

<p>Technische Universität Dresden</p> <p>Fachrichtung Physik</p> <p>L. Jahn 9/ 1998</p> <p>bearbeitet 03/ 2004</p>	<p>Physikalisches Praktikum</p> <p>Versuch: DD</p>
--	--

Elastische Eigenschaften fester Körper

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	2
2	Elastische und plastische Verformung	2
2.1	Elastische Spannungen im isotropen Körper	2
2.2	Hooke'sches Gesetz HG	2
3	Schubelastizität und Drillung DD	4
3.1	Statische Methode	4
3.2	Dynamische Methode	4
4	Spannungs-Dehnungs-Diagramm SD	5
4.1	Elastische und plastische Dehnung eines Drahtes	5
4.2	Besonderheiten im plastischen Bereich	6
5	E-Modul	6
6	Anhang	7
6.1	Zusammenhang zwischen den elastischen Konstanten	7
6.2	Zur Verdrillung eines elastischen Zylinders	7
6.3	Zur Biegung des Balkens, Flächenträgheitsmoment	8
6.4	Zum Massenträgheitsmoment	8
6.5	Zur elastischen Hysterese	9
6.6	Fragen	9

1 Aufgabenstellung

- DD I. Statische und dynamische Bestimmung des Torsionsmoduls eines Drahtes.
- DD II. Bestimmung des Massenträgheitsmomentes eines Zylinders
- SD I. Aufnahme des Spannungs-Dehnungs-Diagramms eines Drahtes
- SD II. Bestimmung von E-Modul, Streckgrenze, Zerreißfestigkeit und Bruchdehnung.

2 Elastische und plastische Verformung

2.1 Elastische Spannungen im isotropen Körper

Unter der Einwirkung einer äußeren Kraft deformiert sich ein Festkörper. Das Verhältnis aus Kraft \vec{F} und Fläche $\vec{A} = A\vec{n}$ heißt **Spannung**. Je nachdem, wie diese Kraft bezüglich der Normalen \vec{n} der Angriffsfläche gerichtet ist, unterscheidet man zwischen:

$$\begin{aligned}\text{Normalspannung :} \quad \sigma &= \frac{F_n}{A} ; \\ \text{Tangentialspannung :} \quad \tau &= \frac{F_t}{A} ; \\ \text{allseitigem Druck :} \quad p &= \frac{F}{A} .\end{aligned}\tag{1}$$

2.2 Hooke'sches Gesetz HG

Die mit diesen Spannungen (σ, τ, p) gekoppelten **Deformationen** $(\Delta l_n, \Delta l_t, \Delta V)$ können reversibel, d. h. **elastisch** bzw. bleibend, d. h. **plastisch** sein. Man definiert im **linearen Bereich** die nebenstehenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}\text{Dehnung (HG) :} \quad \epsilon E &= \frac{\Delta l_n}{l} E = \sigma (a); \\ \text{Scherung :} \quad \gamma G &= \frac{\Delta l_t}{l} G = \tau (b); \\ \text{Kompression :} \quad -\frac{\Delta V}{V} K &= \Delta p (c) .\end{aligned}\tag{2}$$

(Relative Verformungen: 1. $\epsilon = \frac{\Delta l_n}{l}$ = relative Längenänderung; 2. $\tau = \frac{\Delta l_t}{l}$ = Schubwinkel; 3. $\frac{\Delta V}{V}$ = relative Volumenänderung).

Bei der Dehnung eines Drahtes beobachtet man weiterhin eine zu $\Delta l_n/l$ proportionale Verringerung des Durchmessers d , die **Querkontraktion**:

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l_n}{l} \quad (3)$$

Die 4 elastischen Konstanten eines isotropen Körpers (Elastizitätsmodul E ; Schubmodul G , Kompressionsmodul K und die Poissonsche Querkontraktionszahl μ) sind nicht unabhängig, vielmehr gilt (s. Abb. 1 und Anhang):

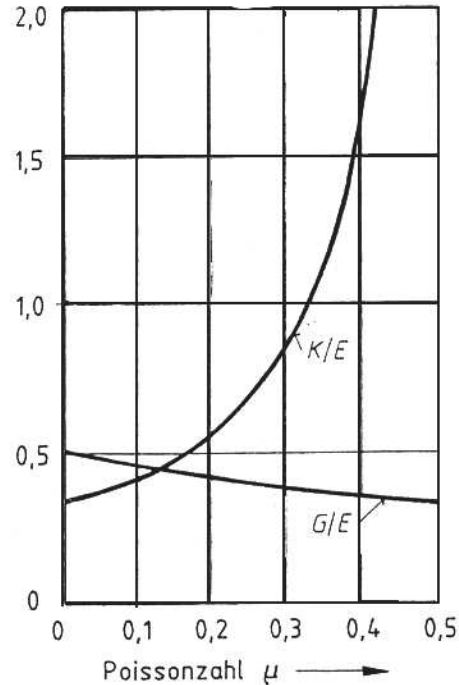


Abb. 1:

Zusammenhang zwischen E , K und μ nach GL. (4) [6]

$$E = 3K(1 - 2\mu) \quad (a); \quad E = 2G(1 + \mu) \quad (b) \quad (4)$$

Zusätzlich gilt (s. Abb. 1)

$$0 < \mu < 0,5 \quad (a) \quad 2G < E < 3E \quad (b) \quad (5)$$

Die Tab. 1 zeigt Richtwerte für elastische Konstanten einiger Metalle sowie deren Zerreißfestigkeit σ_z (auf den Ausgangsquerschnitt A_0 bezogen).

(Die Werte hängen stark vom Herstellungsverfahren ab (z. B. gegossen, gewalzt, wärmebehandelt, eventuelle vorherige berelastische Beanspruchungen, ...).

Tab. 1:

Richtwerte elastischer Konstanten und der Zerreißfestigkeit σ_z

Metall	E GPa	G GPa	μ	σ_z GPa
Stahl	200	80	0,28	2
Gußeisen	100	35	0,25	0,13
Kupfer	120	42	0,36	0,4
Zinn	54	20	0,33	0,02

3 Schubelastizität und Drillung DD

3.1 Statische Methode

In diesem Versuch wird die Schubelastizität im Rahmen des HG betrachtet. Für eine Vorbetrachtung sei ein isotroper elastischer quaderförmiger Körper der Höhe a an der Basisfläche fixiert (Abb. 2 a). An der Deckfläche wirkt die (hinreichend kleine) horizontale Tangentialkraft F_t . Dann wird die Deckfläche um die Strecke Δl_t horizontal verschoben und die vertikalen Seiten um den **Schubwinkel** $\gamma = \Delta l_t/a$ gekippt. Der Zusammenhang ist in Gl. (2 b) gegeben.

Im Praktikumsversuch wirkt auf einen vertikal hängenden, am oberen Ende eingespannten zylindrischen (dicken) Draht am unteren Ende ein Kräftepaar (Drehmoment $\vec{M}^a = 2 \vec{r}_f \times \vec{F}_t^*$).

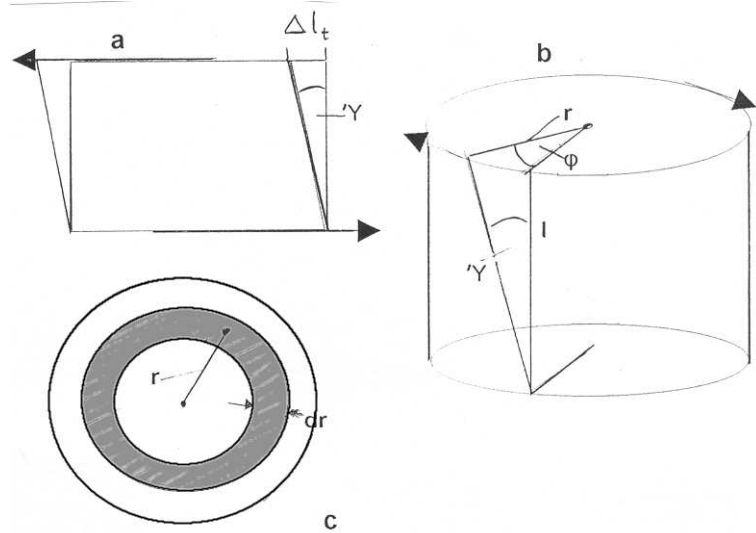


Abb. 2:

Schubelastizität bei einem Würfel (a);
Verdrillung eines Zylinders (b); Zylinder in Hohlzylinder eingeteilt; dA schraffiert (c)

Die Gleichsetzung von diesem äußeren Moment M^a , realisiert über Seilzüge, und dem elastischen rücktreibenden Moment $M^{el} = M_D \varphi$ liefert den gemessenen **Drillwinkel** φ des zylindrischen Drahtes (Abb. 2. b). Dabei unterliegt der Körper einer inhomogenen Verformung, die mit dem Radius anwächst. Der Drillwinkel φ hängt wie folgt vom Radius R und der Länge l sowie vom Schubmodul G des Zylinders ab (s. Anhang):

$$\varphi = \frac{2 M^a l}{\pi G R^4} \quad (a) \quad \text{bzw.} \quad G = \frac{2 M^a l}{\pi R^4 \varphi} \quad (b) \quad \text{mit} \quad M_D = \frac{\pi G R^4}{2l} \quad (c) \quad . \quad (6)$$

3.2 Dynamische Methode

An den oben eingespannten vertikal hängenden zylindrischen Draht nach Abb. 2 b wird unten eine zylindrische Scheibe der Masse m befestigt und leicht verdrillt. Nach dem Loslassen führt die Scheibe harmonische Drehschwingungen um die Stabachse durch. Die Schwingungsdauer T wird gemessen. Im **Idealfall** hängt die Kreisfrequenz ω_0 (bzw. T_0) vom rücktreibenden Drehmoment $M_D = M^{el}/\varphi$ nach Gl. (6) sowie dem Trägheitsmoment J_T der Scheibe ab (s. Anhang):

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{M_D}{J_T} \quad (a) \quad ; T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_T}{M_D}} \quad (b) \quad \text{mit} \quad J_T = \frac{m}{2} R_m^2 \quad (c) \quad (7)$$

(R_m = Radius der Scheibe). Besitzt bei **realen Anordnungen** die Einspann-Vorrichtung schon selbst ein merkliches, zunächst unbekanntes Trägheitsmoment J_T^0 , so wird eine Doppelmessung durchgeführt:

1. Messung: Allein mit J_T^0 ergibt sich T_0 nach Gl. (7);
2. Messung: Auf die Einspann-Vorrichtung wird der meist axial aufgebohrte Zusatzzylinder der Masse m_1 mit dem Trägheitsmoment $J_T^1 = \frac{m_1}{2}(R_1^2 + R_2^2)$ geschraubt. Es wird die Schwingungsdauer T_2 gemessen. Für das Direktionsmoment M_D des Drahtes gilt mit (6)

$$M_D = \frac{4\pi^2 J_T^1}{T_2^2 - T_1^2} \quad . \quad (8)$$

4 Spannungs-Dehnungs-Diagramm SD

4.1 Elastische und plastische Dehnung eines Drahtes

Bei diesem Versuch wird die Deformation bis in den plastischen Bereich hinein verfolgt. Dazu wird die Dehnung eines Drahtes mit der Länge l und dem **Ausgangs-**Durchmesser d_0 betrachtet. In grober Näherung findet man allgemein ein in Abb. 3 a skizziertes Spannungs-Dehnungs-Diagramm für $\sigma = \sigma(\epsilon)$. Da sich infolge der Querkontraktion der Drahtquerschnitt, ausgehend von $A_0 = \pi d_0^2$, während des Versuchs verringert und damit die **wahre Spannung** $\sigma_w = F/A$ erhöht, muß das gemessene Verhältnis $\sigma = F/A_0$ (technische Spannung)

$$\sigma_w \approx \sigma(1 + \epsilon) \quad . \quad (9)$$

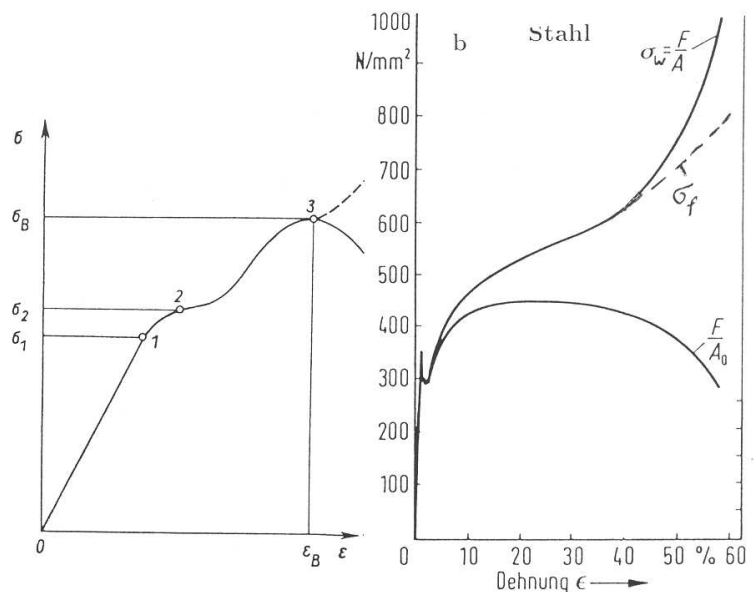


Abb. 3:

Spannungs-Dehnungs-Diagramme: Schema mit markanten Abschnitten (a); Beispiel Stahl ST 37-2 (b) mit Verfestigung, wahrer und technischer sowie Fließspannung σ_f

korrigiert werden (s. Abb. 3 b) (Herleitung von (9) im Linearitätsbereich für konstant bleibendes Volumen?) Wie in Abb. 3 a skizziert, enthält das Spannungs-Dehnungs-Diagramm folgende Abschnitte:

1. Den Hooke'schen Bereich mit der **Linearitätsgrenze**;
2. den meist kurzen, anschließenden Bereich mit der **Elastizitätsgrenze** (oft bis $\sigma \approx 10^{-3} E$);
3. den plastischen Bereich mit bleibenden Verformungen (Fließen, Kriechen, Verfestigungen, ..), der sehr von der Probe und von der **Versuchsführung** abhängt und schließlich den Bruch.

In der Abb. 3 b ist am Beispiel eines Stahls der steil ansteigende Bereich 1 mit anschließender Verfestigung und der große Einfluß der Durchmesserkorrektur zu erkennen.

4.2 Besonderheiten im plastischen Bereich

Man muß zwischen **spröden** (z. B. Gußeisen) und **duktilen** Metallen (z. B. Cu) unterscheiden. Duktile Materialien werden im folgenden betrachtet. Sie zeigen das in Abb. 3 b skizzierte Verhalten. Ihr Querschnitt zeigt kurz vor dem Bruch lokal eine beachtliche **Einschnürung**. Aus der gemessenen $\sigma(\epsilon)$ -Kurve können folgende **kritische Spannungen** abgelesen werden:

1. Bei der **Streckgrenze** findet der Übergang vom elastischen zum plastischen Bereich statt.
2. Bei der **Fließspannung** oder **Dehngrenze** bleibt nach Rücknahme der Last eine Dehnung von $\epsilon \approx 0,2$ (20%) zurück.
3. Die **Festigkeit** (Zerreißfestigkeit, technisch bezogen auf den Ausgangsquerschnitt) ist die maximal ertragene Last.
4. Dabei spricht man von **Zugfestigkeit** bei quasistatischer Last.
5. Bei sehr langer Versuchszeit und konstanter Last wird $\epsilon(t)$ bestimmt und daraus kann die **Zeitstandsfestigkeit** bestimmt werden.
6. Unter der **Bruchdehnung** versteht man die maximale Dehnung bis zum Bruch (Zerreißen).
7. Ab der **Streckgrenze** (Fließgrenze) steigt die Kraft, auch bei weiterer Ausdehnung nicht mehr an.
Weist die $\sigma(\epsilon)$ -Kurve lokale Maxima oder Minima auf, so spricht man von oberer und unterer Streckgrenze.

5 Bestimmung des E-Moduls aus der Biegung

Zur Bestimmung des E-Moduls von Werkstoffen ist die Messung der (geringen) Durchbiegung (**Biegepfeil** δ) eines (meist **zweiseitig**) aufliegenden und in der Mitte mit F belasteten Balkens (Abb. 4 c) sehr geeignet. Man findet für einen Balken mit rechteckigem Querschnitt (Höhe h ; Breite b ; Länge l):

$$E = \frac{F}{48\delta} \frac{l^3}{bh^3} \quad (10)$$

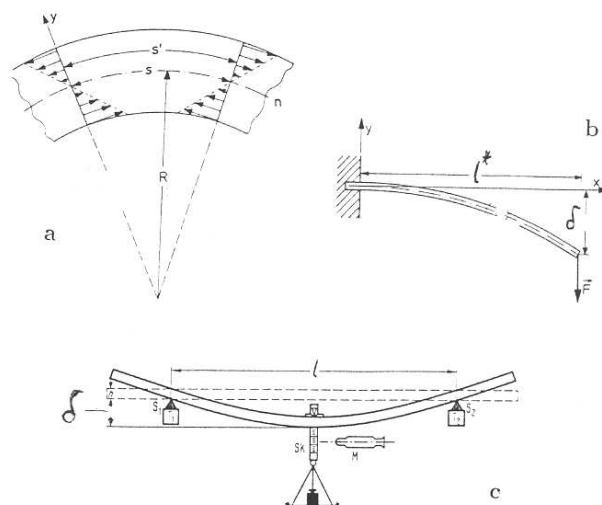


Abb. 4:

Neutrale Faser sowie Druck und Zugbereich im Balken (a) Geometrie bei einseitig (b), bei zweiseitig gelagertem Balken (c)

6 Anhang

6.1 Zusammenhang zwischen den elastischen Konstanten

1. Dehnt man einen Würfel geringfügig allseitig, so gilt zunächst überschlägig:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(l + \Delta l)^3 - l^3}{l^3} \approx 3 \frac{\Delta l}{l} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta V}{V} = 3\epsilon = \frac{3\sigma}{E} \quad ; \quad E \approx 3K \quad . \quad (11)$$

Berücksichtigt man jedoch die Querkontraktion in jeder Richtung, so gilt mit $\epsilon_{\parallel} = \frac{\sigma}{E}$ und $\epsilon_{\perp} = -\mu\epsilon_{\parallel}$, d. h. $\epsilon_{res} = \epsilon_{\parallel} + 2\epsilon_{\perp}$.

Das hat zur Folge

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\epsilon_{res} = 3(\epsilon_{\parallel} + 2\epsilon_{\perp}) = 3(1 - 2\mu)\epsilon_{\parallel} = 3(1 - 2\mu)\frac{\sigma}{E} \quad , \quad (12)$$

woraus nach Umstellung die Gl. (4 a) folgt.

2. Die in Abb. 2 a bzw. Abb. 5 skizzierte Scherung des Würfels durch die Tangentialkraft F_t (mit $\tau = F_t/A = F_t/a^2$) kann auch durch eine Zugspannung in Richtung der Flächendiagonalen erreicht werden. Wie der Abb. 5 zu entnehmen ist, gilt für die Flächendiagonale sowie deren Änderung $d = a\sqrt{2}$ sowie $\Delta d = \Delta a/\sqrt{2}$. Dieser Zugspannung

$$\sigma = \frac{F_t\sqrt{2}}{ad} = \frac{F_t}{a^2} = \tau \quad (13)$$

entspricht in Richtung der anderen Flächendiagonalen die Druckspannung

$$p = \tau \quad . \quad (14)$$

Damit setzt sich die resultierende Elongation in der verlängerten Diagonalen zusammen aus [2]

$$\frac{\Delta d}{d}|_{res} = \frac{\Delta d}{d}|_{zug} + \frac{\Delta d}{d}|_{druck} = \frac{\sigma}{E} + \mu \frac{p}{E} = (1 + \mu) \frac{\tau}{E} \quad . \quad (15)$$

Berücksichtigt man noch $\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{2} \frac{\Delta a}{a}$, so folgt die Gl. (4 b).

6.2 Zur Verdrillung eines elastischen Zylinders

Der Zylinder der Länge l sei entsprechend der Abb. 1 b aus infinitesimal dicken Hohlzylindern der Dicke dr zusammengesetzt. Aus einem solchen Hohlzylinder denke man sich den senkrechten Streifen der Breite $rd\varphi$ herausgeschnitten und mit Abb. 1 a verglichen. An jeder Stirnseite (oben und unten) greift die infinitesimale Schubkraft $d^2F = G\gamma r dr d\varphi$ an (HG, Gl. (2 b)). Eine erste Integration über φ ergibt $dF = 2\pi G\gamma r dr = G\gamma dA$. Diesem Kräftepaar entspricht das Drehmoment $dM = rdF = 2\pi G\gamma r^2 dr$. Der Zusammenhang zwischen Schubwinkel γ und gemessenem Drillwinkel φ folgt aus der Gleichheit der Bögen, $r\varphi = l\gamma$, womit

$$dM = 2\pi G \frac{r\varphi}{l} r^2 dr \quad \text{und} \quad M = \int_0^R dM = \frac{\pi G \varphi}{2l} R^4 \quad (16)$$

folgt.

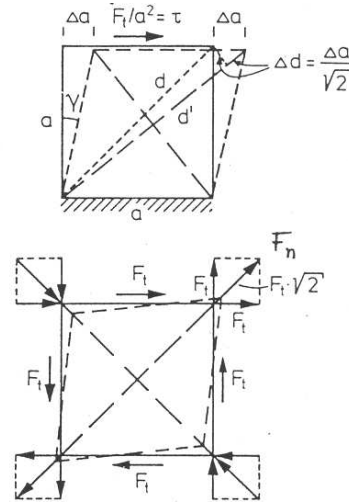


Abb. 5:

Zur Äquivalenz von Schub- in Zugspannung sowie Berechnung der Gesamtdeformation am Würfel nach [2]

6.3 Zur Biegung des Balkens, Flächenträgheitsmoment

Im Linearitätsbereich sei entsprechend Abb. 4 der Radius des gebogenen Balkens mit rechteckigem Querschnitt ($A = bh$) bis zur neutralen Faser s mit R bezeichnet. Eine verlängerte Faser im oberen gedehnten Bereich, die um y höher als s liegt, habe die Länge s' . Dann lautet das HG mit $\frac{s'}{s} = \frac{(R+y)}{R}$

$$\epsilon = \frac{\Delta s}{s} = \frac{y}{R} \quad (a) \quad ; \quad \sigma(y) = E \frac{y}{R} \quad (b) \quad . \quad (17)$$

Das infinitesimale Drehmoment, das auf die Querschnittsfläche dA wirkt, ist $dM = ydF = y\sigma dA = y\sigma bdy$. Für das gesamte Drehmoment ergibt sich

$$M = \int ydF = y\sigma(y)bdy = \frac{E}{R} \int_{-h/2}^{h/2} by^2 dy \quad . \quad (18)$$

Der Ausdruck $J_f = \int_{-h/2}^{h/2} by^2 dy$ heißt Flächenträgheitsmoment und ergibt für einen Balken mit Rechteckquerschnitt $J_f = \frac{bh^3}{12}$.

Ist ein Balken der Länge l an den Enden aufgelegt und in der Mitte mit $F^{(a)}$ belastet, so erfährt er die gleiche Durchbiegung wie ein Balken der Länge $l^* = l/2$, der an einem Ende eingespannt und am anderen Ende mit $F^* = F^a/2$ belastet wird (Abb. 4. b,c).

Um für letzten Fall den Biegepfel $\delta(x)$ zu berechnen, wird im statischen Gleichgewicht die Äquivalenz von äußerem angreifenden Drehmoment $x F^a$ und elastischem rücktreibendem Drehmoment nach GL. (18) im Abstand x vom belasteten Ende betrachtet [4]:

$$\frac{E}{R} \int y^2 dA - x F^{*a} = 0 \quad (a) \quad ; \quad \text{woraus} \quad \frac{1}{R} = \frac{x F^{*a}}{E J_f} \quad (19)$$

folgt. Andererseits ist $1/R$ die Krümmung. Für geringe Werte gilt $1/R = \frac{d^2\delta}{dx^2}/(1+y'^2)^{(3/2)} \approx \frac{d^2\delta}{dx^2}$ und damit ist für zunächst beliebigen Ort x der angreifenden Kraft F^a

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{x F^{*a}}{E J_f} \quad (a) \quad \text{oder} \quad \delta = \frac{1}{6} \frac{F^{*a}}{E J_f} (x^3 - 3l^2x + 2l^3) \quad (b), \quad (20)$$

wobei benutzt wurde, daß an der einseitigen Einspannung ($x = l$) sowohl $\frac{d\delta}{dx} = 0$ als auch $\delta = 0$ sind. Gl. (20) ist die Kurve der neutralen Faser. Aus Gl. (20 b) folgt für $x = 0$ für den **einseitig** bzw. **zweiseitig** fixierten Balken (beachte den "Übergang" ($F^{*a} \rightarrow F^a/2$ sowie $l^* \rightarrow l/2$):

$$\delta = \frac{F^{*a} l^3}{3 E J_f} \quad (a) \quad \text{bzw.} \quad \delta = \frac{F^a l^3}{48 E J_f} \quad (b) \quad . \quad (21)$$

Die unter der Eigenlast des Balkens beobachtete Nulldurchbiegung ([1]) ist in (21) nicht enthalten. Diese bei nicht zu großem l geringe Größe wird durch die Messung des Nulleffekts (bzw. durch die Justierung) berücksichtigt.

6.4 Zum Massenträgheitsmoment

Zur dynamischen Methode von DD wird das Massenträgheitsmoment eines Kreiszylinders vom Radius R_1 benötigt (u. U. mit axialer Bohrung vom Radius R_2). Wählt man in der allgemeinen Definition $J_m = \int r_{\perp}^2 dm$ für $dm = \rho l 2\pi r dr$, so folgt für einen massiven Zylinder bei Rotation um die Zylinderachse (beachte: $m = \rho l \pi R^2$)

$$J_m = \int_0^R r^2 \rho l 2\pi r dr = 2\pi l \rho \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2 \quad . \quad (22)$$

Hat der Zylinder mit dem Außenradius R_1 eine axiale Bohrung mit R_2 , so wird (beachte $m = \rho l \pi (R_1^2 - R_2^2)$ sowie $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$)

$$J_m^* = \rho l 2\pi \int_{R_2}^{R_1} r^3 dr = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2) \quad . \quad (23)$$

6.5 Zur elastischen Hysterese

Sowie man den plastischen Bereich bei Dehnungsversuchen erreicht, wird der Zusammenhang von Spannung und Verformung sowohl **nichtlinear**, als auch **nicht eindeutig**, wenn man auch Vorzeichenumkehr der Spannung (Druck) zuläßt. Nach Rücknahme der Spannung bleibt eine Restdehnung bestehen. Analog zur magnetischen Hysterese wird bei einem vollen geschlossenen Zyklus die Hysteresearbeit $V \oint \sigma d\epsilon$ aufgebracht, die sich einer Erwärmung der Probe bemerkbar macht ($V = \text{Probenvolumen}$).

6.6 Fragen

1. Bei welcher Beanspruchung eines festen Körpers tritt reine Volumen- bzw. reine Gestalts-Elastizität auf?
2. Nennen sie Beispiele für elastische Spannungen, elastische Verformungen und elastische Konstanten.
3. Wie hängen die 4 elastischen Konstanten eines isotropen Körpers zusammen?
4. Wie beschreibt man die Dehnung eines Drahtes im Bereich des Hooke'schen Gesetzes und darüber hinaus? Wie weist man nach, daß eine elastische Verformung im Bereich des Hooke'schen Gesetzes bzw. der Elastizitätsgrenze bleibt?
5. Wie berechnet sich der Verdrillungswinkel eines tordierten Zylinders?
6. An einen am oberen Ende eingespannten elastischen dünnen Metallstab wird ein Kreiszylinder der Masse m gehängt und zu axialen Drehschwingungen angeregt. Wovon hängt die Schwingungsdauer ab?
7. Wie lautet für 6. die Bewegungsgleichung?
8. Wie ist das Massenträgheitsmoment definiert? Wie berechnet es sich für einen axial rotierenden Zylinder?

Wie lautet der Zusammenhang zwischen der Durchbiegung eines Balkens der Länge l , dem E-Modul und der angreifenden Kraft? (a. einseitige Einspannung, Belastung am Ende; b. zweiseitige Auflage, Belastung in der Mitte).

Literatur

- [1] W. Ilberg, M. Krötsch, D. Geschke, P. Kirsten, W. Schenk,
A. Schneider, H. Schulze, Physikalisches Praktikum für Anfänger,
Leipzig 1994
- [2] H. J. Paus, Physik in Experimenten und Beispielen, V. Hanser München 1995
- [3] Gerthsen (H. Vogel), Physik, V. Springer 1995
- [4] A. Recknagel, Physik, Mechanik, V. Technik, Berlin
- [5] W. Walcher, Praktikum der Physik, V. Teubner, Stuttgart 1989
- [6] F. Kohlrausch, Praktische Physik, Band 1, V. Teubner, Stuttgart 1996
- [7] W. Bergmann, Werkstofftechnik I, V. Hanser, München 1989.