

Mathématiques Discrètes : Examen de Juin 2022

Marco Saerens, retranscrit par Doeraene Anthony

June 2022

1 Logique

1. Soit la formule $p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$.
 - (a) Cette formule est-elle une tautologie ou une contradiction? Montrez-le via une table de vérité
 - (b) Montrez-le via un raisonnement formel
2. Soit les affirmations suivantes en logique des prédicats avec quantificateur
 - Tous les chiens aiment les êtres humains ou détestent les chats
 - Buzzy est un chien
 - Buzzy aime les chats
 - (a) Appliquez les règles d'inférence pour tirer une conclusion
 - (b) Quelle est la conclusion que l'on peut tirer à partir de ces affirmations (en logique+en français)?
3. Qu'est ce qu'un contre-exemple? Donnez une explication de ce concept ainsi la logique se trouvant derrière celle-ci.

2 Combinatoire

1. (a) Soit l'expression $(\sqrt{2}x - y)^5$. Donnez la forme développée de ce polynôme.
(b) Soit l'expression $(ax + by)^c$. Donnez le coefficient numérique de $x^{c-d}y^d$
2. Nous possédons un générateur de mot de passe, pouvant utiliser comme caractère les lettres minuscules ainsi que les chiffres (0-9). Les lettres majuscules sont donc inutilisées. En supposant que ce générateur est parfaitement aléatoire (chaque caractère a la même probabilité d'apparaître). Quelle est la probabilité que le mot de passe
 - (a) commence par une lettre **et** termine par une lettre?
 - (b) commence par une lettre **ou** termine par une lettre.
 - (c) ne contienne pas deux fois le même caractère?
 - (d) alterne les chiffres et les lettres (après chaque chiffre, nous avons une lettre et inversement)?
3. Vous êtes actionnaire et souhaitez placer des actions parmi 5 entreprises différentes.
 - (a) Combien y-a-t il de manière de placer 10 actions parmi ces 5 entreprises?
 - (b) Un ami vous recommande de répartir les actions afin de garantir une certaine rentrée. Vous devez donc répartir 20 actions entre 5 entreprises en s'assurant que chaque entreprise contienne au moins 2 actions.

3 Graphes

1. GRAPHE HERE
 - (a) Trouvez la longueur du plus court chemin dans le graphe
 - (b) Donnez le plus court chemin du graphe. Donnez également le plus court chemin entre le noeud a et le noeud h.
2. Le graphe possède-t-il un circuit et/ou un chemin eulérien
3. Dérivez la formule de calcul du score PageRank à partir de l'interprétation du *random walker*

4 Equations de récurrence

1. Soit l'équation de récurrence homogène

$$a_n = -3a_{n-1} + 10a_{n-2}$$

- (a) Donnez les racines de l'équation caractéristique associée
 - (b) Donnez la solution générale de cette équation
 - (c) Déterminez les coefficients avec les conditions initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 2$
2. Nous rajoutons désormais un terme de source $F(n) = -3^n$, arrivant donc à l'équation non-homogène suivant

$$a_n = -3a_{n-1} + 10a_{n-2} - 3^n$$

- (a) Démontrez la forme de la solution à une équation de récurrence non-homogène
 - (b) Donnez la solution générale de cette équation non-homogène