值。

解：

易求a，易放缩

构造$|x_n-\sqrt2|=|1+\dfrac{1}{1+x_{n_1}}-\sqrt2|=|\dfrac{2+x_{n-1}-\sqrt2-\sqrt2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}|$

$$=|\frac{(x_{n-1}-\sqrt2)(1-\sqrt2)}{1+x_{n-1}}|$$

$$<(\sqrt2-1)|x_{n-1}-\sqrt2|$$

$$<(\sqrt2-1)^2|x_{n-2}-\sqrt2|$$

$$\cdots\ \cdots$$

$$<(\sqrt2-1)^{n-1}|x_1-\sqrt2|=(\sqrt2-1)^n\ \ n\to\infty=0$$

注：

$$\text{若：}|x_n-a|\leqslant k|x_{n-1}-a|\ 0<k<1$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}0\leqslant|x_n-a|&\leqslant k^1|x_{n-1}-a|\\&\leqslant k^2|x_{n-2}-a|\\&\leqslant\ldots\\&\leqslant k^{n-1}|x_1-a|\end{aligned}$$

4. 单调有界准则 $\{x_n\}\uparrow$ 且有上界 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$

5. 夹逼准则★★★ $n \to \infty$

$$\begin{array}{ccccc} Y_n & \leqslant & X_n & \leqslant & Z_n \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ A & \Rightarrow & A & \Leftarrow & A \end{array}$$

4.1: 用导数综合

4.2: 用积分综合

4.3: 用方程列,区间列综合

4.4: 用极限综合

例题 1.24:

(1).设:$f(x) = x + \ln(2-x)$,求$f(x)$的最大值

(2).设:$x_1 = \ln 2, x_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \ln(2-x_1)\ n = 2,3,\ldots$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在,并求其值。

解:

$(1) f'(x) = x + \dfrac{-1}{2-x} = \dfrac{1-x}{2-x} = 0 \to x = 1$为唯一驻点

$x < 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$

$1 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow$

$\Rightarrow x = 1$最大值$f_{max} = f(1) = 1$有上界

$(2).x_n = \ln(2-x_1) + \cdots + \ln(2-x_{n-1})$

$x_{n+1} = \ln(2-x_1) + \cdots + \ln(2-x_{n-1}) + \ln(2-x_n)$

故,$x_{n+1} = x_n + \ln(2-x_n) = f(x_n)$

$$\begin{cases} 1^\circ f(x) \leqslant 1 \Rightarrow f(x_n) \leqslant 1 \Rightarrow x_{n+1} \leqslant 1 \text{有上界} \\ 2^\circ x_{n+1} - x_n = \ln(2-x_n) \geqslant 0 \Rightarrow x_n \uparrow \end{cases} \qquad \therefore \text{极限存在} = a$$

$a = a + \ln(2-a) \Rightarrow a = 1$

① 验证$x_1 > \xi$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & > & x_2 & > & \xi \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_1 & > & 2\ln(1+x_1) & > & 2\ln(1+\xi) \end{array}$$

② 假设$x_{n-1} > x_n > \xi$

③ 证明:

$$\begin{array}{ccccc} x_n & > & x_{n+1} & > & \xi \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_n & > & 2\ln(1+x_n) & > & 2\ln(1+\xi) \end{array}$$

由单调有界准则: $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A()$

$\Rightarrow a = 2\ln(1+a) \Rightarrow a = \xi$

例题 1.25:

设:$x_1 = 1,\ x_n = \int_0^1 \min\{x, x_{n-1}\}\mathrm{d}x \quad n = 2, 3, \ldots$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在,并求其值。

解:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 \\
x_2 &= \int_0^1 \min\{x, 1\}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \\
x_3 &= \int_0^1 \min\{x, \frac{1}{2}\}\mathrm{d}x = \frac{3}{8} \\
x_n &= \int_0^1 \min\{x, x_{n-1}\}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_0^1 x_{n-1}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$1 >= \qquad x_{n-1} - \frac{1}{2}{x_{n-1}}^2 > 0$$

$$\frac{1}{2}{x_{n-1}}^2 < x_{n-1}$$

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}{x_{n-1}}^2 < 0 \downarrow$$

故,极限存在记为a

$$\Rightarrow a = a - \frac{a^2}{2} \Rightarrow a = 0$$

用极限证明:

例题 1.26:

证明:当$x \to 0^+$时

(1)$0 < \tan^2 x - x^{<} x^4$成立(保号性)

(2)设:$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \tan^2 \frac{1}{\sqrt{n+k}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

解:

(1)$x^2 < \tan^2 x < x^4 + x^2 \qquad$ Q.E.D.

(2)$\frac{1}{n+k} < \tan^2 \frac{1}{\sqrt{n+k}} < \frac{1}{n+k} + \frac{1}{(n+k)^2}$

$$\sum \frac{1}{n+k} < \sum \tan^2 \frac{1}{\sqrt{n+k}} < \sum \frac{1}{n+k} + \sum \frac{1}{(n+k)^2}$$

其中:$0 \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \frac{1}{n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2$$