для которых числа фотонов не имеют определенных значений. Состояния электромагнитного поля, которые мы встречаем на практике, почти всегда являются состояниями с неопределенным числом фотонов, которое может задаваться только в рамках статистического описания. Ниже мы обратим наше внимание на проблему статистики фотонов. Мы узнаем, что фотонные флуктуации достаточно хорошо проявляются во флуктуациях щелчков, которые регистрируют фотодекторы, помещенные в поле.

12.10.1. Вероятности

Если $\{n\}$ обозначает некоторый определенный набор чисел заполнения фотонами, то вероятностью обнаружения $p(\{n\})$ набора $\{n\}$, когда электромагнитное поле находится в некотором произвольном состоянии, описываемом оператором плотности $\hat{\rho}$, является просто ожидаемое значение оператора проектирования на фоковское состояние $|\{n\}\rangle\langle\{n\}|$ или

$$p(\{n\}) = \operatorname{Tr}[\hat{\rho}|\{n\}\rangle\langle\{n\}|]. \tag{12.10.1}$$

С помощью диагонального представления $\hat{\rho}$ по когерентным состояниям (11.11.11) и ранее выведенного скалярного произведения когерентного состояния на фоковское состояние [(11.2.12)], находим, что

$$\begin{aligned}
p(\{n\}) &= \operatorname{Tr}\int \phi(\{v\})|\{v\}\rangle\langle\{v\}||\{n\}\rangle\langle\{n\}\,d\{v\} = \int \phi(\{v\})|\langle\{n\}|\{v\}\rangle|^2\,d\{v\} = \\
&= \int \phi(\{v\})\prod_{\mathbf{k},s}\left[\frac{|v_{\mathbf{k}s}|^{2n_{\mathbf{k}s}}\,\mathrm{e}^{-|v_{\mathbf{k}s}|^2}}{n_{\mathbf{k}s}!}\right]d\{v\} = \\
&= \left\langle \prod_{\mathbf{k},s}\left[\frac{|v_{\mathbf{k}s}|^{2n_{\mathbf{k}s}}\,\mathrm{e}^{-|v_{\mathbf{k}s}|^2}}{n_{\mathbf{k}s}!}\right]\right\rangle_{\phi} = \qquad (12.10.2\text{а})\\
&= \left\langle :\prod_{\mathbf{k},s}\left[\frac{\hat{n}_{\mathbf{k}s}^{n_{\mathbf{k}s}}\,\mathrm{e}^{-\hat{n}_{\mathbf{k}s}}}{n_{\mathbf{k}s}!}\right]:\right\rangle. \qquad (12.10.2\text{б})
\end{aligned}$$

Последнее выражение следует из предыдущего ввиду оптической теоремы эквивалентности. Соотношение (12.10.2а) имеет интересную структуру. Оно выражает $p(\{n\})$ как произведение пуассоновских распределений по числам заполнения $n_{\mathbf{k}s}$, которое затем должно быть усреднено по весовому функционалу $\phi(\{v\})$ (Ghielmetti, 1964). Однако, в общем случае, процедура усреднения по $\phi(\{v\})$ не будет сохранять структуру $p(\{n\})$ в виде произведения пуассоновских распределений. Конечное выражение может выглядеть совершенно иначе и не иметь вид произведения по модам.

Тем не менее, в частных случаях $p(\{n\})$ может иметь вид пуассоновского распределения. Например, если состояние является когерентным состоянием $|\{v'\}\rangle$, то $\phi(\{v\})$ задается соотношением

$$\phi(\{v\}) = \prod_{\mathbf{k},s}\delta^2(v_{\mathbf{k}s} - v'_{\mathbf{k}s}), \tag{12.10.3}$$

и из (12.10.2) мы имеем

$$p(\{n\}) = \prod_{\mathbf{k},s}\left[\frac{|v'_{\mathbf{k}s}|^{2n_{\mathbf{k}s}}\,\mathrm{e}^{-|v'_{\mathbf{k}s}|^2}}{n_{\mathbf{k}s}!}\right], \tag{12.10.4}$$

что, как и ожидалось, является произведением пуассоновских распределений для каждой моды. Для весового функционала $\phi(\{v\})$ (11.11.18), соответствующего случаю одномодового лазера, мода которого имеет случайную фазу, получаем

$$p(\{n\}) = \frac{r^{2n_{\mathbf{k}'s'}}\,\mathrm{e}^{-r^2}}{n_{\mathbf{k}'s'}}\prod_{\mathbf{k},s\neq\mathbf{k}',s'}\delta_{n_{\mathbf{k}s}0}, \tag{12.10.5}$$

откуда видно, что число фотонов в $\mathbf{k}', s'$-моде имеет пуассоновское распределение, в то время как все остальные моды являются незаполненными. В разд. 13.2 мы покажем, что для равновесного теплового состояния поля, для которого $\phi(\{v\})$ является гауссовским, выражение (12.10.2) приводит к произведению распределений Бозе — Эйнштейна.

Иногда распределение вероятности набора чисел заполнения $\{n\}$ интересует нас меньше, чем распределение вероятности $P(n)$ общего числа фотонов n, где

$$n \equiv \sum_{\mathbf{k},s} n_{\mathbf{k}s}. \tag{12.10.6}$$

Легко вывести выражение для $P(m)$ из $p(\{n\})$, если просуммировать $p(\{n\})$ по всем комбинациям $\{n\}$, для которых общее число $n = m$. Тогда с помощью (12.10.2) имеем

$$P(m) = \sum_{\{n\}} p(\{n\})\delta_{mn} = \sum_{\{n\}} \left\langle \prod_{\mathbf{k},s} \left[\frac{|v_{\mathbf{k}s}|^{2n_{\mathbf{k}s}}\, \mathrm{e}^{-|v_{\mathbf{k}s}|^2}}{n_{\mathbf{k}s}!} \right] \right\rangle_{\phi} \delta_{nm}.$$

Меняя местами порядки суммирования, произведения и усреднения по фазовому пространству и используя полиномиальную теорему в виде

$$\left[\sum_{\mathbf{k},s} |v_{\mathbf{k}s}|^2 \right]^m = \sum_{\{n\}} \prod_{\mathbf{k},s} \left[\frac{|v_{\mathbf{k}s}|^{2n_{\mathbf{k}s}}}{n_{\mathbf{k}s}!} \right] m!\, \delta_{nm}, \tag{12.10.7}$$

приходим к выражению

$$P(m) = \left\langle \frac{1}{m!} \left[\sum_{\mathbf{k},s} |v_{\mathbf{k}s}|^2 \right]^m \exp\left[-\sum_{\mathbf{k},s} |v_{\mathbf{k}s}|^2 \right] \right\rangle_{\phi} = \left\langle \frac{U^m\, \mathrm{e}^{-U}}{m!} \right\rangle_{\phi} = \left\langle :\, \frac{\hat{n}^m\, \mathrm{e}^{-\hat{n}}}{m!} \,: \right\rangle, \tag{12.10.8}$$

где

$$U \equiv \sum_{\mathbf{k},s} |v_{\mathbf{k}s}|^2 = \int_{L^3} V^*(\mathbf{r},t) V(\mathbf{r},t)\, d^3x, \tag{12.10.9}$$

а произведение $\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{V}$ является фотонной плотностью. Последняя форма (12.10.8) получается из предыдущей по оптической теореме эквивалентности. Мы видим, что $P(m)$ также может быть формально записана как среднее по пуассоновским распределениям и функционал в фазовом пространстве $\phi(\{v\})$ играет роль весового функционала. Для когерентного состояния $|\{v'\}\rangle$, при $\phi(\{v\})$ задаваемым выражением (12.10.3), и для одномодового лазера, при $\phi(\{v\})$ задаваемым выражением (11.11.18), $P(m)$ фактически является пуассоновским распределением по m. Хотя в общем случае операция усреднения в фазовом пространстве может привести к совершенно иной форме $P(m)$.

Параметр U в (12.10.9) является c-числовой интенсивностью света, проинтегрированной по всему пространству и, в определенном смысле, представляет собой аналог общего числа фотонов $\hat{n}$. Правую часть в (12.10.8) также можно трактовать как среднее от $U^m e^{-U}/m!$ по некоторой случайной переменной U с плотностью квазивероятности $\mathscr{P}(U)$, задаваемой выражением

$$\mathscr{P}(U') = \int \phi(\{v\}) \delta(U' - U)\, d\{v\}. \tag{12.10.10}$$

Для того, чтобы увидеть это, отметим, что (12.10.8) также может быть записано в виде

$$\begin{aligned} P(m) &= \int \phi(\{v\}) \frac{U^m\, \mathrm{e}^{-U}}{m!}\, d\{v\} = \iint \phi(\{v\}) \delta(U - U') \frac{U^m\, \mathrm{e}^{-U}}{m!}\, dU\, d\{v\} = \\ &= \iint \phi(\{v\}) \delta(U - U') \frac{U'^m\, \mathrm{e}^{-U'}}{m!}\, dU'\, d\{v\} = \int \mathscr{P}(U') \frac{U'^m\, e^{-U'}}{m!}\, dU', \end{aligned} \tag{12.10.11}$$

где правая часть имеет обычный вид классического среднего. Однако, в тех случаях, когда $\phi(\{v\})$ лежит вне области классической плотности в фазовом пространстве, $\mathscr{P}(U')$ также может не обладать особенностями классической плотности вероятности.