Optimisation appliquée à la localisation d'unités de soin et à la prise en charge des patients

Projet MOGPL

Anthéa Richaume
Bassem Yagoub
(Groupe 3)

3 décembre 2020

1 Répartition de patients dans les unités de soin

Question 1.1

Avec n le nombre de villes, k le nombre d'unités, $d_{i,j}$ la distance entre une ville i et une ville j, $x_{i,j}$ la variable binaire valant 1 si le centre de soin de la ville i est la ville j, v_i la population de la ville i et $\gamma = \frac{1+\alpha}{k} \sum_{i=1}^{n} v_i$ la population totale des villes composant un secteur qui ne doit pas être dépassée, on peut modéliser notre problème avec le PL suivant :

$$\min z = \frac{1}{\sum_{i}^{n} v_i} * \sum_{i,j}^{n} d_{i,j} * x_{i,j} * v_i$$

$$(C1) \sum_{i} v_i * x_{i,j} \leq \gamma$$

$$(C2) \sum_{j} x_{i,j} = 1$$

$$x_{i,j} = \{0, 1\}$$

Fonction objectif :

Minimiser la distance moyenne de chaque habitant à l'unité de soin dont il dépend

Contrainte 1 :

La population totale des villes composant un secteur ne doit pas dépasser γ

Contrainte 2 :

Chaque ville est rattachée à exactement un secteur de soin

On aura donc $k * C1 + n * C2$ contraintes.

On ne peut pas modéliser ce problème par un algorithme de flot maximum à coût minimum car la contrainte 2 ne peut être modélisée, on ne peut pas imposer à tous les habitants d'une ville d'aller dans un seul secteur.

Question 1.2

Pour l'application numérique on choisira simplement les k premières villes du tableau comme centres de soins.

Pour $\alpha = 0.2$:

$\alpha = 0.2$, k = 3 :
Secteur de Toulouse : Toulouse, Montpellier, Bordeaux
Secteur de Nice : Nice, Strasbourg, Saint-Etienne, Grenoble
Secteur de Nantes : Nantes, Lille, Rennes, Reims, Le Havre, Dijon, Angers
Solution optimale de valeur 272,75

$\alpha = 0.2$, k = 4 :
Secteur de Toulouse : Toulouse, Bordeaux, Lille
Secteur de Nice : Nice, Strasbourg, Toulon
Secteur de Nantes : Nantes, Rennes, Reims, Le Havre, Angers
Secteur de Montpellier : Montpellier, Saint-Etienne, Grenoble, Dijon
Solution optimale de valeur 250,75

Pour $\alpha = 0.1$:

$\alpha = 0.1$, k = 3 :
Secteur de Toulouse: Toulouse, Montpellier, Bordeaux, Dijon
Secteur de Nice: Nice, Strasbourg, Saint-Étienne, Toulon, Grenoble
Secteur de Nantes: Nantes, Lille, Rennes, Reims, Le Havre, Angers
Solution optimale de valeur 273,01

$\alpha = 0.1$, k = 4 :
Secteur Toulouse : Toulouse, Bordeaux, Lille
Secteur Nice : Nice, Strasbourg, Toulon
Secteur Nantes : Nantes, Rennes, Le Havre, Angers
Secteur Montpellier : Montpellier, Reims, Saint-Étienne, Grenoble, Dijon
Valeur de la fonction objectif : 264,68

Via ces exécutions, on observe une logique diminution (et donc amélioration) de la valeur de la fonction objectif quand k augmente car il y a plus de secteurs et donc des distances plus faibles à parcourir entre chaque ville i et son unité j. De même quand α augmente, on obtient de meilleures solutions car γ sera un majorant moins contraignant sur la contrainte 1.

2 Localisation optimale des unités de soin

Question 2.1

Ce nouveau problème correspond au Facility location problem.
On introduit une nouvelle variable booléenne y_j indiquant si la ville j est une unité de soin, on ajoute une contrainte indiquant qu'il y a au plus k villes hôtes pour les unités de soins et on modifie la contrainte 1 en y ajoutant y_j comme coefficient à γ pour indiquer que ce sont seulement les villes hôtes qui devront avoir une contrainte à respecter sur les populations.

$$\min z = \frac{1}{\sum_i^n v_i} * \sum_{i,j}^n d_{i,j} * x_{i,j} * v_i$$

$$\sum_i v_i * x_{i,j} \leq \gamma * y_j$$

$$\sum_j x_{i,j} = 1$$

$$\sum_j y_j = k$$

$$x_{i,j} = \{0, 1\}$$

$$y_j = \{0, 1\}$$

Pour $\alpha = 0.2$:

Comme pour la partie 1, nous allons voir des cas avec $\alpha = 0.1$ et $\alpha = 0.2$
$\alpha = 0.2$, k = 3 :
Secteur Nantes : Nantes, Bordeaux, Rennes, Le Havre, Angers
Secteur Montpellier : Toulouse, Nice, Montpellier, Toulon
Secteur Dijon : Strasbourg, Lille, Reims, Saint-Étienne, Grenoble, Dijon
Valeur de la fonction objectif : 228.086

$\alpha = 0.2$, k = 4 :
Secteur Toulouse : Toulouse, Montpellier, Bordeaux
Secteur Nantes : Nantes, Rennes, Angers
Secteur Reims : Strasbourg, Lille, Reims, Le Havre, Dijon
Secteur Toulon : Nice, Saint-Étienne, Toulon, Grenoble
Valeur de la fonction objectif : 167.03

$\alpha = 0.2$, k = 5 :
Secteur Toulouse : Toulouse, Bordeaux
Secteur Nice : Nice, Toulon

Secteur Montpellier : Montpellier, Saint-Étienne, Grenoble
Secteur Rennes : Nantes, Rennes, Le Havre, Angers
Secteur Reims : Strasbourg, Lille, Reims, Dijon
Valeur de la fonction objectif : 134.99

Pour $\alpha = 0.1$:

$\alpha = 0.1$, k = 3 :
Secteur Nantes : Nantes, Bordeaux, Rennes, Le Havre, Angers
Secteur Montpellier : Toulouse, Nice, Montpellier, Toulon
Secteur Dijon : Strasbourg, Lille, Reims, Saint-Étienne, Grenoble, Dijon
Valeur de la fonction objectif : 228.086

$\alpha = 0.1$, k = 4 :
Secteur Toulouse : Toulouse, Bordeaux, Saint-Étienne
Secteur Rennes : Nantes, Rennes, Le Havre, Angers
Secteur Reims : Strasbourg, Lille, Reims, Dijon
Secteur Toulon : Nice, Montpellier, Toulon, Grenoble
Valeur de la fonction objectif : 174.35

$\alpha = 0.1$, k = 5 :
Secteur Toulouse : Toulouse, Montpellier
Secteur Nice : Nice, Toulon
Secteur Nantes : Nantes, Bordeaux, Rennes
Secteur Lille : Lille, Reims, Le Havre, Angers
Secteur Dijon : Strasbourg, Saint-Étienne, Grenoble, Dijon
Valeur de la fonction objectif : 156.85

De même que quand on choisissait arbitrairement nos villes dans la partie 1, on observe une amélioration nette à chaque augmentation de la valeur k et de la valeur α pour les même raisons.
On obtient des solutions bien meilleures par rapport à celles précédemment eues étant donné qu'on choisit efficacement les villes qui serviront de centres grâce à la variable y_j et ses contraintes associées. On passe notamment de 264.68 à 174.35 comme valeur de la fonction objectif quand α=0.1 et k=4.

Question 2.2

Notre objectif étant maintenant d'avoir une solution plus équitable pour l'accès au soin il nous faut changer la fonction objectif par min z = $max_{i \in I} d(i, f(i))$. Pour cela, il suffit de linéariser le max comme ceci :

$$\min t$$

$$t \geq d(i, f(i))$$

$$t \geq -d(i, f(i))$$

$$\sum_i v_i * x_{i,j} \leq \gamma * y_j$$

$$\sum_j x_{i,j} = 1$$

$$\sum_j y_j = k$$

$$x_{i,j} = \{0, 1\}$$

$$y_j = \{0, 1\}$$

$$t \geq 0$$

Pour $\alpha = 0.2$:
$\alpha = 0.2$, k = 3 :
Secteur Montpellier : Nice, Montpellier, Saint-Étienne, Toulon, Grenoble
Secteur Bordeaux : Toulouse, Nantes, Bordeaux, Rennes, Angers
Secteur Reims : Strasbourg, Lille, Reims, Le Havre, Dijon
Valeur de la fonction objectif : 458
Valeur de $max_{i \in I} d(i, f(i))$ avec le PL en 2.1 : 501

$\alpha = 0.2$, k = 4 :
Secteur Nantes : Nantes, Bordeaux, Rennes, Angers
Secteur Montpellier : Toulouse, Nice, Toulon
Secteur Reims : Strasbourg, Lille, Reims, Le Havre, Dijon
Secteur Grenoble : Montpellier, Saint-Étienne, Grenoble
Valeur de la fonction objectif : 347
Valeur de $max_{i \in I} d(i, f(i))$ avec le PL en 2.1 : 398

$\alpha = 0.2$, k = 5 :
Secteur Nantes : Nantes, Rennes, Angers
Secteur Bordeaux : Toulouse, Bordeaux
Secteur Lille : Lille, Reims, Le Havre
Secteur Toulon : Nice, Montpellier, Toulon
Secteur Dijon : Strasbourg, Saint-Étienne, Grenoble, Dijon
Valeur de la fonction objectif : 332
Valeur de $max_{i \in I} d(i, f(i))$ avec le PL en 2.1 : 347

Pour $\alpha = 0.1$:
$\alpha = 0.1$, k = 3 :
Secteur Montpellier : Nice, Montpellier, Saint-Étienne, Toulon, Grenoble
Secteur Bordeaux : Toulouse, Nantes, Bordeaux, Rennes
Secteur Reims : Strasbourg, Lille, Reims, Le Havre, Dijon, Angers
Valeur de la fonction objectif : 458
Valeur de $max_{i \in I} d(i, f(i))$ avec le PL en 2.1 : 501

α = 0.1, k = 4 :
Secteur Nantes : Nantes, Bordeaux, Rennes, Angers
Secteur Montpellier : Toulouse, Nice, Grenoble
Secteur Reims : Strasbourg, Lille, Reims, Le Havre
Secteur Grenoble : Montpellier, Saint-Étienne, Toulon, Dijon
Valeur de la fonction objectif : 372
Valeur de $max_{i \in I} d(i, f(i))$ avec le PL en 2.1 : 536

α = 0.1, k = 5 :
Secteur Toulouse : Toulouse, Montpellier
Secteur Nantes : Nantes, Bordeaux, Rennes
Secteur Toulon : Nice, Toulon
Secteur Le Havre : Lille, Reims, Le Havre, Angers
Secteur Dijon : Strasbourg, Saint-Étienne, Grenoble, Dijon
Valeur de la fonction objectif : 347
Valeur de $max_{i \in I} d(i, f(i))$ avec le PL en 2.1 : 511

Bien que la fonction objectif ait changé, on a toujours une amélioration (ou un non changement) de sa valeur lorsque k et α augmentent. Cette fois ci, nous n'obtenons plus une moyenne des distances en fonction des populations mais la distance maximale obtenue parmi toutes les distances entre chaque ville i et son unité j qu'on a sélectionné.
En récupérant ces mêmes distances max en exécutant le PL 2.1, on remarque que notre nouveau PL permet d'avoir des solutions plus équitables comme espéré, et notamment quand $\alpha = 0.1$ où la différence entre les deux distances maximales se creusent fortement.
On a donc au final deux manières de faire intéressantes, l'une plus efficace de manière générale, et l'autre plus équitable car il y aura moins de personnes avantagées au détriment des autres.

3 Équilibrage des charges des unités de soin

Question 3.1

Le problème de flot maximum à coût minimum peut être représenté par un réseau de transport G = (V,E) (voir figure 1).
Le nombre de patients présents dans l'unité i (à gauche) est caractérisé par l'offre p_i avec i = {1,..,5}. Ces patients doivent être répartis de façon équitable dans ces mêmes unités représentées dans la partie droite du graphe. Les unités ont des capacités max de 100 patients.
Les coûts sont représentés par $d_i j$ (les distances d'une unité i à une unité j).

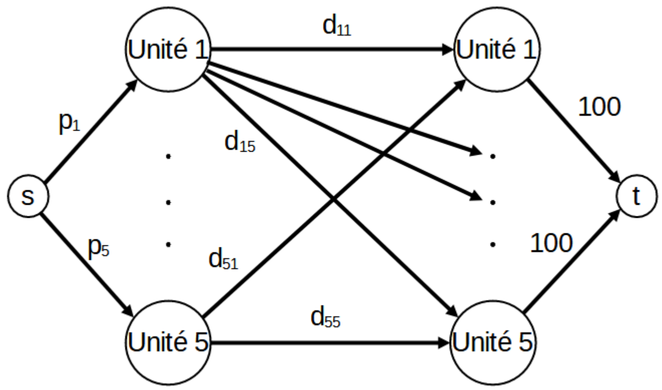

Figure 1: 3-1

Question 3.2

Ce problème peut être résolu avec l'algorithme de Busacker et Gowen mais nous avons choisi de le résoudre à l'aide d'un programme linéaire et de Gurobi comme pour le reste du projet.
Voici donc une deuxième formulation du problème en programmation linéaire, avec $x_{i,j}$ le déplacement des patients de l'unité i vers l'unité j :

$$\min z = \sum_{j}^{5} d_{i,j} * x_{i,j}$$

$$\sum_{j}^{5} x_{i,j} = p_i$$

$$\sum_{i}^{5} x_{i,j} \leq 100$$

$$x_{i,j} \geq 0$$

Voici la répartition des patients sur deux instances de p :
Sur la première, le coût total est de 29 000 et de 61 830 pour la deuxième.

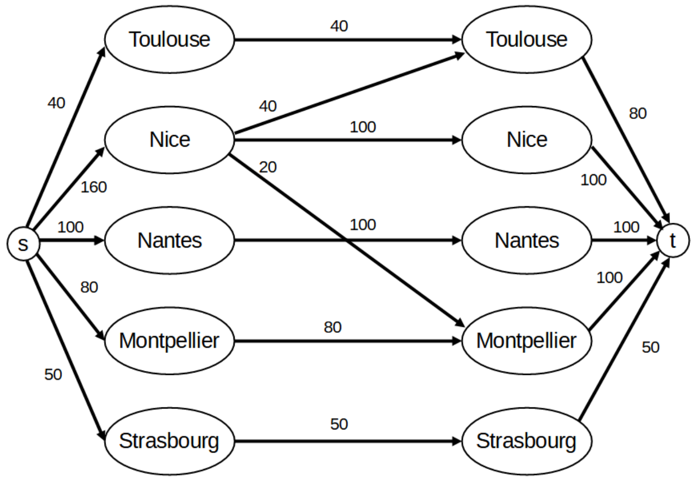

Figure 2: Instance 1

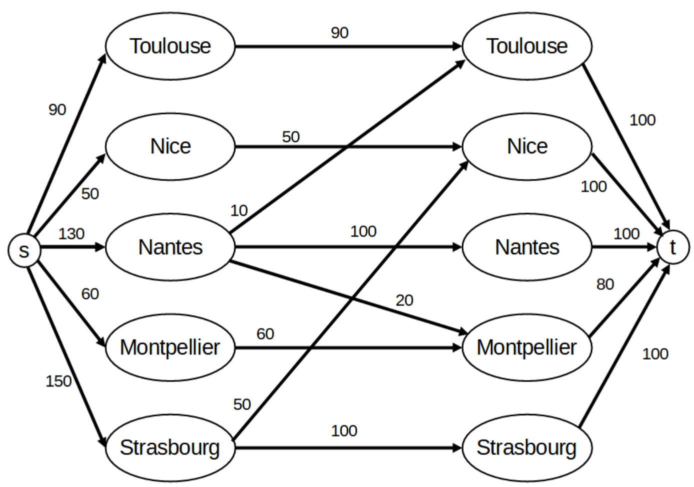

Figure 3: Instance 2