| Technische Universität Dresden<br>Fachrichtung Physik<br>R. Goldberg, L. Jahn 05/ 1998<br>bearbeitet 03/ 2004 | Physikalisches Praktikum<br><br>Versuch: FA |
|---|---|

# Fehleranalyse

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Aufgabenstellung

Die Schwingungsdauer $T$ eines Fadenpendels ist 10- bis 200mal einzeln zu messen und die Resultate sind hinsichtlich des arithmetischen Mittels $\overline{T}$, der Standardabweichung $s_T$ und Verteilungsfunktion von $T$ zu analysieren:
1. Für die 10 Messungen sind von Hand $\overline{T}$ und $s_T$ zu berechnen,
2. nach der Klasseneinteilung ist für die 50, 100 und 200 Messungen anhand der Häufigkeitsverteilung und einer Darstellung der Summenkurve auf Wahrscheinlichkeitspapier das Vorliegen einer Gauß-Verteilung zu prüfen.

# 2 Auswertung von Beobachtungen

## 2.1 Messen

**Messen** ist ein experimenteller Vorgang, durch den ein spezieller Wert einer physikalischen Größe (der **Meßgröße**) als Vielfaches von ihrer Maßeinheit oder eines Bezugswertes ermittelt wird. Jedes Meßergebnis wird unter speziellen **Meßbedingungen** erzielt. Diese sind möglichst konstant zu halten und stets anzugeben. Das Meßresultat ist immer mit einer **Meßunsicherheit (Meßabweichung, Fehler)** behaftet.
**Kalibrieren**, im Eichamt **Eichen**, ist der Vergleich einer bezifferten Skale mit einem **Normal**. Jedes **Meßgerät** (Meßeinrichtung), das auf einem physikalischen **Meßprinzip** beruht, muß an ein **Sekundär- oder Primär-Normal** mit geringerer Meßunsicherheit angeschlossen sein.

## 2.2 Systematische und zufällige Fehler

Obwohl die Physik eine exakte Wissenschaft ist, geben Anzeigen von Meßgeräten nicht notwendig den exakten Wert einer Größe an. Vielmehr bleibt der exakte (tatsächliche oder wahre) Wert ($\mu$) unbekannt, und der gemessene Wert weicht infolge systematischer oder zufälliger Fehler davon ab. Im folgenden werden grobe Fehler bzw. Irrtümer ausgeschlossen. **Messungen sollten wiederholt werden**.

## 2.3 Systematische Fehler

Die systematische Meßunsicherheit (systematischer Fehler) ist eine bestimmte gemeinsame Abweichung aller einzelnen Meßwerte vom wahren Wert einer physikalischen Größe. Charakteristisch für einen systematischen Fehler ist, daß er bei einer Wiederholungsmessung unter gleichen Meßbedingungen nach Betrag und Vorzeichen gleich bleibt. Die Ursachen systematischer Fehler liegen z.B. in Unvollkommenheiten der Meßgeräte, der Versuchsbedingungen und der Sinnesorgane, in nicht erfaßten Umwelteinflüssen, in mangelnder Kalibrierung oder Justierung u.a.m..

### 2.3.1 Erfaßte systematische Fehler

In vielen Fällen können systematische Fehler durch Experimente oder Berechnungen bestimmt und durch eine Korrektion nach Betrag und Vorzeichen berücksichtigt werden.
Ist z.B. ein metallischer Maßstab bei $20^o$ C kalibriert worden und weicht die Meßtemperatur bei Messung einer Länge $l^*(T)$ von diesem Wert um $\pm\Delta T$ ab, so kann eine Korrektion $K$ über den bekannten Ausdehnungkoeffizienten $\alpha$ des Metalles erfolgen:
$l(T) = l^*(T) \cdot K = l^*(T)(1 \pm \alpha\Delta T)$.

### 2.3.2 Systematische Fehler mit zufälligem Charakter

Bei konstanten Bedingungen (z.B. Temperatur) bleiben die systematischen Fehler konstant, sind aber nicht bekannt. Es ist zweckmäßig, die vom Hersteller angegebenen Garantie-Fehlergrenzen (z.B. bei einem Maßstab: $\pm(0,1mm + 10^{-5}\, l)$ als (maximal möglichen) systematischen Fehler einzusetzen. Bei systematischen Fehlern ist jedoch zu beachten, daß sie sich bei Differenzmessungen mit dem gleichen Gerät teilweise kompensieren.
Hilfsmittel zur Abschätzung dieses Fehleranteils sind im Rahmen des Praktikums diese Garantie- und Eichfehler-Grenzen ( **Fehlergrenzen**), die einen vereinbarten Höchstbetrag für (positive oder negative) Abweichungen der Anzeige der Meßgeräte (Tab. 1) angeben:

**Tab. 1:** Beispiele von Garantie-und Eichfehler-Grenzen von Geräten:

| Gerät | (Max.)-Wert Meßbereich | Fehlergrenze |
|---|---|---|
| mechanischer Meßschieber | 15 cm | 50 $\mu$ m + $1 \cdot 10^{-4}$ l |
| Digitaler Meßschieber | 15 cm | 0,03 mm + 1 Digit |
| Drehspulinstrument | 100 V | 0,5 % v. Endausschlag |
| Dig.-Multimeter M 3610 B | 20 V | 0,3 % v. Wert + 1 Digit |
| Lab.-Therm. höchst. Güte | 0 bis 50 $^o$C | 0,15 K |
| Stoppuhr (1 Umlauf in 30 s) | z.B. 80 s | 0,2 s + $5{\cdot}10^{-4}$ t |

Bei vielen analogen Meßgeräten besteht der systematische Fehler aus einem konstanten und einem vom Meßwert abhängigen Term (z.B. wird bei der Stoppuhr der erste durch das Ankuppeln ($\Delta t_{ruck}$) und der zweite durch den Uhrengang (Frequenzfehler) verursacht).

## 2.4 Zufällige Fehler

Die Theorie der Abweichungen, die auf statistischen Rechnungen beruht, behandelt die zufälligen Fehler. Die Anteile der zufälligen Fehler können um so genauer erfaßt werden, je mehr Messungen durchgeführt wurden. Sie werden überwiegend dem Beobachter und Einflüssen der Umgebung zugeschrieben, sofern sie nicht in der Natur des Meßobjektes zu suchen sind (z.B. im statistischen Charakter des Rauschens von Meßgeräten oder des radioaktiven Zerfalls). Sie treten bei Wiederholungen mit Unterschieden im Betrag und im Vorzeichen auf.

### 2.4.1 Standardabweichung von Meßreihen einzelner Größen

Eine Größe $x$ werde n-mal gemessen $(x_1, x_2, .., x_n)$. Den besten Schätzwert für den wahren Wert stellt das **arithmetische Mittel** dar:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad . \qquad (1)}$$

Bildet man die $n$ Differenzen der Einzelmessungen vom Mittelwert und quadriert diese, so erhält man über das mittlere Abweichungsquadrat das wichtigste Maß für die Streuung der Einzelmessung, die (empirische) **Standardabweichung** $s_x$:

$$\boxed{s_x = \sqrt{\frac{\Sigma_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{(n-1)}} \quad (a) \quad \text{oder} \quad s_x = \sqrt{\frac{\Sigma\, x_i^2 \; - \frac{1}{n}(\Sigma\, x_i)^2}{(n-1)}} \quad (b) \qquad . \qquad (2)}$$

Mit der Formel (2 b) kann während der Aufnahme einer Meßreihe die Veränderung der Standardabweichung verfolgt werden. Für große $n$ ist $s_x$ unabhängig von $n$ und damit konstant und als ein Qualitätsmerkmal von Gerät und Beobachter anzusehen.

Durch die doppelte Standardabweichung $\pm s_x$ rechts und links vom Mittelwert wird der Wertebereich markiert, in dem die Meßwerte mit ca. 68 % Wahrscheinlichkeit (Vertrauensniveau 0,68) liegen.

Für den Mittelwert ergibt sich eine geringere Streuung, die (empirische) Standardabweichung des Mittelwertes

$$\boxed{\Delta\overline{x} = s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\Sigma_{i=1}^{n}\,(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \quad , \qquad (3)}$$

die für $n \to \infty$ verschwindet. $s_{\overline{x}}$ charakterisiert eine Meßreihe ($n$ muß mit angegeben werden) und stellt ein Maß für die Streuung des Mittelwertes um den wahren Wert dar. Will man z.B. $s_{\overline{x}}$ auf den 10. Teil reduzieren, so hat man die hundertfache Anzahl von Messungen durchzuführen.

Im Praktikum wird ein Vertrauensniveau von 0,95 (s. Kapitel 4.4) zugrunde gelegt, wodurch sich die **zufälligen Fehler** $\Delta x_z$ nach Gln. (2,3) etwa um den Faktor 2 (genau 1,960) erhöhen, d. h.

$$\boxed{\Delta x_z = \Delta\overline{x}_{0,95} = \frac{2 \cdot s_x}{\sqrt{n}} \quad . \qquad (4)}$$

Wenn die Meßbedingungen gleich bleiben, kann die Standardabweichung aus früheren Messungen übernommen werden und auf eine neue Einzelmessung übertragen werden.

### 2.4.2 Hinweise

**a.** : Ergeben sich bei einer Meßreihe stets die gleichen Werte, dann sollte der zufällige Fehler als Bruchteil der Skalenteilung (0, 2 bis 0,5 Skt.) abgeschätzt werden. Das Experiment sollte nach Möglichkeit mit einem empfindlicheren Gerät oder Meßverfahren wiederholt werden.

**b.** : Bei der Messung von zeitlichen (oder räumlichen) Längen einer Periode empfiehlt es sich, über eine große Anzahl $n^*$ von Perioden zu mitteln und dabei u.U. nur eine Einzelmessung (z.B. über $n^* \cdot T$) durchzuführen. Dann werden durch hohe $n^*$-Werte der Beitrag des konstanten Teils im systematischen und der Beitrag des zufälligen Fehlers ($s_T$) zum resultierenden Fehler reduziert, während der vom Meßwert abhängige Term des systematischen Fehlers letzten Endes ($n^*$ beliebig groß) die verbleibende Meßunsicherheit begrenzt.

### 2.4.3 Zufälliger Digitalisierungsfehler

Bei digitalen Meßgeräten (z.B. Digitalvoltmeter, Digitalstoppuhr) entfallen bei konstanten Meßbedingungen die subjektiven Einflüsse auf die zufälligen Fehler. Der Meßwert wird durch Zählen von Impulsen gewonnen und ist damit um eine Einheit der letzten Dezimale, einem **Digit** (last digit), unsicher.

a. Ist der Mittelwert $\overline{x}$ konstant und die Auflösung des Meßgerätes gering, so daß keine statistischen Schwankungen (Ursachen z.B. Rauschen des Verstärkers) bemerkt werden, so liest man stets denselben Wert ab und hat als zufälligen Fehler ein Digit zu nehmen.

b. Wird eine Streuung der Meßwerte beobachtet, so muß die Standardabweichung bestimmt werden. Bereits ab $s_x \geq 3$ Digit hat der Digitalisierungsfehler keinen Einfluß mehr auf $s_x$.

### 2.4.4 Fehlerfortpflanzungsgesetz

Vielfach sind für die Bestimmung einer Größe die Messungen verschiedener (meist unabhängiger) Einzelgrößen $x, y, z, ..$ notwendig, aus deren Mittelwerten sich der Mittelwert der gesuchten Funktion $\overline{f} = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, ..)$ berechnet (z.B. Bestimmung des spezifischen Widerstandes aus vier Einzelmessungen, der Strom-und Spannungs-Messung und Bestimmung der Leitergeometrie: $\rho = \frac{A}{l}\frac{U}{I}$ ). Der resultierende Fehler der Funktion $\Delta f$ wird nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz durch die partiellen Ableitungen ($\frac{\partial f}{\partial x}$,..) und die Fehler der Einzelmessungen ($\Delta x$,..) bestimmt. Sind die einzelnen Größen $(x, y, z, ..)$ unabhängig, so ist als Einzelfehler z.B. $\Delta x = \Delta x_z + \Delta x_s$, d.h. der Gesamtfehler einzusetzen. Der zufällige Anteil wird nach Gl. (4) berechnet (bzw. im Falle einer Einzelmessung der geschätzte Anteil eingesetzt). Es gilt für $\Delta f$ das **Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz**, vorzugsweise für zufällige Fehler:

$$\boxed{\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 (\Delta z)^2 + ..} \quad , \qquad (5)}$$

wobei sich die einzelnen Fehleranteile vektoriell addiern.

Nach Gl. (5) ist es unwahrscheinlich, daß sich alle Fehler in einer Richtung auswirken.

Oft (im Praktikum, für systematische Fehler) wird der Betrag als **Größtfehler**

$$\boxed{\Delta f = \left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta y| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| |\Delta z| + ...\right] \qquad (6)}$$

benutzt. Läßt man die Betrags-Striche weg, so hat man das **totale Differential**:

$$\boxed{\Delta f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + ...\right] \quad . \qquad (7)}$$

In dieser Form des totalen Differentials wird es in den Fällen, in denen eine Abhängigkeit zwischen den Variablen besteht (z.B. auch indirekte Abhängigkeit über eine Hilfsgröße), möglich, die Beiträge der Fehler unter Beachtung der Vorzeichen der partiellen Ableitungen gegeneinander aufzurechnen. Dabei kann sich der Gesamtfehler u.U. merklich reduzieren. Anschließend wird zum Betrag übergegangen.

## 2.5 Angabe des Meßergebnisses und des Gesamtfehlers

### 2.5.1 Gesamtfehler

**Beispiel 1:** Mit einem Längenmeßgerät mit dem sytematischen Fehler $\Delta x_s = (0,01\,\mathrm{mm} + 5\cdot 10^{-3}\,x)$ wurde die Länge $x$ nacheinander $n = 50$ mal bestimmt, wobei sich ergab: $\overline{x} = 3,75$ mm; $s_x =$ 0,071 mm. Der gesamte Fehler beträgt: $\Delta x = (0,01 + 0,019 + 0,02)$ mm; $\frac{\Delta x}{\overline{x}} = \frac{0,05}{3,75} = 0,013 \cong 1,3\%$.

**Beispiel 2:** Mit einem Vorversuch wurde die Schwingungsdauer eines Fadenpendels $n = 10$ mal gemessen, woraus resultierte: $\overline{T} = 1,51$ s; $s_T =$ 0,085 s; vom Hersteller wird angegeben: $\Delta t_s = 0,2$ s+
$5\cdot 10^{-4}\,t$. Anschließend wurde die Zeit einmalig für $n^* = 100$ Perioden gemessen. Der Gesamtfehler für die Schwingungsdauer resultiert aus: $\Delta(n^*\,T)$=(0,2 s+ $5\cdot 10^{-4}\,n^*\,T\,+\,2\,s_T$); oder $\Delta T = \frac{0,2\,\mathrm{s}}{100} + 5\cdot 10^{-4}\cdot 1,51\mathrm{s} + \frac{2\,0,085}{100}$ s = 0,011 s; $T = 1,51 \pm 0,01)$ s; $\frac{\Delta t}{T} = 0,0066 \cong 0,7\%$.

**Beispiel 3:** Die Fallbeschleunigung wurde mit einem Fadenpendel bestimmt (punktförmige Masse und hinreichend kleine Amplituden näherungsweise erfüllt; $g = \frac{4\pi^2\,l}{T^2}$). Ergebnis: $l =$ 0,566 m; $\Delta l$= 0,0017 m; ($T$; $\Delta T$ s. Beispiel 2). Es folgt: $g =$ 9,81 m/s$^2$; $g = (9,81 \pm 0,16)$ m s$^{-2}$; $\frac{\Delta g}{g} = 2\,\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta l}{l} = 0,013 + 0,003 \cong 1,6\%$.

### 2.5.2 Absolute und relative Fehler

Der Gesamtfehler kann sowohl absolut als auch relativ (s. letztes Beispiel) angegeben werden. Der relative Fehler (z.B. von einer Funktion bei Benutzung von Gl. ( 6)) wird definiert als Quotient aus absolutem Fehler und dem Mittelwert

$$\boxed{\frac{\Delta f}{\bar{f}} = \frac{1}{\bar{f}} \left[ \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta y| + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| |\Delta z| + ... \right] \quad . \qquad (8)}$$

Der relative Fehler ist besonders gut geeignet, die Qualität einer Messung oder eines Meßverfahrens einzuschätzen. In Sonderfällen hat er jedoch keine Bedeutung, z.B. bei der Angabe einer Temperatur in der Celsius-Skala.

### 2.5.3 Angabe des Meßergebnisses

Die vollständige Auswertung (im Protokoll) sollte neben dem Mittelwert und eventuell notwendigen Korrekturen sowie den Fehlern auch die Anzahl $n$ der Messungen und das zugrunde gelegte Vertrauensniveau $P$ enthalten.

### 2.5.4 Sinnvolle Stellenzahl

Die letzte angebenene Dezimalstelle des Ergebnisses richtet sich bei Einhaltung der Rundungs-Regeln vor allen Dingen nach dem Fehler. Zuerst muß die letzte Dezimalstelle des Fehlers sinnvoll gerundet werden.

1. **Stellenzahl von geringen Fehlern:**
   Bei relativ geringen Fehlern und sorgfältig und aufwendig (große Anzahl $n$) bestimmten Meßreihen sollte der Fehler auf soviel Dezimalen angegeben werden, daß die letzte Dezimale einer relativen Genauigkeit des Fehlers von ca. 3% entspricht.
   Genaue Fehlerangaben sind vor allem bei Wiederholungen der gleichen Meßreihe von Interesse, um damit Mittelwerte und Standardabweichungen vergleichen und die zugrundliegende Statistik beurteilen zu können.

2. **Stellenzahl bei großen Fehlern:**
   Liegt der relative Fehler über 20% oder liegen überwiegend grobe Schätzungen für die Ermittlung des Gesamtfehlers zugrunde, so genügt eine Fehlerangabe auf die gerundete Dezimalstelle, die einer relativen Genauigkeit des Fehlers von etwa 10% bis 20% entspricht.

3. **Stellenzahl des Meßergebnisses:**
   Der sinnvoll gerundete Gesamtfehler bestimmt dann die letzte (letzten) Dezimalstelle(n) des Ergebnisses (z.B. a. $x_1 = (307,3 \pm 1,2)$ m; b. $x_2 = (310 \pm 120)$ m).

# 3 Statistik der zufälligen Fehler

## 3.1 Diskrete Häufigkeitsverteilung

Im folgenden werden nur zufällige Fehler betrachtet. Für die Größe $x$ werden $n-1$ Wiederholungsmessungen durchgeführt (n sehr groß, z.B. $> 50$). Zu deren Analyse wird der durch die $x_i$ $(i = 1, ..n)$ überstrichene Wertebereich in eine geeignete Anzahl von $r$ Intervallen mit gleicher Intervall-Breite $(x_j - x_{j-1};\ j = 1, ..m)$ eingeteilt (z.B. Intervall-Breite $\approx\ \sigma/2$; eine sinnvolle Anzahl $r$ von Intervallen kann auch mit $r \approx \sqrt{n}$ abgeschätzt werden.
In den einzelnen Intervallen werden für die Anzahl der Meßwerte, die innerhalb des Intervalls liegen, die Häufigkeiten $H_j$ bestimmt. Die Werte auf den Intervall-Grenzen kommen zu 50 % in

jedes Nachbar-Intervall. Die diskrete Darstellung $H_j(x_j)$ heißt Häufigkeits-Verteilung. Mit Hilfe der Summe über die Häufigkeiten $S = \Sigma_{j=1}^{m} H_j$ kann sie normiert werden und man erhält die **relative Häufigkeit** $h_j = H_j/S$. Häufigkeitsverteilungen haben ein Maximum in der Nähe des Mittelwertes, und ihre Breite steht in direktem Zusammenhang zur Standardabweichung $s$ (s. Gaußverteilung).

## 3.2 Kontinuierliche Gauß-Verteilung

In der überwiegenden Zahl der Fälle zeigt sich, daß die beste mathematische Approximation für eine relative Häufigkeits-Verteilungskurve bei hinreichend großen $n$-Werten und nur zufälligen Fehlern durch die kontinuierliche **Normalverteilung oder Gaußsche Verteilung** [1] gegeben ist. Diese wird durch zwei Parameter, den wahren Wert $\mu$ (Schätzwert: Mittelwert $\overline{x}$) und die Streuung $\sigma$ (Grenzfall der Standardabweichung $s$ für große $n$) eindeutig bestimmt und es folgt aus der exakten Wahrscheinlichkeitsdichte $W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$ bzw. der Summenkurve $S(x-\mu)$ die an eine Meßreihe angepaßte Näherung

$$\boxed{W(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\,\sigma^2}} \quad (a) \quad \text{bzw.} \;\; S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\overline{x})^2}{2\,\sigma^2}}\, dt \quad (b) \quad . \qquad (9)}$$

Die Gl. (9 a) als Modell der Häufigkeitsverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit $\Delta W = W\,\Delta x$ dafür an, daß ein einzelner Meßwert im Intervall $(x-\overline{x})$ bis $(x+\Delta x-\overline{x})$ liegt.
$W$ hat ein Maximum für den Mittelwert und nimmt nach beiden Seiten um so schneller ab (Glockenkurve), je geringer die Streuung $\sigma$ ist. Der Abszissen-Abstand der beiden Wendepunkte von Gl. (9 a) beträgt $2 \cdot \sigma$.
Die zugehörige Verteilungskurve $S(x)$ (Summenkurve; Gl. (9 b)) entspricht der Summenkurve über die Häufigkeiten und genügt der **Normierungsbedingung**
$S(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\overline{x})^2}{2\,\sigma^2}}\, dt = 1.$

## 3.3 Grafische Tests

Die beiden nichtlinearen Beziehungen (Gln. 9 a,b; Abb. 1 a,b) können für statistische Tests gemessener Häufigkeitsverteilungen auf das Vorliegen einer Normalverteilung linearisiert werden:
1. Beim **Wahrscheinlichkeits-Netz** wird von der Summenkurve (Gl. 9 b) ausgegangen, wobei auf dem Wahrscheinlichkeits-Papier die Ordinate so verzerrt ist, daß die Darstellung der Summenhäufigkeit über den Meßwerte-Klassen eine Gerade ergibt (Abb. 1 c). Können die Meßpunkte einer Regressionsgeraden zugeordnet werden, so kann von einer Gaußschen Verteilung gesprochen werden.

[1] 1733 von Moivre hergeleitet, später von Gauß und Laplace gefunden; spielt in der Fehler-Statistik eine ähnlich zentrale Rolle wie die Gerade in der Geometrie.

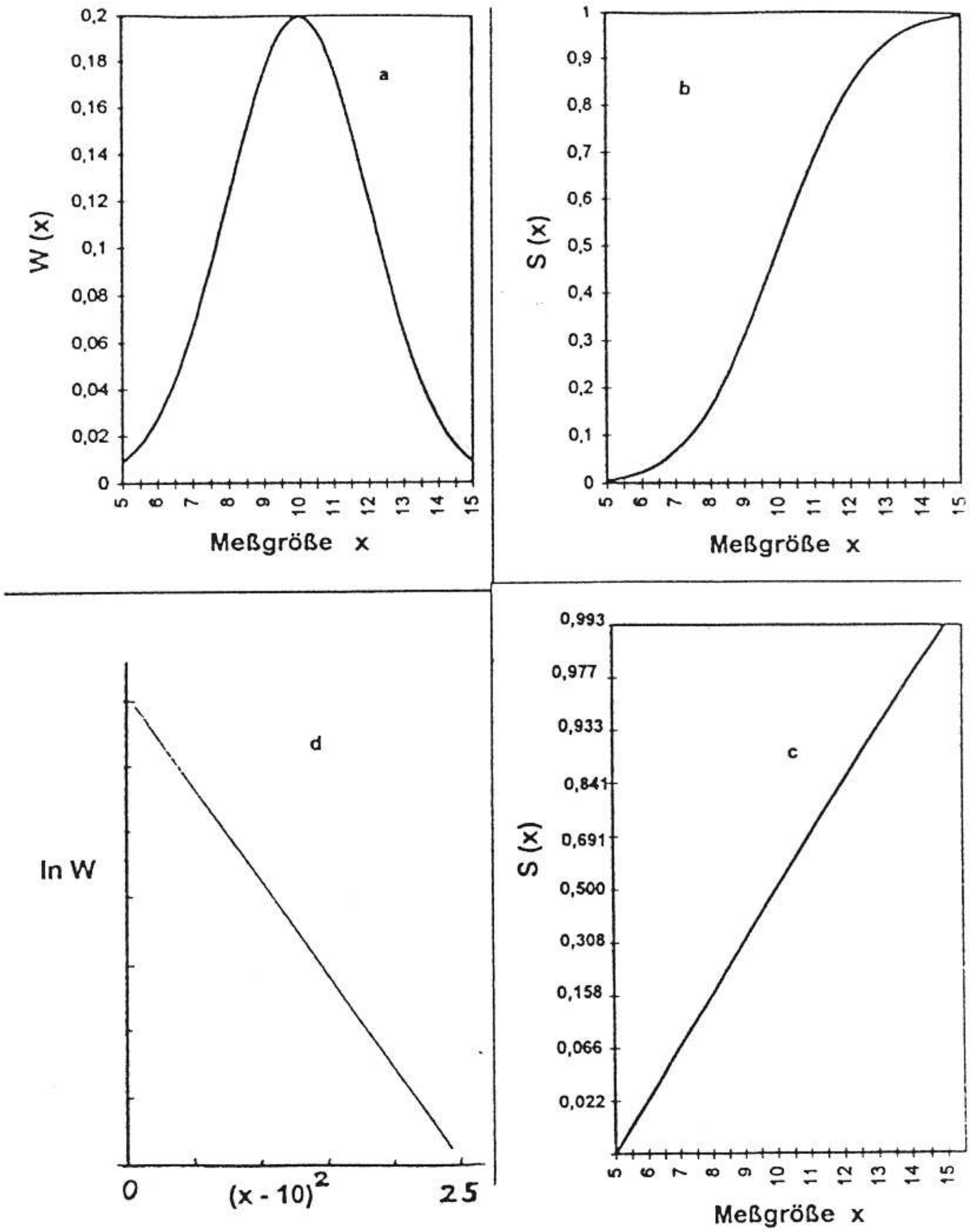



Abb.1: Gaußsche Glockenkurve (a); Verteilungskurve (b); Wahrscheinlichkeitsnetz (c) und logarithmierte Häufigkeitskurve (d) für die Parameter: $\overline{x} = 10$ und $\sigma = 2$

2. Beim **Logarithmieren** der Häufigkeitsverteilung (Wahrscheinlichkeitsdichte, Gl. 9 a) und Auftragen über dem Quadrat der Differenz aus dem jeweiligen Klassenwert ($x_j$) und dem Mittelwert ($\overline{x}$) ergibt sich eine Gerade, deren Anstieg $\Delta(ln\,h)/\Delta(x_j - \overline{x})^2 \approx -1\,/\,2\sigma^2$ ist. Gelingt es, durch die streuenden Punkte in dieser Darstellung eine Regressionsgerade zu legen (und ergibt sich aus deren Anstieg der richtige Wert der Streuung $\sigma = s$), so ist ebenfalls der Nachweis für eine Gauß-Verteilung erbracht (Abb.1 d).

# 4 Experimente

## 4.1 Schwingungsdauer eines Fadenpendels

### 4.1.1 Vorversuch

Im Vorversuch wird die Schwingungsdauer eines ca. 2 m langen Fadenpendels 10mal einzeln gemessen, wobei die Zeit-Differenz zwischen Start und Ende, von Hand durch jeweiligen Knopfdruck signalisiert, mit dem Rechner erfaßt wird. Von diesen 10 Werten werden mit dem Taschenrechner der Mittelwert und die Standardabweichung berechnet.

### 4.1.2 Hauptversuch

Anhand der Ergebnisse des Vorversuchs ($\overline{T}$ und $s_T$) muß nach Beratung mit dem Betreuer die Anzahl und die Breite der Intervalle für die Ermittlung der Häufigkeits-Verteilung festgelegt und in den Rechner eingegegeben werden. Dann wird von **einem** Studenten unter möglichst gleichen Bedingungen 200mal die Schwingungsdauer $T$ gestoppt und automatisch vom Rechner erfaßt. Bei den Zwischenwerten (25, 50, 100) sind Pausen im Programm, so daß die Schwingungsebene und die Amplituden kontrolliert, die bis dahin erzielte Statistik notiert und ihre Weiterentwicklung verfolgt werden kann.

## 4.2 Statistische Analyse

Zur Prüfung auf eine Gauß-Verteilung werden entsprechend Abb. 1 c die relativen Häufigkeiten in Wahrscheinlichkeits-Papier eingetragen. Vom Rechner-Menü wird außerdem eine Regressionsgerade entsprechend Abb. 1 d ausgegeben.

## 4.3 Hinweise zum Versuch

1. Der Versuch ist mit einem Rechner gekoppelt und menü-geführt;
   Start mit "login FA" enter; Dezimal-Komma als Punkt eingeben.

2. Um den subjektiven Einfluß der messenden Person zu erhöhen, sollte $T$ am Umkehrpunkt des Pendels gestoppt werden. Dadurch wird bei Schwingungsdauern von etwa 1 s und höher eine größere Streuung als beim Stoppen im Nulldurchgang erreicht.

3. Die Amplitude der Pendelschwingung sollte 15 cm nicht überschreiten. Da die Reihe im Programmteil "Starten" unterbrochen werden kann, muß das Pendel neu zu einer ebenen Schwingung angeregt werden, wenn sich durch verschiedene äußere Einflüsse eine elliptische Schwingung einstellen sollte.

# 5 Anhang

## 5.1 Methode der kleinsten Quadrate und die Gauß-Verteilung

Der wahrscheinlichste Wert einer beobachteten Größe hat die Eigenschaft, daß die Summe der quadratischen Abweichungen der Beobachtungen von diesem Wert in ihm ihr Minimum findet.
Es liegen z.B. $n$ Meßwerte $x_1 ... \, x_n$ mit dem unbekannten wahren Wert $\mu$ vor. Mit dem zunächst noch unbekannten wahrscheinlichsten Wert $x_w$ ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Beobachtungswertes $x_1$ nach Gl. (9 a)

$$dW(x_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{(x_1 - x_w)^2}{2\,\sigma^2}}\, dx \quad . \tag{10}$$

Die Wahrscheinlichkeit, die Werte $x_1$ bis $x_n$ zu messen, ist gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten, d.h.

$$dW_{ges} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\right)^n \, e^{-\frac{\Sigma_{i=1}^n (x_i - x_w)^2}{2\,\sigma^2}} (dx)^n \quad . \tag{11}$$

Die Wahrscheinlichkeit erreicht ihr Maximum (das Resultat ist am wahrscheinlichsten), wenn die Summe der Abweichungsquadrate $\Sigma_{i=1}^n (x_i - x_w)^2$ ein Minimum wird.
Aus dieser Forderung resultiert die Gl. (1): der wahrscheinlichste Wert ist der Mittelwert; denn aus $\frac{\partial}{\partial x_w}\,[\Sigma(x_i - x_w)^2] = 0$ folgt $n\,x_w = \Sigma\,x_i$ und damit $x_w = \overline{x} = \Sigma\,x_i\,/n$).

## 5.2 Gewichtetes (gewogenes) Mittel

Es kann vorkommen, daß bei Durchführung verschiedener Meßreihen der gleichen Größe $\overline{x}_1 = \Sigma_i\ x_{i,1}\ \overline{x}_2 = \Sigma_i\ x_{i,2}$ ,.. diese Meßreihen unterschiedliche Standardabweichungen ($s_{x1};\ s_{x2};..$) aufweisen (z.B. in verschiedenen Laboratorien oder von verschiedenen Personen durchgeführt).
Dann erscheint es sinnvoll, den Mittelwert aller Meßreihen $\overline{\overline{x}}$ unter Benutzung von Gewichtsfaktoren $g_j$ so zu berechnen, daß die genaueste Meßreihe am stärksten berücksichtigt wird. Dies wird erreicht mit dem gewichteten Mittel

$$\overline{\overline{x}} = \frac{g_1\,\overline{x}_1 + g_2\,\overline{x}_2 + ..}{g_1 + g_2 + ..} \quad \text{wobei gilt} \quad g_i = \frac{n_i}{s_{xi}^2} \quad . \tag{12}$$

## 5.3 Standardabweichung und Streuung der Normalverteilung

Aus dem Quadrat der Standardabweichung ($s^2$ nach Gl. (2)) wird nach der Klasseneinteilung mit der relativen Häufigkeit $h_j$ zunächst eine Summe und für die Grenze großer Zahlen $n$ ein Integral, d.h.

$$s^2 \quad = \quad \frac{\Sigma_{j=1}^M h_j\,\Delta x\,(x_j - \overline{x})^2}{\Sigma_{j=1}^M\,h_j\,\Delta x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2\,e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}} \quad = \quad \sigma^2 \quad . \tag{13}$$

Der Beweis, daß die rechte Seite von Gl.(13) die Größe $\sigma^2$ ergibt, gelingt über Substitutionen und Standard-Integrale:
$(x - \overline{x}) = y$; $1/2\,\sigma^2 = a^2$; $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2y^2}dy = 2\int_0^{\infty} e^{-a^2y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a} = I_0$; $\int_0^{\infty} y^2e^{-a^2y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}$.

## 5.4 Standard-Normal-Verteilung, Quantile, Vertrauensniveau

Durch die Substitution

$$u = \frac{x - \overline{x}}{\sigma} \tag{14}$$

entsteht aus den Gln. (9) die normierte Standard-Normal-Verteilung $w(u)$ bzw. die zugehörige Summenfunktion (Verteilungsfunktion) $s(u)$

$$w(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}} \quad (a) \quad \text{bzw.} \quad s(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \quad (b) \quad , \tag{15}$$

die mit der Streuung $\sigma_u = 1$ symmetrisch zum Nullpunkt der normierten Zufallsvariablen $u$ liegt und die einen quantitativen Vergleich verschiedener Verteilungen ermöglicht. Die erwähnte Symmetrie und $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1$ bedeuten

$$w(u) = w(-u) \quad (a)\,; \quad \text{bzw.} \quad s(-u) = 1 - s(u) \quad (b)\,; \quad \text{wobei}\ s(u_\alpha) = \alpha \quad (c) \tag{16}$$

oder $(1 - \alpha)$ als **Quantile** der Standard-Verteilung bezeichnet werden. Mit den Quantilen und dem daraus abgeleiteten Begriff **Vertrauensniveau** (Konfidenz-Niveau) wird es möglich, statistische Vorhersagen zu quantisieren.

Beispiel 1:

Mt einem Vertrauensniveau von 0,95 kann vorhergesagt werden, daß höchstens 5% ( Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$) der Meßwerte den normierten Wert 1,64 einseitig überschreiten.
Beispiel 2:
Beidseitig des Mittelwertes liegen 95 % der Meßwerte in einem Bereich, der durch $\alpha = 0,025$ und $(1-\alpha) = 0,975$ gekennzeichnet ist. Der zugehörige maximale $u$-Wert beträgt auf jeder Seite 1,96 (im Praktikum angenähert durch 2; s. Tab. 2).

**Tab. 2:** Beispiele für $\alpha$ - Quantile und Vertrauensniveau $(1-\alpha)$ der Standard-Normalverteilung:

| Quantil $\alpha$ | Quantil $(1-\alpha)$ | max. $u$-Wert |
|---|---|---|
| $\alpha$ | $(1-\alpha)$ | $(k_{1-\alpha})$ |
| 0,5 | 0,5 | 0,0 |
| 0,16 | 0,84 | 1 |
| 0,05 | 0,95 | 1,64 |
| 0,025 | 0,975 | 1,96 |
| 0,01 | 0,99 | 2,32 |

Gelegentlich wird für große $n$ der Standardfehler der Standardabweichung angegeben:

$$s_{s_x} = \frac{s_x}{\sqrt{2(n-1)}} \approx \frac{s_x}{\sqrt{2n}} \quad . \tag{17}$$

## 5.5 Lineare Regression

Häufig ist zwischen zwei (oder mehr) gemessenen Größen theoretisch ein linearer (i.a. funktioneller) Zusammenhang zu erwarten.
Für die lineare Funktion, die gegebenenfalls erst mathematisch durch Linearisieren erzeugt wird (s. Abb. 1 c,d), werden die Koeffizienten $a$ und $b$ gesucht, wobei gilt

$$y = a + b\,x \quad . \tag{18}$$

Für $x$ und $y$ liegen im allgemeinen fehlerbehaftete Meßreihen vor.
Für den einfacheren Fall, daß nur die Größe $y$ fehlerbehaftet ist, ergeben sich aus der Forderung $(\Sigma(y_i - a - b\,x)^2 = \text{Min.})$ als beste Näherungen für $\overline{a}$ und $\overline{b}$

$$\overline{a} = \frac{\Sigma\, y_i\, \Sigma\, x_i^2 - \Sigma\, x_i\, \Sigma\, x_i\, y_i}{n\, \Sigma\, x_i^2\, -\, [\Sigma\, x_i]^2} \quad \text{bzw.} \quad \overline{b} = \frac{n\, \Sigma\, x_i\, y_i\, -\, \Sigma\, x_i\, \Sigma\, y_i}{n\, \Sigma\, x_i^2\, -\, [\Sigma\, x_i]^2} \quad . \tag{19}$$

Die Berechnungen von $\overline{a}$ und $\overline{b}$ nach Gl. (19) inclusive des Korrelationskoeffizienten können mit jedem wissenschaftlichen Taschenrechner durchgeführt werden.
Sind die $x$-Werte äquidistant mit $x^*$, so ergibt sich für die Quadrate der Standardabweichungen

$$s_y^2 = \frac{\Sigma(\Delta y)^2}{(n-2)} \quad ; \quad s_a^2 = s_y^2 \frac{2(2n+1)}{n(n-1)} \quad ; \quad s_b^2 = \frac{s_y^2}{x^{*2}} \frac{12}{n(n^2-1)} \,. \tag{20}$$

Ist auch die Größe $x$ fehlerhaft, so geben die Kovarianz $s_{xy} = [\Sigma(x_i - \overline{x})\,(y_i - \overline{y})]/(n-1)$ und besser der Korrelations-Koeffizient $r_{xy} = [(n-1)\,s_{xy}]/\sqrt{(\Sigma(x_i - \overline{x})}$ Aufschluß über die Schärfe der linearen Beziehung. Dabei bedeutet $r_{xy} \approx 0$, daß beide Meßgrößen in keinem Zusammenhang stehen. $r_{xy} = 1$ besagt, daß $x$ und $y$ streng korreliert sind ($r_{xy} = -1$ heißt, daß eine gegenläufige Korrelation besteht).

## 5.6 Fragen

- Wie berechnen sich für eine Meßreihe aus $n$ Einzelmessungen der Mittelwert, die Standardabweichung der Einzelmessung und des Mittelwertes sowie der relative Fehler?
- Was besagt das Fehlerfortpflanzungsgesetz? Wie berechnet man bei gegebenen systematischen und zufälligen Fehlern und Mittelwerten der einzelnen unabhängigen Meßgrößen die absoluten und relativen Fehler folgender Funktionen:

1. $f(x,y,z) = \frac{x^2}{y^4\sqrt{z^3}}$
2. $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
3. $f(x,y,z) = \frac{x^2-y^2}{y-z}$

- Beispiel 2, S. 5:
  Bis zu welchem Wert $n^*$ lohnt sich dessen Erhöhung in Hinblick auf einen möglichst geringen Gesamtfehler für die Zeit $T$ einer Periode?
- Wie kann man für eine Serie von unter konstanten Bedingungen durchgeführten Messungen einer physikalischen Größe zeigen, daß die zufälligen Abweichungen vom Mittelwert einer Gaußschen Normalverteilung genügen?
- Wie kann man sich die 1 im Nenner der Standardabweichung plausibel machen?
- Man beweise, daß die Wendepunkte der Gauß-Verteilung den Abszissen-Abstand $\sigma$ vom Mittelwert haben.

# Literatur

[1] W. Walcher, Praktikum der Physik, V. Teubner, Stuttgart 1989

[2] W. Ilberg, M. Krötsch, D. Geschke, P. Kirsten, W. Schenk,
A. Schneider, H. Schulze, Physikalisches Praktikum für Anfänger,
Leipzig 1994

[3] F. Kohlrausch, Praktische Physik, Stuttgart 1996, Band 3

[4] H. Weber, Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
und Statistik für Ingenieure; V. Teubner, Stuttgart 1992

[5] J. Topping, Fehlerrechnung, Physik-Verlag, Weinheim 1975

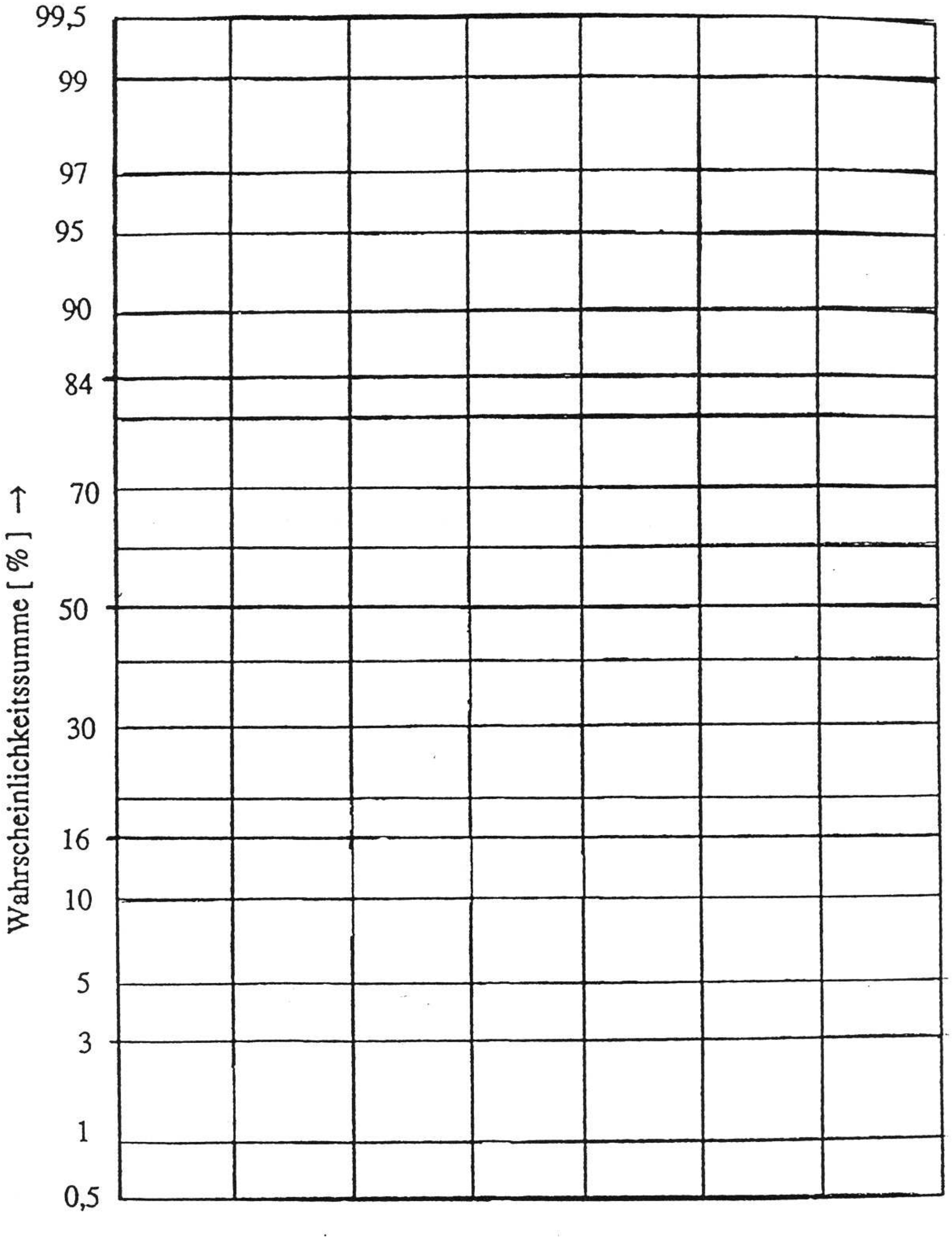
[6] P. Täubert, Abschätzung der Genauigkeit von Meßergebnissen, Berlin 1987

[7] W. Lichten, Skriptum Fehlerrechnung, Berlin 1988

[8] W. H. Gränicher, Messung beendet, was nun?
VdF , V. Täubner, 1996

[9] R. Waldi, Statistik für's Physik-Praktikum, Skriptum, TU Dresden 1996

[10] P. Profos, Handbuch der industriellen Meßtechnik. Oldenburg 1992




Wahrscheinlichkeits-Netz.