Helsingfors universitet
Matematisk-naturvetenskapliga fakulteten
Avdelningen för matematik och statistik

Kandidatavhandling

Kardinaliteten för ultraprodukter av ändliga strukturer

Sebastian Karlsson

Handledare: Åsa Hirvonen

30 mars 2023

Sammandrag

Avhandlingen rör sig inom mängdlära och modellteori. I avhandlingen undersöks kardinaliteten för ultraprodukter av ändliga strukturer. Här betraktas strukturer som består av en ändlig mängd med ett ändligt antal relationer, funktioner och/eller konstanter definerade på den. Ultraprodukten av en ändlig eller oändlig familj av strukturer är en ny struktur som har motsvarande relationer, funktioner och konstanter som den familj av strukturer den konstrueras utav. Idén är att ultraprodukten skall ha de egenskaper som "majoriteten" av strukturerna uppfyller. "Majoriteten" formaliseras med begreppet ultrafilter, som är en viss samling av delmängder till den mängd som indexerar familjen av strukturerna.

Ultraprodukter är en viktig konstruktion inom modellteorin, där den används till att ge eleganta bevis för många av modellteorins centrala teorem. Till exempel kan ultraprodukter användas för att bevisa kompakthets- och fullständighetssatsen i första ordningens logik.

Det finns ofta många olika ultrafilter över en mängd och beroende på ultrafiltrets egenskaper och de kardinaliteter som de ändliga strukturerna har, så kan ultraprodukten av dem ha olika kardinalitet. Ibland är ultraprodukten ändlig och ibland är den oändlig. Här visas dock att om den är oändlig så kan den ändå aldrig ha samma kardinalitet som de naturliga talen. Det är däremot möjligt att den har samma kardinalitet som kontinuumet. Här visas också att en ultraprodukt av ändliga strukturer kan bli godtyckligt stor, det vill säga att för varje oändligt kardinaltal så finns det någon ultraprodukt av ändliga strukturer så att dess kardinalitet är större.

Antag att $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ är en familj av ändliga strukturer och U är ett ultrafilter över I. Om det för alla naturliga tal n gäller att mängden $\{i \in I : |\mathfrak{A}_i| = n\}$ inte är ett element i ultrafiltret, så gäller det att kardinaliteten för ultraprodukten av $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ är större än eller lika med kontinuumet. Däremot om kardinaliteten för ultraprodukten av $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ är mindre än kontinuumet, så gäller det att den är isomorf med $\mathfrak{A}_i$ för något $i \in I$.

Innehåll

1 Introduktion **1**

2 Definitioner och grundegenskaper för ultrafilter och ultraprodukter **1**

3 Fallet då ultraprodukter av ändliga strukturer är större än eller lika med kontinuumet **6**

4 Fallet då ultraprodukter av ändliga strukturer är ändliga **7**

5 Ultraprodukter av ändliga strukturer kan bli godtyckligt stora **11**

1 Introduktion

Ultraprodukter är en viktig konstruktion i modellteori som kan användas till exempel för att bevisa kompakthets- och fullständighetssatsen i första ordningens logik. En *struktur* är en mängd med relationer, funktioner och/eller konstanter definierade på den. Ultraprodukten av en möjligtvis oändlig familj strukturer $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$, är en ny struktur vars egenskaper kan sägas påminna om "majoriteten" av strukturerna. "Majoriteten" formaliseras med begreppet *ultrafilter*, som är en samling delmängder (som uppfyller vissa villkor) av en indexmängd I.

I avhandlingen kommer ultraprodukter att undersökas främst från ett mängdteoretiskt perspektiv. Vi är intresserade av hurdana kardinaliteter ultraprodukter kan ha när de görs av ändliga strukturer. Här antas att kardinalitet och kardinaltal är bekanta begrepp för läsaren.

Det visas i avhandlingen att en ultraprodukt av ändliga strukturer kan vara både ändlig och oändlig. Om den är oändlig kan den dock inte ha samma kardinalitet som de naturliga talen, det vill säga vara uppräknelig. Däremot är det möjligt att den har samma kardinalitet som kontinuumet. Om ultraprodukten är ändlig så gäller det att den är isomorf med någon av dess faktorer. Ett annat intressant resultat är att för varje kardinaltal κ så finns det en ultraprodukt av ändliga strukturer så att den är större än κ. Dessa satser presenterades först i artikeln "Reduced Direct Products" av Frayne, Morel och Scott [2].

2 Definitioner och grundegenskaper för ultrafilter och ultraprodukter

Först några allmänna överenskommelser om beteckningar. Beteckningen ${}^{A}B$, där A och B är mängder, står för mängden av alla funktioner vars domän är A och vars målmängd är B. I beteckningen κ^{λ} antas att κ och λ är kardinaltal och står för potensoperationen för kardinaltal.

Antag att R är en relation över mängden A och $a_0, a_1, ..., a_n \in A$. Som standard använder vi "$R(a_0, a_1, ..., a_n)$" för att säga att tupeln $(a_0, a_1, ..., a_n)$ tillhör R.

Vi kallar en samling symboler för ett *alfabet*. I avhandlingen betraktas endast alfabet som innehåller ett ändligt antal symboler som vi delar in i *relationssymboler*, *funktionssymboler* samt *konstantsymboler*. Som standard använder vi $P_0, ..., P_m$ för relationssymboler, $F_0, ..., F_k$ för funktionssymboler samt $c_0, ..., c_q$ för konstantsymboler. Låt L beteckna ett alfabet. Det vill säga,

$$L = \{P_0, ..., P_m, F_0, ..., F_k, c_0, ...c_q\}$$

För varje relationssymbol P tillskriver vi ett tal $n \geq 1$, och säger att P är en n-ställig relationssymbol. Likaså tillskriver vi varje funktionssymbol F med ett tal $n \geq 1$, och säger att F är en n-ställig funktionssymbol.

Definition 2.1 (L-struktur)**.** En L-struktur $\mathfrak{A}$ består av en icke-tom mängd A, kallad strukturens *universum*, samt

1. För varje n-ställig relationssymbol P i L, en n-ställig relation $R \subseteq A^n$.

2. För varje n-ställig funktionssymbol F i L, en n-ställig funktion $G : A^n \to A$.

3. För varje konstantsymbol c i L, ett element $x \in A$.

Om $L = \{P_0, ..., P_m, F_0, ..., F_k, c_0, ...c_q\}$, betecknar vi L-strukturen $\mathfrak{A}$ enligt

$$\mathfrak{A} = \langle A, R_0, ..., R_m, G_0, ..., G_k, x_0, ..., x_q \rangle$$

I avhandlingen används R, G och x som standard i en struktur $\mathfrak{A}$ för tolkningen av relationssymbolen P, funktionssymbolen F samt konstantsymbolen c. Om vi har en struktur över mängden A så betecknar vi i avhandlingen strukturen med frakturstil, $\mathfrak{A}$. Kardinaliteten för strukturen $\mathfrak{A}$, betecknad $|\mathfrak{A}|$, är kardinaliteten för A, det vill säga $|A|$.

Definition 2.2 (Delstruktur)**.** En *delstruktur* till strukturen $\mathfrak{A}$ är en struktur $\mathfrak{A}'$ så att

1. Universumet A' till $\mathfrak{A}'$ är en delmängd till A, $A' \subseteq A$.

2. För varje n-ställig relation R över $\mathfrak{A}$ finns det en n-ställig relation R' över $\mathfrak{A}'$ så att R' är R:s restriktion till $(A')^n$, det vill säga $R' = R \cap (A')^n$.

3. För varje n-ställig funktion G över $\mathfrak{A}$ finns det en n-ställig funktion G' över $\mathfrak{A}'$ så att G' är G:s restriktion till A', det vill säga $G' = G|_{A'}$.

4. Varje konstant x över $\mathfrak{A}$ är också i $\mathfrak{A}'$.

Det är värt att notera att det inte för varje delmängd A' till A nödvändigtvis finns en delstruktur med universum A'. Om vi har en funktion G över $\mathfrak{A}$ så måste värdemängden av G:s restriktion till A' vara en delmängd av A'. Detta är inte alltid nödvändigtvis fallet.

Definition 2.3 (Isomorfi)**.** Låt $\mathfrak{A}$ och $\mathfrak{A}'$ vara två L-strukturer (över samma alfabet L). $\mathfrak{A}$ och $\mathfrak{A}'$ är *isomorfa*, betecknas med $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$, om det finns en funktion $\phi : A \to A'$ så att

1. ϕ är en bijektion.

2. Låt P vara en relationssymbol i L, R dess tolkning i $\mathfrak{A}$ och R' dess tolkning i $\mathfrak{A}'$. Då skall det för alla $a_0, ..., a_{n-1} \in A$ gälla att $R(a_0, ..., a_{n-1})$ om och endast om $R'(\phi(a_0), ..., \phi(a_{n-1}))$.

3. Låt F vara en funktionssymbol i L, G dess tolkning i $\mathfrak{A}$ samt G' dess tolkning i $\mathfrak{A}'$. Då skall det för alla $a_0, ..., a_{n-1} \in A$ gälla att $\phi(G(a_0, ..., a_{n-1})) = G'(\phi(a_0), ..., \phi(a_{n-1}))$.

4. Låt c vara en konstantsymbol i L, x dess tolkning i $\mathfrak{A}$ samt x' dess tolkning i $\mathfrak{A}'$. Då skall det gälla att $\phi(x) = x'$.

Funktionen ϕ kallas för en *isomorfi*. Om $\mathfrak{A}$ är isomorf med en delstruktur av $\mathfrak{A}'$ och ϕ är isomorfin, så säger man att $\mathfrak{A}$ kan *inbäddas* i $\mathfrak{A}'$ och att ϕ är en *inbäddning*.

Definition 2.4 (Filter)**.** Ett *filter* Y över en mängd I är en delmängd av $\mathcal{P}(I)$ som uppfyller följande villkor:

1. $I \in Y$
2. Om $X, X' \in Y$, så är även $X \cap X' \in Y$.
3. Om $X \in Y$ och $X \subseteq X' \subseteq I$, så gäller det att $X' \in Y$.

Om $\emptyset \notin Y$, så kallas filtret *propert*.

Definition 2.5 (Ultrafilter)**.** Ett *ultrafilter* U över en mängd I är ett propert filter så att för varje $X \in \mathcal{P}(I)$ gäller att $X \in U$ eller $X^C \in U$.

Det är värt att notera att det inte kan gälla att både $X \in U$ och $X^C \in U$ eftersom det skulle innebära att $X \cap X^C = \emptyset \in U$. Isåfall uppfylls inte villkoret att U skall vara propert.

En av de viktigaste egenskaperna för ultrafilter är det så kallade ultrafilter lemmat som baserar sig på Zorns lemma. Det garanterar existensen av ultrafilter. För att bevisa det behöver vi först ett annat lemma:

Lemma 2.6. *Om $E \subseteq \mathcal{P}(I)$ och om för varje ändlig delmängd E' till E gäller att $\cap E' \neq \emptyset$, så finns det ett propert filter Y över I så att $E \subseteq Y$.*

Bevis. Låt Y bestå av alla de $X \in \mathcal{P}(I)$ så att det finns ett ändligt $E' \subseteq E$ så att $\cap E' \subseteq X$. Vi påstår nu att Y är ett propert filter. Det första och tredje villkoren för filter uppfylls trivialt.

Om $X \in Y$ och $X' \in Y$ så finns det ett ändligt $E' \subseteq E$ och $E'' \subseteq E$ så att $\cap E' \subseteq X$ och $\cap E'' \subseteq X'$. Då gäller det att $(\cap E') \cap (\cap E'')$ är ett ändligt snitt och $(\cap E') \cap (\cap E'') \subseteq X \cap X'$, från vilket det följer att $X \cap X' \in Y$. Alltså uppfylls det andra villkoret för filter.

Eftersom för varje ändlig delmängd E' till E gäller att $\cap E'$ är icke-tom, så följer det att $\emptyset \notin Y$. Y är alltså propert. $\square$

Sats 2.7 (Ultrafilter lemma)**.** *Om $E \subseteq \mathcal{P}(I)$ och om för varje ändlig delmängd E' till E gäller att $\cap E' \neq \emptyset$, så finns det ett ultrafilter U över I så att $E \subseteq U$.*

Bevis. Från lemma 2.6 följer det att det finns ett propert filter Y över I som innehåller E. Antag att C är en kedja av propera filter över I, det vill säga att för alla $Y, Y' \in C$ gäller antingen att $Y \subseteq Y'$ eller $Y' \subseteq Y$. Det följer direkt att $\cup C$ är ett filter över I och att det är propert. Från Zorns lemma följer det nu att det finns ett propert filter U över I så att för alla propera filter Y för vilka $U \subseteq Y$, gäller att $Y = U$.

Vi påstår att U är ett ultrafilter. Låt $X \in \mathcal{P}(I)$ vara godtyckligt. U är ett ultrafilter om det gäller att antingen $X \in U$ eller $X^C \in U$. Antag att $X^C \notin U$. Låt $D = U \cup \{X\}$ och $E' \subseteq D$ vara en ändlig delmängd. Om $X \notin E'$ så gäller det att $\cap E' \neq \emptyset$ eftersom U är propert. Om $X \in E'$ så gäller det att $\cap E' = X \cap Z$ för något $Z \in U$. Om $X \cap Z = \emptyset$

gäller det att $Z \subseteq X^C$, från vilket det följer att $X^C \in U$. Eftersom vi antog att $X^C \notin U$ så kan detta inte vara fallet. Alltså är $X \cap Z$ icke-tom. Från lemma 2.6 följer det att det finns ett propert filter Y över I så att $D \subseteq Y$. Men vi såg tidigare att om detta är fallet så gäller det att $Y = U$. Sålunda får man att $X \in U$. □

En annan viktig egenskap för ultrafilter som kommer att användas mycket i avhandlingen är följande lemma:

Lemma 2.8. *Låt $X_0, X_1, ..., X_m \in \mathcal{P}(I)$, $m \in \mathbb{N}$ och låt U vara ett ultrafilter över I. Då gäller det att $\cup_{i=0}^{m} X_i \in U$ om och endast om $X_i \in U$ för något $i \in \{0, 1, ..., m\}$.*

Bevis. Vi använder induktion. Som grundsteg betraktar vi fallet då $m = 1$. Antag sålunda först att $X_0 \cup X_1 \in U$. Då gäller det att $(X_0 \cup X_1)^C = X_0^C \cap X_1^C \notin U$. Från kontrapositionen av det andra villkoret för filter följer det att $X_0^C \notin U$ eller $X_1^C \notin U$. Alltså får man att $X_0 \in U$ eller $X_1 \in U$.

Antag sedan att $X_0 \in U$ eller $X_1 \in U$. Nu gäller $X_0 \subseteq X_0 \cup X_1$ och $X_1 \subseteq X_0 \cup X_1$. Oavsett fallet så följer det från det tredje villkoret för filter att $X_0 \cup X_1 \in U$.

Antag nu att satsen gäller för $m = k$. Då får man att

$$\begin{aligned}
\cup_{i=0}^{k+1} X_i \in U \text{ om och endast om } & (\cup_{i=0}^{k} X_i) \cup X_{k+1} \in U, \\
\text{om och endast om } & (\cup_{i=0}^{k} X_i) \in U \text{ eller } X_{k+1} \in U, \\
\text{om och endast om } & (\text{induktionsantagande}) \\
X_i \in U \text{ för något } & i \in \{0, 1, ..., k\} \text{ eller } X_{k+1} \in U, \\
\text{om och endast om } & X_i \in U \text{ för något } i \in \{0, 1, ..., k+1\}
\end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen följer det nu att satsen är sann för alla heltal m. □

Om J är en delmängd av I och U är ett ultrafilter över I så definierar man *restriktionen* av U till J som mängden $\{X \cap J : X \in U\}$. Den betecknas $U \restriction J$. Om $J \in U$ så är $U \restriction J$ ett ultrafilter över J [2].

Den *kartesiska produkten* av en godtycklig familj mängder $(A_i)_{i \in I}$, definieras enligt

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i : \text{ för alla } i \in I \text{ gäller } f(i) \in A_i \right\}$$

Den kartesiska produkten används som utgångspunkt för att definiera ultraprodukter. Låt $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ vara en indexerad familj strukturer och U ett ultrafilter över I. För att konstruera ultraprodukten av $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ över ultrafiltret U definierar man först en relation över den kartesiska produkten $\prod_{i \in I} A_i$. Låt $f, g \in \prod_{i \in I} A_i$. Man låter

$$f \sim g \text{ om och endast om } \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in U$$

Detta är en ekvivalensrelation [1]. Vi betecknar ekvivalensklassen som innehåller f med f^* och mängden av alla ekvivalensklasser med $\prod_{i \in I} A_i / U$.

Definition 2.9 (Ultraprodukt)**.** Låt $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ vara en indexerad familj av L-strukturer och U ett ultrafilter över I. Låt $f_0, f_1, ..., f_{n-1} \in \prod_{i\in I} A_i$ vara godtyckliga. *Ultraprodukten* av $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ över U är L-strukturen vars universum är $\prod_{i\in I} A_i/U$ och som har följande relationer, funktioner och konstanter:

1. Antag att P är en n-ställig relationssymbol i L och R_i är dess tolkning i $\mathfrak{A}_i$. Då finns det en relation S över ultraprodukten som är tolkningen av P och är definierad enligt:

$$S(f_0^*, f_1^*, ..., f_{n-1}^*) \text{ om och endast om } \{i \in I : R_i(f_0(i), f_1(i), ..., f_{n-1}(i))\} \in U$$

2. Antag att F är en n-ställig funktionssymbol i L och G_i är dess tolkning i $\mathfrak{A}_i$. Då finns det en funktion H över ultraprodukten som är tolkingen av F och är definierad enligt:

$$H(f_0^*, f_1^*, ..., f_{n-1}^*) = h^*, \text{ där } h(i) = G_i(f_0(i), f_1(i), ..., f_{n-1}(i))$$

3. Antag att c är en konstantsymbol i L och x_i dess tolkning i $\mathfrak{A}_i$. Då finns det en konstant b i ultraprodukten som är tolkningen av c så att $b = h^*$ där $h(i) = x_i$.

Ultraprodukten betecknas $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/U$. Om alla faktorer är lika, det vill säga $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ för alla $i \in I$ och något $\mathfrak{A}$, så betecknar man ultraprodukten med ${}^I\mathfrak{A}/U$. Som standard i avhandlingen används S, H och b som tolkningen i en ultraprodukt av relationssymbolen P, funktionssymbolen F samt konstantsymbolen c.

Det är inte självklart att relationerna och funktionerna i ultraprodukten är väldefinierade, det vill säga att de är oberoende av vilken representation av ekvivalensklasserna som man använder. Hursomhelst, att detta stämmer är ett teorem [1]:

Sats 2.10 (Ultraprodukten är väldefinierad)**.** *Låt $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ vara en indexerad familj av L-strukturer och U ett ultrafilter över I. Låt $f_0, f_1, ..., f_{n-1}, g_0, g_1, ..., g_{n-1} \in \prod_{i\in I} A_i$ vara godtyckliga. Om $f_0^* = g_0^*$, $f_1^* = g_1^*$,..., $f_{n-1}^* = g_{n-1}^*$, så gäller*

1. *Antag att P är en n-ställig relationssymbol i L och R_i är dess tolkning i $\mathfrak{A}_i$. Då har man att*

$$\{i \in I : R_i(f_0(i), f_1(i), ..., f_{n-1}(i))\} \in U \text{ om och endast om } \{i \in I : R_i(g_0(i), g_1(i), ..., g_{n-1}(i))\} \in U$$

2. *Antag att F är en n-ställig funktionssymbol i L och G_i är dess tolkning i $\mathfrak{A}_i$. Då har man att $h^* = (h')^*$, där*

$$h(i) = G_i(f_0(i), f_1(i), ..., f_{n-1}(i)) \text{ och } h'(i) = G_i(g_0(i), g_1(i), ..., g_{n-1}(i))$$

3 Fallet då ultraprodukter av ändliga strukturer är större än eller lika med kontinuumet

Huvudresultatet i det här kapitlet baserar sig på följande kombinatoriska lemma:

Lemma 3.1. *Det finns en mängd funktioner $\mathcal{F} \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ med följande egenskaper:*

1. $|\mathcal{F}| = 2^{\aleph_0}$
2. $f(n) < 2^n$ *för alla* $f \in \mathcal{F}$ *och* $n \in \mathbb{N}$.
3. $\{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\}$ *är ändlig för distinkta* $f, g \in \mathcal{F}$.

Bevis. För varje $\varphi \in {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$, definiera

$$f_\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k) 2^k$$

och låt $\mathcal{F} = \{f_\varphi : \varphi \in {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}\}$. Nu gäller $|\mathcal{F}| = |{}^{\mathbb{N}}\{0,1\}| = 2^{\aleph_0}$ och

$$f_\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k) 2^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1 < 2^n$$

så de två första egenskaperna uppfylls. Vidare ser vi att $f_\varphi(n)$ är det binära talet med siffrorna $\varphi(n-1), \varphi(n-2), ..., \varphi(1), \varphi(0)$. Låt $\varphi_1, \varphi_2 \in {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ och $N \in \mathbb{N}$. Eftersom den binära representationen av ett tal är unik, så gäller det för f_{φ_1} och f_{φ_2} att $f_{\varphi_1}(n) \neq f_{\varphi_2}(n)$ om $n \geq N$ och $\varphi_1(N) \neq \varphi_2(N)$. Detta innebär att $\{n \in \mathbb{N} : f_{\varphi_1}(n) = f_{\varphi_2}(n)\}$ är ändlig om $\varphi_1 \neq \varphi_2$, vilket verifierar den tredje egenskapen. □

Sats 3.2. *Låt* $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ *vara en indexerad familj av ändliga strukturer och* U *ett ultrafilter över* I. *Om* $\{i \in I : |\mathfrak{A}_i| = n\} \notin U$ *för alla* $n \in \mathbb{N}$, *så gäller*

$$|\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / U| \geq 2^{\aleph_0}$$

Bevis. Låt $\mathcal{F}$ vara mängden av funktioner i lemma 3.1. Idéen i beviset är att för varje $f \in \mathcal{F}$, hitta ett unikt $h_f \in \prod_{i \in I} A_i$, så att för distinkta $f, g \in \mathcal{F}$ gäller $h_f^* \neq h_g^*$. Från detta följer sedan att $|\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / U| = |\prod_{i \in I} A_i / U| \geq |\mathcal{F}| = 2^{\aleph_0}$.

För varje $m \in \mathbb{N}$, definiera $B_m \subset I$ enligt:

$$\begin{aligned} B_m &= \{i \in I : 2^m \leq |\mathfrak{A}_i| < 2^{m+1}\} \\ &= \bigcup_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \{i \in I : |\mathfrak{A}_i| = n\} \end{aligned}$$

Detta är en ändlig union av mängder som inte tillhör U. Alltså får vi att $B_m \notin U$ för alla $m \in \mathbb{N}$. Notera även att alla B_m är disjunkta. För $i \in B_m$, låt $(a_{i,k})_{k=0}^{2^m-1}$ vara en följd distinkta element i $\mathfrak{A}_i$. En sådan följd finns ty $|\mathfrak{A}_i| \geq 2^m$. Vi kan nu för $f \in \mathcal{F}$, definiera $h_f : I \to \cup_{i \in I} A_i$, enligt:

$$h_f(i) = a_{i,f(m)}$$

där m är det unika $m \in \mathbb{N}$ så att $i \in B_m$. Eftersom $f(m) < 2^m$ enligt lemma 3.1, så är h_f väldefinierad. För distinkta $f, g \in \mathcal{F}$ får vi att:

$$\begin{aligned} \{i \in I : h_f(i) = h_g(i)\} &= \{i \in I : i \in B_m \text{ och } a_{i,f(m)} = a_{i,g(m)}\} \\ &= \{i \in I : i \in B_m \text{ och } f(m) = g(m)\} \\ &= \bigcup_{m \in \mathbb{N}: f(m) = g(m)} B_m \end{aligned}$$

Eftersom $\{m \in \mathbb{N} : f(m) = g(m)\}$ är en ändlig mängd och $B_m \notin U$ för alla m så gäller det att $\{i \in I : h_f(i) = h_g(i)\} \notin U$. Detta innebär att $h_f^* \neq h_g^*$. □

Exempel 3.3. Likhet är möjligt i sats 3.2. Låt indexmängden vara $\mathbb{N}$ och låt $\mathfrak{A}_i$ vara någon struktur vars universum är de i första naturliga talen, det vill säga $A_i = \{0, 1, 2, ..., i-1\}$.

Låt $E \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bestå av alla kofinita delmängder av $\mathbb{N}$, det vill säga alla de delmängder $B \subseteq \mathbb{N}$ så att $\mathbb{N} \setminus B$ är ändlig. Nu gäller för alla ändliga $E' \subset E$ att $(\cap_{X \in E'} X)^C = \cup_{X \in E'} X^C$, vilket är en ändlig mängd. Detta innebär att $\cap E'$ är oändlig, det vill säga icke-tom. Från ultrafilter lemmat följer nu att det finns ett ultrafilter U som innehåller $\cap E'$.

Vi har att $\{i \in \mathbb{N} : |\mathfrak{A}_i| = n\} = \{n\}$. Det är klart att $\{n\} \notin U$ eftersom U innehåller komplementet till $\{n\}$. Sålunda gäller det enligt sats 3.2 att $|\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_i/U| \geq 2^{\aleph_0}$. Å andra sidan gäller:

$$|\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_i/U| \leq |\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i| \leq |{}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}| = \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Från Schröder-Bernsteins sats följer det att $|\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_i/U| = 2^{\aleph_0}$.

4 Fallet då ultraprodukter av ändliga strukturer är ändliga

Huvudsatsen i den här sektionen beskriver vad som händer då sats 3.2 inte gäller. Nämligen, om en ultraprodukt av ändliga strukturer har en kardinalitet som är mindre än kontinuumet så är den ändlig. Intressant nog gäller mycket mera: Ultraprodukten är isomorf med någon av de strukturer som ingår i den. För att kunna bevisa detta så krävs först tre viktiga lemmor:

Lemma 4.1. *Låt* $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ *och* $(\mathfrak{B}_i)_{i \in I}$ *vara indexerade familjer av* L*-strukturer så att* $\mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{B}_i$ *för alla* $i \in I$ *och* U *ett ultrafilter över* I*. Då gäller:*

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/U \cong \prod_{i \in I} \mathfrak{B}_i/U$$

Bevis. Låt $\phi_i : A_i \to B_i$ vara en isomorfi mellan $\mathfrak{A}_i$ och $\mathfrak{B}_i$. Definiera sedan $\phi : \prod_{i\in I} A_i/U \to \prod_{i\in I} B_i/U$ så att $\phi(f^*) = g^*$, där $g(i) = \phi_i(f(i))$. Låt $f_1, f_2 \in \prod_{i\in I} A_i$ och $g_1, g_2 \in \prod_{i\in I} B_i$ vara så att $\phi(f_1^*) = g_1^*$ och $\phi(f_2^*) = g_2^*$. Det finns då g_3 och g_4 så att $g_3^* = g_1^*$, $g_4^* = g_2^*$ och för alla $i \in I$ gäller att $g_3(i) = \phi_i(f_1(i))$ samt $g_4(i) = \phi_i(f_2(i))$. Eftersom för varje $i \in I$ är ϕ_i en bijektion, så noterar vi att

$$\begin{aligned}\{i \in I : g_3(i) = g_4(i)\} &= \{i \in I : \phi_i(f_1(i)) = \phi_i(f_2(i))\}\\ &= \{i \in I : f_1(i) = f_2(i)\}\end{aligned}$$

Det följer att $f_1^* = f_2^*$ om och endast om $g_3^* = g_4^*$, om och endast om $g_1^* = g_2^*$. Vi vet alltså att ϕ är väldefinierad och en injektion. ϕ är också en surjektion: Om $g \in \prod_{i\in I} B_i$ så gäller det att $\phi(f^*) = g^*$, där $f(i) = \phi_i^{-1}(g(i))$.

Antag att P är en n-ställig relationssymbol i L, R_i dess tolkning i $\mathfrak{A}_i$, R_i' dess tolkning i $\mathfrak{B}_i$ samt S och S' deras tolkningar i $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/U$, respektive $\prod_{i\in I} \mathfrak{B}_i/U$. Låt $f_1, ..., f_n \in \prod_{i\in I} A_i$. Eftersom $\mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{B}_i$, så gäller det att $R_i(f_1(i), ..., f_n(i))$ om och endast om $R_i'(\phi_i(f_1(i)), ..., \phi_i(f_n(i)))$. Sålunda får vi att

$$\begin{aligned}S'(\phi(f_1^*), ..., \phi(f_n^*)) &\text{ om och endast om } \{i \in I : R_i'(\phi_i(f_1(i)), ..., \phi_i(f_n(i)))\} \in U\\ &\text{ om och endast om } \{i \in I : R_i(f_1(i), ..., f_n(i))\} \in U\\ &\text{ om och endast om } S(f_1^*, ..., f_n^*)\end{aligned}$$

Antag nu att F är en n-ställig funktionssymbol i L, G_i dess tolkning i $\mathfrak{A}_i$, G_i' dess tolkning i $\mathfrak{B}_i$ samt H och H' dess tolkningar i $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/U$, respektive $\prod_{i\in I} \mathfrak{B}_i/U$. Det gäller att $H(f_1^*, ..., f_n^*) = h^*$ där $h(i) = G_i(f_1(i), ..., f_n(i))$ samt att $H'(\phi(f_1^*), ..., \phi(f_n)) = l^*$ där $l(i) = G_i'(\phi_i(f_1(i)), ..., \phi_i(f_n(i)))$. Från definitionen på ϕ_i har vi att $l(i) = \phi_i(h(i))$. Det följer att $\phi(h^*) = l^*$, vilket är vad vi vill visa.

Antag slutligen att c är en konstantsymbol i L, x_i dess tolkning i $\mathfrak{A}_i$, x_i' dess tolkning i $\mathfrak{B}_i$ samt b och b' dess tolkningar i $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/U$, respektive $\prod_{i\in I} \mathfrak{B}_i/U$. Det gäller att $b = d^*$ och $b' = (d')^*$ där $d(i) = x_i$ och $d'(i) = x_i'$ för alla $i \in I$. Eftersom $\phi_i(x_i) = x_i'$ så följer det genast att $\phi(d^*) = (d')^*$. Sålunda uppfylls alla krav för att ϕ skall betraktas som en isomorfi. □

Lemma 4.2. *Låt U vara ett ultrafilter över I, $J \in U$ och $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ en indexerad familj av L-strukturer. Då gäller*

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/U \cong \prod_{i\in J} \mathfrak{A}_i/(U \restriction J)$$

Bevis. $U \restriction J$ är ett ultrafilter eftersom $J \in U$. Ultraprodukten på höger sida är alltså väldefinierad.

Definiera en funktion $\phi : \prod_{i\in I} A_i/U \to \prod_{i\in J} A_i/(U \restriction J)$ så att $\phi(f^*) = g^*$ där $g = f|_J$, är f:s restriktion till J. Vi vill visa att ϕ är en isomorfi. Låt f_1, f_2 vara godtyckliga element i $\prod_{i\in I} A_i$ och g_1, g_2 deras restriktion i $\prod_{i\in J} A_i$. Vi noterar att

$$\{i \in I : f_1(i) = f_2(i)\} \in U \text{ om och endast om } \{i \in J : g_1(i) = g_2(i)\} \in U \restriction J$$

Från vilket det följer att $f_1^* = f_2^*$ om och endast om $g_1^* = g_2^*$. Detta innebär att avbildningen är väldefinierad och en injektion. Att ϕ är en surjektion är enkelt att se eftersom varje $g \in \prod_{i \in J} A_i$ är helt klart begränsningen av någon funktion f i $\prod_{i \in I} A_i$.

Låt $f_1, ..., f_n \in \prod_{i \in I} A_i$ och $g_1, ..., g_n \in \prod_{i \in J} A_i$ vara deras restriktion till J. Antag att P är en n-ställig relationssymbol i L, R_i dess tolkning i $\mathfrak{A}_i$, S dess tolkning i $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/U$ samt S' dess tolkning i $\prod_{i \in J} \mathfrak{A}_i/(U \upharpoonright J)$.

Vi ser att

$$\{i \in J : R_i(g_1(i), ..., g_n(i))\} = J \cap \{i \in I : R_i(f_1(i), ..., f_n(i))\}$$

Från vilket det följer att $\{i \in I : R_i(f_1(i), ..., f_n(i))\} \in U$ om och endast om $\{i \in J : R_i(g_1(i), ..., g_n(i))\} \in U \upharpoonright J$. Detta innebär att $S(f_1^*, ..., f_n^*)$ om och endast om $S'(g_1^*, ..., g_n^*)$.

Antag att F är en n-ställig funktionssymbol i L, G_i dess tolkning i $\mathfrak{A}_i$, H dess tolkning i $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/U$ och H' dess tolkning i $\prod_{i \in J} \mathfrak{A}_i/(U \upharpoonright J)$.

Vi ser att $H(f_1^*, ..., f_n^*) = h^*$ där $h(i) = G_i(f_1(i), ..., f_n(i))$ och $i \in I$. Vidare noterar vi att $H'(\phi(f_1^*), ..., \phi(f_n^*)) = H'(g_1^*, ..., g_n^*) = l^*$ där $l(i) = G_i(g_1(i), ..., g_n(i))$ och $i \in J$. Det är klart att l är h:s restriktion till J, alltså gäller

$$\phi(H(f_1^*, ..., f_n^*)) = H'(\phi(f_1^*), ..., \phi(f_n^*))$$

Antag slutligen att c är en konstantsymbol i L, x_i dess tolkning i $\mathfrak{A}_i$, b dess tolkning i $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/U$ samt b' dess tolkning i $\prod_{i \in J} \mathfrak{A}_i/(U \upharpoonright J)$. Vi har att $b = d^*$ och $b' = (d')^*$ så att $d(i) = x_i$ för $i \in I$ och $d'(i) = x_i$ för $i \in J$. Det följer genast att d' är d:s restriktion till J. Detta innebär att $\phi(d^*) = (d')^*$, det vill säga $\phi(b) = b'$.

Vi har kommit fram till att ϕ är en isomorfi.

□

Lemma 4.3. *Om $\mathfrak{A}$ är en ändlig L-struktur och U är ett ultrafilter över I, så gäller*

$${}^I\mathfrak{A}/U \cong \mathfrak{A}$$

Bevis. Låt $a \in A$ och $f_a \in {}^I A$ vara funktionen så att $f_a(i) = a$ för alla $i \in I$. Vi noterar att för varje $f \in {}^I A$ finns det $a \in A$ så att $f^* = f_a^*$, ty

$$\bigcup_{a \in A} \{i \in I : f(i) = a\} = I \in U$$

är en ändlig union så $\{i \in I : f(i) = a\} \in U$ för något $a \in A$. Låt $f_1, ..., f_n \in {}^I A$ och säg att $f_1^* = f_{a_1}^*, ..., f_n^* = f_{a_n}^*$ där $a_1, ..., a_n \in A$.

Sålunda kan vi definiera funktionen $\phi : {}^I A/U \to A$ så att $\phi(f_a^*) = a$.

Antag att P är en n-ställig relationssymbol i L, $R_i = R$ dess tolkning i $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ och S dess tolkning i ${}^I\mathfrak{A}/U$. Vi har att

$$\begin{aligned} S(f_1^*, ..., f_n^*) &\text{ om och endast om } S(f_{a_1}^*, ..., f_{a_n}^*) \\ &\text{ om och endast om } \{i \in I : R_i(f_{a_1}(i), ..., f_{a_n}(i))\} \in U \\ &\text{ om och endast om } \{i \in I : R_i(a_1, ..., a_n)\} \in U \end{aligned}$$

Det är klart att $\{i \in I : R_i(a_1, ..., a_n)\}$ är antingen tom eller hela indexmängden I då $R(a_1, ..., a_n)$ är falskt respektive sant. Från detta följer att $S(f_1^*, ..., f_n^*)$ om och endast om $R(\phi(f_1^*), ..., \phi(f_n^*))$.

Antag att F är en n-ställig funktionssymbol i L, G dess tolkning i $\mathfrak{A}$ och H dess tolkning i ${}^I\mathfrak{A}/U$. Vi ser att $G(\phi(f_1^*), ..., \phi(f_n^*)) = G(a_1, ..., a_n)$ och att $H(f_1^*, ..., f_n^*) = h^*$, där $h(i) = G(f_1(i), ..., f_n(i)) = G(a_1, ..., a_n)$. Det betyder att $h = f_{G(a_1,...,a_n)}$, så $\phi(h^*) = G(a_1, ..., a_n)$, vilket är vad vi vill visa.

Antag slutligen att c är en konstantsymbol i L, att x är dess tolkning i $\mathfrak{A}$ och b dess tolkning i ${}^I\mathfrak{A}/U$. Det är klart att $b = f_x^*$ så det följer omedelbart att $\phi(b) = x$, vilket är vad vi vill visa. □

Sats 4.4. *Låt $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ vara en indexerad familj av ändliga L-strukturer och U ett ultrafilter över I. Om $|\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/U| < 2^{\aleph_0}$, så finns det $k \in I$ så att*

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/U \cong \mathfrak{A}_k$$

Bevis. Om $|\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/U| < 2^{\aleph_0}$, så följer det från sats 3.2 att $J := \{i \in I : |\mathfrak{A}_i| = n\} \in U$ för något $n \in \mathbb{N}$. Eftersom vi endast betraktar ändliga strukturer över ett ändligt alfabet L, så finns det endast ändligt många möjligheter för dess typ av isomorfi. Alltså finns det ett ändligt $J' \subseteq J$, så att:

$$J = \bigcup_{j\in J'} \{i \in J : \mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{A}_j\}$$

Detta är en ändlig union så vi får att $K := \{i \in J : \mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{A}_k\} \in U$ för något $k \in J'$. Från lemma 4.2, 4.1 och 4.3 följer att

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/U &\cong \prod_{i\in K} \mathfrak{A}_i/(U \restriction K) \\ &\cong {}^K\mathfrak{A}_k/(U \restriction K) \\ &\cong \mathfrak{A}_k\end{aligned}$$

□

Från sats 4.4 och 3.2 följer det att det inte kan finnas någon ultraprodukt av ändliga strukturer så att dess kardinalitet är oändlig men mindre än kardinaliteten för kontinuumet. Mera specifikt så följer det att det inte kan finnas någon ultraprodukt av ändliga strukturer så att dess kardinalitet är $\aleph_0$, det vill säga uppräknelig.

Exempel 4.5. Ett ultrafilter U över I sägs vara *principiellt* om det finns $m \in I$ så att $U = \{J \subseteq I : m \in J\}$. Det är enkelt att se att U faktiskt är ett ultrafilter. Låt $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ vara en indexerad familj av L-strukturer. Antag att U är principiellt. Då följer det genast att $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{A}_m\} \in U$. Enligt härledningen i slutet av beviset från föregående sats får man då att $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/U \cong \mathfrak{A}_m$. Sats 4.4 gäller alltså alltid för principiella ultrafilter.

5 Ultraprodukter av ändliga strukturer kan bli godtyckligt stora

Ifall en struktur $\mathfrak{A}$ inte innehåller funktioner så kommer det att finnas för varje delmängd $A' \subseteq A$ (som innehåller alla konstanter) en delstruktur till $\mathfrak{A}$ vars universum är A'. Detta gäller eftersom man inte har problemet att värdemängden av en funktions restriktion till A' kan ligga utanför A'. Från denna observation följer genast följande lemma som behövs i beviset till den här sektionens huvudsats:

Lemma 5.1. *Låt $\mathfrak{A}$ vara en struktur över ett alfabet som inte innehåller funktionssymboler. Om $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, ..., \mathfrak{A}_m$ är ändliga delstrukturer till $\mathfrak{A}$ så finns det en ändlig delstruktur $\mathfrak{B}$ till $\mathfrak{A}$ vars universum är $\cup_{k=1}^m A_k$.*

Följande sats säger att varje struktur som inte innehåller funktioner kan inbäddas i en viss ultraprodukt av dess ändliga delstrukturer. Från detta följer att det existerar ultraprodukter av ändliga strukturer vars kardinalitet är godtyckligt stor. Det vill säga, om $\mathfrak{A}$ är en struktur utan funktioner med kardinaliteten κ, så innebär detta att det finns en ultraprodukt av $\mathfrak{A}$:s ändliga delstrukturer vars kardinalitet är åtminstone κ.

Sats 5.2. *Låt $\mathfrak{A}$ vara en L-struktur över ett alfabet L utan funktionssymboler och låt $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ bestå av alla ändliga delstrukturer av $\mathfrak{A}$. Då finns det ett ultrafilter U så att $\mathfrak{A}$ är isomorf med en delstruktur av $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / U$.*

Bevis. Definiera för $j \in I$,

$$J_j = \{i \in I : A_j \subseteq A_i\}$$

där A_i är universumet för $\mathfrak{A}_i$. Om $K \subseteq I$ är en ändlig delmängd så ser vi att

$$\bigcap_{j \in K} J_j = \left\{ i \in I : \bigcup_{j \in K} A_j \subseteq A_i \right\}$$

Från lemma 5.1 följer det att mängden är icke-tom. Från ultrafilter lemmat följer det sålunda att det finns ett ultrafilter U över I så att $J_j \in U$ för alla $j \in I$.

Låt $a \in A$ och definiera en funktion $\varphi : A \to \prod_{i \in I} A_i$, enligt

$$\varphi(a)(i) = \begin{cases} a \text{ om } a \in A_i \\ \text{godtyckligt element i } A_i \text{ annars} \end{cases}$$

Definiera $\phi : A \to \prod_{i \in I} A_i / U$ så att $\phi(a) = \varphi(a)^*$. Vi vill visa att ϕ är en inbäddning av $\mathfrak{A}$ i $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / U$.

Vi visar först att ϕ är en injektion. Antag att $\varphi(a)^* = \varphi(b)^*$ för $a, b \in A$. Låt $J' = \{i \in I : \varphi(a)(i) = \varphi(b)(i)\}$ och låt $j \in I$ vara så att $a, b \in A_j$. Det är klart att $J_j \cap J' \in U$, så snittet är icke-tomt och det finns $k \in J' \cap J_j$ så att $a, b \in A_k$. Vi ser nu att $\varphi(a)(k) = a$ och $\varphi(b)(k) = b$. Eftersom $k \in J'$ innebär detta att $a = b$, det vill säga att ϕ är en injektion.

Låt P vara en n-ställig relationssymbol i L, R vara dess tolkning över $\mathfrak{A}$ och S dess tolkning över $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / U$. Vi skall visa att $R(a_1, ..., a_n)$ gäller om och endast om

$S(\phi(a_1), ..., \phi(a_n))$, där $a_1, ..., a_n \in A$ är godtyckliga element. Vi betecknar restriktionen av R i $\mathfrak{A}_i$ med R_i. Låt j vara så att $a_1, ..., a_n \in A_j$. Antag att $R(a_1, ..., a_n)$ gäller. Då får vi att

$$J_j \subseteq \{i \in I : R_i(a_1, ..., a_n)\} \subseteq \{i \in I : R_i(\varphi(a_1)(i), ..., \varphi(a_n)(i))\} \in U$$

Från vilket det följer att $S(\varphi(a_1)^*, ..., \varphi(a_n)^*)$. Antag å andra sidan att $R(a_1, ..., a_n)$ inte gäller. Då är $\{i \in I : R_i(a_1, ..., a_n)\} = \emptyset \notin U$ så $S(\varphi(a_1)^*, ..., \varphi(a_n)^*)$ gäller inte heller.

Slutligen, låt c vara en konstantsymbol i L och x dess tolkning i $\mathfrak{A}$. Vi får att $\phi(x) = \varphi(x)^*$ och $\varphi(x)(i) = x$ eftersom $x \in A_i$ för alla $i \in I$. Detta visar att ϕ är en isomorfi mellan $\mathfrak{A}$ och den delstruktur av $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / U$ vars universum är $\phi(A)$. □

Exempel 5.3. Om alfabetet L innehåller funktionssymboler så gäller sats 5.2 inte nödvändigtvis. Låt $L = \{F\}$ och definiera en L-struktur $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N} \backslash \{0\}, G \rangle$, där G är tolkningen av F så att $G(x, y) = x + y$. Då ser vi att för varje ändlig $B \subset \mathbb{N} \backslash \{0\}$ gäller att $G(\max(B), \max(B)) \notin B$. Detta innebär att $\mathfrak{A}$ har inga ändliga delstrukturer, så det kan omöjligen finnas en inbäddning av $\mathfrak{A}$ i en ultraprodukt av dess ändliga delstrukturer.

Referenser

[1] C.C. Chang och H.J. Keisler. *Model Theory*. North-Holland Publishing company, 1977.

[2] T. Frayne, A.C. Morel och D.S. Scott. ”Reduced Direct Products”. I: *Fundamenta Mathematicae* 51 (1962), s. 195–228.