

# Transformator

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Aufgabenstellung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Stromdurchflossene Spule</b>	<b>2</b>
2.1	Spule mit Eisenkreis . . . . .	2
2.2	Spule im Wechselstromkreis . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Modell des idealen Trafos</b>	<b>3</b>
3.1	Idealer Trafo im Leerlauf . . . . .	4
3.2	Idealer Trafo mit Ohmscher Last . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Streu-Trafo mit Ohmscher Last</b>	<b>5</b>
4.1	Ströme und Phasenwinkel . . . . .	5
4.2	Leerlauf und Kurzschluß . . . . .	6
4.2.1	Leerlaufspannung . . . . .	6
4.2.2	Kurzschlußstrom . . . . .	6
4.2.3	Primärer Leerlaufstrom . . . . .	6
4.3	Ortskurve . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Experimente</b>	<b>7</b>
5.1	Leerlauf-und Kurzschluß-Versuche . . . . .	7
5.2	Bestimmung des Phasenwinkels . . . . .	7
5.3	Aufnahme des Heylandkreises . . . . .	7
5.4	Bestimmung der Permeabilität . . . . .	7
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>8</b>
6.1	Gegeninduktivität, Leistung, Widerstandstransformation . . . . .	8
6.1.1	Zur Gegeninduktivität . . . . .	8
6.1.2	Leistung des belasteten Streu-Trafos . . . . .	8
6.1.3	Widerstandstransformation beim idealen Trafo . . . . .	8
6.1.4	Zum Heylandkreis des Streu-Trafos . . . . .	9
6.1.5	Zum Primärstrom des Streu-Trafos . . . . .	9
<b>7</b>	<b>Realer Trafo</b>	<b>9</b>
7.1	Leerlauf-Verluste des realen Trafos . . . . .	9
7.1.1	Wirbelstromverluste . . . . .	10
7.1.2	Hystereseverluste . . . . .	10
7.1.3	Eisen-Verluste und Verlustwinkel . . . . .	10
7.1.4	Verlust-Winkel und komplexe Permeabilität . . . . .	11
7.2	Abschätzung des Eisenquerschnittes . . . . .	11
<b>8</b>	<b>Fragen</b>	<b>12</b>

## 1 Aufgabenstellung

1. Aus Leerlauf- und Kurzschluß-Versuchen werden die Induktivitäten und der Streufaktor für verschiedene Luftspalte bestimmt.
2. Für eine veränderliche Ohmsche Last  $R$  im Sekundärkreis ist für den Primärstrom der Heylandkreis aufzunehmen und mit dem berechneten zu vergleichen.
3. Bestimmung der Permeabilität  $\mu_r$  des Trafo-Blechs.

## 2 Stromdurchflossene Spule

### 2.1 Spule mit Eisenkreis

Eine Spule mit der Windungszahl  $n$  sei nach Abb. 1 auf ein ringförmiges Ferromagnetikum mit dem Querschnitt  $A$  und der Länge  $l$  gewickelt. Die Hystereseschleife sei nur so weit angesteuert (Abb. 1 c(i)), daß gilt:  $\mu_r = \frac{\Delta B}{\mu_0 \Delta H} \approx \text{konstant}$ . Wir unterscheiden:

Fall 1: Der Eisenkreis ist geschlossen.

Fall 2: Im Eisenkreis ist ein Luftspalt  $d = 2s$ .

Durch die Spule nach Fall 1 bzw. Fall 2 fließt der (Gleich- oder Wechsel-) Strom  $I$ . Aus dem Durchflutungsgesetz  $\oint H_s ds = nI$  folgt für Fall 1 die Beziehung  $H_{Fe} l = nI$ . Die Feldstärke im Eisen berechnet sich für die beiden Fälle aus:

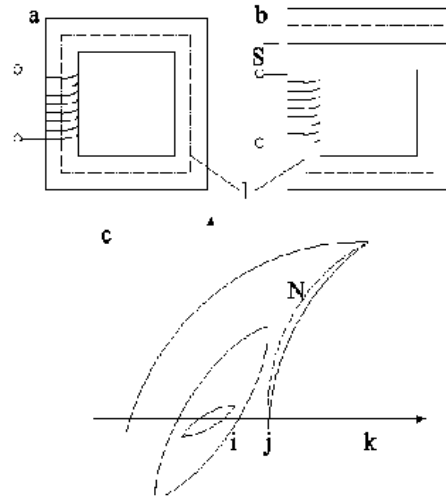


Abb. 1: Spule mit Eisenkreis für die Fälle 1. und 2. (a,b);  
(c) mögliche Aussteuerungen ( $i$ ;  $j$ ;  $k$ ) einer Hystereseschleife. N: Neukurve

$$H_{Fe} = \frac{nI}{l} \quad (\text{Fall 1}) \quad \text{bzw.} \quad H_{Fe} l + H_L d = nI \quad (\text{Fall 2}) \quad . \quad (1)$$

Die zweite Gleichung von (1) enthält zwei Unbekannte (die Feldstärke im Eisen  $H_{Fe}$  und die in Luft  $H_L$ ). Die notwendige zweite Beziehung liefert die Quellenfreiheit von  $B$ ,  $\oint B_n dA = 0$ . Die Induktion (und der Fluß; Näherung für großen Querschnitt  $A$  und geringen Luftspalt  $d$ ) in Luft und Eisen sind gleich:  $\mu_r \mu_0 H_{Fe} = B_{Fe} = B_L = \mu_0 H_L$ . Damit folgt für die magnetische Feldstärke  $H_{Fe}$  bzw. den Fluß  $\Phi$  für Fall 2:

$$H_{Fe} = \frac{nI}{l + \mu_r d} = \frac{nI}{l(1 + \frac{\mu_r d}{l})} \quad (a); \quad \Phi_L = \Phi_{Fe} = \mu_0 \mu_r A H_{Fe} = \mu_0 A \frac{nI}{l} \frac{\mu_r}{(1 + \frac{\mu_r d}{l})} \quad (b). \quad (2)$$

Aus (2) wird ersichtlich, daß die Feldstärke im Eisen (und damit die Aussteuerung der Hystereseschleife) sowie der Fluß und die effektive Permeabilität  $\mu_{eff}$  bei gleichem Strom  $I$  mit zunehmenden Luftspalt  $d$  abnehmen:

$$\mu_{eff} = \frac{\mu_r}{(1 + \frac{d}{l} \mu_r)} \quad . \quad (3)$$

## 2.2 Spule im Wechselstromkreis

Legt man eine harmonische Wechselspannung  $\underline{U} = \hat{U} e^{j\omega t}$  an die Reihenschaltung der Spule mit einem Widerstand  $R$  (z. B. Wicklungswiderstand), so lautet der Maschensatz

$$\underline{U} - L \frac{d\underline{I}}{dt} = \underline{I} R \quad . \quad (4)$$

Mit dem Ansatz  $\underline{I} = \hat{I} e^{j(\omega t - \varphi)}$  ergibt sich für die Amplitude des Stromes bzw. den Phasenwinkel zwischen  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$  im eingeschwungenen Zustand

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (a); \quad \text{bzw.} \quad \tan \varphi = \frac{\omega L}{R} \quad (b) \quad \text{mit} \quad L = \mu_0 \mu_{eff} \frac{n^2 A}{l} \quad (c) \quad (5)$$

als Induktivität. Für  $R \ll \omega L$  wird  $\varphi \approx \pi/2$  und es fließt nur der Blindstrom  $\underline{I} = \underline{I}_m$  (Magnetisierungsstrom). Sein Betrag kann bei sehr großem  $\mu_r$  (s. idealer Trafo) beliebig klein sein (Abb. 2 b). Er hält aber phasengleich den endlichen harmonisch wechselnden magnetischen Fluß  $\underline{\Phi}$  aufrecht (s. Abb. 1 c). Als Folge dieses Wechselflusses wird in der Spule die Gegenspannung

$$-\underline{U} = \underline{U}_i = -n \frac{d\underline{\Phi}}{dt} = -\frac{\mu_0 \mu_{eff} n^2 A}{l} \frac{d\underline{I}_m}{dt} = -L \frac{d\underline{I}_m}{dt} = -j\omega L \underline{I}_m \quad (6)$$

induziert, die schon im Maschensatz (4) berücksichtigt wurde. Bei konstanter Spannung  $\underline{U}$  steigt der Blindstrom  $\underline{I}_m$  in dem Maße an, wie  $L$  mit  $\mu_{eff}$ , z. B. bei Verbreiterung des Luftspaltes, abnimmt.

## 3 Modell des idealen Trafos

Wird eine zweite Spule auf den Eisen-Ring gewickelt und damit von dem gleichen magnetischen Fluß durchsetzt, so hat man einen Transformator (Abb. 2).

Transformatoren werden vor allem großtechnisch genutzt für den im Mittel 6 mal benötigten Wechsel der Spannungsstufen bei der Energieversorgung im Leistungsbereich von einigen Watt bis zu vielen hundert Megawatt, die die meiste Zeit (ca. 75%) nahezu im Leerlauf arbeiten.

In der Meßtechnik wird z. B. die Möglichkeit der Potentialtrennung oder die Widerstandsanpassung (Impedanzwandler) ausgenutzt. Im Zeigerdiagramm (Abb. 2 b) zeigt im folgenden  $\underline{U}_1$  stets (willkürlich) vertikal (reelle Achse).

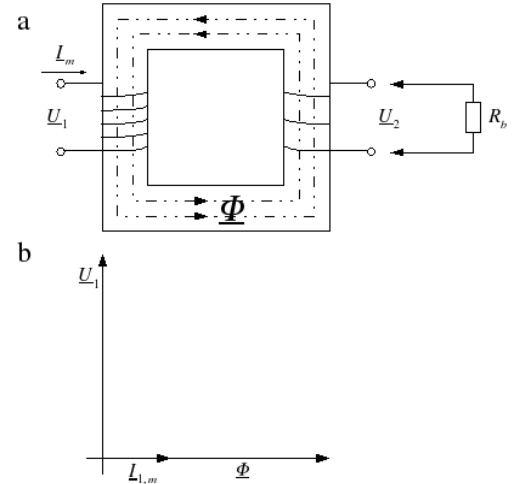


Abb. 2: Idealer Transformator: (a) im Leerlauf bzw. mit Ohmscher Last; (b) Zeigerdiagramm für Primärspannung  $\underline{U}_1$ , Magnetisierungsstrom  $\underline{I}_{1,m}$  und magnet. Fluß  $\underline{\Phi}$ .

Unter einem idealen Trafo [6, 9, 1] soll folgendes Modell verstanden werden:

1. Die konstante Permeabilität  $\mu_r$  des Trafo-Kerns ist sehr groß ( $\infty$ ), wodurch die Induktivitäten ebenfalls sehr groß und die Blindströme sehr klein werden ( $\omega L \gg R$ ; im Betrieb wird dann nahezu im Kurzschluß gearbeitet). Es gibt keine Hysterese und damit verbundene Verluste und Nichtlinearitäten.
2. Das Ferromagnetikum sei elektrisch ein Isolator ( $\lambda = 0$ ). Damit entfallen Wirbelstromverluste.
3. Die Kopplung zwischen beiden Spulen, ausgedrückt durch die Gegeninduktivität  $M$  (s. Anhang), sei ideal. Es entfällt die Streuung des magnetischen Flusses. Für die Gegeninduktivität gilt:  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ . Damit wird der Streufaktor  $\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} = 0$  und der Kopplungsfaktor  $k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} = 1 - \sigma = 1$ .

## 4. Die Wicklungswiderstände sind zu vernachlässigen (keine Kupferverluste).

Bei streuarmlen Netz-Leistungs-Trafos liegen die Wicklungen übereinander. In der Starkstromtechnik wird bezüglich der Kupfer- und Eisen- Verlustleistungen auf ein ausgewogenes Verhältnis von etwa  $\bar{P}_{Cu}/\bar{P}_{Fe} \approx 5 : 1$  geachtet, da die Trafos die meiste Zeit im Leerlauf arbeiten .

## 3.1 Idealer Trafo im Leerlauf

An die Primär-Wicklung wird im folgenden stets die bezüglich Amplitude und Phase unveränderliche harmonische Wechsel-Spannung  $\underline{U}_1 = \hat{U}_1 e^{j\omega t}$  angelegt. Nach Gl. (5 a) fließt durch die Primärspule der um  $\pi/2$  nacheilende Magnetisierungs-Strom  $\underline{I}_{1,m} = \underline{U}_1 / j\omega L_1$  und baut die phasengleichen Größen auf: Feldstärke  $\underline{H}_{Fe} = n_1 \underline{I}_{1,m} / l$ , Induktion  $\underline{B} = \mu_0 \mu_{eff} \underline{H}_{Fe}$  und der Wechsel-Fluß  $\underline{\Phi} = \underline{B} A$ . Infolge der zeitlichen Flußänderung ( $j\omega \underline{\Phi}$ ) werden nach Gl. (6) in beiden Spulen die phasengleichen Spannungen ( $\underline{U}_{i,1}$ ; und  $\underline{U}_{i,2}$ ) induziert ( $\underline{U}_1 = -\underline{U}_{i,1}$ ;  $\underline{U}_2 = +\underline{U}_{i,2}$ ). Ihre Beträge sind den Windungszahlen proportional: Mit dem Übersetzungsverhältnis  $= n_2/n_1$  gilt also

$$\hat{U}_{i,1} = -L_1 \frac{dI_{1,m}}{dt} \quad ; \quad \hat{U}_{i,2} = -L_2 \frac{dI_{1,m}}{dt} \quad \text{bzw.} \quad \left| \frac{\underline{U}_{i,2}}{\underline{U}_{i,1}} \right| = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{n_2}{n_1} = \quad . \quad (7)$$

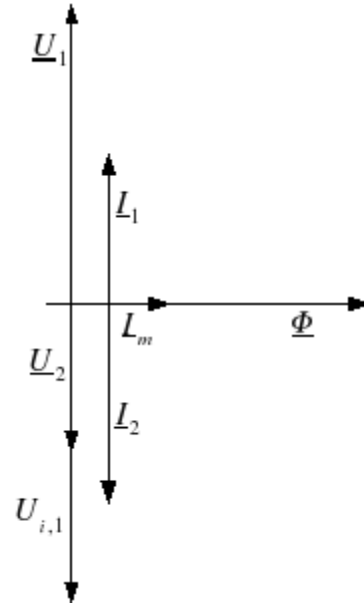
## 3.2 Idealer Trafo mit Ohmscher Last

Verbindet man die Klemmen der Spule 2 mit dem Belastungswiderstand  $R_b$  (Abb. 2 b), so fließt durch den Ohmschen Widerstand der zu  $\underline{U}_2$  phasengleiche Wirk-Strom  $\underline{I}_2 = \underline{U}_2 / R_b = \hat{I}_2 e^{j(\omega t - \psi_2)}$ . Wegen  $\mu_r \rightarrow \infty$  gilt bei endlichem Wechselfluß  $\underline{\Phi} = \mu_0 \mu_r (A/l)(n_1 \underline{I}_1 + n_2 \underline{I}_2)$ :  $\oint \underline{H}_{Fe} ds = 0 = (\underline{H}_1 + \underline{H}_2)l = n_1 \underline{I}_1 + n_2 \underline{I}_2$ . Es entsteht durch die Belastung beim idealen Trafo keine Zusatzdurchflutung und kein Zusatzfluß. Für das Verhältnis von Primär- und Sekundär-Strom findet man

Abb. 3: Belasteter idealer Trafo: Phasenlage der Spannungen und Ströme  $\underline{I}_1$  und  $\underline{I}_2$ .

$$(\underline{H}_1 + \underline{H}_2)l = \underline{I}_1 n_1 + \underline{I}_2 n_2 = 0 \quad \text{d. h.} \quad \left| \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right| = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} = 1 \quad . \quad (8)$$

Beim idealen Trafo ist das Strom-Verhältnis der Kehrwert des Spannungsverhältnisses.



## 4 Streu-Trafo mit Ohmscher Last

Läßt man beim Übergang zur Realität endliche Induktivitäten und Streuung zu, so hat man einen "Streu-Trafo".

Ohmsche und Eisen-Verluste werden nicht betrachtet. Der ideale Trafo folgt dann für  $\sigma = 0$ . Transformatoren mit großer Streuung werden, wie z. B. beim Klingeltrafo, zur Verhinderung von Schäden im Kurzschlußfall eingesetzt. Bei der Signalübertragung mit höheren Frequenzen oder beim Netztrafo mit größeren Luftspalten ist die Kopplung der Spulen oft gering. Nur noch der Hauptfluß  $\Phi_h$ , nicht aber der Streufluß  $\Phi_\sigma$ , erreicht die andere Spule.

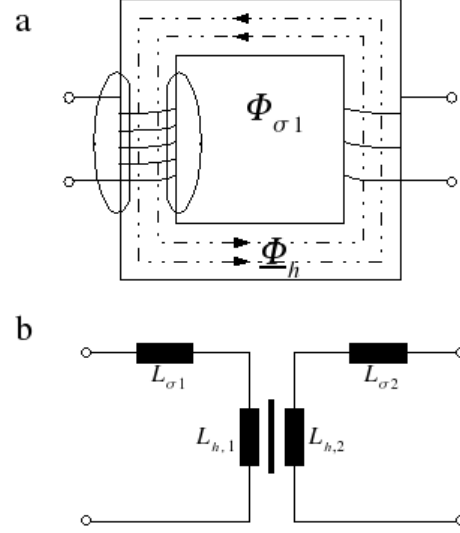


Abb. 4: Nutz- und Streufluß beim realen Trafo (a); Ersatzschaltbild für Streu-Verluste (b).

Dabei wird eine Spannung induziert, die  $U_1$  entgegenwirkt. Der damit verbundene Primärstrom  $I_1$  hat eine geringere Wirkkomponente mit  $0 < \psi_1 < \pi/2$ ; im Vergleich zum idealen Trafo. Die (nicht ideale) Kopplung wird durch die Gegeninduktivität (s. Anhang)  $L_{12} = L_{21} = M = k\sqrt{L_1 L_2}$  mit ( $k < 1$ ) ausgedrückt. Die Amplituden und Phasen der gekoppelten harmonischen Größen berechnen sich aus dem Maschensatz, angewandt auf beide Spulen und den Sekundär-Kreis:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= L_1 \frac{d\underline{I}_1}{dt} + M \frac{d\underline{I}_2}{dt} \quad (a) \\ 0 &= U_2 + L_2 \frac{d\underline{I}_2}{dt} + M \frac{d\underline{I}_1}{dt} \quad (b); \quad \underline{U}_2 = R_b \underline{I}_2 \quad (c) \end{aligned} \quad (9)$$

Setzt man die Gln.(9 b,c) in Gln.(9 a) ein, so folgt mit  $\underline{U}_1 = \hat{U}_1 e^{j\omega t}$  und dem Ansatz  $\underline{I}_1 = \hat{I}_1 e^{j(\omega t - \psi_1)}$

$$\hat{U}_1 (R_b + j\omega L_2) = [j\omega L_1 R_b - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2] \hat{I}_1 e^{-j\psi_1} \quad (10)$$

Daraus ergibt sich mit dem Streufaktor  $\sigma = (1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}) = (1 - k^2)$

$$\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} e^{j\psi_1} = \frac{[j\omega L_1 R_b - \omega^2 L_1 L_2 \sigma]}{(R_b + j\omega L_2)} = \frac{\omega L_1}{(R_b^2 + \omega^2 L_2^2)} [R_b \omega L_2 (1 - \sigma) + j(R_b^2 + \omega^2 L_2^2 \sigma)] \quad (11)$$

schließlich die Amplitude (s. Anhang) bzw. der Phasenwinkel des **Primärstromes**

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\omega L_1} \sqrt{\frac{R_b^2 + \omega^2 L_2^2}{R_b^2 + \omega^2 L_2^2 \sigma^2}} \quad (a) \quad \text{bzw.} \quad \tan \psi_1 = \frac{R_b^2 + \omega^2 L_2^2 \sigma}{R_b \omega L_2 (1 - \sigma)} \quad (b) \quad (12)$$

Die entsprechenden Größen auf der **Sekundärseite** sind mit  $I_2 = \hat{I}_2 e^{j(\omega t - \psi_2)}$ :

$$\hat{I}_2 = \frac{M \hat{U}_1}{L_1 \sqrt{R_b^2 + \omega^2 L_2^2 \sigma^2}} \quad (a); \quad \tan \psi_2 = \frac{(\omega L_2 \sigma)}{R_b} \quad (b) \quad U_2 = R_b I_2 \quad (c) \quad (13)$$

( $\psi_2$  bezieht sich auf  $\underline{U}_1$ .  $\underline{I}_2$  und  $\underline{U}_2$  sind in Phase (13 c).

## 4.2 Leerlauf und Kurzschluß

Folgende Spezialfälle sind besonders geeignet, die Induktivitäten und den Streufaktor zu messen:

### 4.2.1 Leerlaufspannung

Aus Gl.(13 a,c) ergibt sich für  $R_b \rightarrow \infty$ :

$$\hat{U}_{2,leer} = \frac{M}{L_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 L_2^2 \sigma^2}{R_b^2}}} \rightarrow k \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = k \quad . \quad (14)$$

### 4.2.2 Kurzschlußstrom

**Primärer Kurzschlußstrom:** Mit Gl.(12 a) wird für  $R_b = 0$

$$\hat{I}_{1,kurz} = \frac{\hat{U}_1}{\omega L_1 \sigma} \quad . \quad (15)$$

**Sekundärer Kurzschlußstrom:** Er folgt aus Gl.(13) für  $R_b = 0$ :

$$\hat{I}_{2,kurz} = \frac{M \hat{U}_1}{L_1 \omega L_2 \sigma} \quad . \quad (16)$$

Die Kurzschlußströme werden durch den Streufaktor begrenzt und würden in der Grenze  $\sigma \rightarrow 0$  (idealer Trafo) zu  $\infty$ .

### 4.2.3 Primärer Leerlaufstrom

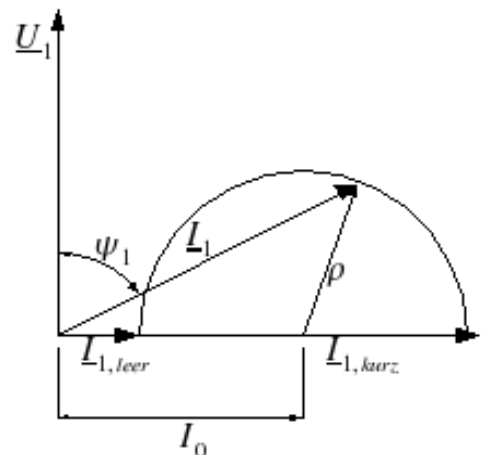
$$\hat{I}_{1,leer} = \frac{\hat{U}_1}{\omega L_1} \quad . \quad (17)$$

Der Leerlaufstrom  $I_{1,leer}$  ist eine Folge der endlichen Induktivität  $L_1$ . Er baut als Blindstrom das Magnetfeld auf (und wird beliebig klein beim idealen Trafo; dort  $I_{1,m}$ ). Durch die hier nicht betrachteten Eisen-(=Leerlauf-) Verluste erhält  $I_1$  eine Wirk-Komponente ( $\cos\psi_1 > 0$ ).

## 4.3 Ortskurve

Sowohl Leerlaufstrom  $I_{1,leer}$  als auch Kurzschlußstrom  $I_{1,kurz}$  sind beim reinen Streutrafo Blindströme ( $\psi_1 = \pi/2$ ; vergl. (12 b)). Erhöht man aber, z. B. beginnend mit dem Kurzschlußstrom, schrittweise den Ohmschen Widerstand  $R_b$ , so verringert sich  $\psi_1$  auf ein Minimum bei  $R_{\psi,1,min} = \omega L_2 \sqrt{\sigma}$ . Die Amplitude und Phase des primären Stromes  $I_1$  in Abhängigkeit von  $0 \leq R_b \leq \infty$  durchläuft beim reinen Streutrafo als Ortskurve den **Heylandkreis** (Abb. 5; s. Anhang).

Abb. 5: Heylandkreis für den Streutrafo.



## 5 Experimente

### 5.1 Leerlauf-und Kurzschluß-Versuche

Der Luftspalt  $d$  wird durch Plast-Beilagen der Dicke  $s = d/2$  im Eisenjoch variiert. Die Abnahme der Induktivitäten (und effektiven Permeabilität) sowie die Zunahme von  $\sigma$  (bzw. Abnahme von  $k$ ) können durch Messung der Amplituden (bzw. der Effektivwerte) von Strom und Spannung anhand der Gln.(14;15;16;17) bestimmt werden. Durch Vertauschung von Primär-und Sekundärseite können sowohl  $\sigma$  als auch  $k$  ermittelt werden.

### 5.2 Bestimmung des Phasenwinkels

Strom und Spannung werden primärseitig mit nebenstehender Schaltung bestimmt (Abb. 6).

Der Phasenwinkel  $\psi_1$  kann

1. nach der "Drei-Instrumenten-Methode" (Abb. 6 a) ermittelt werden: Es werden die drei Spannungen: Gesamtspannung  $U_{res}$ ; Spannung an der Primärspule  $U_L$  sowie der Spannungsabfall am Vorwiderstand  $R_v$ :  $U_{R_v}$  gemessen. Es gilt:  $\cos \psi_1 = U_L / \sqrt{U_{R_v}^2 + U_L^2}$ ;

2. mit einem Zweistrahl-Oszillographen, dessen y-Buchsen einmal am Ohmschen Vorwiderstand (Strom-Signal) und zum anderen an  $L_1$  (Spannungs-Signal) liegen, bestimmt werden. Man vergleicht die Nulldurchgänge der Schwingungen, nachdem diese am Oszillographen auf gleiche Amplituden abgeglichen wurden;

3. mit einem Wirkleistungsmesser  $\bar{P}_1$  bestimmt und berechnet werden:  $\cos \psi_1 = \frac{2\bar{P}_1}{\hat{U}_1 \hat{I}_1} = \frac{\bar{P}_1}{\hat{U}_{1,eff} \hat{I}_{1,eff}}$ .

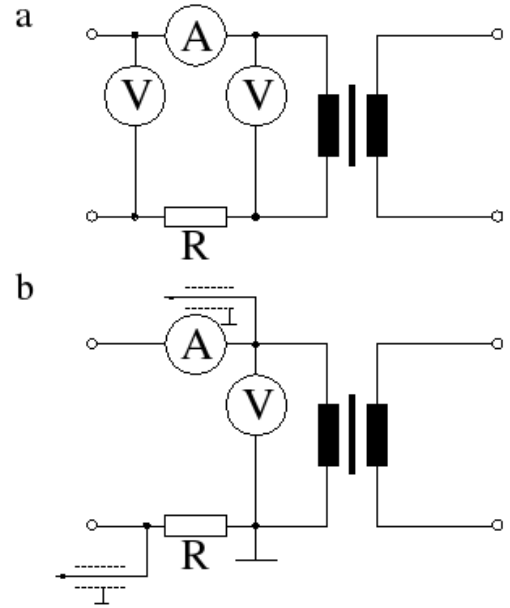


Abb. 6: Bestimmung von  $\psi_1$  nach Drei-Instrumenten-Methode (a) und mittels Zweistrahloszillograph (b).

### 5.3 Aufnahme des Heylandkreises

Den Belastungswiderstand  $R_b$  regelt man, ausgehend vom Kurzschluß (Maximalwerte einstellen), in ca. 12 geeigneten nichtlinearen Stufen bis zum Leerlauf. Für jede Einstellung bei konstanter (bzw. nachgeregelter) Primär-Spannung wird der Primärstrom und der Phasenwinkel nach Einstellung gleicher Amplituden am Oszillographen durch Auszählen der Abszissen-Abstände der Nulldurchgänge ermittelt.

### 5.4 Bestimmung der Permeabilität

Im Leerlauf ergibt sich nach Umformung der Gl. (6) für  $d = 0$  aus dem Verhältnis von Primär-Strom und -Spannung die (im allgemeinen komplexe, s. Anhang) Permeabilität ( $\mu_r$ ):

$$\mu_r = \frac{l}{\omega \mu_0 n^2 A} \frac{\hat{U}_{1,leer}}{\hat{I}_{1,leer}} \quad (18)$$

Dazu muß die Geometrie des Eisenjochs (Querschnitt und mittlere Eisenlänge), die Windungszahl und die Frequenz bekannt sein. Es empfiehlt sich eine Meßreihe für verschiedene Aussteuerungen, d. h. verschiedene Primärspannungen, anzufertigen.

## 6 Anhang

### 6.1 Gegeninduktivität, Leistung, Widerstandstransformation

#### 6.1.1 Zur Gegeninduktivität

Man betrachte zwei beliebige, auch von der Geometrie unterschiedliche Spulen (1;2) ohne Ohmsche Widerstände, die von den Wechselströmen  $\underline{I}_1$  und  $\underline{I}_2$  durchflossen werden und dabei in beiden Spulen Spannungen induzieren. Es wird zunächst  $L_{21} \neq L_{12}$  angenommen:

$$\underline{U}_1 = L_1 \frac{d\underline{I}_1}{dt} + L_{21} \frac{d\underline{I}_2}{dt} \quad ; \quad \underline{U}_2 = L_2 \frac{d\underline{I}_1}{dt} + L_{12} \frac{d\underline{I}_2}{dt} \quad . \quad (19)$$

Geht man zur Leistung über und addiert die beiden Anteile, so folgt

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 \underline{I}_1 &= L_1 \frac{d\underline{I}_1}{dt} \underline{I}_1 + L_{21} \frac{d\underline{I}_2}{dt} \underline{I}_1 \quad ; \quad \underline{U}_2 \underline{I}_2 = L_2 \frac{d\underline{I}_1}{dt} \underline{I}_2 + L_{12} \frac{d\underline{I}_2}{dt} \underline{I}_2 \quad ; \\ \Sigma \underline{U} \underline{I} &= \underline{U}_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_2 \underline{I}_2 = L_1 \frac{d\underline{I}_1}{dt} \underline{I}_1 + L_{21} \frac{d\underline{I}_2}{dt} \underline{I}_1 + L_2 \frac{d\underline{I}_1}{dt} \underline{I}_2 + L_{12} \frac{d\underline{I}_2}{dt} \underline{I}_2 \quad . \end{aligned} \quad (20)$$

Diese Leistung muß der zeitlichen Änderung der magnetischen Feldenergie entsprechen:

$$\frac{d}{dt} W_{\text{magn}} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} L_1 \hat{I}_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \hat{I}_2^2 + M \hat{I}_1 \hat{I}_2 \right] \quad . \quad (21)$$

Das ist nur möglich, wenn  $M = L_{12} = L_{21}$  ist, wie man sich durch Vergleich von (20 und 21) überzeugt.

#### 6.1.2 Leistung des belasteten Streu-Trafos

Beim reinen Streutrafo geht keine Energie verloren. Die Wirkleistung wird vollständig übertragen. Mit Gl. (12 a,b) und wegen  $\arctan x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  ist zunächst

$$\cos \psi_1 = \frac{R_b \omega L_2 (1 - \sigma)}{\sqrt{(R_b^2 + \omega^2 L_2^2 \sigma^2)(R_b^2 + \omega^2 L_2^2)}} \quad . \quad (22)$$

Damit folgen die beiden Leistungen:

$$\begin{aligned} \overline{P}_1 &= \frac{1}{2} \hat{U}_1 \hat{I}_1 \cos(\psi_1) = \frac{1}{2} \frac{\hat{U}_1^2}{\omega L_2} \sqrt{\frac{R_b^2 + \omega^2 L_2^2}{R_b^2 + \omega^2 L_2^2 \sigma^2}} \frac{R_b \omega L_2 (1 - \sigma)}{\sqrt{(R_b^2 + \omega^2 L_2^2 \sigma^2)(R_b^2 + \omega^2 L_2^2)}} \\ \overline{P}_1 &= \frac{\hat{U}_1^2}{2 \omega L_2} \frac{R_b \omega L_2 (1 - \sigma)}{(R_b^2 + \omega^2 L_2^2 \sigma^2)} \quad ; \quad \overline{P}_2 = \frac{1}{2} R_b \hat{I}_2^2 = \frac{1}{2} R_b \frac{M^2 \hat{U}_1^2}{L_1^2 (R_b^2 + \omega^2 L_2^2 \sigma^2)} \quad . \end{aligned} \quad (23)$$

Beide Leistungen sind identisch wegen  $L_1 L_2 (1 - \sigma) = M^2$ .

#### 6.1.3 Widerstandstransformation beim idealen Trafo

Aus der Wirk-Leistung  $\overline{P}_1$  des Primärstromes

$$\overline{P}_1 = \frac{1}{2} \hat{U}_1 \hat{I}_1 \cos \psi_1 = \frac{1}{2} \hat{U}_1^2 \frac{L_2}{L_1 R_b} = \frac{1}{2} \frac{\hat{U}_1^2}{R_b} = \frac{1}{2} \frac{\hat{U}_2^2}{R_b} \quad . \quad (24)$$

folgt die **Übersetzung der Impedanzen; Widerstandsanpassung; Impedanzwandler**. Der Primärseite wird ein übersetzter Widerstand  $R_1^*$  zugeordnet, für den gilt

$$\frac{R_1^*}{R_b} = \frac{Z_1^*}{Z_b} = \frac{n_1^2}{n_2^2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{\sigma} \quad . \quad (25)$$



### 6.1.4 Zum Heylandkreis des Streu-Trafos

Es soll gezeigt werden, daß der Radius  $\rho$  der Ortskurve unabhängig von  $R_b$  und nur eine durch  $f(U_1, \omega L_1, \sigma)$  bestimmte Konstante ist. Die Ortskurve muß daher ein Kreis sein:

Entsprechend der Abb. (6) sind  $I_{1,kurz}$ ;  $I_{1,leer}$  und deren Mittelwert  $I_0 = \frac{\hat{U}_1}{\omega L_1} \frac{(\sigma+1)}{2\sigma}$  gegeben. Der cos-Satz in dem durch  $\rho$ ;  $I_0$  und  $I_1$  aufgespannten Dreieck lautet unter Verwendung von Gl. (12 a,b) und  $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ :

$$\begin{aligned} \rho^2 &= I_0^2 + I_1^2 - 2I_0 I_1 \cos(\pi/2 - \psi_1) = I_0^2 + I_1^2 - 2I_0 I_1 \sin \psi_1 \\ &= \frac{\hat{U}_1^2}{\omega^2 L_1^2} \left[ \frac{(\sigma+1)^2}{4\sigma^2} + \frac{R_b^2 + \omega^2 L_2}{R_b^2 + \omega^2 L_2 \sigma^2} - \frac{\sigma+1}{\sigma} \left( \sqrt{\frac{R_b^2 + \omega^2 L_2}{R_b^2 + \omega^2 L_2 \sigma^2}} \cdot \frac{\frac{R_b^2 + \omega^2 L_2 \sigma}{R_b \omega L_2 (1-\sigma)}}{\sqrt{1 + \frac{(R_b^2 + \omega^2 L_2 \sigma)^2}{R_b^2 \omega^2 L_2^2 (1-\sigma)^2}}} \right) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

und nach Auflösen der Binome unter der Wurzel

$$\rho^2 = \frac{\hat{U}_1^2}{\omega^2 L_1^2} \left[ \frac{(\sigma+1)^2}{4\sigma^2} + \frac{R_b^2 + \omega^2 L_2}{R_b^2 + \omega^2 L_2 \sigma^2} - \frac{\sigma+1}{\sigma} \frac{R_b^2 + \omega^2 L_2 \sigma}{R_b^2 + \omega^2 L_2 \sigma^2} \right] = \frac{\hat{U}_1^2}{\omega^2 L_1^2} \left[ \frac{(\sigma+1)^2}{4\sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \right]. \quad (27)$$

Der Belastungswiderstand  $R_b$  ist in der Gl. (27) für  $\rho$  also nicht mehr enthalten.

### 6.1.5 Zum Primärstrom des Streu-Trafos

Aus Gl.(11) folgt die Beziehung (12 b) für den Phasenwinkel. Zur Berechnung des Amplituden-Quadrats

$$\hat{I}_1^2 = \frac{\hat{U}_1^2}{\omega^2 L_1^2} \cdot \frac{(R_b^2 + \omega^2 L_2^2)}{\sqrt{Z^2}} \quad (28)$$

führt man die Abkürzung  $Z^2$  ein und findet:

$$Z^2 = [R_b^2 + \omega^2 L^2 \sigma]^2 + R_b^2 \omega^2 L_2^2 (1 - \sigma)^2 \quad \text{und} \quad (29)$$

$$Z^2 = R_b^4 + \omega^4 L_2^4 \sigma^2 + R_b^2 \omega^2 L_2^2 (1 + \sigma^2) = R_b^2 (R_b^2 + \omega^2 L_2^2) + \omega^2 L_2^2 \sigma^2 (\omega^2 L_2^2 + R_b^2) \quad ; \quad (30)$$

und nach Zusammenfassung die Gl. (12 a).

## 7 Realer Trafo

Beim realen Trafo wären noch 1. die Ohmschen Verluste an den Wicklungs-Widerständen von Primär- und Sekundärspule ( $R_1$  und  $R_2$ ; formal im Gl.-System (9) durch  $\underline{I}_1 R_1$  sowie  $\underline{I}_2 R_2$ ) und 2. die Leerlauf-Verluste zu berücksichtigen.

### 7.1 Leerlauf-Verluste des realen Trafos

Bei niedrigen Frequenzen haben die Leerlauf- oder magnetischen Verluste zwei Ursachen: 1. die Wirbelströme und 2. die Hysterese. Durch beides wird das Eisenjoch erwärmt, was einer unerwünschten Wirkleistung entspricht. Im Ersatzschaltbild werden die mit der Frequenz ansteigenden Verluste zweckmäßig mit einem zur Primärspule parallel liegenden Ohmschen Widerstand  $R_{Fe}$  erfaßt, dessen Einfluß mit steigender Frequenz größer wird (Abb. 7 a).

### 7.1.1 Wirbelstromverluste

In Abb. 7 ist der Querschnitt eines Elektrobleches skizziert mit der Flußrichtung, dem Querschnitt  $A = a b$  und einer fiktiven Richtung eines Wirbelstromes  $I_{wb}$ .  $I_{wb}$  soll im folgenden Modell in einer Richtung den halben Querschnitt einnehmen. Für die induzierte Spannung im Blech gilt  $\underline{U}_{wb} \lambda A / l = \underline{U}_{wb} \lambda a b / l \sim b$ . Der Ohmsche Widerstand der angenommenen Strombahn nimmt bei gegebener (sehr großer) Blechbreite mit der Blechdicke  $b$  ab. Der Wirbelstrom nimmt demzufolge mit  $b$  zu, demzufolge gilt  $P_{wb} \sim b^2$ .

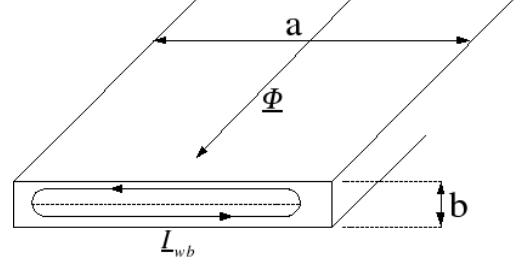


Abb. 7: Elektroblech mit Wirbelströmen

Zur Verringerung der Wirbelströme werden Netz-Trafos aus Elektroblechen ( $b \approx 0,35$  mm) hergestellt. Für die verbleibende Verlustleistung gilt [6, 8]

$$P_{wb} \sim \hat{U}_{wb} \cdot I_{wb} \sim A l \lambda \omega^2 b^2 B^2 \quad . \quad (31)$$

### 7.1.2 Hysterese-Verluste

Die bei einem Zyklus im Eisen umgesetzte Hysteresearbeit berechnet sich zu  $V \cdot \oint H dB = V \cdot \oint B dH$ , wobei  $\oint B dH$  die von der Hystereseschleife eingeschlossene Fläche darstellt. Diese Fläche steigt nach Abb. 1 c stark mit der Aussteuerung anfangs proportional zu  $H$  und zu  $B$ , d. h.  $\sim B^2$ , an. Daher gilt

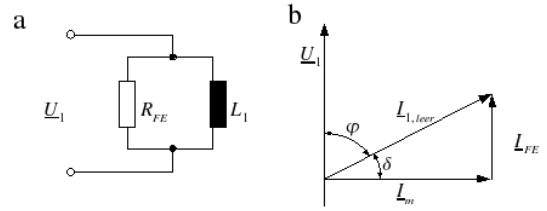
$$P_{hy} \sim A l \omega \cdot \Phi^2 \quad . \quad (32)$$

Bei konstanter Frequenz und Blechdicke sind daher die beiden Anteile  $P_{wb}$  und  $P_{hy}$  nicht zu trennen, so daß nur die **gesamten Eisen-Verluste**  $P_{Fe} = P_{wb} + P_{hy}$  bestimmt werden können.

### 7.1.3 Eisen-Verluste und Verlustwinkel

$P_{Fe}$  wird durch eine Parallelschaltung von Primärinduktivität und dem Eisen-Widerstand  $R_{Fe}$  berücksichtigt. Nach Anlegen von  $\underline{U}_1 = \hat{U}_1 e^{j\omega t}$  fließt der Strom  $\underline{I}_{1,leer} = \hat{I}_{1,leer} e^{j(\omega t - \varphi_1)}$ ;

$$\underline{I}_{1,leer} = \frac{\underline{U}_1}{R_{Fe}} + \frac{\underline{U}_1}{j\omega L_1} \quad \text{d. h.} \quad \hat{I}_{1,leer} = \frac{\hat{U}_1}{\omega L_1} (1 + j \frac{\omega L_1}{R_{Fe}}) \quad . \quad (33)$$

Abb. 8: Eisenwiderstand  $R_{Fe}$  (a); Zeiger für den primären Leerlaufstrom (b)

Für Amplitude bzw. Phasenwinkel (s. Abb. 8) folgt aus (33)

$$\hat{I}_{1,leer} = \frac{\hat{U}_1}{\omega L_1} \sqrt{1 + \frac{\omega^2 L_1^2}{R_{Fe}^2}} \quad (a) \quad \text{bzw.} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \frac{\omega L_1}{R_{Fe}} \ll 1 \quad (b) \quad . \quad (34)$$

Der meistens sehr kleine Wert  $\tan(\frac{\pi}{2} - \varphi_1) = \tan \delta \approx \delta$  wird Verlustwinkel genannt. Er ist proportional den (in unserem Fall Leerlauf-) Verlusten.

Damit ergibt sich für die Leerlaufleistung (=Eisenverlust-Leistung)

$$\overline{P}_{Fe} = \frac{1}{2} \hat{I}_{1,leer} \hat{U}_1 \cos \varphi_1 = \frac{U_1^2}{2 R_{Fe}} \approx \frac{1}{2} \hat{I}_{1,leer} \hat{U}_1 \tan \delta \quad . \quad (35)$$

$\overline{P}_{Fe}$  steigt mit der Aussteuerung ( $\hat{H} \sim \hat{I}_m \sim \hat{U}_1$ ) und wird im Leerlauf mit einem Wattmeter oder durch Amplituden- und Phasen-Messung bestimmt.

### 7.1.4 Verlust-Winkel und komplexe Permeabilität

Durch Umstellung von Gl. (33) und Gl. (39) ergeben sich  $R_{Fe}$  und  $L_1$  über ihre Kehrwerte:

$$\frac{\hat{I}_{1,leer}^2}{\hat{U}_1^2} = \frac{1}{R_{Fe}^2} + \frac{1}{\omega^2 L_1^2} \quad (a); \quad \frac{1}{R_{Fe}} = \frac{\hat{I}_{1,leer}}{\hat{U}_1} \sin \delta \quad (b) \quad \frac{1}{\omega L_1} = \frac{\hat{I}_{1,leer}}{\hat{U}_1} \cos \delta \quad (c) \quad . \quad (36)$$

Mit (36 b,c) und anhand der Gln. (40) können Real- und Imaginärteil der Permeabilität berechnet werden. Man kann die Gl. (33) unter Beachtung von  $\hat{U}_1 = n_1 \omega \hat{\Phi}_1$  so umstellen, daß links der Kehrwert der Permeabilität steht und man erkennt, daß infolge der Verluste (d. h.  $R_{Fe} \neq \infty$ ) auch die Permeabilität komplex wird ( $\mu_r \rightarrow \underline{\mu}$ ). Aus

$$\frac{\hat{I}_{1,leer} j \omega R_{Fe} L_1}{\hat{U}_1} e^{-j\varphi_1} = \frac{\hat{I}_{1,leer} \omega R_{Fe} L_1}{n_1 \omega \hat{\Phi}_1} e^{(\pi/2 - j\varphi_1)} = R_{Fe} + j \omega L_1 \quad (37)$$

folgt

$$\frac{1}{\frac{\mu \mu_0 n_1^2 A}{l}} e^{j\delta} = \frac{1}{L_1} + j \frac{\omega}{R_{Fe}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\underline{\mu}} e^{j\delta} = \frac{\mu_0 n_1^2 A}{l} \left[ \frac{1}{L_1} + j \frac{\omega}{R_{Fe}} \right] \quad . \quad (38)$$

Damit ergeben sich (in unserem Falle des parallel angesetzten Verlustwiderstands; Index<sub>p</sub>) die Kehrwerte von Real- und Imaginärteil der komplexen Permeabilität sowie der Verlustwinkel  $\delta$ :

$$\frac{1}{\underline{\mu}} e^{j\delta} = \frac{1}{\mu'_p} + j \frac{1}{\mu''_p} \quad \text{bzw.} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \tan \delta = \frac{1/\mu''_p}{1/\mu'_p} = \frac{\mu'_p}{\mu''_p} = \frac{\omega L}{R_{Fe}} \quad . \quad (39)$$

Stellt man Gl. (39) um, so folgt aus den durch Messungen bestimmten Größen ( $\omega L_1$  ;  $R_{Fe}$ ) der Real ( $\mu'_p$ )- und Imaginär-Teil ( $\mu''_p$ ) der Permeabilität:

$$\mu'_p = \frac{l}{\mu_0 n_1^2 A} \cdot L_1 \quad ; \quad \mu''_p = \frac{l}{\mu_0 n_1^2 A} \cdot \frac{R_{Fe}}{\omega} \quad . \quad (40)$$

Der Realteil ist proportional zur Induktivität  $L_1$  entsprechend (18). Ein großer Parallelwiderstand  $R_{Fe}$  bedeutet einen großen Imaginärteil der Permeabilität und geringe Verluste.

## 7.2 Abschätzung des Eisenquerschnittes

Da  $\mu_r \approx \frac{\Delta B}{\mu_0 \Delta H}$  endlich ist und die maximale Feldstärke bzw. Induktion den zum Erreichen von etwa 80% der Sättigungsinduktion notwendigen Wert nicht übersteigen sollte, wird auf die für eine Dimensionierung eines Trafos wichtige Beziehung hingewiesen:

$$\hat{U}_1 = n_1 \omega \hat{\Phi} = n_1 A \omega \hat{B} \quad \text{bzw.} \quad \hat{B} = \frac{\hat{U}_1}{n_1 A \omega} \quad \text{oder} \quad A_{min} \geq \frac{\hat{U}_1}{n_1 \omega \hat{B}_{max}} \quad . \quad (41)$$

Anhand der Gl. (41) kann man mit  $\hat{B}_{max} \approx 1,5$  T für Elektroleche bei gegebener Primärspannung, Windungszahl und Frequenz den notwendigen Eisenquerschnitt  $A$  abschätzen.

## 8 Fragen

1. Wie erklären Sie die Wirkung eines idealen Trafos anhand des Induktions- und Durchflutungsgesetzes?
2. Wie berechnen sich Ohmscher, induktiver und kapazitiver Widerstand im Wechselstromkreis?
3. Wie berechnet man den Effektivwert und Leistung von Wechsel-Strömen?
4. Was versteht man unter dem magnetischen Widerstand?
5. Wie berechnet sich beim idealen Trafo mit Ohmscher Last das Spannungs- und Strom-Verhältnis?
6. Was besagt der Maschensatz? Wie lautet er für die Primär- und Sekundär- Spannungen (-Ströme) beim idealen Trafo?
7. Wie transformieren sich beim idealen Trafo Spannungen, Ströme, Widerstände und Leistungen?
8. Wie berechnen sich die Induktivitäten und die Gegeninduktivität beim idealen Trafo?
9. Wie ändern sich beim idealen Trafo Amplitude und Phase im Sekundärkreis bei induktiver Last?
10. Berechnen Sie in der Vorbereitung einen Heylandkreis für die Werte:  $f = 50 \text{ Hz}$ ;  $L_1 = 0,3 \text{ H}$ ;  $\sigma = 0,8$ ;  $U_1 = 50 \text{ V}$ .
11. Wie kann man experimentell den Streufaktor bestimmen?
12. Wie wirkt sich ein Luftspalt im magnetischen Kreis aus?
13. Welche Verluste treten beim realen Trafo auf?
14. Was versteht man unter Hystereseschleife? Welchen prinzipiellen Verlauf zeigt die Feldabhängigkeit der Permeabilität?
15. Was sind Wirbelströme?
16. Wie kann man Wechselspannungen, Wechselströme, Phasenverschiebungen und Wechselstrom-Leistungen messen?

## Literatur

- [1] Gerthsen, Physik (H. Vogel), Springer Berlin 1995
- [2] A. Recknagel, Physik, III, El.-Lehre
- [3] E.-H. Lämmerhirt, El. Maschinen ..., V. Hanser, 1989
- [4] H. Feldtkeller, Spulen und Übertrager, 1949
- [5] K. Lunze, Berechnung elektrischer Stromkreise, V. Techn., Bln. 1979
- [6] G. Müller, Elektrische Maschinen, V. Technik, Bln. 1985
- [7] H.-O. Seinsch, Grundlagen elektrischer Masch. u. Antriebe, V. Teubner 1988
- [8] K. Simony, Theoretische Elektrotechnik, Berlin, 1956
- [9] H.-J. Paus, Physik in Experimenten und Beispielen, V. C.-Hanser München 1995