

Erdmagnetfeld

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	2
2	Allgemeine Grundlagen	2
2.1	Magnetisches Moment, Dipolfeld und Gaußsche Hauptlagen	2
2.2	Erstes Experiment, Überlagerung von Dipolfeld und Erdfeld	2
2.3	Zweites Experiment, Drehschwingungen	3
2.4	Horizontal-Komponente	3
2.5	Massenträgheitsmoment	3
2.6	Vertikalkomponente	3
3	Hinweise zur Versuchsdurchführung	4
4	Anhang	4
4.1	Zum Erdfeld	4
4.1.1	Zum Ursprung des Erdfeldes	4
4.1.2	Globales Bild vom magnetischen Feld der Erde	5
4.1.3	Langfristige Schwankungen des Erdfeldes	6
4.2	Zur Dipol-Näherung	6
4.3	Trägheitsmoment	8
4.4	SI-Maßeinheiten	8
5	Fragen	9

1 Aufgabenstellung

Es sind zu bestimmen:

1. Die Horizontal-Komponente H_h des erdmagnetischen Feldes nach GAUSS;
2. die Vertikal-Komponente H_v des erdmagnetischen Feldes;
3. das magnetische Moment m^* und die Polarisation J^* eines Magneten.

2 Allgemeine Grundlagen

2.1 Magnetisches Moment, Dipolfeld und Gaußsche Hauptlagen

Der Quotient aus dem magnetischen Moment \vec{m}^* eines Dauermagneten und seinem Volumen V ist die Polarisation $\vec{J}^* = \vec{m}^*/V$. Bei besseren Dauermagneten sind in geringen äußeren Magnetfeldern (z. B. im Erdfeld) und bei konstanter Temperatur \vec{J}^* bzw. \vec{m}^* als konstant anzusehen.

Ein kleiner Dauermagnet (magnetisches Moment $\vec{m}^* = m^* \vec{e}_x$) sei in Ost-West-Richtung orientiert. Wir betrachten in größerer Entfernung x bzw. y vom Mittelpunkt sein **Magnetfeld**. Gilt beim Stabmagneten $\frac{L}{x} \ll 1$ bzw. $\frac{L}{y} \ll 1$ (Dipolnäherung, s. Anhang, Abb. 5), so betragen die x-Komponenten der magnetischen Feldstärke \vec{H} auf zwei ausgezeichneten Positionen, der ersten und zweiten GAUSS'sche Hauptlage (GHL, Abb. 1)

$$1. \text{ GHL : } H_x^{(1)} = \frac{m^*}{2 \pi \mu_0 \tilde{x}^3} \quad , \quad \text{bzw. } 2. \text{ GHL : } H_x^{(2)} = -\frac{m^*}{4 \pi \mu_0 \tilde{y}^3} \quad . \quad (1)$$

2.2 Erstes Experiment, Überlagerung von Dipolfeld und Erdfeld

Eine in der horizontalen (xy-) Ebene frei drehbare Kompass-Nadel stellt sich parallel zur Horizontal-Komponente H_h des Erdfeldes in y-(= Nord-) Richtung. Bringt man anschließend den Magneten horizontal mit seinem magnetischen Moment \vec{m}^* parallel zur Ost-West-Richtung ($\vec{m}^* = m^* \vec{e}_x$) in den Abständen \tilde{x} bzw. \tilde{y} vom Mittelpunkt der Kompassnadel an (d.h. nacheinander in die erste bzw. zweite GHL, s. Abb. 1), so dreht sich die Nadel beim Einstellen in die Resultierende aus Erdfeld (H_h) und Dipolfeld ($H_x^{(1)}$ bzw. $H_x^{(2)}$)

um die jeweiligen Winkel $\delta^{(1)}$ bzw. $\delta^{(2)}$ aus der NS-Richtung heraus (Abb. 1). Dabei gilt

$$\tan \vartheta^{(1)} = \frac{H_x^{(1)}}{H_h} \quad (a) ; \quad \tan \vartheta^{(2)} = \frac{H_x^{(2)}}{H_h} \quad (b) . \quad (2)$$

Mit Gl. (1) erhält man für den Quotienten der beiden Unbekannten (H_h sowie m^*)

$$\frac{m^*}{\mu_0 H_h} = 2 \pi \tilde{x}^3 \tan \delta^{(1)} = 4 \pi \tilde{y}^3 \tan \delta^{(2)} . \quad (3)$$

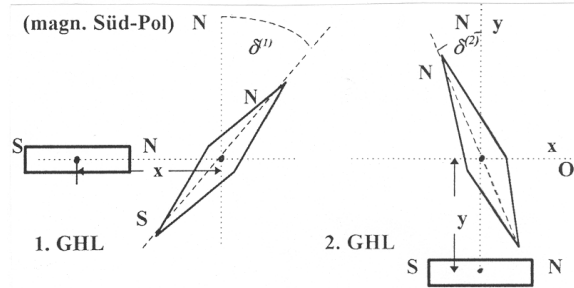


Abb. 1: Anordnung des Stabmagneten bezüglich der Kompass-Nadel für die erste bzw. zweite GHL

2.3 Zweites Experiment, Drehschwingungen

Der gleiche Stabmagnet wird nun an einem langen dünnen Faden so aufgehängt, dass er horizontal hängt. Lenkt man ihn bezüglich der Horizontalkomponente des Erdfeldes \vec{H}_h um den kleinen Winkel α aus der N-S-Richtung aus, so wirkt auf ihn das rücktreibende Drehmoment \vec{M}_{mech}

$$|\vec{M}_{mech}| = |\vec{m}^* \times \vec{H}_h| = m^* H_h \sin \alpha \quad . \quad (4)$$

Nach Loslassen beginnt der Stabmagnet um die N-S-Richtung zu schwingen. Die Schwingungsdauer T_0 wird gemessen. Die Bewegungsgleichung (5 a) vereinfacht sich für kleine Auslenkungen (5 b für $\hat{\alpha} < 0,1$; $\approx 6^\circ$, s. Anhang)

$$J_T \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -m^* H_h \sin \alpha \quad (a); \quad ; \quad \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{m^* H_h}{J_T} \alpha = 0 \quad (b); \quad M_D = \frac{M_{mech}}{\alpha} = m^* H_h \quad (c) \quad . \quad (5)$$

(M_D = Direktionsmoment). Mit J_T als Trägheitsmoment bezogen auf die Drehachse lautet die Lösung der Dgl. (5 b) (harmonische Schwingung): $\alpha(t) = \hat{\alpha} \cos \omega_0 t$, wobei gilt

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{m^* H_h}{J_T} \quad (a) \quad \text{oder} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_T}{m^* H_h}} \quad (b) \quad . \quad (6)$$

2.4 Horizontal-Komponente

Aus der Gl. (6 b) folgt für das Produkt der beiden Unbekannten

$$m^* H_h = \frac{4\pi^2 J_T}{T^2} \quad . \quad (7)$$

Zweckmäßigerweise wird das magnetische Moment m^* aus den Gleichungen (7) und (3) eliminiert. Damit folgt für die Horizontalkomponente

$$H_h = \sqrt{\frac{2\pi J_T}{\mu_0 \tan \vartheta^{(1)} x^3 T^2}} = \sqrt{\frac{\pi J_T}{\mu_0 \tan \vartheta^{(2)} y^3 T^2}} \quad . \quad (8)$$

2.5 Massenträgheitsmoment

Bei einfachen Formen eines homogenen Körpers lässt sich dessen Trägheitsmoment J_T bezüglich günstiger Achsen (z.B. die Hauptträgheitsachsen) berechnen. So gilt für den um die vertikale Schwerpunkts-Achse rotierenden horizontal aufgehängten Kreiszylinder (Masse m , Länge L und Radius R ; s. Anhang)

$$J_T = m \left(\frac{L^2}{12} + \frac{R^2}{4} \right) \quad . \quad (9)$$

Man betrachte die Grenzen $R \rightarrow 0$ oder $L \rightarrow 0$!

Somit können anhand der beiden Gln. (3,7 bzw. 8) **allein aus mechanischen Messungen** die magnetische Feldstärke (H_h) und das magnetische Moment (m^*) bestimmt werden.

2.6 Vertikalkomponente

Mit geeigneten Winkelmessern (Inklinatorien) kann die Abweichung von \vec{H} von der Horizontalen, d. h. der Inklinationswinkel β bestimmt werden.

Mit $\cos \beta = H_h/|\vec{H}|$ und $\tan \beta = \frac{H_v}{H_h}$ folgt für die Vertikalkomponente $H_v = H_h \tan \beta$.

3 Hinweise zur Versuchsdurchführung

1. Bestimmung von m (Waage) sowie von R und L (Mess-Schieber).
2. Horizontale Aufhängung des Magneten an langem Faden (N-S-Richtung kontrollieren); Anstoßen zu Drehschwingungen ($\hat{\alpha} \approx 6^\circ$); 3 Werte für 30 T messen.
3. Bei zunächst ca. 2m entferntem Magneten den Justier-Balken mit Kompass einrichten: erstens in O-W-Richtung bei 1. GHL; später in N-S für die 2. GHL.
Nun den Magneten **immer in O-W-Richtung** im Abstand x (bzw. später y ; vom Mittelpunkt der Kompaßnadel zum Mittelpunkt des Magneten) bingen. Die Abstände x (bzw. y) und die Winkel δ_1 , δ_2 messen.

Beachte:

- a. Die Abstands-Marken sind nur grobe Richtwerte; x bzw. y genau messen! b. Reduzierung des Nullpunktfehlers für δ_1 und δ_2 : Umdrehen des Magneten.
- c. Ältere mechanische Stoppuhren sind eisenhaltig. Daher 1 m Abstand vom Magneten bei der Zeit-Messung.
- d. Zur Bestimmung der Vertikalkomponente wird die Kompaßnadel eines "Deklinatoriums" zunächst auf den Deklinationswinkel Null (N-S) eingestellt und danach die Nadel-Achse aus der Vertikalen um 90° in die Horizontale gedreht, wonach der Inklinationswinkel β (auch bei Vertauschung der Seiten) abgelesen wird.
- e. Über das Volumen des Magneten und m^* wird die Polarisation $J^* = m^*/V$ bestimmt.
- f. Abgesehen von den natürlichen Schwankungen (s. Anhang) ist das lokale Feld infolge der im Hause befindlichen Eisenteile (Eisenträger, Heizkörper) stark verfälscht.
- g. Die Störungen durch die Nachbar-Plätze sollten minimal gehalten werden (ca. 2m Abstand). (Aufbewahrung der Magnete im Eisenjoch).
Vorsicht mit modernen Seltenerd-Magneten, sie sind spröde und leicht zerbrechlich!

4 Anhang

4.1 Zum Erdfeld

4.1.1 Zum Ursprung des Erdfeldes

Über den Ursprung des Erdfeldes gibt es Hypothesen und Modelle [3]. Gesichert scheinen zirkulierende Konvektionsströme aus zähflüssigem Plasma von geeigneter Topologie zwischen festem Erdkern und flüssigem Mantel bei etwa $R_E/2$ zu sein. Diese können sich stabilisieren, wobei das bereits vorhandene Feld über Lorentzkräfte die Ladungsträgerdichte und damit Strom und Erdfeld erhöhen kann [3, 4].

Die Relativgeschwindigkeiten zwischen festem Kern und der darüberliegenden Flüssigkeit liegen in der Größenordnung von 1 m/a [4]. Diese Effekte sind Schwankungen unterworfen, die sich in Änderungen von Betrag und Richtung von \vec{H} äußern (s. u.).

1991 konnte das Erdfeld grob durch ein geozentrisches Dipolfeld, dessen Achse um ca. 11° von der geografischen NS-Richtung abweicht, angenähert werden [3] (s. Abb. 2 a).

Der Betrag entspricht einem durch eine Stromschleife erzeugten Dipolmoment im Erdmittelpunkt von $m_e^*/\mu_0 \approx 8 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$. Durch den Sonnenwind (überwiegend Elektronen und Protonen) wird das Erdfeld in größerer Entfernung stark deformiert (die abgelenkten geladenen Teilchen erzeugen

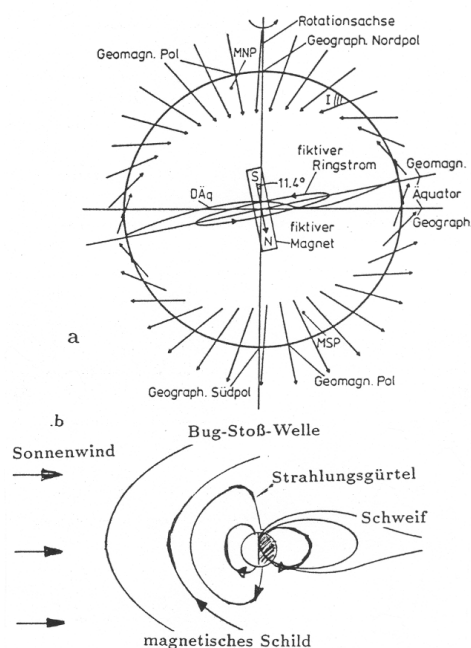


Abb. 2: a. Erdfeld als Dipolfeld [3];
b. Verzerrung durch den Sonnenwind [4]

gen Zusatz-Magnetfelder), d. h. auf der Tagseite abgeflacht und auf der Nachtseite langgestreckt (Abb. 2 b). Diese Deformation rotiert mit der Erde und verursacht auf der Erdoberfläche einen Teil der täglichen Schwankungen (%-Bereich). Zu Zeiten starker Sonnenaktivität (magnetische Stürme) treten wesentlich höhere Schwankungen auf (über 10 %).

4.1.2 Globales Bild vom magnetischen Feld der Erde

In den Abb. 3 a und b sind in Mercator-Projektion die Beträge $|\vec{H}|$ (a) und H_h (b) auf der Erdoberfläche dargestellt (1980, [3]). Man erkennt beachtliche Abweichungen vom Dipol-Modell sowie die Pole und Zusatzpole.

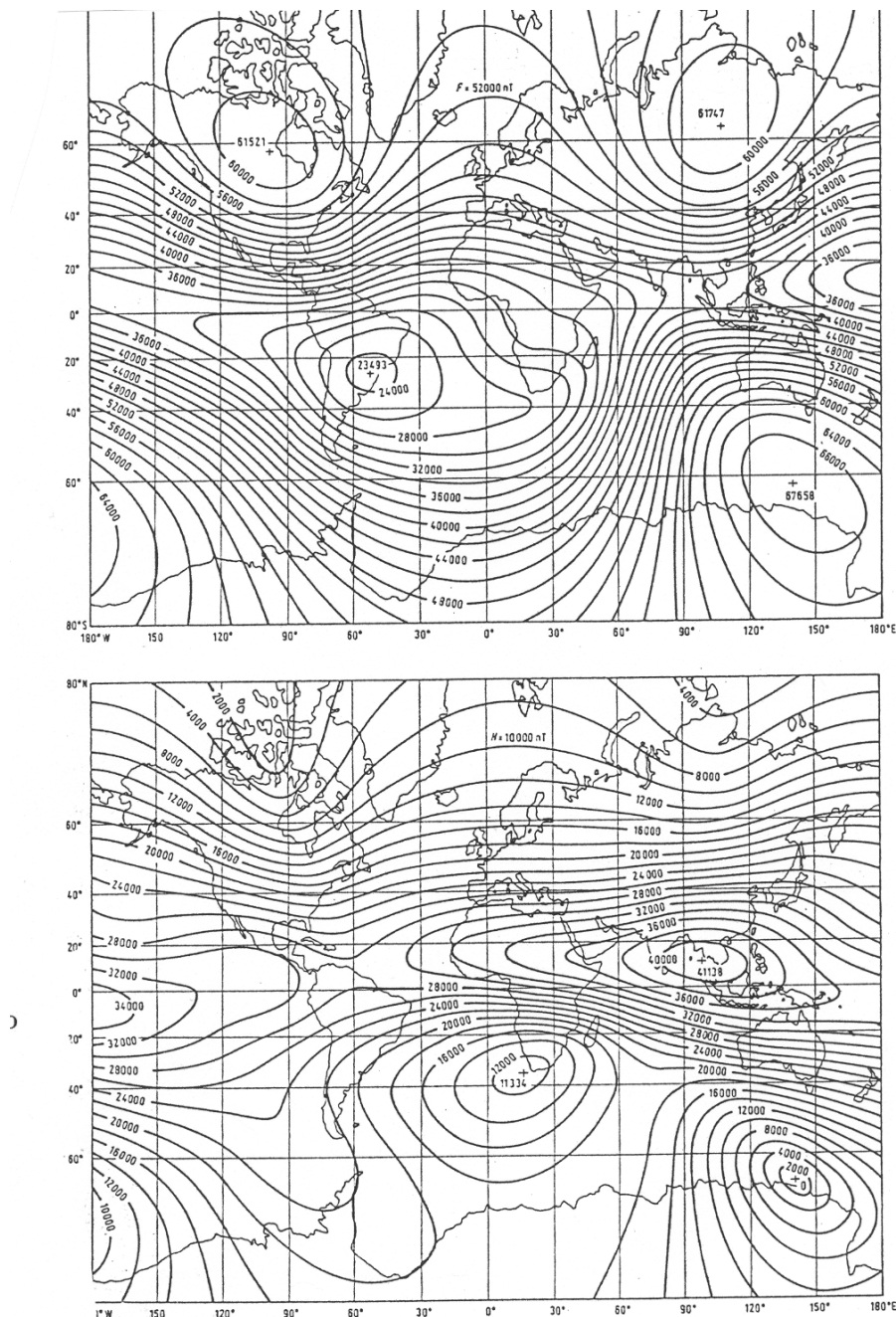


Abb. 3: Im Jahre 1980 aufgenommene Linien gleicher Total- (a) und Horizontal-Intensität (b) des Erdfeldes in Mercator-Projektion [3]; die Maßeinheit für $\mu_0 \cdot H$ ist nT

4.1.3 Langfristige Schwankungen des Erdfeldes

Seit Gauß (um 1800 und auch schon früher, z. B. Gilbert um 1600) wurde das Erdfeld regelmäßig vermessen. Der Betrag nahm seit 1800 monoton ab (Abb. 4 a, verschwindet das Feld in etwa 2000 Jahren?). Informationen über frühere Zeiten erhält man durch Untersuchung eisenhaltiger Minerale und Sedimente.

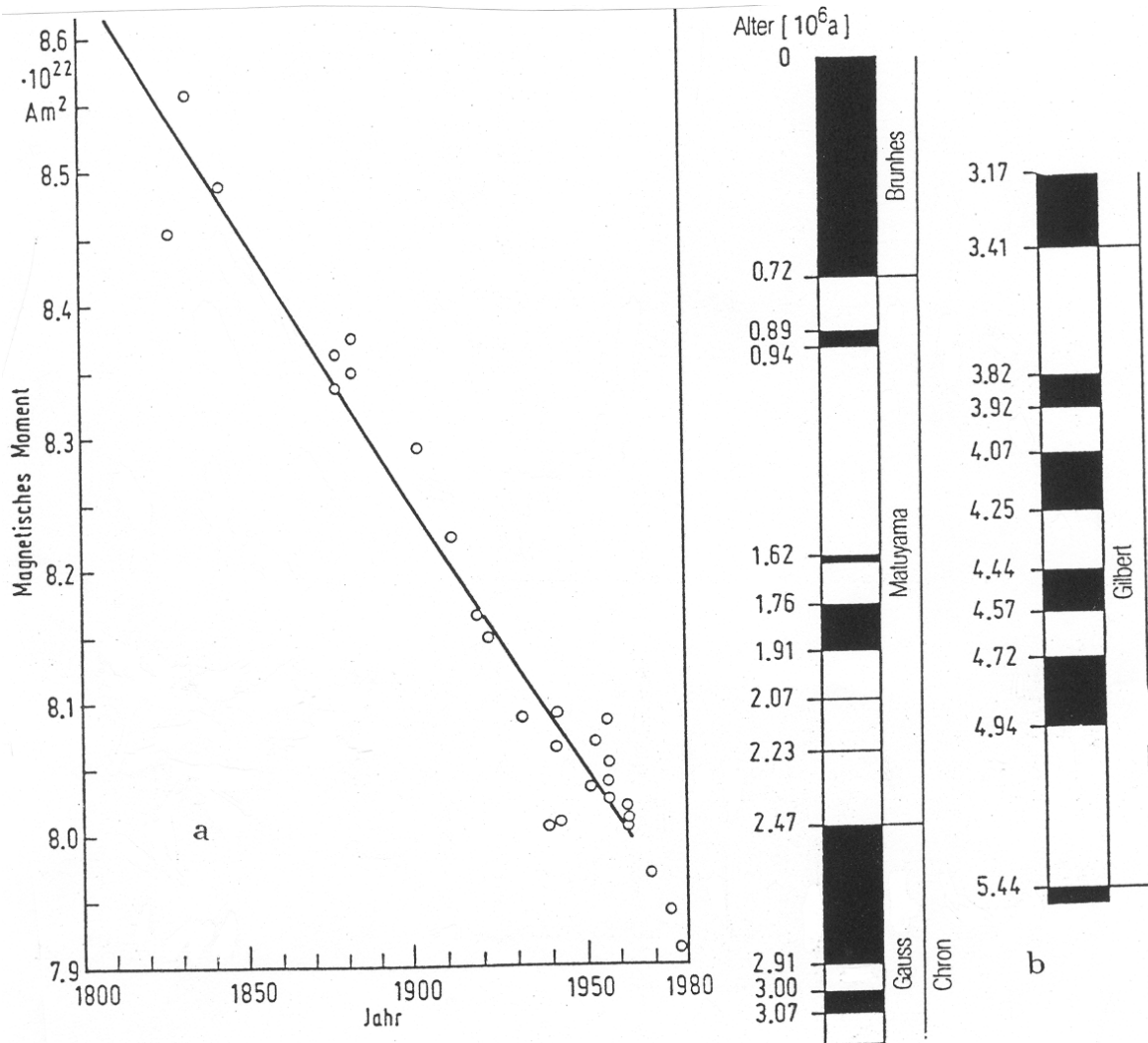


Abb. 4: Zeitliche Variationen des Erdfeldes:

- a. Abnahme des globalen Momentes m_e^* in den letzten 200 Jahren;
- b. normale (heutige, schwarz) und inverse Polarität (weiß) in den letzten $5 \cdot 10^6$ Jahren, Paläomagnetismus, [3].

Mit diesem **Paläomagnetismus** wird auf Betrag und Richtung des Erdfeldes derjenigen Zeitepoche rückgeschlossen, in der das Gestein unter den Curie-Punkt (je nach Gestein um 200 bis 700 °C [3]) abkühlte, d. h. ferro-oder ferrimagnetisch wurde.

In geologischen Zeiträumen gab es laufend Schwankungen, die auch durch die Kontinentalverschiebung beeinflusst wurden. Unterschritten die Dipolkomponenten die Anteile von Momenten höherer Ordnung, so konnte es zum **Wechsel der Polarität** kommen (Aussage von Modell-Rechnungen [3]). Der letzte gesicherte Polwechsel fand vor ca. $0,7 \cdot 10^6$ a statt (Abb. 4 b).

4.2 Zur Dipol-Näherung

Man kann die Gln. (1) näherungsweise über das elektrische Analogon herleiten, auch für geringere relative Abstände L/x bzw. L/y . Wir betrachten dazu zwei Punktladungen, $+Q$ und $-Q$, im Ab-

stand $2a = L$. ($m^* \vec{e}_x = QL \vec{e}_x$). Die Feldstärken der Einzel-Ladungen im Abstand \vec{r} berechnen sich nach COULOMB zu:

$$\vec{E} = \pm \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}; \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \quad (10)$$

1.GHL:

Auf der Verbindungs- (= x -) Achse im Aufpunkt P soll gelten $r^{(+)} = x - \frac{L}{2}$ und $r^{(-)} = x + \frac{L}{2}$ ($a = \frac{L}{2}$ = halbe Dipol-Länge). Die Feldstärke des aus beiden Punktladungen erzeugten Dipols folgt aus Gl. (10) (Vektor-Summe) zu

$$\begin{aligned} E_{dipol}^{(1)} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2ax}{(x^4 - 2a^2x^2 + a^4)} \right] \\ &= \frac{2 \cdot 2aQ}{4\pi\epsilon_0 x^3} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{L^2}{4x^2})^2} \\ &= \frac{m^*}{2\pi\epsilon_0 x^3} \cdot F_{korr}^{(1)}(L/x) \quad . \quad (11) \end{aligned}$$

2.GHL:

Sekrecht zur Verbindungsachse ist der in GL. (10) maßgebliche Abstand $r = (a^2 + y^2)^{1/2}$. Die resultierende Feldstärke in P folgt durch vektorielle Überlagerung von $\vec{E}^{(+)}$ und $\vec{E}^{(-)}$ mit

$$\sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} = \frac{E^{(2)}/2}{E_0}; \quad E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(y^2 + a^2)} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{zu } |E_{dipol}^{(2)}| &= \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0(y^2 + a^2)} \cdot \frac{a}{(a^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{m^*}{4\pi\epsilon_0 y^3} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{L^2}{4y^2})^{1/2}} \\ &= \frac{m^*}{4\pi\epsilon_0 y^3} \cdot F_{korr}^{(2)}(L/y) \quad . \quad (13) \end{aligned}$$

Wie in Abb. 5 gezeigt, entsprechen die für zwei Punktladungen ermittelten $F_{korr}^{(1)}$ und $F_{korr}^{(2)}$ etwa denen für den langen Zylinder, die durch Summationen von ca. 10^8 Dipolen über das Zylinder-Volumen berechnet werden können. Im magnetischen Fall ist ϵ_0 durch μ_0 zu ersetzen.

Beachte: Ein kugelförmiger Magnet (grob anzunähern durch Würfel oder "dicke" Zylinder) erzeugt in jedem Abstand im Außenraum ein Dipolfeld (vergl. Korrekturfaktoren für $D = L$ in Abb. 5). Andernfalls bedeutet **Dipol-Näherung** $L/x \ll 1$ bzw. $L/y \ll 1$, d.h. $F_{korr} \rightarrow 1$ (Abb. 5).

Beispiel:

Es sei $L = 10$ cm; x bzw. $y = 50$ cm; d.h. $L/x = L/y = 0,2$.

Nach Abb. 5 würden mit den um F_{korr} verfälschten Feldwerten $\tan \vartheta^{(1)}$ um 2% zu groß ($F = 1,02$) und $\tan \vartheta^{(2)}$ um 1,5% zu klein ($F = 0,985$) bestimmt. D.h. der ermittelte H_h -Wert muss nach Gl. (8) um ca. 1% nach unten (1. GHL) bzw. um 0,75 % nach oben (2.GHL) korrigiert werden. Die Korrekturen sind für längere Zylinder-Magnete gegenläufig. Es empfiehlt sich demnach mit beiden GHL zu arbeiten.

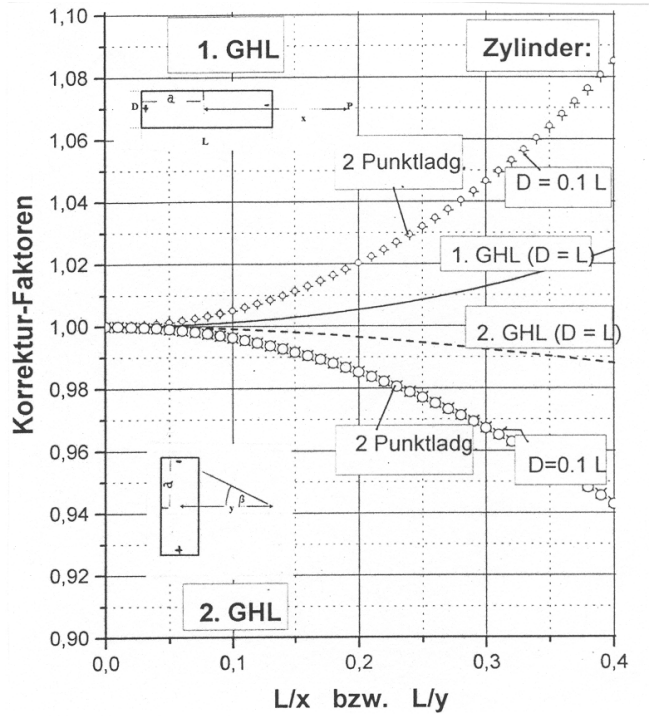


Abb. 5: Abweichungen vom idealen Dipolfeld in der Nähe des Dipols bzw. Zylinder-Magneten: zugehörige Korrekturen $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ für zwei Punktladungen (Gln. (11,13)) sowie für reelle Zylinder (lang $L/D = 10$; kurz $L = D$)

4.3 Trägheitsmoment

Das sogenannte polare Trägheitsmoment einer flachen Kreisscheibe (Achse = Zylinderachse) beträgt (für infinitesimales dm) $J_P = dm \cdot R^2/2$. Das äquatoriale Trägheitsmoment (Achse = Durchmesser), J_a , ist die Hälfte davon: $dJ_a = dm \cdot R^2/4$.

Bei dem langen Zylinder der Länge L sind infinitesimale Scheiben aneinander gereiht, über deren äquatoriale Trägheitsmomente in z -Richtung zu integrieren ist. Die infinitesimale Scheibe sei um z parallel zur Drehachse verschoben. Der Steinersche Satz, zunächst allgemein

$$J_A = J_s^* + ms^2 \quad , \quad (14)$$

lautet hier mit $J_s^* = dm(\frac{R^2}{4})$: $dJ_T = dm(\frac{R^2}{4}) + dmz^2$. Die Integration liefert

$$\begin{aligned} J_T = J_s &= (\rho\pi R^2) \int_{-L/2}^{+L/2} dz(R^2/4 + z^2) \\ &= (\rho\pi R^2)(R^2/4 \cdot [z]_{-L/2}^{+L/2} + [\frac{z^3}{3}]_{-L/2}^{+L/2}) \\ &= \rho\pi R^2 L \left[\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12} \right] \quad . \end{aligned} \quad (15)$$

Mit $m = \rho\pi R^2 L$ folgt die Gl. (9).

4.4 SI-Maßeinheiten

1. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$;
2. magnetische Feldstärke:
 - a. $[H] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$; b. $[\mu_0 H] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T}$ (Tesla) ;
3. Induktion B ; Magnetisierung M ; Polarisation J^* :

$$B = \mu_0 H + J^* = \mu_0(H + M); \quad [\mu_0 H] = [B] = [J^*] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T} ;$$
4. magnetisches Moment:
 - a. $[m^*] = [VJ] = \text{Vsm}$;
 - b. $[m^{**} = \frac{m^*}{\mu_0}] = [VM] = \text{Am}^2$.
5. beachte:

$$1\text{J} = 1\text{VAs} = 1\text{Nm} = 1\text{kgm}^2/\text{s}^2$$

5 Fragen

1. Man zeichne nach Abb. 2 eine Feldlinie des Erdfeldes (\vec{H}) für eine geografische Breite von ca. 50° und skizziere Horizontal- und Vertikal-Komponente.
2. Man entnehme der Abb. 3 den Wert von H_h für Mitteleuropa und rechne die Einheit nT in A/m um.
3. Erläutere die Bewegungsgleichung für Drehschwingungen mit Lösungen für kleine Amplituden. Wovon hängt die Schwingungsdauer des Magneten im Erdfeld ab?
4. Was versteht man unter dem (Massen-) Trägheitsmoment? Wie berechnet man es für einen langen Stab um alle drei Hauptachsen? Wie groß ist das äquatoriale und polare Trägheitsmoment einer flachen Kreisscheibe?
5. Wie berechnet sich das Trägheitsmoment für einen Kreiszylinder der Länge L und dem Durchmesser $2R$ bezüglich aller drei Hauptachsen?
6. Wie lautet der Satz von Steiner?
7. Wie berechnet man in der Elektrostatik die Feldstärke a. einer Punktladung und b. eines Dipols und in der Magnetostatik das Dipolfeld? In welcher Potenz gehen die Abstände bei den Feldern von Punktladung und Dipol ein?
8. Was versteht man unter den GAUSS'schen Hauptlagen bezüglich des Feldes eines Stabmagneten?
9. Wie hängen das magnetische Moment m^* und die magnetische Polarisation J^* zusammen?
10. In welchen Abstand x (z. B. vom Nachbarn beim Versuch) muss ein Magnet gebracht werden, damit das von ihm ausgehende Magnetfeld die lokale Horizontalkomponente (z.B. 20 A/m) weniger als 0,1 % verändert? (s. Gl. (1))
Beispiel: Magnet-Volumen $V = 2 \text{ cm}^3$; Polarisation $J^* = 1 \text{ Vs/m}^2$; $m^* = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Vsm}$.

Literatur

- [1] H. Niedrig, Physik, 1992
- [2] F. Kohlrausch, Praktische Physik Bd. 2, V. Teubner Stgt. 1985
- [3] H. Cr. Soffel, Paläomagnetismus, V. Springer Berlin 1991
- [4] Gerthsen (H. Vogel), Physik, V. Springer 1995
- [5] L. Jahn, Einführung in Magnetismus und Magnetlabor, Skriptum TU Dresden 2001