

# Feldmessung an Zylinderspulen

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Aufgabenstellung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Allgemeine Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1	Induktionsgesetz und Spannungsstoß . . . . .	2
2.2	Ballistisches Galvanometer . . . . .	2
2.3	Magnetische Feldstärke von Zylinderspulen . . . . .	2
2.4	Eisengekapselte Spule und Hysterese . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Experimente</b>	<b>3</b>
3.1	Kalibrieren . . . . .	3
3.2	Feldmessung . . . . .	4
3.3	Bestimmung der axialen Feld-Verteilung . . . . .	4
3.4	Bestimmung der Hysterese . . . . .	4
3.5	Radiale Feldabhängigkeit . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Anhang</b>	<b>5</b>
4.1	Der Maximalauschlag des ballistischen Galvanometers . . . . .	5
4.2	Kurze Spulen und Feldverteilung . . . . .	5
4.3	Inhomogenes Feld . . . . .	6
4.4	Effektive Windungsfläche der Meßspule . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Fragen</b>	<b>7</b>

## 1 Aufgabenstellung

1. Kalibrierung eines ballistischen Galvanometers als magnetischer Flußmesser (Bestimmung von  $k_1$ ) mit Hilfe von Zylinderspulen.
2. Bestimmung der axialen Feldverteilung ( $H_z(z)$ ) einer elektromagnetischen Linse.
3. Untersuchung der Hysterese bzw. der radialen Abhängigkeit ( $H_z(r)$ ).

## 2 Allgemeine Grundlagen

### 2.1 Induktionsgesetz und Spannungsstoß

Ändert sich zeitlich die Normalkomponente der magnetischen Flußdichte  $\vec{B}$ , die eine Spule der Fläche  $\vec{A} = A \vec{n}_a$  und der Windungszahl  $N$  durchsetzt, so wird nach dem Induktionsgesetz

$$U_i = -N \frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{A} = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

in der Spule die Spannung  $U_i$  induziert.

Das Zeitintegral der Spannung (Spannungsstoß)

$$\left| \int U_i dt \right| = N (\Phi(t_2) - \Phi(t_1)) = N \Delta \Phi = N A (B_2 - B_1) \quad (2)$$

ist gleich dem Produkt aus der magnetischen Flußänderung  $\Delta \Phi$  und der Windungszahl  $N$ . Daher läßt sich z.B. bei bekannter Windungsfläche ( $NA$ ), homogenem Feld sowie  $B_1 = 0$  mit Hilfe von  $\left| \int U_i dt \right|$  die Normalkomponente der Induktion  $B_2$  messen.

### 2.2 Ballistisches Galvanometer

Spannungsstöße können mit dem ballistischen Galvanometer oder Fluxmetern gemessen werden. (Heute benutzt man zunehmend elektronische Integratoren). Dabei erzeugt  $\left| \int U_i dt \right|$  nach Gl. (2) im Widerstand  $R_{ges}$  des Meßkreises einen Stromstoß, womit sich eine Ladung  $Q$  bewegt.

$$Q = \int I dt = \int U_i dt / R_{ges} \quad (3)$$

Unter der Bedingung, daß die Zeitdauer des Spannungsstoßes  $\Delta t \ll T/4$  ( $T$  = Schwingungsdauer des Galvanometers), ist der erste Maximalausschlag  $\alpha_1$  des ballistischen Galvanometers der Ladung  $Q$  proportional.

Proportionalitätsfaktoren sind die Galvanometer-Konstante  $\Phi_G^*$  (Fluß) und in modifizierter Form die Dämpfungskonstante ( $\delta = \frac{\Phi_G^{*2}}{2 R_{ges}}$ ).

( $f(\delta) = e^{-C}$ ; s. Anhang).

$$\alpha_1 = \Phi_G^* \cdot f(\delta) \cdot Q = k \cdot Q = \frac{k}{R_{ges}} \int U_i dt = \frac{1}{k_1} \int U_i dt \quad (4)$$

Da sowohl die Ladung als auch die Dämpfung von  $R_{ges}$  abhängig sind, sollte der Gesamtwiderstand im Meßkreis durch eine ständige Reihenschaltung von Kalibrierungsspule (2) und Meßspule (3) konstant gehalten werden (vgl. Abb. 2).

### 2.3 Magnetische Feldstärke von Zylinderspulen

Ein wichtiger Spezialfall ist die **sehr lange Zylinderspule** ( $l \gg r$ ) (oder die Ringspule mit einem Krümmungsradius  $R \rightarrow \infty$  sowie  $R \gg r$  ( $r$  = Radius einer Windung)), für die  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = \sum I$  liefert

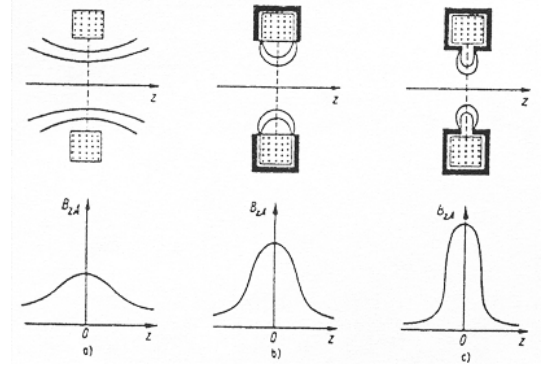
$$\boxed{|\vec{H}| = H_z = \frac{N I}{l} \quad (5)}$$

Die Feldwerte  $H_z$  von Spulen endlicher Ausdehnung (und nicht-geschlossener Spulen mit Eisenjoch oder Eisenkapselung) weichen von Gl. (5) ab. Vielfach ist dann auch die Radialkomponente  $H_r$  sowie die Abnahme von  $H_z$  in radialer Richtung zu beachten (s. Anhang).

## 2.4 Eisengekapselte Spule und Hysterese

Zur Abschirmung des Restvolumens, zur Flußkonzentration und Erhöhung der Feldstärke sind elektromagnetische Linsen (kurze Zylinder-spulen) z. B. nach Abb. 1 mit Eisen gekapselt.

Abb. 1: Wirkung der Eisenkapselung auf die Feldverteilung



Obwohl effektive Längen des Luftspalts ( $l_{L,eff}$ ) und eines mittleren Eisenweges ( $l_{Fe,eff}$ ) schwer festzulegen sind, sollte näherungsweise nach Gl. (6) die in der Achse (in Luft) auftretende Feldstärke  $H_z$  linear vom Erregerstrom  $I$  abhängen, solange die relative Permeabilität des Eisens,  $\mu_r$ , konstant ist:

$$H_z \cong \frac{N I}{l_{L,eff} + \frac{l_{Fe,eff}}{\mu_r}} \quad (6)$$

Jedoch zeigt das Eisenmaterial Hysterese, d. h. einen nichtlinearen und von der magnetischen Vorgeschichte abhängigen Zusammenhang  $B = B(H)$  bzw.  $\mu_r = \mu_r(H)$ . Daher wird anstelle von Gl. (6) eine nichtlineare Abhängigkeit  $H_z = f(I)$  mit Hysterese festgestellt.

## 3 Experimente

### 3.1 Kalibrieren

Über die Mitte der langen Zylinderspule der Windungszahl  $N_1$  und der Länge  $l_1$  ist eine kurze Sekundär-Spule mit  $N_2$  Windungen eng angebracht (Gegeninduktivitäts-Normal). Die Reihenschaltung von Spule 2 mit der Meßspule 3 und dem Galvanometer zeigt Abb. 2.

Ändert sich der Primärstrom um  $\Delta I_1$ , so wird nach den Gln. (1 und 5) in der Spule 2 der Spannungsstoß

$$\left| \int U_i dt \right| = N_2 \Delta \Phi_1 = N_2 A_1 \Delta B_1 = \frac{\mu_0 N_2 A_1 N_1 \Delta I_1}{l_1} \quad (7)$$

induziert und der Maximalausschlag des Galvanometers beträgt  $\alpha_1$ . Damit kann die ballistische Empfindlichkeit  $k_1$  (Gl.4,8) bestimmt werden.

$$k_1 = \frac{|\int U_i dt|}{\alpha_1} = \frac{\mu_0 N_2 N_1 A_1 \Delta I_1}{l_1 \alpha_1} = N_2 \frac{\Delta \Phi_1}{\alpha_1} \quad . \quad (8)$$

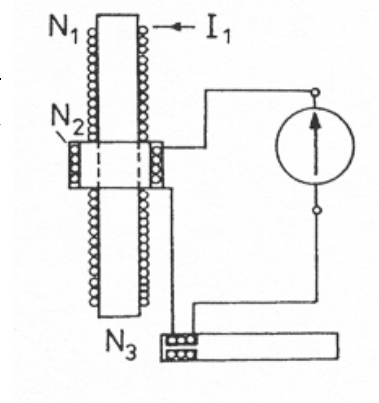


Abb. 2: Schaltung der Spulen beim Kalibrieren und Messen

### 3.2 Feldmessung

Eine Sondenspule (Nr. 3) mit Abmessungen von wenigen mm und bekannter Windungsfläche  $A_{eff} = N_3 A_3$  wird in die Ausgangsposition am Ort mit der Induktion  $B_3$  gebracht und sehr schnell in den feldfreien Raum herausgezogen. Dabei entsteht der ballistische Ausschlag  $\alpha_3 = \frac{1}{k_1} N_3 \Delta \Phi_3 = \frac{1}{k_1} N_3 A_3 (\vec{n}_{a3} \cdot \vec{B}_3) = \frac{1}{k_1} N_3 A_3 B_3 \cos \varphi$ , wenn die Normale ( $\vec{n}_{a3}$ ) der Spule 3 und die gesuchte Induktion  $\vec{B}_3$  den Winkel  $\varphi$  einschließen. Zur Bestimmung der z-Komponente ist  $\vec{n}_{a3} = \vec{e}_z$  und  $B_z$  bzw.  $H_z$  ergeben sich zu:

$$B_z = \frac{k_1}{N_3 A_3} \alpha_3 \quad \text{bzw.} \quad H_z = \frac{k_1}{\mu_0 N_3 A_3} \alpha_3 \quad . \quad (9)$$

### 3.3 Bestimmung der axialen Feld-Verteilung

Mit Hilfe einer Lehre wird das Ende der zylindrischen Sondenspule in die definierte Ausgangsposition auf der Achse der zu untersuchenden Feldspule gebracht. Aus der axialen Position (in der Nähe des Maximums hinreichend enge Abstände wählen) wird sie mehrmals herausgezogen. Nach Mittelung über die jeweiligen ballistischen Ausschläge wird  $\alpha_3(z)$  (bzw.  $\alpha_3(z)/\mu_0 N_3 A_3$ ) graphisch dargestellt.

### 3.4 Bestimmung der Hysterese

Im Maximum der Feldverteilung kann qualitativ die Hysterese des Materials der Eisenkapselung bestimmt werden. Dazu wird zunächst der maximale Feldstrom eingeregelt und die Sondenspule drei mal herausgezogen. Danach werden die Feldströme stufenweise auf Null geregelt (ca. 5 Schritte), danach umgepolt und zur negativen Sättigung angesteuert (10 Schritte) und von dort aus derselbe Vorgang in umgekehrter Richtung wiederholt. Man trägt auf:  $H_z = f(I)$ .

### 3.5 Radiale Feldabhängigkeit

Für einen Abstand (oder mehrere Abstände) von der Achse ( $r_1, r_2, \dots$ ) wird die Position der Sonde in axialer Richtung variiert und die jeweiligen ballistischen Ausschläge werden gemessen. Die ermittelte radiale Abhängigkeit:  $H_z(r)$ , kann in der Nähe großer Krümmung (1. im Maximum, 2. ab Wendepunkt) mit der zweiten numerischen Ableitung (Differenzen-Quotient des 1. Differenzen-Quotienten in der Werte-Tabelle) von  $H_{r=0,z}$  nach  $z$  grob kontrolliert werden (Vorzeichen, Größenordnung, s. Anhang).

## 4 Anhang

### 4.1 Der Maximalausschlag des ballistischen Galvanometers

Zur Herleitung von Gl.(4) geht man aus von der inhomogenen Dgl. der harmonischen Drehschwingung [3]

$$J_T \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + M_\delta + J_T \omega_0^2 \alpha = \Phi_G^* \frac{dQ}{dt} = \Phi_G^* I \quad (10)$$

(mit  $M_\delta = 2\delta \frac{d\alpha}{dt}$  als Dämpfungsmoment,  $J_T$  als Trägheitsmoment,  $n_G A_G B_G = \Phi_G^*$  als Galvanometerkonstante,  $\omega_0^2 = \frac{M_D}{J_T}$ ,  $M_D$  als Direktionsmoment der elastischen Aufhängung) und zwar in zwei Schritten:

1. Während der sehr kurzen Meßzeit (Stoßzeit) sind sowohl  $\frac{d\alpha}{dt}$  als auch  $\alpha$  gleich Null, so daß sich die Gl.(10) reduziert zu  $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \frac{\Phi_G^*}{J_T} \frac{dQ}{dt}$ . D. h. , der Spule wird mit einem Drehimpuls eine Start-Winkelgeschwindigkeit zur Zeit  $t = 0$  erteilt (bezeichnet mit  $u_0 = (\frac{d\alpha}{dt})_{(t=0)} = \frac{\Phi_G^* Q}{J_T}$ ).
2. Für diese Anfangsbedingung  $(\frac{d\alpha}{dt})_{(t=0)} = u_0$  muß der homogene Teil der Dgl. (10) für das sich selbst überlassene Galvanometer gelöst werden. Ist die Drehspule des Galvanometers in Bewegung, so wird in der Drehspule die Spannung  $U_i^* = -\Phi_G^* \frac{d\alpha}{dt}$  induziert, die das Dämpfungsmoment zur Folge hat:

$$M_\delta = \Phi_G^* \cdot I = \Phi_G^* \cdot \frac{U_i^*}{R_{ges}} = \frac{\Phi_G^{*2}}{R_{ges}} \frac{d\alpha}{dt} \quad . \quad \text{D. h.} \quad \delta = \frac{1}{2} \frac{\Phi_G^{*2}}{R_{ges}} \quad (11)$$

Ausgehend von der allgemeinen Lösung der gedämpften Schwingung  $\alpha(t) = e^{-\delta t}(a \sin \omega t + b \cos \omega t)$  findet man durch Koeffizientenvergleich wegen  $\alpha(t=0) = 0$   $b=0$  sowie  $(\frac{d\alpha}{dt})_{(t=0)} = u_0$  die Konstante  $a$  zu:  $a = \frac{u_0}{\omega}$ , womit sich die Lösung der homogenen Dgl. (10) und die erste Ableitung schreiben:

$$\alpha = \frac{u_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t \quad ; \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha}{dt} = u_0 e^{-\delta t} \left( \cos \omega t - \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (12)$$

Der erste Umkehrpunkt (Maximalausschlag  $\alpha_{max}$ ) bedeutet  $(\frac{d\alpha}{dt})_{max} = 0$ , woraus  $\tan \omega t = \omega/\delta = 2\pi/\Lambda$  und  $\sin \omega t = \frac{\omega}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} = \frac{\omega}{\omega_0}$  folgt mit dem logarithmischen Dekrement  $\Lambda = \delta T$ .

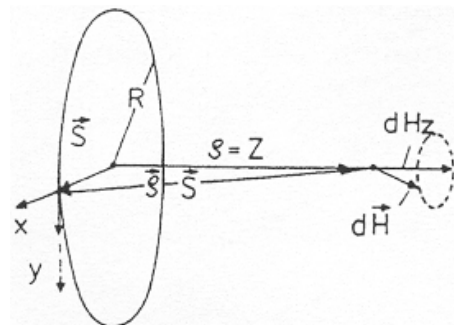
Damit ist die Zeit bis zum Umkehrpunkt  $t_1 = (\arctan \frac{2\pi}{\Lambda})/\omega$ , so daß sich für den gesuchten Ausschlag schließlich ergibt

$$\alpha_{max} = \frac{u_0}{\omega} \frac{\omega}{\omega_0} e^{-\delta t} = \frac{u_0}{\omega} e^{-[\frac{\Lambda}{2\pi} \arctan \frac{2\pi}{\Lambda}]} = \frac{\Phi_G \int U_i dt}{J_T \omega_0} \cdot e^{-C} \quad (13)$$

mit  $C = [\frac{\Lambda}{2\pi} \arctan \frac{2\pi}{\Lambda}]$ . Bei konstanter Dämpfung ist also der Maximalausschlag dem Spannungsstoß proportional. Für den ungedämpften Fall ( $\delta = 0$ ,  $\Lambda = 0$ ), z.B. näherungsweise bei der Entladung eines Kondensators, wird  $\omega = \omega_0$  und das analoge Ergebnis folgt aus dem Energieerhaltungssatz:  $\frac{J_T}{2} u_0^2 = \frac{\omega_0^2 J_T}{2} \alpha_{max}^2$  zu  $\alpha_{max} = \frac{u_0}{\omega_0}$ . Beim Kriechgalvanometer oder Fluxmeter sind in Gl. (10)  $M_D$  und  $J_T$  zu vernachlässigen, so daß aus  $(\Phi_G^*/R_{ges}) d\alpha/dt = \Phi_G^* \cdot \int I dt$  sofort folgt  $(\alpha_2 - \alpha_1) = \int U dt / \Phi_G^*$ .

### 4.2 Kurze Spulen und Feldverteilung

Die meisten Feldspulen haben zylindrische Symmetrie und eine endliche Länge. Die Grundlage für die Berechnung von beliebigen zylindrischen Spulen stellt die **kreisförmige Stromschleife** dar.



Die ma-

Abb. 3: Zum Feld der Stromschleife  
magnetische Feldstärke auf der Symmetrieachse folgt aus dem Gesetz von Biot-Savart

( $\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times (\vec{\rho} - \vec{s})}{|\vec{\rho} - \vec{s}|^3}$ ) mit  $\vec{\rho} = z\vec{e}_z$ ;  $\vec{s} = R\vec{e}_x$ ;  $d\vec{s} = ds\vec{e}_y$ ;  $d\vec{s} \times (\vec{\rho} - \vec{s}) = zds\vec{e}_x + Rds\vec{e}_z$  im Abstand  $z$  auf der Achse, wo sich die Radialkomponenten ( $zds\vec{e}_x$ ) kompensieren, zu

$$|H_z\vec{e}_z| = \left| \frac{I}{4\pi} \int \frac{Rds\vec{e}_z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right| = \frac{I}{4\pi} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R = \frac{I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (14)$$

In großer Entfernung (Dipolnäherung,  $R \ll (z^2 + x^2)$ ) erzeugt die Kreisschleife ein Dipolfeld; (in der x-z-Ebene ( $H_x$  Radialkomponente));  $\vec{H} = H_x\vec{e}_x + H_z\vec{e}_z$ ;

$$\vec{H} = \frac{R^2 I}{4(x^2 + z^2)^{5/2}} (3xz\vec{e}_x + (2z^2 - x^2)\vec{e}_z) \quad (15)$$

Für eine **einlagige Zylinderspule** (Länge  $l$ , Radius  $R$ ) liefert die Integration von Gl. (14) mit  $\frac{dI}{NI} = \frac{dz}{l}$  für die Spulenmitte

$$H_{(z, Sp, m)} = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{+l/2} dI \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{NI}{2\sqrt{R^2 + l^2/4}} \quad (16)$$

(Man betrachte die Grenzübergänge  $l \gg R$  sowie  $l \ll R$ !)

### 4.3 Inhomogenes Feld

Mit abnehmender Länge erzeugen stromdurchflossene Spulen wegen des zunehmenden Einflusses des Dipolfeldes nach Gl. (15) inhomogene Magnetfelder. Das inhomogene rotationssymmetrische Feld wird beschrieben durch  $H_z(r, z)$  sowie  $H_r(r, z)$ . Im achsennahen Luftraum einer axialsymmetrischen Linsen-Spule liefern die Maxwellschen Gleichungen für die Axial- und Radial-Komponente in Zylinderkoordinaten

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{div}\vec{H} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

$$\text{rot}\vec{H} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = 0 \quad . \quad (18)$$

Allgemein können die Komponenten für geringe Abstände  $r$  von der z-Achse entwickelt werden ( $H' = \partial H / \partial z$ ):

$$H_z(r, z) = H(z) - H''(z)r^2/4 + H^{(4)}(z)r^4/64 - .. \quad (19)$$

$$H_r(r, z) = -H'(z)r/2 + H'''(z)r^3/16 - .. \quad (20)$$

Durch Differenzieren der Reihenentwicklungen Gln. (19,20) (sowie auch (15)) berzeuge man sich, daß die Gln. (17) und (18) erfüllt werden.

Mit Gl. (19) besteht die Möglichkeit, aus der gemessenen axialen Feld-abhängigkeit  $H_{z,(r=0)}$  mit deren numerischer 2. Ableitung die radiale Abnahme von  $H_z$  (um  $\Delta H_z = H''_z \frac{r_1^2}{4}$ ) abzuschätzen und (in der Nähe großer Krümmung von  $H_z(z)$ ) und mit dem Meßwert  $H_z(z, r_1)$  zu vergleichen.

### 4.4 Effektive Windungsfläche der Meßspule

Abgesehen von der Forderung nach Homogenität des zu messenden Feldes wird die absolute Meßgenauigkeit wesentlich durch den Fehler der effektiven Windungsfläche  $(N_3 A_3)_{eff}$  der Meßspule bestimmt. Diese kann für mehrlagige Spulen bei bekannten Radien ( $r_i; r_a$ ) des Wickelkörpers und der als homogen verteilt angenommenen Windungszahl  $N_3$  abgeschätzt bzw. berechnet werden nach (beachte  $\frac{dN}{N_3} = \frac{dr}{(r_a - r_i)}$ )

$$(N_3 A_3)_{eff} \approx N_3 \pi \bar{r}^2 = N_3 \frac{\pi (r_a + r_i)^2}{4} \quad (a) \quad \text{bzw.} \quad (N_3 A_3)_{eff} = \int_{r_i}^{r_a} \pi r^2 dN \quad (b) \quad . \quad (21)$$

## 5 Fragen

- Wie lauten Induktionsgesetz und Durchflutungsgesetz?
- Welche Meßverfahren gibt es für die magnetische Feldstärke, die magnetische Induktion und den magnetischen Fluß?
- Wie berechnet sich die magnetische Feldstärke für eine stromdurchflossene Kreis-Schleife sowie kurze Zylinderspulen?
- Wovon hängt der Ausschlag des ballistischen Galvanometers ab?
- Man berechne den Unterschied in den effektiven Windungsflächen nach Gl. (21 a bzw. b) für folgendes Beispiel:  $r_a = 4 \text{ mm}$ ;  $r_i = 1 \text{ mm}$ ;  $N=100$ .
- Wie lauten die Bewegungsgleichungen für das Stoßgalvanometer und das Fluxmeter?
- Was versteht man unter der magnetische Hysterese eines ferromagnetischen Stoffes.
- Was ist ein Spannungsstoß? Wie hängt er mit der Ladung zusammen?
- Wie klein sollte die Sondenspule (3) sein?
- Man berechne für eine endlich lange Spule den mindest notwendigen  $(\frac{l}{R})$ -Wert, so daß im Zentrum  $H_z \geq 0,99 H_{z,ideal}$  beträgt ( $H_{z,ideal} = \frac{nI}{l}$ ).

## Literatur

- [1] W. Ilberg, M. Krötsch, D. Geschke, P. Kirsten, W. Schenk, A. Schneider, H. Schulze, Physikalisches Praktikum für Anfänger, Leipzig 1994
- [2] A. Recknagel, Physik, E-Lehre, Berlin 1990
- [3] W.-H. Westphal, Physikalisches Praktikum, V. Vieweg 1971
- [4] Gerthsen (H. Vogel) Physik, V. Springer, Berlin 1995
- [5] H. Niedrig, Physik, Berlin 1992
- [6] H. -J. Paus, Physik in Experimenten und Beispielen, V. Hanser, München 1995
- [7] G. Wunsch, H.-G. Schulz, Elektromagnetische Felder, V. T. Berlin 1989
- [8] G. Mierdel, S. Wagner, Aufgaben z. Theoretischen E.-Technik, Berlin 1976