

Stehende Wellen

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	2
2	Allgemeine Grundlagen	2
2.1	Schallwellen in Luft	2
2.2	Reflexion und stehende Schallwellen	3
2.3	Eigenfrequenzen im endlich ausgedehnten Medium	3
3	Experimente	3
3.1	Erzeugung und Messung der Frequenz	3
3.1.1	Longitudinale Stab-Schwingung	4
3.1.2	Stimmgabel	4
3.1.3	Tonfrequenzgenerator	4
3.2	Messung der Wellenlänge	4
3.2.1	Original Kundt'sche Methode	5
3.2.2	Mikrophon	5
3.2.3	Schallgeschwindigkeit nach Quincke	5
3.3	Variation des Gases	5
3.4	Hinweise zu den Versuchen	6
4	Anhang	6
4.1	Die Wellengleichung für den Schallwechseldruck	6
4.2	Schallwechseldruck	7
4.3	Adiabatisches Kompressionsmodul	7
5	Fragen	8

1 Aufgabenstellung

1. Nach der Methode von Quincke oder Kundt ist die Schallgeschwindigkeit der Luft zu bestimmen.
2. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit und des Adiabatenexponenten κ eines dreiatomigen Gases und Reduktion der Schallgeschwindigkeit auf 0°C.

2 Allgemeine Grundlagen

2.1 Schallwellen in Luft

Eine Welle ist ein **zeitlich und räumlich periodischer Vorgang**. Bei elastischen Wellen werden einzelne Volumenelemente durch elastische Deformation aus dem Gleichgewicht (homogener Körper, konstante Dichte) gebracht und führen (bei festgehaltenem Ort x) harmonische Schwingungen (Dichteschwankungen) aus. Infolge der elastischen Kopplung benachbarter Volumenelemente breiten sich die Schwingungen als elastische longitudinale Wellen räumlich aus.

Bei Luft als elastischem Medium ist die "elastische Konstante" im entsprechenden **Hookeschen Gesetz** ($dp = -K \frac{dV}{V}$) das Kompressionsmodul K . Es ist bei einem idealen Gas unterschiedlich für isotherme und adiabatische Prozesse:

$$K^i = -V \frac{dp^i}{dV} = p \quad (a) \quad ; \quad K^{ad} = -V \frac{dp^{ad}}{dV} = \kappa p \quad (b) \quad , \quad (1)$$

d. h., durch den Druck p und den Adiabatenexponenten κ gegeben.

Periodische Druckschwankungen oder Schall breiten sich in Luft als **longitudinale Dichtewelle** mit der **Phasengeschwindigkeit** $c = \omega/k = f \lambda$ aus, wobei die periodischen Druckschwankungen so schnell erfolgen, daß die Kompressionen **adiabatisch** ablaufen.

Als periodisch veränderliche Größen, deren Schwingungsphase sich mit c ausbreitet, können z. B. der Schall-Ausschlag $\xi(t, x)$, die -Schnelle $v_s(x, t)$ oder der -Wechseldruck $p_w(t, x)$ betrachtet werden. Die zugehörigen Lösungen der ebenen Wellengleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \xi(t, x) &= \hat{\xi} \cos(\omega t - kx) \quad (a), \\ v_s(t, x) &= \frac{d\xi}{dt} = \omega \hat{\xi} \cos(\omega t - kx - \pi/2) \quad (b), \\ p_w(t, x) &= \rho c v_s = \hat{p} \cos(\omega t - kx - \pi/2) \quad (c) \end{aligned} \quad (2)$$

(ρ = Dichte, $c = f \lambda = \frac{\omega}{k}$ = Schallgeschwindigkeit; x = Ausbreitungsrichtung).

Schallschnelle und Schallwechseldruck sind in Phase [1], während der Schallwechseldruck gegenüber dem Schallausschlag eine Phasenverzögerung um $\pi/2$ aufweist (s. Anhang). c ist temperaturabhängig (s. Anhang):

$$c(T) = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho(T)}} = \sqrt{\kappa R T} \quad (a) \quad ; \quad c/[m/s] = 331 + \frac{0,6}{[K]} \cdot \vartheta \quad (b) \quad (3)$$

Zahlenwerte für Luft: $M \approx 29$; $\kappa \approx 1,4$. $R = 8315 \text{ J/(M kg K)}$; ϑ = Temperatur in °C; κ = Adiabatenexponent $\approx 1,67$; $1,4$ bzw. $1,33$ für ein-; zwei- bzw. dreiatomige Gase.

2.2 Reflexion und stehende Schallwellen

Bei der Reflexion einer Schallwelle an einer Wand, die sich senkrecht zur Ausbreitungsrichtung am Ort $x = 0$ befindet, ist der Schallwechseldruck p_w maximal (Phasensprung Null) und der Schallauschlag Null (Phasensprung π).

Die Überlagerung (Addition, Superposition, Interferenz) von hin- (ξ^+) und rück- (ξ^-) laufender Welle gleicher Frequenz und Amplitude

$$\begin{aligned}\xi^+(t, x) &= \hat{\xi} \cos(\omega t - kx) \quad \text{und} \\ \xi^-(t, x) &= \hat{\xi} \cos(\omega t + kx - \pi)\end{aligned}\quad (4)$$

ergibt eine **stehende Welle** für den Schallauschlag

$$\begin{aligned}\xi_{res} &= \hat{\xi} [\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx - \pi)] \\ &= \hat{\xi} [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)]\end{aligned}\quad (5)$$

und nach Separation bezüglich x und t (Additionstheorem)

$$\xi_{res} = [2\hat{\xi} \sin kx] \sin \omega t = [2\hat{\xi} \sin(\frac{2\pi x}{\lambda})] \sin \omega t \quad . \quad (6)$$

Gl. (6) stellt als Gleichung einer stehenden Welle eine **Schwingung** dar, deren Amplitude $[2\hat{\xi} \sin kx]$ periodisch vom Ort x abhängt. Die Orte mit der Amplitude Null ($x = 0, x = n \frac{\lambda}{4}$) heißen **Knoten**, die Orte maximaler Amplitude ($x = (2n + 1) \lambda/4$) heißen **Bäuche** für den Schallauschlag. Man diskutierte die den Gln. (4 bis 6) entsprechenden Beziehungen für den Schallwechseldruck p_w .

In jedem Fall beträgt der **Knotenabstand** $\lambda/2$.

Das Erzeugen und Ausmessen stehender Wellen ist eine der wichtigsten Methoden zur Bestimmung von Wellenlängen.

2.3 Eigenfrequenzen im endlich ausgedehnten Medium

Zur optimalen Ausbildung stehender Wellen muß die Gesamtlänge des Mediums, in dem sich die Welle ausbreitet, z. B. die Luftsäule in einem Rohr, ein Vielfaches von $\lambda/4$ betragen (z. B. bei Musikinstrumenten; s. a. Versuchsanleitung zur Lecherleitung). Die Serie von Eigenfrequenzen bei zwei geschlossenen Enden (a) bzw. einem offenen Ende (b) bei einem Rohr der Länge l ist

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{n c}{2l} \quad (a) ; \quad \text{bzw.} \quad f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{(2n + 1) c}{4l} \quad (b) \quad . \quad (7)$$

3 Experimente

3.1 Erzeugung und Messung der Frequenz

Es sind zwei Versuchsvarianten möglich:

- c ist bekannt und die Frequenz wird bestimmt;
- umgekehrt wird bei bekannter Frequenz c bestimmt.

3.1.1 Longitudinale Stab-Schwingung

Beim klassischen Kundt'schen Versuch regt man einen $l \approx 1,5$ m langen Metallstab zu Longitudinal-Schwingungen an, die durch eine am Stabende (am Schwingungsbauch) befestigte leichte Platte auf die Luftsäule übertragen wird. Ist der Stab z. B. in der Mitte eingespannt, so beträgt seine Gesamtlänge $l_M = \lambda_M/2$ mit Schwingungsbäuchen an den Enden (bei anderen Einspannungen kann auch mit den Oberschwingungen gearbeitet werden, s. Abb. 1 a).

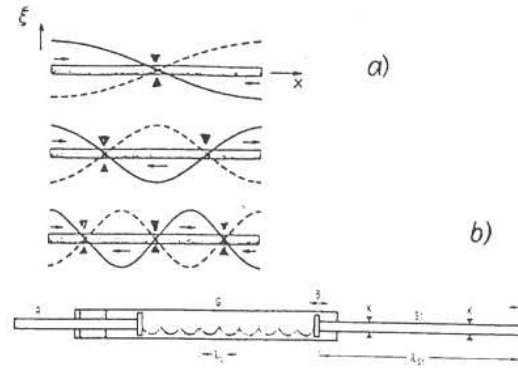


Abb. 1:

a. Einspannmöglichkeiten eines Metallstabs der Länge l ; b. Kundtsches Rohr

Damit beträgt bei bekannter Schallgeschwindigkeit für dünne Metall-Stäbe $c_M = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ für Longitudinalwellen (s. Tab. 1) die Frequenz f

$$f = \frac{c_M}{\lambda_M} = \frac{c_M}{2l_M} \quad (8)$$

Ein freies Ende des Stabes wird dabei mit einem mit Kollophonium getränkten Lappen zur laut hörbaren Grundschwingung angeregt.

3.1.2 Stimmgabel

Bei der Ausführung des Quincke-Versuchs werden Stimmgabeln definierter Frequenz benutzt. Zur Erhöhung und zeitlichen Konstanz der Anregungsamplitude wird ein Röhren-Schwingkreis benutzt, in dessen Gitterkreis eine Induktivität in der Nähe eines eisernen Schenkels der Stimmgabel sitzt. Die anfänglich kleinen Ausschläge der Stimmgabel übertragen sich einerseits auf die Luftsäule und andererseits induktiv auf den Schwingkreis, dessen Rückkopplungsfaktor durch ein Potentiometer eingestellt werden kann. Damit bleibt die Amplitude konstant.

3.1.3 Tonfrequenzgenerator

Die aufgebaute Ausführungsform basiert in Abwandlung des Kundt-Versuchs auf einem Lautsprecher, der von einem auf $\frac{\Delta f}{f} \approx 1\%$ einstellbaren Tonfrequenzgenerator gespeist wird und die Luftsäule vom Rohrende über eine Membran zu Schwingungen anregt. Die Spannungsamplitude sollte ca. 80 mV betragen. Die genaue Frequenz kann mit Hilfe eines Impulszählers ermittelt werden.

3.2 Messung der Wellenlänge

Alle Varianten zur Bestimmung der Wellenlänge nutzen stehende Wellen aus. Die Knoten sind meistens besser zu lokalisieren als die Bäuche. Nach Möglichkeit ist über eine größere Knotenzahl zu mitteln. Sollten störende Oberschwingungen mit angeregt werden, so muß man sich auf den gewünschten Grundton konzentrieren.

3.2.1 Original Kundt'sche Methode

Im Glasrohr, an dessen einem Ende die Schwingung vom Metallstab nach Abb. 1 b auf die Luft übertragen wird, befinden sich Korkteilchen, die anfangs nach leichtem Drehen des Rohres gleichmäßig an der Wand des Rohres verteilt sind. Nach dem Einschwingen des Tones kann die Rückwand (Reflexionsstelle) etwas verschoben werden (Längenabstimmung), bis optimale Resonanz erreicht ist. Dann bleiben an den Knoten die Korkteilchen in Ruhe und lagern sich sichtbar ab, während an den Bäuchen maximale Bewegung der Korkteilchen beobachtet wird.

3.2.2 Mikrophon

Bei der im Versuch benutzten Ausführung ($f \approx 2...3$ kHz) kann auf der Achse eines relativ langen Glasrohres (1 m) in der Nähe der dem Lautsprecher gegenüberliegenden Abschlußwand ein Mikrophon um maximal 20 cm verschoben werden. Das Mikrophon spricht auf den Schallwechseldruck $P_w \sim v_s \cdot \omega$ an. Knoten und Bäuche werden als Maxima und Minima auf dem Digitalvoltmeter angezeigt. In unmittelbarer Nähe der Wand werden nahezu unabhängig von der relativ großen und konstanten Gesamtlänge des Rohres immer Knoten und Bäuche zu beobachten sein, so daß sich eine frequenzbezogene Längenabstimmung erübrigt.

3.2.3 Schallgeschwindigkeit nach Quincke

Die Luft im vertikalen Glasrohr von ca. 3 cm Durchmesser und 1 m Länge wird am oberen Ende mit der Stimmgabel zu Schwingungen angeregt. Das untere Rohrende ist mit Wasser, dessen Stand über verbundene Röhren (Schläuche) mittels eines beweglichen Vorratsgefäßes beliebig eingestellt werden kann, abgeschlossen (Abb. 2). An der Wasseroberfläche als feste Wand befinden sich immer Knoten für den Schallausschlag. Im Resonanzfall ist am oberen Rohrende, dessen ungenaue Position durch Differenzbildung eliminiert wird, ein Bauch und der Ton laut hörbar (Resonanz; Kombination von festem Ende auf der einen und losen Ende auf der anderen Seite). Es müssen mindestens zwei Marken für den Wasserstand, die zwei Resonanzstellen im Abstand $\lambda/2$ entsprechen, ausgemessen werden.

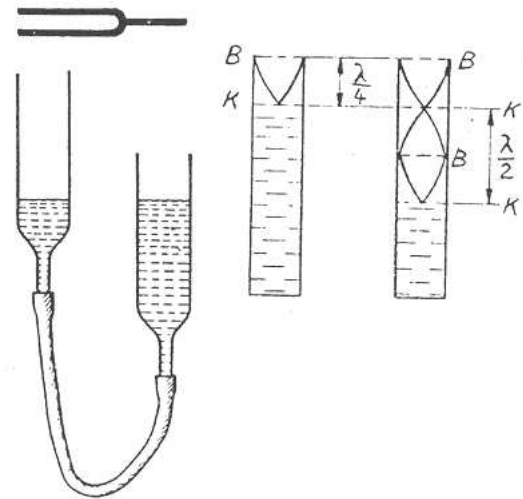


Abb. 2:
Bestimmung der Schallgeschwindigkeit nach Quincke

3.3 Variation des Gases

Beim Kundt'schen Rohr besteht die Möglichkeit, die Luft mit einem zweiten Gas herauszudrücken (oder abzupumpen) und ca. 5 min lang entweder CO_2 oder Ar einzulassen. Danach kann bei geschlossenem Rohr der Versuch mit dem neuen Gas, das sich in ρ und κ von Luft unterscheidet, wiederholt werden.

3.4 Hinweise zu den Versuchen

1. Bei der Reduktion der Schallgeschwindigkeit von Luft auf Normalbedingungen anhand von Gl. (3) ist auch zu beachten, daß sich die Raumtemperatur ändern kann.
2. Der systematische Fehler des Tonfrequenzgenerators ist mit 1 % anzusetzen.
Die Spannungsamplitude des Tonfrequenzgenerators sollte für den Hauptversuch am Kundt'schen Rohr 80 mV betragen.
3. Bei Benutzung des Impulszählers zur genauen Frequenz-Messung bei Kundt (Strahlungsmeßgerät 20046) ist zu beachten:
Generatorausgangs-Spannung auf 2 V erhöhen; Pegel des Diskriminators auf $1,0 \cong 10$ %.
Zweiter linker Knopf auf Dis.; Verstärker auf 16;
Impulsvorwahl auf 1×10^5 ; rechts alle Knöpfe raus.
4. Beim Stimmgabel-Resonator darf man sich nicht durch störende Oberschwingungen beirren lassen, sondern muß sich auf die Grundfrequenz konzentrieren.
5. Die Positionen der Schwingungsknoten sind mindestens 5 mal zu bestimmen.
6. Bei bekannter relativer Molekülmasse M und Temperatur T des Gases kann anhand der gemessenen Schallgeschwindigkeit c und Gl. (3) der Adiabatenexponent $\kappa = c_p/c_v$ bestimmt werden.

4 Anhang

4.1 Die Wellengleichung für den Schallwechseldruck

Gegeben sei ein luftgefüllter Zylinder (Achse x , z. B. eine Trompete) vom Querschnitt A mit einem lokalen Druckgefälle oder Druck-Gradienten $\partial p/\partial x$. Dann wirkt auf das Volumenelement $\Delta V = A \Delta x$ die elastische Rückstellkraft $\Delta F = A \Delta p = -A \Delta x \partial p/\partial x$ und die Masse $\Delta m = \rho A \Delta x$ erfährt die Beschleunigung

$$a_x = \frac{dv_s}{dt} = -\frac{A \Delta x}{\rho A \Delta x} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (9)$$

Die ortsabhängige Geschwindigkeit v_s bewirkt eine lokale Volumenänderung $dV = A v_s dt = A \Delta x dt (\partial v_s/\partial x)$, die mit dem adiabatischen Kompressionsmodul K^{ad} und der Druckänderung $dp = -K^{ad} dV/V = -K^{ad} \frac{\partial v_s}{\partial x} dt$ ergibt

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial v_s}{\partial x} K^{ad} \quad (10)$$

Nach Ableitung von Gl. (9) nach x und von Gl. (10) nach t sowie Gleichsetzen von $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_s}{\partial t}$ folgt für den Schallwechseldruck die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 p_w}{\partial t^2} = \frac{K^{ad}}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (a) \quad \text{Lösung:} \quad p_w(x, t) = \hat{p} \cos(\omega t - kx) \quad (b) \quad (11)$$

Der Quotient $\frac{K^{ad}}{\rho}$ in dieser eindimensionalen Wellengleichung, einer partiellen Dgl. 2. Ordnung, bestimmt als temperaturabhängige Materialkonstante die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Phase

($c^2 = \frac{K^{ad}}{\rho}$). Die harmonische Schallwelle breitet sich demnach mit der Phasengeschwindigkeit

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{K^{ad}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\kappa R T} \quad (12)$$

aus.

4.2 Schallwechseldruck

Der Zusammenhang zwischen p_w und v_s folgt über das Newtonsche Grundgesetz

$$F_w = \Delta m \cdot \vec{a} = \rho(A\Delta x) \frac{d^2\xi}{dt^2} = p_w A \quad (13)$$

und

$$-\frac{dp_w}{dx} = \rho \frac{d^2\xi}{dt^2} = \rho \frac{dv_s}{dt} \quad (14)$$

über eine Integration [1]

$$p_w(t) = -\rho \int \frac{dv_s}{dt} dx = -\rho \omega^2 \hat{\xi} \int \cos(\omega t - kx) dx = -\rho \frac{\omega^2 \hat{\xi}}{k} \sin(\omega t - kx) = \rho c v_s(t) \quad (15)$$

4.3 Adiabatisches Kompressionsmodul

Alle benutzten Beziehungen gelten im Rahmen des Modells des idealen Gases mit der Zustandgleichung

$$pV = mRT \quad (a) \quad \text{bzw.} \quad pV = nR^*T \quad (b) \quad (16)$$

Es bedeuten: T = absolute Temperatur; p = Druck; V = Volumen;

$R = 8314 \text{ J}/(\text{M kg K})$ spezifische Gaskonstante; $R^* = 8,314 \text{ J}/(\text{Mol K})$ allgemeine Gaskonstante.

Für eine isothermen Prozeß ist $T = \text{konst.}$ Beim adiabatischen Prozeß besteht völlige Wärmeisolation oder $\Delta Q = 0$ im ersten Hauptsatz:

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W \quad (a); \quad \text{bzw. adiabatisch: } \Delta U = mc_v \Delta T = \Delta W = -p \Delta V \quad (b) \quad (17)$$

(U = innere Energie; W = zugeführte Arbeit; Q = zugeführte Wärmeenergie).

Durch Kombination der Gln. (16, 17) erhält man die Poissonschen Adiabaten-Gleichungen:

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const.} \quad (a); \quad p \cdot V^{\kappa} = \text{const.} \quad (b); \quad \frac{T^{\kappa}}{p^{\kappa-1}} = \text{const.} \quad (c) \quad (18)$$

Aus Gl. (18 b) folgt zunächst $dp = -\kappa p dV/V$ und mit dem Hookeschen Gesetz $-\sigma = \Delta p = -K \Delta V/V$ schließlich $K^{ad} = \kappa p$.

Tab 1: Longitudinale Schallgeschwindigkeiten

Beispiel	Aggregatzustand	$\vartheta/^{\circ}\text{C}$	$c/(\text{ms}^{-1})$
Luft	Gas	20	343
H ₂	"	0	1261
H ₂ O	flüssig	25	1493
Methanol	"	25	1261
Stahl	Festkörper	10	4880
Kupfer	"	10	3666
Messing	"		3479

5 Fragen

1. Was versteht man unter einer harmonischen Schwingung, einer ebenen Welle und einer stehenden Welle? Mathematische Beschreibung.
2. Wie groß ist die Phasengeschwindigkeit einer Schallwelle in Luft? Wie ändert sich bei einer fortlaufenden akustischen Welle die Phase des Schallausschlages und des Schallwechseldruckes mit x und t ?
3. Wie unterscheiden sich isothermes und adiabatisches Kompressionsmodul und die damit berechneten Schallgeschwindigkeiten für ein ideales Gas?
4. Was bedeutet Reflexion einer ebenen Schallwelle an einer Wand? Wie entstehen stehende Wellen? Wie groß ist der Knotenabstand?
5. Man zeige durch zweimaliges partielles Differenzieren von Gl. (11 b), daß dieser Ausdruck eine Lösung von Gl. (11 a) ist.
6. Was versteht man unter der Wellenzahl, der Wellenlänge und der Frequenz einer harmonischen Welle? Wie hängen sie zusammen? Wovon hängt die Schallgeschwindigkeit ab?
7. Wie unterscheiden sich Longitudinal- und Transversal-Wellen? Wovon hängen die Phasengeschwindigkeiten akustischer Longitudinal- und Transversalwellen ab?
8. Was ist ein adiabatischer Prozeß? Was versteht man unter dem Adiabatenexponent?
9. Wie unterscheiden sich Schallgeschwindigkeit und Schallschnelle?
10. Nennen Sie Methoden zur Bestimmung der Phasengeschwindigkeit von Wellen.
11. Beschreiben Sie die Reflexion einer Seilwelle und einer Schallwelle an einer festen Wand.
12. Nennen sie Indikatoren für den Schallwechseldruck und den Schallausschlag.
13. Beschreiben Sie die Methode zur Bestimmung von c nach Quincke.
14. Beschreiben Sie die Methode zur Bestimmung von c nach Kundt.
15. Man bestätige die Gl. (3 b).

Literatur

- [1] H. J. Paus, Physik in Experimenten und Beispielen, mV. Hanser, München 1995
- [2] W. Ilberg, M. Krötsch, D. Geschke, P. Kirsten, W. Schenk, A. Schneider, H. Schulze, Physikalisches Praktikum für Anfänger, Leipzig 1994
- [3] Gerthsen (H. Vogel), Physik, V. Springer 1995
- [4] W. Walcher, Praktikum der Physik, V. Teubner, Stuttgart 1989
- [5] F. Kohlrausch, Praktische Physik, Band 1, V. Teubner, Stuttgart 1996