

Adiabatische Zustandsänderungen

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	2
2	Allgemeine Grundlagen	2
2.1	Spezifische Wärmekapazität	2
2.2	Adiabatexponent idealer Gase	2
2.2.1	Adiabatischer Prozess	2
2.2.2	POISSON'SCHE Adiabatengleichungen	2
2.2.3	Statistik, Freiheitsgrade	3
3	Experimente	3
3.1	Schwingende Quecksilbersäule	3
3.2	Methode von CLÉMENT DESORMES	4
4	Anhang	5
4.1	Zur Herleitung der Gleichungen	5
4.1.1	Schwingende Quecksilbersäule	5
5	Fragen	7

1 Aufgabenstellung

Der Adiabatenexponent $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ von Luft ist zu bestimmen

1. aus der Eigenfrequenz der schwingenden Quecksilbersäule und
2. nach der Methode von CLÈMENT-DESORMES.

2 Allgemeine Grundlagen

2.1 Spezifische Wärmekapazität

Unter der spezifischen Wärmekapazität c versteht man die auf die Masseneinheit m und die erzielte Temperaturänderung ΔT bezogene zu- (oder ab-) geführte Wärmemenge Q

$$Q = m c \Delta T \quad \text{d.h.} \quad c = \frac{Q}{m \Delta T} \quad . \quad (1)$$

Der erste Hauptsatz der Wärmelehre lautet für einen isobaren Prozeß:

$$dQ = dU + p dV \quad . \quad (2)$$

2.2 Adiabatenexponent idealer Gase

2.2.1 Adiabatischer Prozess

Schreibt man den ersten Hauptsatz nach Gl. (1) differentiell

$$m c_p dT = m c_v dT + p dV \quad , \quad (3)$$

und die Zustandsgleichung idealer Gase ebenfalls

$$p dV + V dp = m R dT \quad , \quad (4)$$

so folgt daraus für die Differenz der spezifischen Wärmekapazitäten c_p (bei konstantem Druck) und c_v (bei konstantem Volumen) für ideale Gase

$$c_p - c_v = R \quad . \quad (5)$$

2.2.2 POISSON'SCHE Adiabatangleichungen

Ein thermodynamischer Prozeß wird so schnell geführt oder so gut wärmeisoliert, daß kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet (**adiabatischer oder isentropischer Prozeß** ; $dQ = 0$). der erste Hauptsatz lautet $dU = -p dV$ oder

$$dU = m c_v dT = m \frac{c_v}{m R} (p dV + V dp) = -p dV \quad , \quad (6)$$

woraus sich mit den Gln. (4;5) und der Abkürzung $\kappa = c_p/c_v$ nach Integration, d.h. $\frac{c_v}{c_p - c_v} (p dV + V dp) = -p dV$, schließlich die POISSON'SCHE **Adiabatangleichung**

$$p V^\kappa = \text{konst.} \quad (7)$$

ergibt. Durch Kombination von (7) mit der Zustandsgleichung folgen entsprechende Adiabatangleichungen auch für die Variablen $(T; V)$ bzw. $(T; p)$

$$T V^{\kappa-1} = c_2 \quad ; \text{ bzw. } \quad T^\kappa p^{(\kappa-1)} = c_3 \quad . \quad (8)$$

2.2.3 Statistik, Freiheitsgrade

Der Adiabatenexponent κ ist eng mit dem Aufbau der Gasmoleküle und ihren Freiheitsgraden bezüglich möglicher **Translation** und **Rotation** verknüpft. Bei zweiatomigen Gasen sind in der Nähe der Raumtemperatur dagegen Schwingungen nicht angeregt:

Zahl der Freiheitsgrade f von Gasen:

$$\begin{aligned} \text{einatomig: } f &= 3 && (3 \text{ der Translation}) \\ \text{zweiatomig: } f &= 3 + 2 = 5 && (3 \text{ der Translation} + 2 \text{ der Rotation}) \\ \text{dreiatomig: } f &= 3 + 3 = 6 && (3 \text{ der Translation} + 3 \text{ der Rotation}) \end{aligned} \quad (9)$$

Nach dem **Gleichverteilungssatz** kann ein Atom pro Freiheitsgrad die Energie $kT/2$ aufnehmen. Daher gilt mit ν als Anzahl der Mole (Stoffmenge), N = Anzahl der Moleküle, $C_v = \frac{1}{\nu} \frac{dU}{dT}$ sowie $U = N f \frac{k}{2} T = \nu \frac{f}{2} R T$

$$C_v = \frac{f}{2} R \quad \text{sowie} \quad C_p = \left[\frac{f}{2} + 1 \right] R \quad \text{und} \quad \kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f} . \quad (10)$$

Somit finden wir für ideale Gase theoretisch für ein-, zwei-, bzw. dreiatomige Moleküle die Werte $\kappa = 1,67, 1,4$ bzw. $1,33$. **Beispiele:** He (1,66); Ar (1,67); O₂ (1,40); H₂ (1,41); CO₂ (1,30); N₂O (1,29). κ -Messungen dienen damit der Charakterisierung von Gasen.

3 Experimente

3.1 Schwingende Quecksilbersäule

Entsprechend Abb. 1 wird ein teilweise mit Quecksilber gefülltes U-Rohr mit Hilfe einer Kurbel und eines fremderregten Gleichstrom-Motors, dessen Frequenz variiert wird, zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Unter Vernachlässigung der Dämpfung ist die Eigenfrequenz gleich der Resonanzfrequenz. Der Versuch besteht aus zwei Teilen:

1. Offenes U-Rohr:

Lässt man die Hähne HA offen, so wird die Eigenfrequenz bzw. die Schwingungsdauer T_o^* (beachte: T = absolute Temperatur) allein durch die Länge l der Quecksilbersäule und die Fallbeschleunigung bestimmt, wobei gilt

$$T_o^* = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} . \quad (11)$$

2. Geschlossenes U-Rohr:

Bleiben die Hähne HA geschlossen, so erzeugt das beim Schwingen der Hg-Säule komprimierte bzw. expandierte Luftvolumen eine zusätzliche rücktreibende Kraft. Da die Frequenz der Schwingung hinreichend hoch ist, handelt es sich um eine adiabatische Kompression bzw. Expansion. Die Schwingungsdauer T_{zu}^* beträgt

$$T_{zu}^* = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g} \frac{V}{V + h_L A \kappa}} . \quad (12)$$

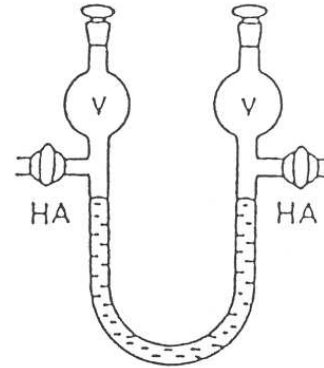


Abb. 1: U-Rohr mit Zusatzvolumen V und Hähnen HA

Nach Umstellung und mit Gl. (11) ergibt sich

$$\kappa = \frac{V}{Ah_L} \left[\frac{T_o^{*2}}{T_{zu}^{*2}} - 1 \right] . \quad (13)$$

Indem man für beide Fälle (Hähne offen bzw. zu) durch Variation der Motordrehzahl die Resonanzkurve aufnimmt, daraus T_o^* bzw. T_{zu}^* bestimmt, kann anhand von Gl. (13) der Adiabatenexponent $\frac{c_p}{c_v} = \kappa$ errechnet werden (s. Anhang).

3.2 Methode von CLÉMENT DESORMES

Ein mit Luft gefülltes Gefäß mit einem Volumen von $V_0 \approx 10$ l ist mit einem abnehmbaren Gummistopfen verschlossen, an einer Handpumpe angeschlossen und mit einem U-Rohr Manometer verbunden. Um bei konstanter Umgebungstemperatur T_0 κ zu ermitteln, wird

1. mit der Handpumpe eine verglichen mit dem äußeren Luftdruck sehr geringe Kompression des Gasvolumens durchgeführt, die einen ungefähren Überdruck von $\Delta p_1 = \rho_w g h_1$, bzw. eine Differenz der Wassersäulen von $h_1 \approx 25$ cm zur Folge hat.

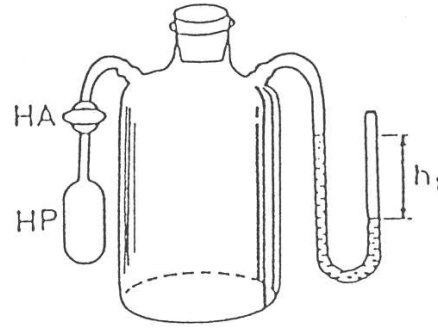


Abb. 2: Gefäß mit Handpumpe HP, Stopfen und U-Rohr-Manometer

Nach etwa 2 min Wartezeit hat sich die Temperatur im Gefäß der Außentemperatur T_0 angeglichen und die nunmehr konstante Höhendifferenz h_1 wird notiert;

2. der Gummistopfen für eine kurze Zeit von ca. 2 s geöffnet und sofort wieder fest verschlossen. Nach einer Wartezeit von ca. 3 min (wenn keine Druckänderung mehr zu beobachten ist), muß $h_2 \sim \Delta p_2$ abgelesen werden. κ folgt aus der einfachen Beziehung (s. Anhang)

$$\kappa = \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2} = \frac{h_1}{h_1 - h_2} . \quad (14)$$

4 Anhang

4.1 Zur Herleitung der Gleichungen

4.1.1 Schwingende Quecksilbersäule

1. Offenes U-Rohr:

Ist l die Länge der Quecksilbersäule (Dichte ρ) und der gesamte Höhenunterschied während der Schwingung $2x$, d.h. die Amplitude x , so lautet die **Bewegungsgleichung**

$$\rho A l \frac{d^2 x}{dt^2} = -2\rho g A x \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2g}{l} x = 0, \quad (15)$$

woraus die Eigenfrequenz bzw. die Schwingungsdauer

$$\omega_o^2 = \frac{2g}{l} \quad \text{bzw.} \quad T_o^* = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} \quad (16)$$

folgen.

2. Geschlossenes U-Rohr:

Oberhalb des Quecksilbers befindet sich Luft sowohl in den beiden Schenkeln der Höhe h als auch im Zusatzvolumen V . Damit berechnet sich das Gasvolumen für den Gleichgewichtsfall zu $V_1 = Ah + V$ und bei der Verschiebung einer Quecksilberoberfläche um x zu $V(x) = V_1 \pm Ax = V + A(h \pm x)$. Der Auslenkung x ist eine Druckänderung Δp zugeordnet, die in beiden Schenkeln die rücktreibende Kraft $\Delta F = A\Delta p$, d.h. die Gesamtkraft $2\Delta F$ erzeugt.

Berechnung von Δp :

Im Gleichgewichtsfall ist der Druck durch den Luftdruck $b = h_L \rho g$ (ρ = Quecksilberdichte) gegeben und die Adiabatangleichung (7) liefert

$$\begin{aligned} b(V + hA)^\kappa &= (b + \Delta p)(V + (h - x)A)^\kappa; \\ \text{oder} \quad b\left(1 + \frac{hA}{V}\right)^\kappa &= (b + \Delta p)\left(1 + \frac{(h - x)A}{V}\right)^\kappa. \end{aligned} \quad (17)$$

Da $hA \ll V$, werden die Binome entwickelt und das sehr kleine Produkt mit $\frac{x}{V}\Delta p$ vernachlässigt. Damit folgt aus Gl. (17)

$$b\left(1 + \kappa \frac{hA}{V}\right) = (b + \Delta p)\left(1 + \kappa \frac{(h - x)A}{V}\right) \quad \text{oder} \quad \Delta p = \frac{\kappa b A x}{V}. \quad (18)$$

Für die Bewegungsgleichung folgt damit

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left[\frac{2g}{l} + \frac{2bA\kappa}{\rho l V} \right] x = 0 \quad ; \quad (19)$$

und die Eigenfrequenz bzw. die Schwingungsdauer sind

$$\begin{aligned} \omega_{zu}^2 &= \left[\frac{2g}{l} + \frac{2bA\kappa}{\rho l V} \right] = \frac{2g}{l} \left[1 + \frac{\kappa A h_L}{V} \right] \\ \text{bzw.} \quad T_{zu}^* &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g} \frac{V}{V + h_L A \kappa}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Nach Umstellung und mit Gl.(16) ergibt sich

$$\kappa = \frac{V}{Ah_L} \left[\frac{T_o^{*2}}{T_{zu}^{*2}} - 1 \right] \quad . \quad (21)$$

subsubsectionMethode von CLÉMENT DESORMES Für konstanten äußeren Luftdruck b ("barometrischer" Druck) gilt nach der Erzeugung eines kleinen Überdrucks und Abwarten des Temperaturausgleichs auf (konstante!) Zimmertemperatur (T_0) für den Zustand des idealen Gases

$$V = V_0 \quad ; \quad p = b + \Delta p_1 \quad ; \quad T = T_0 \quad . \quad (22)$$

Während der adiabatischen Entspannung leistet das Gas Arbeit und kühlt sich ab. Dabei wird

$$V = V_0 + \Delta V \quad ; \quad p = b \quad ; \quad T = T_0 - \Delta T \quad . \quad (23)$$

Unmittelbar nach dem Verschließen ist

$$V = V_0 \quad ; \quad p = b \quad ; \quad T = T_0 - \Delta T \quad . \quad (24)$$

Nach Abwarten des Temperaturausgleichs mit der Umgebung wird schließlich

$$V = V_0 \quad ; \quad p = b + \Delta p_2 \quad ; \quad T = T_0 \quad . \quad (25)$$

Die beiden Adiabatengleichungen (7;8) lauten für die beiden Zustände (22;23)

$$\begin{aligned} (b + \Delta p_1) V_0^\kappa &= b(V_0 + \Delta V)^\kappa \quad (a) \quad \text{bzw.} \\ T_0 V_0^{\kappa-1} &= (T_0 - \Delta T) (V_0 + \Delta V)^{\kappa-1} \quad (b) \quad . \end{aligned} \quad (26)$$

Die Entwicklung des Binoms in (26a) ergibt

$$\begin{aligned} b V_0^\kappa + \Delta p_1 V_0^\kappa &= b V_0^\kappa + b \kappa V_0^{\kappa-1} \Delta V \\ \text{oder} \quad \frac{\Delta p}{b} &= \kappa \frac{\Delta V}{V_0} \quad . \end{aligned} \quad (27)$$

Ähnlich liefert die Entwicklung und Umstellung der Gl.(26b) sowie Vernachlässigung des Produktes der Differentiale

$$\begin{aligned} T_0 &= (T_0 - \Delta T) \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0} \right)^{\kappa-1} = (T_0 - \Delta T) \left(1 + (\kappa - 1) \frac{\Delta V}{V_0} \right) \\ \text{oder} \quad \frac{\Delta T}{T_0} &= (\kappa - 1) \frac{\Delta V}{V_0} \quad . \end{aligned} \quad (28)$$

Formuliert man für (24;25) die Zustandsgleichung idealer Gase, so gilt mit Gl. (28)

$$\begin{aligned} \frac{b}{b + \Delta p_2} &= \frac{T_0 - \Delta T}{T_0} = 1 - \frac{\Delta T}{T_0} = 1 - (\kappa - 1) \frac{\Delta V}{V_0} \quad \text{oder} \\ (\kappa - 1) \frac{\Delta V}{V_0} &= 1 - \frac{b}{b + \Delta p_2} = \frac{\Delta p_2}{b + \Delta p_2} \quad , \text{ d.h. mit Gl. (26a)} \\ \kappa &= 1 + \frac{\kappa b \Delta p_2}{(b + \Delta p_2) \Delta p_1} \approx 1 + \frac{\kappa \Delta p_2}{\Delta p_1} \quad , \end{aligned}$$

da $b \gg \Delta p$ ist. Damit folgt

$$\kappa = \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2} = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \quad . \quad (29)$$

5 Fragen

1. Erläutern Sie Verfahren zur Bestimmung des Adiabatenexponenten κ .
2. Warum muss man bei Gasen zwei verschiedene spezifische Wärmekapazitäten unterscheiden?
3. Wie lautet die Zustandsgleichung idealer und realer Gase? Welche kinetische Bedeutung haben die Größen p , T und R ?
4. Was ist ein adiabatischer Prozeß und wie kann man ihn realisieren?
5. Wieviele Freiheitsgrade und welche κ -Werte besitzen ein-, zwei- und mehratomige Gase?
6. Formulieren Sie die Adiabaten-Gleichungen!
7. Warum kann man κ auch aus der Schallgeschwindigkeit bestimmen?
8. Was versteht man unter einer erzwungenen Schwingung und unter der Resonanz? Welchen Einfluß hat die Dämpfung auf die Resonanz-Amplitude und die Resonanzfrequenz?

Literatur

- [1] W. Walcher, Praktikum Physik, Stuttgart 1989
- [2] H. Stroppe, Physik, Leipzig 1984
- [3] A. Recknagel, Physik, Schwingungen, W., Wärmel., Berlin 1990
- [4] L. Bergmann, C. Schöfer, Mechanik, Akustik, Wärmelehre, Berlin 1987
- [5] W. Ilberg, M. Krätsch, D. Geschke, P. Kirsten, W. Schenk, A. Schneider, H. Schulze, Physikalisches Praktikum für Anfänger, Leipzig 1994