

Erzwungene Schwingungen

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	2
2	Allgemeine Grundlagen	2
2.1	Freie Schwingungen	2
2.2	Erzwungene Schwingungen	2
2.2.1	Amplitude und Phase	2
2.2.2	Resonanzfrequenz	3
2.2.3	Amplitude des statischen Grenzfalls	3
2.3	Resonanzamplitude, Güte	3
2.4	Näherung für schwache Dämpfung; Bandbreite	3
2.5	Wirbelstromdämpfung	4
3	Experimente	4
3.1	Bestimmung der Eigenfrequenz und des Dämpfungsfaktors	4
3.2	Pohlsches Rad	4
3.3	Aufnahme der Resonanzkurven	4
4	Anhang	5
4.1	Zur Güte	5
4.2	Resonanz von elektrischen Schwingkreisen	5
4.2.1	Reihen-Schwingkreis	5
4.2.2	Parallel-Schwingkreis	6
4.3	Nichtlinearitäten	6
4.4	Fragen	7

1 Aufgabenstellung

1. Bestimmung der Eigenfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung sowie der Dämpfungsfaktoren δ für verschiedene B -Werte der Wirbelstrombremse.
2. Messung der Frequenzabhängigkeit von Amplitude $\hat{\varphi}(\omega)$ und Phase $\alpha(\omega)$ mit Hilfe des Pohlischen Rades im Bereich von $f = 0,2$ bis $1,2$ Hz für drei verschiedene Dämpfungen ($\delta \approx \omega_0/4$; $\approx \omega_0/8$; $\approx \omega_0/20$).
3. Vergleich a. der Güte-Werte und der Bandbreiten mit der theoretischen Näherung und b. einer auf den Maximal-Wert normierten experimentellen Resonanzkurve mit der berechneten (in der Vorbereitung für $\omega_0 = 4\delta$ sowie $\omega_0 = 3,14 \text{ s}^{-1}$).

2 Allgemeine Grundlagen

2.1 Freie Schwingungen

Die Bewegungsgleichungen für **freie ungedämpfte bzw. gedämpfte** harmonische Drehschwingungen lauten

$$J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + M_d\varphi = 0 \quad \text{bzw.} \quad J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + r \cdot \frac{d\varphi}{dt} + M_d\varphi = 0 \quad (1)$$

mit den Lösungen

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cdot e^{j\omega_0 t} \quad \text{bzw.} \quad \varphi(t) = \hat{\varphi} \cdot e^{-\delta t} \cdot e^{j\omega t} \quad (2)$$

für geringe Dämpfung ($\delta < \omega_0$). Dabei bedeuten:

φ : Drehwinkel, r : Reibungskonstante, $(r \cdot \frac{d\varphi}{dt})$: Dämpfungsmoment ($[r] = \text{Nms/rad}$), J : Massen-Trägheitsmoment, M_d : Direktionsmoment, $\omega_0 = \sqrt{\frac{M_d}{J}}$: Eigen-Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$: Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung, $\delta = \frac{r}{2J}$: Dämpfungskonstante.

2.2 Erzwungene Schwingungen

2.2.1 Amplitude und Phase

Eine Spiralfeder mit dem Direktionsmoment M_d erzeugt eine stabile Gleichgewichtslage des Pohlischen Rades. Mit einem Kurbelantrieb wird ein sinusförmiges Drehmoment $\hat{M} \cdot e^{j\omega t}$ erzeugt (Erreger). Dabei führt das Pohlische Rad (Resonator) Drehschwingungen mit der Kreisfrequenz ω und der Amplitude $\hat{\varphi}(\omega)$ aus. Die Phase des Resonators ist bezüglich der des Erregers um $\alpha(\omega)$ verschoben. Die Bewegungsgleichung lautet

$$J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + r \cdot \frac{d\varphi}{dt} + M_d\varphi = \hat{M} \cdot e^{j\omega t} \quad (3)$$

Mit dem Lösungsansatz für (3): $\varphi(t) = \hat{\varphi} \cdot e^{j(\omega t - \alpha)}$, folgen für den eingeschwungenen Zustand die Lösungen

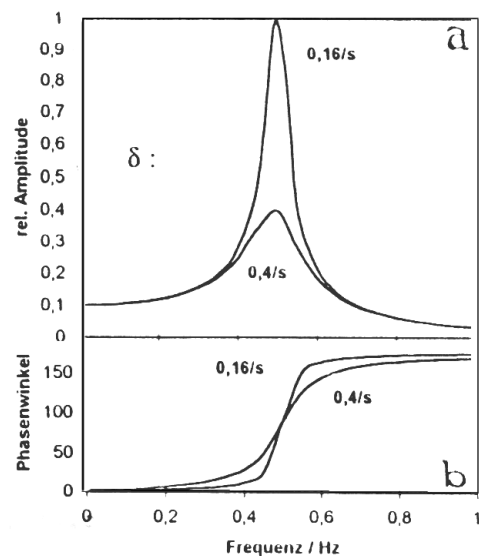


Abb. 1: Resonanz-Kurven für die Amplitude (a) und die Phase (b);
Parameter: Dämpfungskonstante.

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{\hat{M}/J}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (a) \quad \text{und} \quad \tan \alpha(\omega) = \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (b) \quad (4)$$

Gl. (4 a) lässt sich normieren mit

$$A(\omega) = \frac{\hat{\varphi}}{\hat{M}/J} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad . \quad (5)$$

2.2.2 Resonanzfrequenz

Bei der dämpfungsabhängigen Resonanzfrequenz ω_{res} wird die Amplitude nach (4 a) maximal

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad . \quad (6)$$

2.2.3 Amplitude des statischen Grenzfalls

Für $\omega = 0$ folgt aus (4 a) für die Amplitude des statischen Grenzfalls

$$\hat{\varphi}_{stat} = \frac{\hat{M}/J}{\sqrt{\omega_0^4}} = \frac{\hat{M}/J}{\omega_0^2} \quad . \quad (7)$$

2.3 Resonanzamplitude, Güte

Setzt man ω_{res} in (4 a) ein, so ergibt sich für die Resonanz-Amplitude

$$\hat{\varphi}_{res} = \frac{\hat{M}/J}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad . \quad (8)$$

Das Verhältnis aus (8) und (7) ist die **Resonanzüberhöhung oder Güte Q** :

$$Q = \frac{\hat{\varphi}_{res}}{\hat{\varphi}_{stat}} = \frac{\omega_0^2}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad . \quad (9)$$

2.4 Näherung für schwache Dämpfung; Bandbreite

Für $\delta \ll \omega_0$ folgt aus (8)

$$Q \approx \frac{\hat{\varphi}(\omega_0)}{\hat{\varphi}_{stat}} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0 J}{r} = \frac{\pi}{\Lambda} \quad (10)$$

mit Λ als logarithmisches Dekrement.

Bandbreite:

Für geringe Dämpfung kann das Maximum von (4 a) durch $\hat{\varphi}(\omega_0) \approx \frac{\hat{M}/J}{2\delta\omega_0}$ angenähert werden. Im Abstand $\Delta\omega$ des etwa bei ω_0 gelegenen Maximums wird beidseitig der halbe Amplitudenwert $\hat{\varphi}(\omega_0)/2 = \frac{\hat{M}/J}{4\delta\omega_0}$ erreicht. Für $\Delta\omega$ findet man in grober Näherung (s. Anhang)

$$\Delta\omega \approx 2\delta \approx \frac{\omega_0}{Q} \quad . \quad (11)$$

Damit beträgt im Rahmen der Näherungen die absolute Halbwertsbreite für die Amplitude $2\Delta\omega_0 \approx 4\delta$ und die relative Halbwertsbreite: $\frac{2\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{1}{2Q}$.

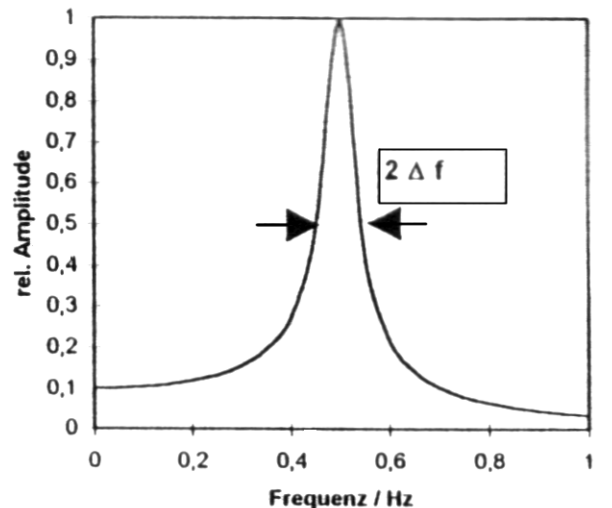


Abb. 2: Halbwertsbreite einer Resonanz-Kurve.

2.5 Wirbelstromdämpfung

Bewegt sich ein räumlich ausgedehnter massiver elektrischer Leiter in x-Richtung senkrecht zu einem räumlich begrenzten Magnetfeld, so werden in der Teilfläche A des Leiters, in der $\frac{dB}{dx} \neq 0$ ist, Wirbelströme $I_w \sim A \frac{d(B)}{dx} \frac{dx}{dt}$ induziert. Diese sind von magnetischen Momenten $m^* \sim I_w \sim A \frac{d(B)}{dx} \frac{dx}{dt}$ begleitet. Diese magnetischen Momente erfahren Kräfte: $F \sim m^* \frac{dB}{dx} \sim (\frac{dB}{dx})^2 \cdot (\frac{dx}{dt})$. Somit sind bei vorgegebener räumlicher Feldverteilung die durch Wirbelströme induzierten Dämpfungsmomente näherungsweise der Winkelgeschwindigkeit $(\frac{dx}{dt})/R^*$ und B^2 proportional (R^* =Radius) und es gilt

$$(r \cdot \frac{d\varphi}{dt}) \sim R^* B^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{bzw.} \quad \delta \sim B^2 \quad . \quad (12)$$

Die Luftspaltinduktion $B = \mu_0 H$ wird mit einem kleinen Elektromagneten erzeugt, dessen Kennlinie $B(I_f)$ aufgrund der Hysterese weder linear noch eindeutig ist (I_f = Feldstrom). Daher werden die gewünschten δ -Werte, stets beginnend in der Sättigung bei $I_{f,max} \approx 450$ mA, durch Erniedrigen des Feldstromes einreguliert.

3 Experimente

3.1 Bestimmung der Eigenfrequenz und des Dämpfungsfaktors

1. Bei minimaler Dämpfung wird durch wiederholte Messungen der Schwingungsdauer T des mit der Hand ausgelenkten Pohlschen Rades die Eigen-Kreisfrequenz $\omega_0 \approx 2\pi/T$ bestimmt.
2. Der Dämpfungsfaktor δ kann aus dem Abklingen der Amplitude der freien Schwingung ermittelt werden. Dazu werden für ca. 5 Dämpfungswerte nach einmaliger Auslenkung des Rades die auf einer Seite aufeinanderfolgenden Amplituden $(\hat{\varphi}(t_1); \hat{\varphi}(t_1 + T); \hat{\varphi}(t_1 + 2T); \dots)$ notiert. Aus deren Verhältnis ergibt sich über das logarithmische Dekrement Λ der Dämpfungsfaktor δ

$$\Lambda = \ln \left[\frac{\hat{\varphi}(t_1)}{\hat{\varphi}(t_1 + T)} \right] = \ln \left[\frac{\hat{\varphi}(t_1 + T)}{\hat{\varphi}(t_1 + 2T)} \right] = \delta \cdot T \quad \text{bzw.} \quad \delta = \frac{\Lambda}{T} = \frac{\Lambda \omega}{2\pi} \quad . \quad (13)$$

Die ermittelten Dämpfungsfaktoren werden über B^2 graphisch dargestellt.

3.2 Pohlsches Rad

Mit dem Pohlschen Rad können bei fest eingestellter Amplitude des Erregers bei variabler Erregerfrequenz (regelbarer Gleichstrom-Motor mit Kurbeltrieb) sowohl die Amplitude des Resonators als auch der Phasenwinkel zwischen Erreger und Resonator bestimmt werden.

Mit zwei gegeneinander verdrehbaren Kurbelscheiben erfolgt die Voreinstellung des Phasenwinkels α zwischen 0 und 180 ° in Schritten von 10 °. Im Falle des scheinbaren Phasenabgleichs zwischen Erreger und Resonator (Gleichlauf der Zeiger) entspricht der voreingestellte Winkel dem gesuchten Phasenwinkel.

3.3 Aufnahme der Resonanzkurven

Für drei unterschiedliche Dämpfungen ist die Abhängigkeit der Amplitude und des Phasenwinkels von der Erregerfrequenz aufzunehmen:

1. Mit der Feinregelung wird eine gewünschte Motordrehzahl einreguliert.
1. Der Phasewinkel wird solange verändert, bis ein Gleichlauf der Zeiger erreicht ist.
2. Die Schwingungsdauer des Erregers wird mit der Stoppuhr gemessen.
3. Die Amplitude wird nach Beendigung des Einschwingvorganges am Winkelmesser abgelesen.

Die Resonanzkurven für Amplitude und Phase sind graphisch darzustellen und die ermittelten Werte für die Resonanzfrequenz, die Güte und die Bandbreite mit der Theorie zu vergleichen.

4 Anhang

4.1 Zur Güte

Bei den Kreisfrequenzen $\omega_{\pm 1/2}$ ist die Amplitude beiderseits des Maximums auf den halben Wert abgesunken. Man führt die halbe Halwertsbreite mit $\Delta\omega = |\omega_0 - \omega_{1/2}|$ ein und vergleicht den halben Wert der normierten Amplitude nach (5) für $\omega = \omega_0$, d. h. $A(\omega_0)/2 = 1/4\delta\omega_0$ mit $A(\omega_{1/2})$. Für die Quadrate der Nenner folgt in grober Näherung

$$16\delta^2\omega_0^2 \approx [(\omega_0 - \omega_{1/2})(\omega_0 + \omega_{1/2})]^2 + 4\delta^2\omega_0^2 = [\Delta\omega_0 \, 2\omega_0]^2 + 4\delta^2\omega_0^2 = \Delta\omega_0^2 \, 4\omega_0^2 + 4\delta^2\omega_0^2 \quad (14)$$

oder

$$3\delta^2 \approx \Delta\omega^2 \quad ; \text{ bzw. } \Delta\omega \approx \sqrt{3}\delta \approx 2\delta \quad . \quad (15)$$

4.2 Resonanz von elektrischen Schwingkreisen

4.2.1 Reihen-Schwingkreis

Die Reihenschaltung eines Widerstandes R_r , einer Induktivität L und einer Kapazität C führt beim Einspeisen einer harmonischen Wechselspannung $\underline{U} = \hat{U}e^{j\omega t}$ erzwungene Schwingungen durch. Mit \underline{Q}^* als Ladung folgt die den Vorgang beschreibende Dgl. aus dem Maschensatz $\Sigma U = 0$:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q^*}{C} = \hat{U}e^{j\omega t} \quad . \quad (16)$$

Differenziert man die Gl. (16) nach t , so erhält man wegen

$$\underline{I} = \frac{dQ^*}{dt} = \omega \hat{Q}^* \cdot j \cdot e^{j(\omega t - \alpha)} = \omega \hat{Q}^* \cdot e^{j(\omega t - \alpha + \pi/2)} \quad (17)$$

eine Dgl. für Q^* . Diese gleicht (3), wenn man φ durch \underline{Q}^* ; r durch R ; m durch L und M_d durch $1/C$ ersetzt:

$$\frac{d^2 Q^*}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ^*}{dt} + \frac{1}{LC} Q^* = \frac{\hat{U}}{L} e^{j\omega t} \quad (a); \quad \text{Lsung: } \hat{Q}^* = \frac{\hat{U}/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (b). \quad (18)$$

Die Tab. 1 gibt einen Überblick über die analogen Beziehungen.

Tab. 1: Analoge Größen für mechnische und elektrische Resonanzen.

Oszillator	Elongation	ω_0^2	δ	Güte
linearer	Länge: x	$\frac{k}{m}$	$\frac{r^*}{2m}$	$\frac{\omega_0 m}{r^*}$
Rotator	Winkel: φ	$\frac{M_d}{J}$	$\frac{r}{2J}$	$\frac{\omega_0 J}{r}$
Reihen-Kreis	Ladung: Q^*	$\frac{1}{LC}$	$\frac{R_r}{2L}$	$\frac{\omega_0 L}{R}$
Parallel-Kreis	magn. Fluß: Φ	$\frac{1}{LC}$	$\frac{G}{2C}$	$\frac{\omega_0 C}{G}$

Zu beachten ist beim Reihen-Schwingkreis, daß nicht \hat{Q}^* , sondern \hat{I} (beim Parallelkreis \hat{U} anstelle von $\hat{\Phi}$) gemessen wird. Aus (17, 18) folgt für den Wechselstrom

$$\underline{I} = \omega \hat{Q}^* \cdot e^{j(\omega t - \alpha + \pi/2)} = \frac{\omega \hat{U}/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cdot e^{j(\omega t - \alpha + \pi/2)} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 + R^2}} \cdot e^{j(\omega t - \alpha + \pi/2)} \quad (b). \quad (19)$$

mit α nach (4 b). Zu beachten:

1. Es existiert zwar für \hat{Q}^* nicht aber für \hat{I} eine endliche Amplitude für $\omega = 0$.
2. Für die Phase der maßgeblichen harmonischen Größe \underline{Q}^* gilt zwar die der Gl. (4b) entsprechende Beziehung, der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung unterscheidet sich aber davon wegen (17) um $\pi/2$.

4.2.2 Parallel-Schwingkreis

Ausgehend vom Reihenschwingkreis sind jetzt \underline{U} durch \underline{I} bzw. L durch C sowie der Reihenwiderstand R_r durch den Leitwert $G = 1/R_p$ zu ersetzen. Beim Einspeisen in die Parallel-Schaltung von R_p , L und C wird eine erzwungene Schwingung für die Spannung beobachtet. Analog zu (17) gilt für den magnetischen Fluß in der Spule $\frac{d\Phi}{dt} = \underline{U}$ und die maßgebliche Dgl. lautet

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{LC} \Phi = \frac{\hat{I}}{C} e^{j\omega t} \quad (a); \quad \text{Lsung:} \quad \hat{\Phi}(\omega) = \frac{\hat{I}/C}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (b). \quad (20)$$

Für die harmonische Wechselspannung folgt

$$\underline{U} = \omega \hat{\Phi} \cdot e^{j(\omega t - \alpha + \pi/2)} = \frac{\omega \hat{I}/C}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cdot e^{j(\omega t - \alpha + \pi/2)} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{(\omega C - \frac{1}{\omega L})^2 + G^2}} \cdot e^{j(\omega t - \alpha + \pi/2)} \quad (b). \quad (21)$$

4.3 Nichtlinearitäten

(B. Vongxaya 1993)

Mit den folgenden Ausführungen wird gezeigt, wie man mit Hilfe des Pohlschen Rades durch Anbringen einer Zusatzmasse (Unwucht am Umfang von z. B. ca. 45 g) typische nichtlineare Phänomene erzeugen kann.

Die Zusatzmasse erzeugt ein zusätzliches in φ nichtlineares Drehmoment $M_{mech} = mgl \cdot \sin \varphi$, was ein Doppelmuldenpotential zur Folge hat (Vergl. Abb.3).

Dadurch treten nichtlineare Sprungphänomene, Periodenvervielfachung und chaotische Lösungen auf. Der endgültige Schwingungszustand hängt stark von den Anfangsbedingungen, sowie der Erregerfrequenz, Erregeramplitude und Dämpfung ab.

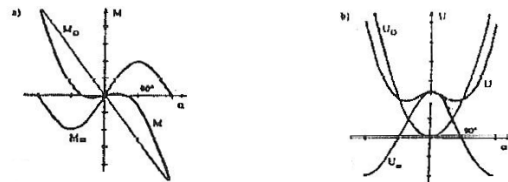


Abb. 3: Resultierendes Drehmoment (a) und Doppelmulden-Potential (b)

1. Sprungphänomen: Bei geringer Dämpfung und langsamen Durchfahren der Erregerfrequenz ändert sich die Amplitude sprunghaft. Wenn man die Resonanzkurve in verschiedenen Richtungen durchfährt, bemerkt man zwei verschiedene Schwingungen mit unterschiedlichen Amplituden (Bistabilität).

2. Peridenverdopplung: Bei fester Erregerfrequenz und variabler Erregeramplitude kann bei bestimmter Dämpfung eine weitere Schwingung mit der Frequenz $f/2$ beobachtet werden.

3. Chaos:

Bei hinreichend geringer Dämpfung und großer Erregeramplitude treten weitere Periodenvervielfachungen und schließlich chaotische Schwingungen auf.

Mögliche Aufgaben:

1. Bei einer Zusatzmasse von 45 g ist für einen Bremsstrom von 240 mA die Frequenzabhängigkeit der Amplitude und daraus der Bereich der Bistabilität zu ermitteln.
2. Bei fester Erregerfrequenz ($\omega > \omega_{res}$) ist die Dämpfung in 10 mA-Schritten zu verringern und die erste Periodenverdopplung und die erste chaotische Schwingung zu suchen.

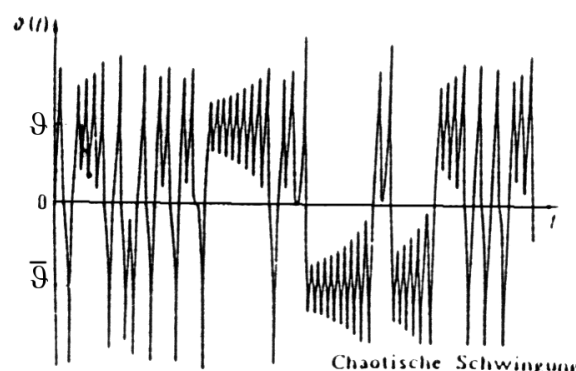


Abb. 4: Beispiel für Bistabilität

5 Fragen

1. Unter welcher Voraussetzung kann eine mechanische Anordnung harmonische Schwingungen ausführen?
2. Man löse und diskutiere die Differentialgleichungen der gedämpften und erzwungenen Schwingung.
3. Wodurch wird die Eigenfrequenz des Pohlschen Rades bestimmt? Wie kann man die Einflußgrößen berechnen?
4. Mit welcher Frequenz schwingt das Pohlsche Rad bei einer erzwungenen Schwingung und bei einer freien gedämpften Schwingung? Bei welcher Frequenz ist die Resonanzamplitude maximal?
5. Zeichnen und erläutern Sie eine Resonanzkurve für Amplitude und Phase.
6. Nennen Sie Analogien zwischen mechanischen und elektrischen Schwingungen für den Reihen- und Parallel-Schwingkreis. Was besagt die Thomsonsche Schwingungsgleichung?
7. Bis zu welcher Dämpfung hat die Resonanzkurve ein Maximum?
8. Was versteht man unter dem logarithmischen Dekrement? Wie bestimmt man experimentell den Dämpfungsfaktor?
9. Wodurch werden die Güte und die Bandbreite von Resonatoren bestimmt?
10. Man berechne (zu Hause!) eine normierte Resonanzkurve $(\frac{\hat{\varphi}(\omega)}{M^*/J} = f(\omega, \omega_0, \delta))$ für $\delta = 0,25\omega$; $\omega_0 = 3,14 \text{ s}^{-1}$.
11. Was sind und wie entstehen Wirbelströme? Wie berechnet sich das Dämpfungsmoment einer Wirbelstrombremse?
12. Erläutern Sie die Abhängigkeit von Amplitude und Phase des Pohlschen Rades von der Erregerfrequenz und der Erregeramplitude.

Literatur

- [1] H. Niedrig, Physik, Springer-V. Berlin 1992
- [2] A. Recknagel, Physik, Bd. I, II, III
- [3] H. Stroppe, Physik, Fachbuch-V.- Leipzig 1984
- [4] F. Kohlrausch, Praktische Physik, Bd.2 ,Verl. Teubner 1985
- [5] H. J. Paus, Physik, V. C. Hanser, München 1995
- [6] Gerthsen, Physik (H. Vogel), Springer Berlin 1995
- [7] R. Worg, Deterministisches Chaos, BI-WI.-V. Mannheim 1993
- [8] Vongxaya B., Nichtlineare Schwingungen, Comp.-Lernprogr.; TU Dresden; Diss. 1994