

Методические указания

Тематическое занятие 6

Реализация вычислительных методов на компьютере.

Содержание

Численное решение уравнений	1
<i>Постановка задачи и обоснование решения</i>	1
<i>Метод деления пополам</i>	2
<i>Точность вычислений</i>	3
<i>Другие методы</i>	3
Приближенные числа	4
<i>Абсолютная и относительная погрешности</i>	4
<i>Значащие цифры</i>	4
<i>Верные значащие цифры</i>	5

Численное решение уравнений

Постановка задачи и обоснование решения

Допустим необходимо найти решение нелинейного уравнения $f(x) = 0$. Это значит нужно определить все значения аргумента x , при которых значения нелинейной функции $f(x)$ равны нулю.

Рассмотрим один из методов решения – метод **деления отрезка пополам**, который также называют методом **бисекции** или **дихотомии**. Он основывается на следующих рассуждениях.

Если функция $f(x)$ – непрерывна на некотором интервале $[a, b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$, то по теореме Больцано–Коши о промежуточном значении функции $f(x)$ принимает любое значение на $[A, B]$. То есть для любого $C \in [A, B]$ существует $c \in [a, b]$ такое, что $f(c) = C$.

В случае $f(x) = 0$ достаточно, чтобы $f(a)$ и $f(b)$ имели разный знак, тогда $\exists c \in [a, b]: f(c) = 0$.

Метод деления пополам

Таким образом, при поиске решения уравнения $f(x) = 0$ на концах отрезка $[a, b]$ функция должна быть **противоположных знаков**.

Разделим отрезок $[a, b]$ **пополам** и возьмём ту из половинок, на концах которой функция $f(x)$ по-прежнему принимает значения противоположных знаков. На рис 6.1 длина отрезка $L = b - a$, а середина отрезка $c = (a + b) / 2$.

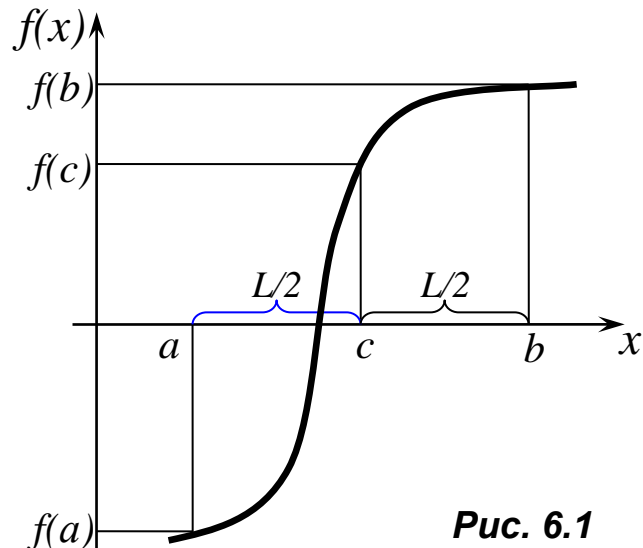


Рис. 6.1

Здесь $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Поскольку $f(c) > 0$, то необходимо взять отрезок $[a, c]$.

Для выбранного отрезка необходимо **повторить** описанную процедуру деления пополам, как показано на рис. 6.2.

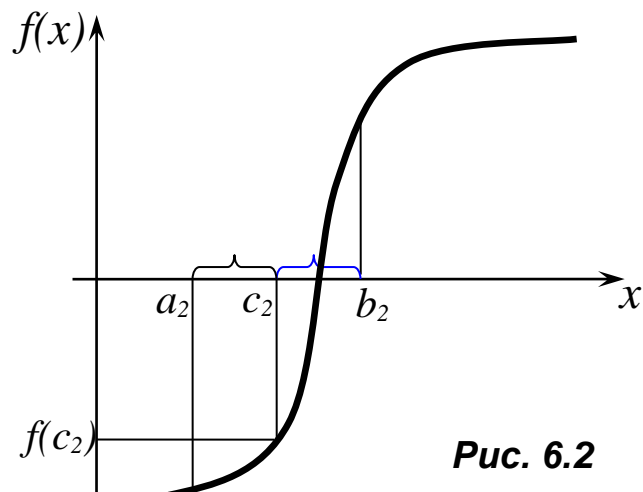


Рис. 6.2

Процедуру деления отрезка пополам следует продолжать **до достижения заданной точности**.

Точность вычислений

Точность вычислений можно задать двумя способами:

- точность по оси абсцисс ε_x , когда требуется найти решение исходного уравнения в пределах заданной погрешности

$$x = x_0 \pm \varepsilon_x,$$

изображенной на рис. 6.3;

- точность по оси ординат ε_f , которая достигается при вычислениях значения функции в уравнении $f(x)=0$, при этом решение лежит в пределах погрешности

$$x = x_0 \pm \frac{L}{2^N},$$

где N – количество выполненных итераций, на которых происходило деление отрезка пополам (см. рис. 6.4).

Для обоих этих случаев погрешности найденного решения x могут различаться.

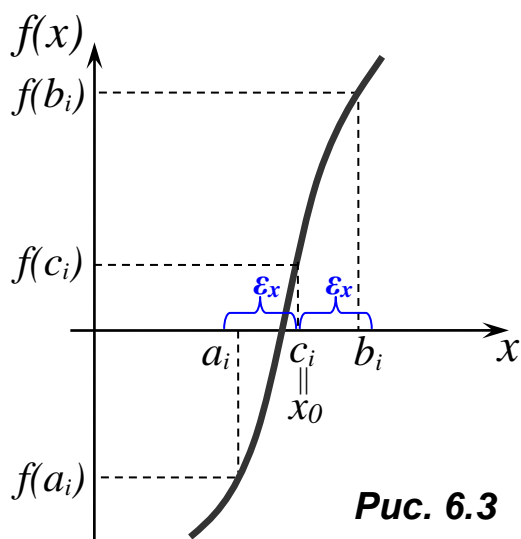


Рис. 6.3

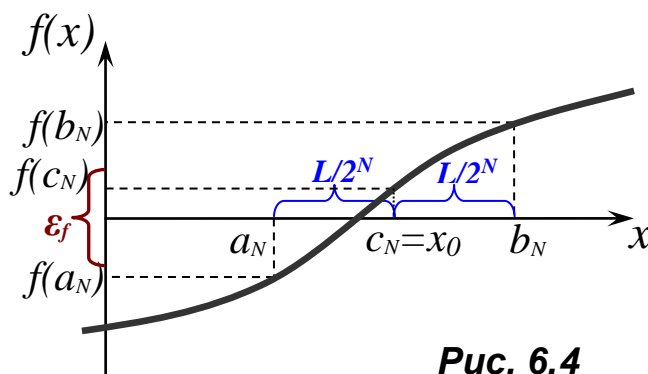


Рис. 6.4

Другие методы

Рассмотренный метод деления пополам – один из простейших для численного решения нелинейных уравнений. Существуют другие методы:

- метод простой итерации (или последовательных приближений),
- метод хорд (или секущих),
- метод Ньютона (метод касательных),

а также их модификации и иные методы.

Каждый из них обладает своими **ограничениями** и **условиями применения**.

Приближенные числа

Абсолютная и относительная погрешности

Приближенным числом a называют число, незначительно отличающееся от точного числа A и заменяющее его в вычислениях.

Абсолютная погрешность приближенного числа:

$$\Delta = |A - a|.$$

Если число A не известно, то пользуются понятием *предельной абсолютной погрешности* Δ_a :

$$\Delta = |A - a| \leq \Delta_a.$$

Следовательно, точное число заключено в пределах:

$$a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a,$$

или для краткости записывают:

$$A = a \pm \Delta_a.$$

На практике в качестве значения Δ_a выбирают наименьшее возможное число.

Абсолютная погрешность не достаточна для характеристики точности измерений или вычислений. Поэтому часто используют *относительную погрешность*:

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}.$$

Значащие цифры

На практике приближенные числа представляют собой конечные десятичные дроби. Дробь, содержащая n цифр, может быть представлена:

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \dots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} \quad (\alpha_m \neq 0),$$

где α_i ($i = m, m-1, \dots, m-n+1$) – *значащие цифры* приближенного числа a .

При позиционной записи таких дробей в десятичной системе счисления иногда приходится использовать лишние нули в начале или в конце числа. Примеры:

$$x = 7 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-5} + 0 \cdot 10^{-6} = \underline{0}, \underline{00}7010$$

$$y = 2 \cdot 10^9 + 0 \cdot 10^8 + 0 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 = 2 \ 003 \ \underline{000} \ \underline{000}$$

Здесь лишние нули (подчеркнуты) не являются значащими.

Чтобы избежать неопределенности с нулями принято записывать только значащие цифры (мантиссу) и указывать десятичный порядок числа:

$$x = 7,010 \cdot 10^{-3}$$

$$y = 2,0030 \cdot 10^9$$

Здесь нули в конце мантиссы являются значащими цифрами.

Верные значащие цифры

Первые n значащих цифр приближенного числа являются *верными*, если абсолютная погрешность этого числа **не превышает половины единицы** разряда, выражаемого n -й значащей цифрой. То есть, если

$$\Delta = |A - a| = \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}$$

то все n значащих цифр $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_{m-n+1}$ являются верными.

Пример.

Рассмотрим точное число $A = 35,97$ и его приближенное число $a = 36,00$.
Найдем n – количество верных значащих цифр числа a .

Абсолютная погрешность

$$|A - a| = 0,03 < 0,05 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}$$

Тогда $m - n + 1 = -1$.

Для числа a степень числа 10 при старшем десятичном разряде $m = 1$, поскольку $a = 36,00 = 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2}$. Поэтому $n = 3$.

Это означает, что для точного числа $A = 35,97$ число $a = 36,00$ является приближенным с тремя верными значащими цифрами. Поэтому вместо числа A допустимо записывать приближенное число с тремя верными знаками $a = 36,0$.