

Strömung im Rohr

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Aufgabenstellung | 2 |
| 2 | Allgemeine Grundlagen | 2 |
| 2.1 | Ideale Flüssigkeit | 2 |
| 2.2 | Reale Flüssigkeit | 2 |
| 2.2.1 | Innere Reibung, Viskosität, laminare Strömung | 2 |
| 2.2.2 | Turbulente Strömung | 2 |
| 2.2.3 | Reynoldssche Zahl und Widerstandsbeiwert | 3 |
| 3 | Experimente | 3 |
| 3.1 | Meßanordnung | 3 |
| 3.2 | Grafische Darstellung | 4 |
| 3.3 | Hinweise zum Versuch | 4 |
| 4 | Anhang | 4 |
| 4.1 | Zur Reynoldsschen Zahl | 4 |
| 4.2 | Zum Gesetz von Hagen-Poiseuille | 5 |
| 5 | Fragen | 5 |

1 Aufgabenstellung

1. Bestimmung des Druckabfalls als Funktion der Strömungsgeschwindigkeit von Wasser in einem horizontalen Rohr und daraus
2. Graphische Darstellung von $(\frac{V}{t})^2 = f(\Delta h)$ und Bestimmung von Re_{krit} aus $(\frac{V}{t})_{krit}$
3. Berechnung der Widerstandsbeiwerte und Reynoldsen Zahlen im laminaren und turbulenten Gebiet und Vergleich der c-Werte mit den theoretischen Werten.

2 Allgemeine Grundlagen

2.1 Ideale Flüssigkeit

In einer divergenzfreien (z. B. Rohr-) Strömung gilt für konstante Dichte die **Kontinuitätsgleichung** (A_1, A_2 Querschnitte; v_1, v_2 Geschwindigkeiten)

$$\frac{V}{t} = A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad . \quad (1)$$

Bei vernachlässigter Reibung lautet dem Energie-Erhaltungs-Satz pro Volumeneinheit entsprechend die **Bernoullische Gleichung** (p_1, p_2 statische Drucke; h_1, h_2 : Höhen; ρ Dichte):

$$\frac{\rho}{2} v_1^2 + p_1 + \rho g h_1 = \frac{\rho}{2} v_2^2 + p_2 + \rho g h_2 = const \quad . \quad (2)$$

2.2 Reale Flüssigkeit

2.2.1 Innere Reibung, Viskosität, laminare Strömung

In realen Flüssigkeiten gilt die Gl. (2) nicht. Vielmehr treten Druck-Verluste (Druckabfälle) infolge der inneren Reibung auf. Bei geringen Strömungs-Geschwindigkeiten (**laminare Strömung**) gilt für die Reibungskraft der **Newtonsche Ansatz**. Es gleiten mit $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$ die Flüssigkeits-Schichten (x-y-Ebene) unterschiedlicher Geschwindigkeit aneinander ab. Dabei üben sie Scherkräfte aufeinander aus:

$$F_x = \eta A \frac{dv_x}{dz} \quad ; \quad (3)$$

(η Viskosität oder Zähigkeit; A Fläche; $\frac{dv_x}{dz}$ Geschwindigkeitsgradient).

Für die **Rohrströmung** folgt aus (3) das Gesetz von **Hagen-Poiseuille** (bzw. die zugehörige Druck-Kraft F_p):

$$A \bar{v} = \frac{V}{t} = \frac{\pi \Delta p R^4}{8 \eta l} \quad (a) \quad F_p = \Delta p \pi R^2 = 8 \pi \eta l \bar{v} \quad (b) ; \quad (4)$$

(A Rohrquerschnitt; V Volumen; R Rohrradius; l Rohrlänge; Δp Druckdifferenz).

2.2.2 Turbulente Strömung

Verursacht durch Wirbel infolge der Reibung entsteht oberhalb einer kritischen Geschwindigkeit v_{krit} aus der laminaren eine turbulente Strömung. Oberhalb von v_{krit} ist v nicht mehr Δp proportional, sondern wächst langsamer an. Die Werte von v und p schwanken um Mittelwerte. Die Bahnlinien

sind nicht mehr näherungsweise geradlinig, sondern es findet eine starke Durchmischung statt. Mit A^* als Querschnitt eines umströmten Körpers wird für die Reibungskraft allgemein angesetzt

$$F_r = c_w A^* \frac{\rho}{2} (\bar{v})^2 \quad (a) \text{ oder } \frac{F_r}{A^*} = \Delta p = c_w \frac{\rho}{2} (\bar{v})^2 \quad (b); \quad (5)$$

(c_w Widerstandsbeiwert; $\frac{\rho}{2} (\bar{v})^2$ Staudruck).

Liegt an einem **rauhwandigen Rohr** mit dem Durchmesser d und der Länge l die Druckdifferenz Δp an, so ist die für die Reibung maßgebliche Fläche $A^* = \pi d l$ (Rohrmantel) und die Reibungskraft F_r genügt mit (5) der Beziehung

$$F_r = \Delta p A^* = \Delta p \pi d l = c_w \frac{\rho}{2} v^2 \pi d l \quad . \quad (6)$$

2.2.3 Reynoldssche Zahl und Widerstandsbeiwert

Ähnlichkeit: Strömungen sind ähnlich, wenn die Verhältnisse ihrer kinetischen Energien ($A \rho v^2/2$) denen der Reibungsarbeiten ($l A^* \eta dv/dr$) entsprechen oder wenn ihre dimensionslosen Reynoldsschen Zahlen Re gleich sind (l^* charakteristische Länge; beim Rohr: $l^* = d$):

$$Re = \frac{\rho v l^*}{\eta} \quad (\text{allgemein (a)}) \quad \text{d. h.} \quad Re = \frac{\rho v d}{\eta} \quad (\text{Rohr (b)}) \quad . \quad (7)$$

Der sprunghafte Übergang von der laminaren zur turbulenten Rohr-Strömung erfolgt etwa bei $Re_{krit} \approx 2000$. Kombiniert man (5) und (4 b) (im Grenzfall sicher erlaubt), so folgt im laminaren Fall aus $8\pi\eta l \bar{v} = c_{lam} \frac{\rho}{2} v^2 \pi d l$

$$c_{lam} = \frac{16}{Re} \quad . \quad (8)$$

$$\text{Turbulent; empirisch: } c_{turb} \approx \frac{0.079}{Re^{1/4}} \quad . \quad (9)$$

3 Experimente

3.1 Meßanordnung

Über einen Druckminderer wird Leitungswasser mit variabler Geschwindigkeit einem langen ("ausgebildete Strömung") horizontalen Rohr zugeführt. An zwei im Abstand l angebrachten Meßpunkten wird anhand von Steigrohren der statische Druck gemessen und die Druckdifferenz Δp ermittelt.

Bei bekanntem Rohrdurchmesser wird die Strömungsgeschwindigkeit \bar{v} aus dem in der Zeit t ausgeflossenen Volumen V bestimmt (Abb. 1).

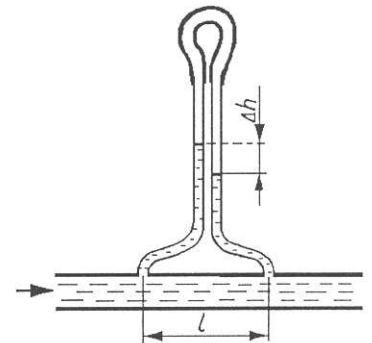


Abb. 1: Schema der Versuchsanordnung

3.2 Grafische Darstellung

Man führt anhand der Gln. (1,5,6) den Widerstandsbeiwert c_w auf Meßgrößen zurück und erhält mit $d = 2r$, $A = \pi r^2$; $A^* = 2\pi l r$ ($F_R = F_p$)

$$c_w = \frac{2 F_p}{\rho v^2 A^*} = \frac{2 \Delta p \pi r^2}{\rho \left(\frac{V}{t} A\right)^2 A^*} = \frac{\pi^2 r^5}{l} \cdot \frac{\Delta p}{\left(\frac{V}{t}\right)^2} = \frac{\pi^2 r^5 g}{l} \cdot \frac{\Delta h}{\left(\frac{V}{t}\right)^2} = K_c \cdot \frac{\Delta h}{\left(\frac{V}{t}\right)^2} \quad (10)$$

Trägt man im doppelt logarithmischen Maßstab Δp (bzw. Δh) über $\left(\frac{V}{t}\right)^2$ auf, so erhält man Geraden mit unterschiedlichen Steigungen, die dem laminaren bzw. turbulenten Gebiet entsprechen (Gln. 8,9). Aus dem Knick (Unstetigkeits-Punkt; Keimbildung!) ergibt sich

$$Re_{krit} = \frac{2 r \rho}{A \eta} \left(\frac{V}{t}\right)_{krit} = \frac{2 r \rho}{\pi r^2 \eta} \left(\frac{V}{t}\right)_{krit} = \frac{2}{\pi r \eta / \rho} \left(\frac{V}{t}\right)_{krit} = K_{Re} \cdot \left(\frac{V}{t}\right)_{krit} = \frac{K_{Re}^*}{\eta / \rho} \cdot \left(\frac{V}{t}\right)_{krit} \quad (11)$$

3.3 Hinweise zum Versuch

1. Die günstigste Ausgangshöhe der Flüssigkeit wird so eingestellt, daß sich die Wassersäulen in Augenhöhe befinden.
2. Im Bereich niedriger Druckdifferenzen sind möglichst viele Werte zu messen. Abwarten, bis der jeweilige h -Wert konstant ist.
3. Eindringene Luftblasen müssen (durch Klopfen) entfernt werden.
4. Folgende Tabellen-Form ist zweckmäßig (ca. 13 Werte-Paare; beginnend mit $\Delta h = 2; 3; 4; 5; 6; 8; 12; \dots; 300$ mm): $\Delta h/\text{mm}$; V/ml ; t/s ; $T/^\circ\text{C}$. Einheiten: $[K_c] = 1 \text{ cm}^5/\text{s}^2$ sowie $[K_{Re}^*] = 1 \text{ cm}^{-1}$ bzw. $[K_{Re}] = 1 \text{ s}/\text{cm}^3$.
5. Die temperaturabhängige kinematische Zähigkeit von Wasser ist gegeben (s. Tab. 1).

4 Anhang

4.1 Zur Reynoldsen Zahl

Man betrachte zwei umströmte Kugeln mit dem Durchmesser-Verhältnis $\frac{d_1}{d_2} = \alpha$. Im gleichen Ähnlichkeits-Verhältnis stehen die entsprechenden Wege im Ausdruck für die Reibungsarbeiten. ($\frac{s_1}{s_2} = \frac{d_1}{d_2} = \alpha$). Damit lassen sich die Quotienten aus kinetischer Energie bzw. Reibungsarbeit umformen [5]:

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{m_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \alpha^3 \quad ; \quad \frac{A_1}{A_2} = \alpha^2 \quad ; \quad \frac{dv_1/dr}{dv_2/dr} = \frac{v_1/d_1}{v_2/d_2} \quad ; \quad \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2} = \frac{A_1 \eta_1 s_1 dv_1/dr}{A_2 \eta_2 s_2 dv_2/dr} \\ &\rightarrow \frac{\rho_1 \alpha^3 v_1^2}{\rho_2 v_2^2} = \alpha^2 \frac{\eta_1 v_1 d_1}{\eta_2 v_2 d_2} \alpha \quad \text{d.h.} \quad \frac{\rho_1 v_1 d_1}{\eta_1} = \frac{\rho_2 v_2 d_2}{\eta_2} \quad ; \quad \text{oder} \quad Re_1 = Re_2 \quad . \end{aligned} \quad (12)$$

Re hängt ab von v , der kinematischen Zähigkeit η/ρ und einer charakteristischen Länge l^* : z. B. Rohrdurchmesser $l^* = 2r = d$.

4.2 Zum Gesetz von Hagen-Poiseuille

Am koaxialen Flüssigkeitszylinder mit dem Radius r und der Länge l greifen am Mantel die Reibungskraft $F_R = 2\pi r l \eta dv/dr = A^* \eta dv/dr$ ($dv/dr < 0$) und an der Stirnfläche die Druckkraft $F_p = \pi r^2 \Delta p = A \Delta p$ an. Aus der Gleichgewichtsbedingung $F_R = F_p$ folgt nach einer Integration [6] zunächst das parabelförmige $\vec{v}(\vec{r})$ -Profil

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r \quad ; \quad v(r) = v_0 - \frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 \quad ; \quad \text{mit } v_0 = \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2 \quad . \quad (13)$$

Betrachtet man weiter das zwischen zwei Schichten mit den Radien r und $r + dr$ strömende Volumen $d^2V = 2\pi r dr ds$ bzw. dessen zeitliche Änderung $\frac{dV}{dt} = 2\pi r dr v(r)$, so ergibt eine Integration über den ganzen Querschnitt

$$\frac{V}{t} = \int_0^R 2\pi r v(r) dr = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l} R^4 \quad . \quad (14)$$

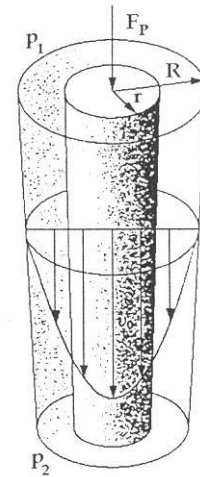


Abb. 2: Laminare Rohr-Strömung

Tab. 1: Kinematische Zähigkeit von H_2O :

| Temp./°C | 10 | 15 | 20 | 25 |
|--|-------|--------|------|-------|
| $\frac{\eta}{\rho} / \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ | 0,013 | 0,0113 | 0,01 | 0,008 |

5 Fragen

1. Was versteht man unter einer laminaren und einer turbulenten Strömung?
2. Wie berechnet sich der Strömungswiderstand in einer laminaren und in einer turbulenten Rohr-Strömung?
3. Wie lautet der Zusammenhang zwischen v und Δp beim sehr kurzen Rohr (Ausfluß)?
4. Wie unterscheiden sich Ursache und Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Flüssigkeiten und Gasen?
5. Wie ist die Reynoldssche Zahl definiert? Was besagt ihr kritischer Wert?
6. Was versteht man unter Kavitation?
7. Was versteht man unter dem hydrostatischen und dem hydrodynamischen Paradoxon?
8. Unter welcher Voraussetzung kann man Gasströmungen als inkompressibel ansehen?
9. Wie lauten die Bernoullische und die Kontinuitäts-Gleichung?

Literatur

- [1] H. Niedrig, Physik, Springer-V. Berlin 1992
- [2] A. Recknagel, Physik, Bd. I, II, III
- [3] H. Stroppe, Physik, Fachbuch-V.- Leipzig 1984
- [4] F. Kohlrausch, Praktische Physik, Bd. 2, Verl. Teubner 1996
- [5] H. J. Paus, Physik, V. C. Hanser, München 1995
- [6] Gerthsen, Physik (H. Vogel), Springer Berlin 1995