Technische Universität Dresden Fachrichtung Physik C. Evers, P. Eckstein 07/ 2000 bearbeitet 03/ 2004	Physikalisches Praktikum Versuch: GS

Gekoppelte Schwingung

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung

Das Wissen über physikalische Pendel und Schwingungen soll durch diesen Versuch vertieft werden. Die Schwebungsfrequenz der gekoppelten Pendel ist als Funktion der Kopplungslänge direkt und indirekt zu messen. Die Messergebnisse sind mit den theoretisch berechneten Werten zu vergleichen.

2 Grundlagen

2.1 Das Physikalische Pendel

Mit dem Trägheitsmoment $J_A = \int_K r^2 dm$ des Körpers K bezüglich der Drehachse A und dem Abstand s_A zwischen Drehachse und Massenmittelpunkt lautet die Differentialgleichung für das physikalische Pendel der Gesamtmasse m:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g \cdot m \cdot s_A}{J_A} \sin(\varphi) \tag{1}$$

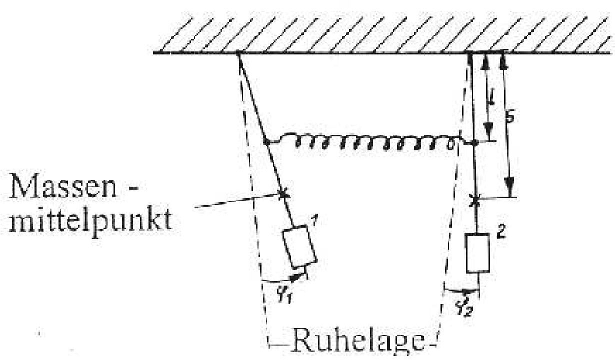
Mit der Einschränkung kleiner Auslenkungen $|\varphi| \ll 1$ gilt näherungsweise: $\sin(\varphi) \approx \varphi$ und damit:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g \cdot m \cdot s_A}{J_A} \varphi \tag{2}$$

Diese DGL. wird durch den bekannten Ansatz gelöst: $\varphi(t) = \hat{\varphi} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Daraus folgt für die Kreisfrequenz der freien Schwingung:

$$\omega^2 = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 = \frac{g \cdot m \cdot s_A}{J_A} \tag{3}$$

2.2 Gekoppelte Pendel



$D = m \cdot g \cdot s_A$: *Richtmoment* des freien Pendels
$D^\star = k \cdot l^2$: das Richtmoment der Kopplungsfeder

Für kleine Auslenkungen φ_1 und φ_2 der Pendel 1 und 2 lauten die Bewegungsgleichungen der gekoppelten gleichartigen Pendel bei Vernachlässigung der Masse der Kopplungsfeder und jeglicher Dämpfung:

$$J_A \cdot \ddot{\varphi}_1 = -D\varphi_1 + D^\star(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{4}$$

$$J_A \cdot \ddot{\varphi}_2 = -D\varphi_2 + D^\star(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{5}$$

Mit den Anfangsbedingungen zur Zeit t=0

$$\varphi_1(0) = A \qquad \varphi_2(0) = B \qquad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \tag{6}$$

(d.h. die Pendel werden nur ausgelenkt, nicht angestoßen), ergeben sich Lösungen für die einzelnen Pendel aus den gekoppelten Bewegungsgleichungen (4, 5)

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}\left[(A+B)\cos(\omega \cdot t) + (A-B)\cos\left(\omega' \cdot t\right)\right] \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}\left[(A+B)\cos(\omega \cdot t) - (A-B)\cos\left(\omega' \cdot t\right)\right] \end{aligned} \tag{7}$$

$$mit \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{J_A}} \qquad und \quad \omega' = \frac{2\pi}{T'} = \sqrt{\frac{D+2D*}{J_A}} \tag{8}$$

Für bestimmte Anfangsbedingungen erhält man die beiden **Fundamentalschwingungen**:

$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0$, also $B = A$, ergibt die **gleichsinnige Fundamentalschwingung** mit der Kreisfrequenz ω, bei der beide Pendel so schwingen, als wäre die Kopplung nicht vorhanden.

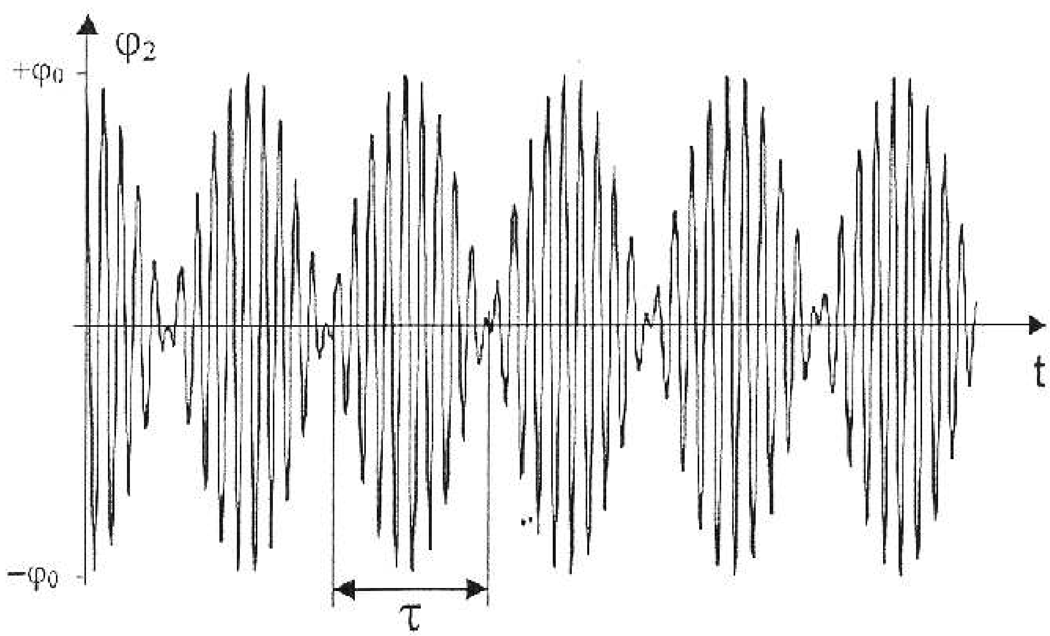
$\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0$, also $B = -A$, ergibt die **gegensinnige Fundamentalschwingung** mit der Kreisfrequenz ω'.

Die Schwebungsschwingung erhält man, indem ein Pendel in der Ruhelage festgehalten wird (z. B. $\varphi_1(0) = 0$) und das zweite Pendel zur Zeit t = 0 bei maximaler Auslenkung losgelassen wird ($\varphi_2(0) = \varphi_0$), also für $A = 0$ und $B \neq 0$ oder umgekehrt. Daraus ergeben sich die $\varphi(t)$ Funktionen der beiden Pendel während der Schwebungsschwingung:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}B\left[\cos(\omega \cdot t) - \cos\left(\omega' \cdot t\right)\right] \quad bzw. \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}B\left[\cos(\omega \cdot t) + \cos\left(\omega' \cdot t\right)\right] \tag{9}$$

oder durch Differenzen und Summen der Fundamentalschwingungsfrequenzen ausgedrückt (mit $B = \varphi_0$):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cdot \sin\left[\frac{1}{2}\left(\omega' - \omega\right)t\right] \cdot \sin\left[\frac{1}{2}\left(\omega + \omega'\right)t\right] \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \cdot \sin\left[\frac{1}{2}\left(\omega' - \omega\right)t\right] \cdot \cos\left[\frac{1}{2}\left(\omega + \omega'\right)t\right] \end{aligned} \tag{10}$$



Prinzip der Schwebungsschwingung eines Pendels mit der Schwebungdauer τ.

Nach Gleichung (10) führen beide Pendel Schwingungen mit dem arithmetischen Mittel der Fundamentalschwingungsfrequenzen aus, während sich die Amplituden periodisch mit $(\frac{1}{2}(\omega' - \omega))$ ändern.

Die Schwebungsdauer τ ist der Abstand zweier Nulldurchgänge der Amplitude eines Pendels. Aus der Bedingung $\frac{1}{2}(\omega' - \omega) \cdot \tau = \pi$ ergibt sich die **Schwebungsfrequenz** als Differenz der Fundametalschwingungs-Frequenzen:

$$\frac{1}{\tau} = f_s = \frac{\omega' - \omega}{2\pi} = \frac{1}{T'} - \frac{1}{T} \tag{11}$$

Mit (8) kann man die Schwebungsfrequenz aus den Direktionsmomenten bzw. den entsprechenden Werten für g, k, m, s_A und l errechnen:

$$f_s = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega' - \omega}{2\pi} = \frac{1}{T}\left(\sqrt{1 + \frac{2 \cdot k \cdot l^2}{m \cdot g \cdot s_A}} - 1\right) \tag{12}$$

3 Experimentelle Aufgabenstellung

Am Versuchsplatz sind zwei physikalische Pendel, die in einer gemeinsamen Ebene schwingen können. Die Pendel werden durch eine Schraubenfeder (Federkonstante k) gekoppelt, die in variablem Abstand l von der Drehachse jedes Pendels befestigt werden kann.

1. Justieren der ungekoppelten Pendel durch Verschieben einer Tariermutter auf gleiche Schwingungsdauer, indem die Schwingungsdauern gemessen werden oder die Phasengleichheit der gegensinnigen Schwingungen der beiden ungekoppelten Pendel am inneren Umkehrpunkt über längere Zeit kontrolliert wird.

2. Messung der Schwingungsdauer T der gleichsinnigen, der Schwingungsdauer T ' der gegensinnigen Fundamentalschwingung sowie die Schwebungsdauer τ für verschiedene Abstände l.

3. Bestimmung der Federkonstanten k der verwendeten Feder (dynamische Methode), des Abstandes sA des Massenmittelpunktes der Pendel von der Drehachse und der Pendelmasse m.

4 Auswertung

Die Schwebungsfrequenz f_S folgt direkt aus dem gemessenen τ sie kann nach (11) aus T und T' bestimmt werden und sie ist aus dem theoretischen Zusammenhang (12) zu berechnen.

Die auf drei verschiedenen Wegen ermittelten f_S - Werte sind als Funktion der Kopplungslänge l grafisch darzustellen.

Die relativen Maximalfehler von f_S sind für die indirekte Methode (11) und die theoretische Methode (12) in Abhängigkeit vom Federabstand l zu bestimmen.

5 Fragen zur Vorbereitung

1. Wodurch ist eine mechanische Schwingung gekennzeichnet?
2. Wie sind im Experiment die Fundamentalschwingungen und die reine Schwebung anzuregen?
3. Wie könnte man feststellen, ob die Pendel bei der Bestimmung von T' genau in Gegenphase schwingen?
4. Wie kann man die Federkonstante k der Kopplungsfeder statisch und dynamisch bestimmen?
5. Wie erhält man den Massenmittelpunkt eines Pendels?
6. Die beiden Pendel sind in einem Metallrahmen aufgehängt. Wenn man ein Pendel zur Schwingung anstößt, beginnt nach längerer Zeit auch das zweite Pendel zu schwingen, selbst wenn die Pendel nicht durch eine Feder verbunden sind. Wie ist das zu erklären?
7. Phy) Da die Aufhängeplatte für den Federangriff (Masse m_F) für die Kopplungsfeder auf dem Pendel verschoben werden muss, hängt auch die Schwingungsdauer T von l ab. Versuchen Sie herzuleiten, dass der Einfluss der Verschiebung der Muffe auf $\overline{f}$ in erster Näherung durch Multiplikation der rechten Seite von (12) mit dem Faktor $\left[1 - \frac{1}{2}\frac{m_M}{m_P}\frac{1}{s}\left(1 + \omega^2 \frac{1}{g}\right)\right]$ erfasst wird.

Literatur

[1] Gerthsen, Physik

[2] Geschke, Physikalisches Praktikum

[3] Recknagel, Physik: Schwingungen und Wellen/ Wärmelehre