

# Optische Abbildung

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Aufgabenstellung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Abbildung durch sphärische Linsen</b>	<b>2</b>
2.1	Dünne Linsen . . . . .	2
2.2	Dicke Linsen, Hauptebenen . . . . .	3
2.3	Linsensysteme . . . . .	3
2.4	Abbildungsfehler . . . . .	4
2.4.1	Monochromatisches Licht . . . . .	4
2.4.2	Chromatische Aberration (Farbfehler) . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Experimente</b>	<b>5</b>
3.1	Bestimmung der Brennweite von Linsen . . . . .	5
3.1.1	Brennweite einer dünnen Sammellinse . . . . .	5
3.1.2	Brennweite dicker Linsen oder von Systemen nach Bessel . . . . .	5
3.2	Bestimmung zweier Linsenfehler . . . . .	6
3.2.1	Öffnungsfehler, sphärische Aberration . . . . .	6
3.2.2	Farbfehler . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Anhang</b>	<b>6</b>
4.1	Zur Herleitung der Gl. (5) . . . . .	6
4.2	Bestimmung von Brennweite und Hauptebenen nach Abbé . . . . .	7
4.3	Autokollimation . . . . .	7
4.4	Zur plankonvexen dicken Linse . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Fragen</b>	<b>9</b>

## 1 Aufgabenstellung

1. Die Brennweiten einer dünnen bzw. einer dicken Sammellinse sind aus den Ding- und Bild-Weiten bzw. nach dem Bessel-Verfahren zu bestimmen.
2. Für ein Linsensystem sind nach dem Bessel-Verfahren die resultierende Brennweite und die Brennweite der Zerstreuungs- Linse zu bestimmen.
3. Für eine Sammellinse sind die Brennweiten für einige Wellenlängen und Zonen- Blenden aufzunehmen und daraus die sphärische und chromatische Aberration zu bestimmen.

## 2 Abbildung durch sphärische Linsen

### 2.1 Dünne Linsen

Sphärische Linsen sind durchsichtige (Glas-) Körper mit  $n > 1$ , die von Kugelflächen begrenzt sind. Meist ist das umgebende Medium Luft, dessen Brechungsindex (trockene Luft, bei  $15^\circ\text{C}$ ,  $p = 101,325$  kPa)  $n_L = 1,000277 \approx 1$  gesetzt wird.

In der elementaren Theorie der optischen Abbildung werden achsennahe Strahlen betrachtet (**Gauß-Optik** [2, 6]), womit für kleine Winkel gilt:  $\tan\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$ ;  $\cos\alpha \approx 1$ .

Die Abbildung mit einer dicken Linse ist durch die Lage der Hauptebenen ( $H$ ;  $H'$ ) und die im Abstand  $f$  bzw.  $f'$  von den Hauptebenen befindlichen Brennebenen eindeutig zu beschreiben. Bei **dünnen Linsen** fallen die Hauptebenen zusammen. Mit den beiden Radien  $r_1$  und  $r_2$  der Kugelflächen der Linse (Glas in Luft;  $f = f'$ ) sowie der Brechzahl  $n$  des Glases berechnet sich die Brennweite nach der **Linsefmacherformel**

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad . \quad (1)$$

Man erhält bei gegebener Lage der Dingebene die Bildebene der scharfen Abbildung mit einer (z. B. Sammel-) Linse, indem man die ausgezeichneten Strahlen (Parallel-, Mittelpunkt-Strahl bzw. den Brennpunktstrahl) zum Schnitt bringt (Abb. 1).

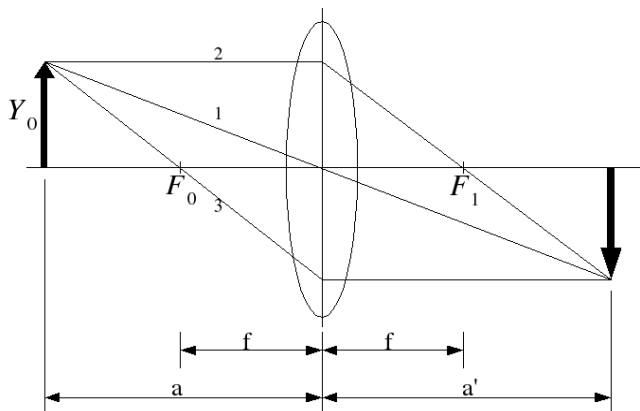


Abb. 1: Dünne Sammel-Linse

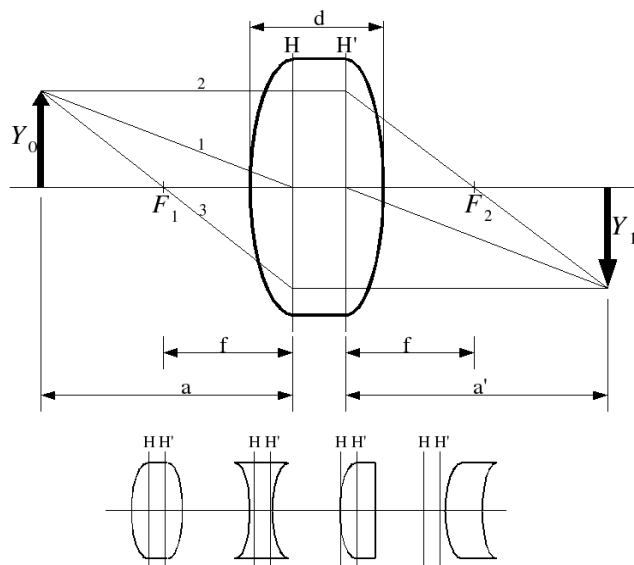
Bezeichnet man mit  $a$  die Dingweite (Gegenstandsweite) und mit  $a'$  die Bildweite, so lautet die **Gauß'sche Abbildungsgleichung**

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \quad . \quad (2)$$

## 2.2 Dicke Linsen, Hauptebenen

Bei dicken Linsen hat sich der Achsabstand  $h_2$  eines aus der Linse austretenden Strahls bezüglich seines Eintrittsabstandes  $h_1$  merklich verändert (s. Abb. 2). Um auch weiterhin die Gl.(1) benutzen zu können, bedient man sich der fiktiven ding- bzw. bildseitigen Hauptebenen  $H$  bzw.  $H'$ , auf die sich die Abstände ( $a$ ,  $a'$  und  $f$ ) beziehen.

Abb. 2: Strahlenverlauf bei einer dicken Sammel-Linse; Lagen von Hauptebenen



## 2.3 Linsensysteme

Es werde ein System aus zwei dünnen Linsen der Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  im Abstand  $d$  betrachtet. Wie man sich anhand der in Abb. 3 gegebenen Beispiele klar machen kann, gilt für die resultierende Brennweite (und näherungsweise bei kleinen Abständen  $d$  beider Linsen, d. h.  $d \ll f_1 f_2$ )

$$\frac{1}{f_{res}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \approx \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad . \quad (3)$$

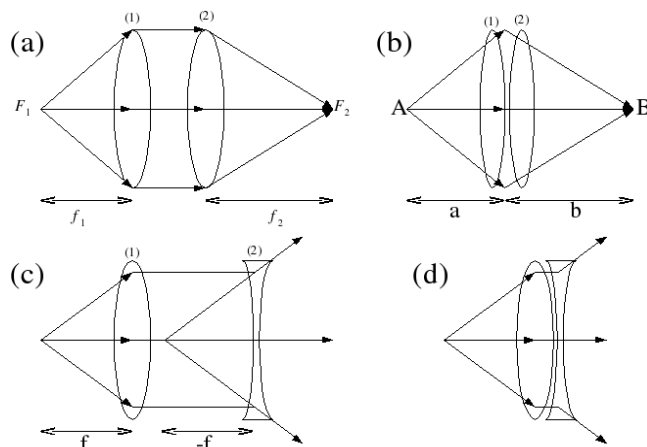


Abb. 3: Systeme von 2 Sammellinsen (a,b); Sammel- u. Zerstreuungslinse (c,d);  $d \approx 0$  bei (b,d)

Die Kehrwerte der Brennweiten, die Brechkräfte  $D$ , addieren sich:  $D_{res} \approx D_1 + D_2$  (Einheit von  $D$ : Dioptrie;  $[D] = \text{m}^{-1}$ ). In der gleichen Näherung ergibt sich für die Abstände der dünnen Linsen von den zugeordneten Lagen der Hauptebenen  $x = \frac{f_{res}}{f_1} \cdot d$  ; bzw.  $x' = \frac{f_{res}}{f_2} \cdot d$  (die zugeordnete Hauptebene ist näher an der Linse mit geringerer Brennweite) [2].

Ist eine der beiden Linsen eine Zerstreuungslinse, so muß die Wirkung der Sammellinse überwiegen, damit es zu einer Abbildung kommt. Das Vorzeichen der Brennweite der Zerstreuungslinse ist negativ.

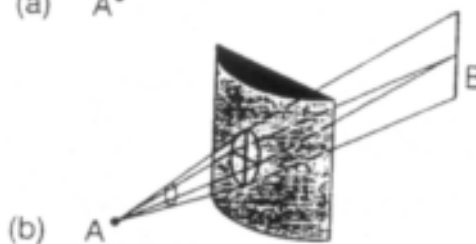
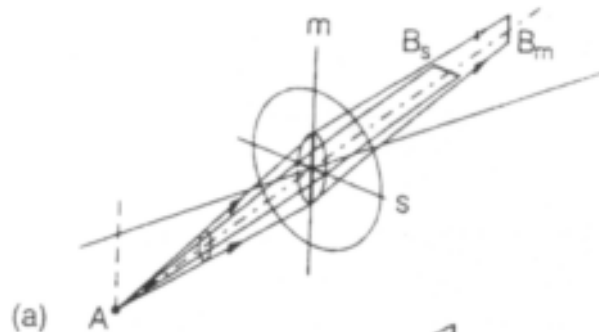
## 2.4 Abbildungsfehler

### 2.4.1 Monochromatisches Licht

Abweichungen von den idealen Gauß'schen Bedingungen führen zu Abbildungsfehlern (Aberrationen). Man unterscheidet bei monochromatischem Licht zwischen Koma, Astigmatismus, Verzeichnung und Sphärischer Aberration.

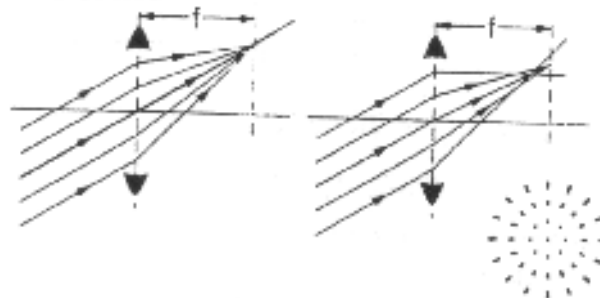
**Koma:** Wenn parallele Strahlen schräg auf eine Linse auftreffen, werden achsenferne Punkte in radialer Richtung verwaschen. Abhilfe: Ausblenden der Randstrahlen.

Abb. 4: Koma-Verzeichnung



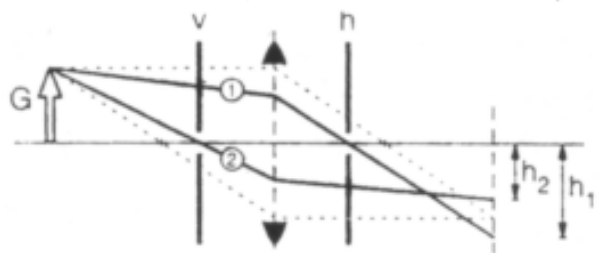
**Astigmatismus:** Schräg einfallende, nicht parallele Lichtbündel werden nicht in einem Punkt, sondern in zueinander senkrechten Strichen fokussiert. Abhilfe: Linsenkombinationen: An-astigmat.

Abb. 5: Astigmatismus bei sphärischer Linse (a); bei einer Zylinderlinse (b)



**Verzeichnung:** Sie tritt auf beim Versuch, durch Ausblenden achsenferner Strahlen mittels Blenden Koma und sphärische Aberration zu verringern. (Tonnenförmig: Blende vor der Linse; Kissenförmig: Blende nach der Linse).

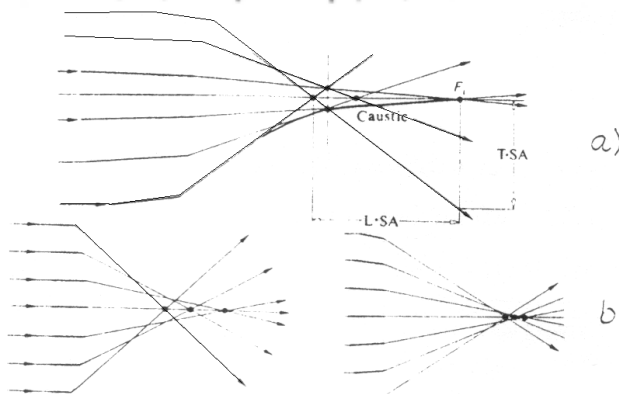
Abb. 6: Tonnen- bzw. Kissen-Verzeichnung



**Sphärische Aberration** (Öffnungsfehler, Zonenfehler).

Wie beim sphärischen Spiegel werden zur Achse parallele aber achsenferne Strahlen in einem anderen Brennpunkt vereinigt als achsennahe Strahlen. (Abhilfe: Ausblenden von Randstrahlen oder spezielle Linsensysteme, die Aplanate). Der Betrag hängt sowohl vom Objektstand, als auch von der Linsenform ab.

Abb. 7: Sphärische Aberration (a); Einfluß der Linsenform (Vertauschung der Richtung) (b)



### 2.4.2 Chromatische Aberration (Farbfehler)

Da die Brechzahl von der Wellenlänge abhängt (Dispersion), ergeben sich nach Gl. (1) für verschiedene Wellenlängen unterschiedliche Brennweiten, wodurch bei weißem Licht zusätzlich zu den o. a. Fehlern der Farbfehler entsteht. (Abhilfe: Kombination von Linsen aus Gläsern unterschiedlicher Brechzahlen und Dispersion, wie z.B. Flint- und Kronglas).

## 3 Experimente

### 3.1 Bestimmung der Brennweite von Linsen

#### 3.1.1 Brennweite einer dünnen Sammellinse

1. Es werden für verschiedene Entfernungen  $a$  des Gegenstandes die zugehörigen Entfernungen  $a'$  für ein scharfes Bild bestimmt. Mit der umgestellten Gl. (2) errechnet man aus den  $a; a'$ -Werten einen Satz von  $f$ -Werten, deren Mittelwert man auch grafisch als Schnittpunkt der Verbindungslinien zwischen den Wertepaaren  $a; a'$  erhält, wenn man diese auf der Ordinate bzw. Abszisse abträgt.

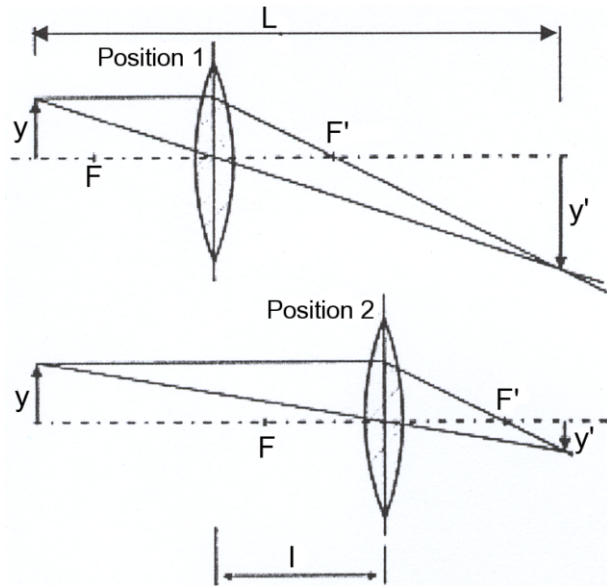
2. Anstelle der Entfernungen nach 1. werden die Höhen von Ding ( $G$ ) und Bild ( $B$ ) gemessen (Bestimmung der Lateralvergrößerung). Aus dem Abbildungsmaßstab  $\beta = m = B/G = y'/y$ , der nach dem Strahlensatz  $a'/a$  entspricht, kann  $f$  ermittelt werden zu

$$f = \frac{a'}{1 + m} \quad . \quad (4)$$

#### 3.1.2 Brennweite dicker Linsen oder von Systemen nach Bessel

Wegen der unbekannten Lagen der Hauptebenen können  $a$  und  $a'$  nicht direkt ermittelt werden. (Im Sonderfall der plankonvexen Linse, vergl. Abb. 2 und Anhang, tangiert eine Hauptebene die gekrümmte Linsenoberfläche [7]). Nach Bessel werden für schrittweise variierte Abstände  $L = a + a' + h > 4f$  von Ding und Bild diejenigen beiden Positionen

Abb. 8: Bessel-Verfahren



(Marke am Ablesestift) der dicken Linse bestimmt, die eine scharfe Abbildung (einmal vergrößert und einmal verkleinert) realisieren [4]. Der Abstand dieser beiden Positionen sei  $l = a'_1 - a'_2$ . Mit dem Abstand  $h$  der beiden Hauptebenen sowie Gl. (2) findet man ([4]; s. Anhang)

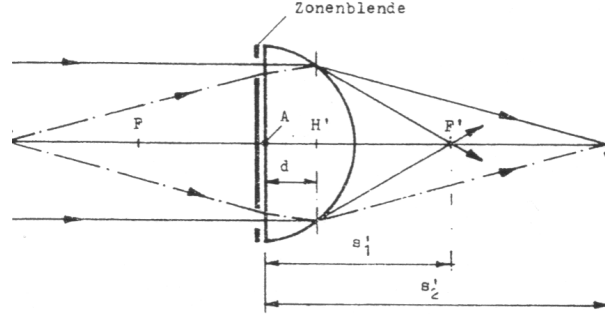
$$f = \frac{1}{4} \left[ (L - h) - \frac{l^2}{(L - h)} \right] \approx \frac{1}{4} \left[ L - \frac{l^2}{L} \right] \quad . \quad (5)$$

Die Näherung gilt für  $h \ll L$ , was für den Versuch zutrifft.

### 3.2 Bestimmung zweier Linsenfehler

#### 3.2.1 Öffnungsfehler, sphärische Aberration

Für eine Wellenlänge werden mit variablen Ringblenden auf der plankonvexen Linse verschiedene Zonen (Durchmesser  $D$ ) ausgeblendet (Abb. 8) und damit zwei Abbildungsvarianten realisiert: 1.  $m = 0$ ; ( $a = \infty$ ) und 2.  $m = -1$ ; ( $a \approx 2f$ ) (Abb. 9). Sowohl die Brennweite als auch die wirksame Linsendicke  $d$  sind dabei abhängig von  $D$  und man findet



Dicke Linse mit Zonenblende

$$f = s'_2 - s'_1 \quad (a) \quad ; \quad d = 2s_1 - s_2 \quad . \quad (6)$$

Entsprechend der Gl. (6) werden zunächst die Abhängigkeiten  $f(D)$  und  $d(D)$  und daraus der Krümmungsradius  $r$  der Linse nach

$$r \approx \frac{D^2}{8(d_0 - d(D))} \quad (7)$$

abgeschätzt (s. Anhang). Man mißt die Paare von scheinbaren Bildweiten ( $a'_1(D_i)$ ;  $a'_2(D_i)$ ; ( $a'_1(D_{ii})$ ;  $a'_2(D_{ii})$ ); usw., die den Zonen-Durchmessern  $D_i$ ;  $D_{ii}$ ;... entsprechen. Im Falle der plankonvexen Linse kann man die Prozedur mit umgekehrtem Strahlengang wiederholen.

#### 3.2.2 Farbfehler

Für achsennahe Strahlen (innere Zone) werden für eine symmetrische Sammel-Linse mit mehreren Interferenzfiltern bei fester Dingweite die Bildweiten  $a'(\lambda)$  bestimmt und daraus  $f(\lambda)$  berechnet. Im Bereich normaler Dispersion nimmt  $n$  mit  $\lambda$  ab, womit der Zusammenhang  $f = f(\lambda)$  (axiale chromatische Aberration) bestimmt ist. (Vergleicht man die zugehörigen Bildgrößen, d. h.  $m(\lambda)$ , so erhält man die transversale chromatische Aberration). Zweckmäßigerweise sollten  $|m| = 1$ , d. h.  $G = B$  bzw.  $a = a' \approx 2f$  betragen. Bei dicken Linsen muß der Hauptebenenabstand  $h$  bekannt sein. Dann gilt

$$f(\lambda) = \frac{[a'(\lambda) - h]}{2} \approx \frac{a'(\lambda)}{2} \quad , \quad (8)$$

(Näherung für dünne Linsen). Bei bekannten Radien der (bzw. Radius der symmetrischen oder plankonvexen) Linse kann aus  $f(\lambda)$  nach Gl. (1) die Dispersion  $n(\lambda)$  abgeschätzt werden.

## 4 Anhang

### 4.1 Zur Herleitung der Gl. (5)

Nach Umformung der Gleichungen

$$a + a' + h = L \quad ; \quad \text{und} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \quad (9)$$

folgt

$$a'^2 + (h - L)a' + (L - h)f = 0 \quad . \quad (10)$$

Mit den beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung

$$a'_{1,2} = -\frac{(h - L)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(h - L)}{2}\right)^2 - (L - h)f} = \frac{(L - h)}{2} \left[ 1 \mp \sqrt{1 - \frac{4f}{(L - h)}} \right] \quad , \quad (11)$$

die der Vertauschung von Ding und Bild entsprechen, ergibt sich für  $l = a'_1 - a'_2$

$$l = a'_1 - a'_2 = (L - h) \sqrt{1 - \frac{4f}{(L - h)}} \quad , \text{ u. Gl. (5)} \quad . \quad (12)$$

## 4.2 Bestimmung von Brennweite und Hauptebenen nach Abbé

Solange man bei einem Linsen-System die Lagen der Hauptebenen und ihren Abstand  $h = x + x'$  nicht kennt, bleiben auch Gegenstandsweite  $a$  und Bildweite  $a'$  unbekannt. Nach Abbé mißt man für zwei vom willkürlichen Punkt (Ablesemarke A) gezählte Gegenstandsweiten  $a_1^0 = a_1 + x$ ;  $a_2^0 = a_2 + x$  die ebenfalls auf A bezogenen Bildweiten  $a_1'^0 = a_1' + x'$ ;  $a_2'^0 = a_2' + x'$ , sowie den Abbildungsmaßstab  $m$  ( $m = \beta = \gamma = B/G = \frac{f}{a-f} = \frac{a'-f}{f}$ ). Für diesen gilt zunächst

$$a = f \left( \frac{1}{m} + 1 \right) \quad ; \quad a' = f (m + 1) \quad . \quad (13)$$

Der Ablesestift ist um  $x$  von  $H$  und um  $x'$  von  $H'$  entfernt. Man erhält die Beziehungen

$$a_1^0 = a_1 + x = f \left( \frac{1}{m_1} + 1 \right) + x \quad ; \quad a_1'^0 = a_1' + x' = f (m_1 + 1) + x'$$

$$a_2^0 = a_2 + x = f \left( \frac{1}{m_2} + 1 \right) + x \quad ; \quad a_2'^0 = a_2' + x' = f (m_2 + 1) + x' \quad .$$

Mit der Lösung dieser Gleichungen sind sowohl  $f$  als auch die  $x$ ;  $x'$  bestimmt (z. B. [3])

$$f = \frac{a_2'^0 - a_1'^0}{m_2 - m_1} = \frac{a_2^0 - a_1^0}{\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}} \quad ;$$

$$x = a_1^0 - f \left( \frac{1}{m_1} + 1 \right) = a_2^0 - f \left( \frac{1}{m_2} + 1 \right) \quad ;$$

$$x' = a_1'^0 - f (1m_1 + 1) = a_2'^0 - f (1m_2 + 1) \quad .$$

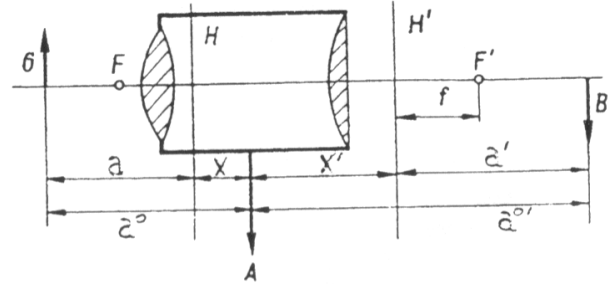


Abb. 10: Bestimmung von  $f$  und  $H$ ;  $H'$  nach Abbé

## 4.3 Autokollimation

Mit Hilfe eines hinter der zu untersuchenden Sammel-Linse angebrachten Planspiegels wird für den Fall, daß die (dünne) Linse

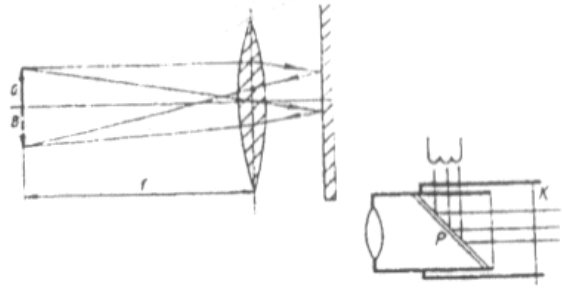


Abb. 11: Autokollimation und Gauß'sches Okular

im Abstand  $f$  vom Gegenstand angebracht ist, dieser umgekehrt in sich selbst abgebildet. Bei dieser Brennweitenbestimmung benutzt man gern ein Gauß'sches Okular.

## 4.4 Zur plankonvexen dicken Linse

### 1. Hauptebene:

Eine plankonvexe Linse, deren eine Fläche eben und die andere nur schwach gekrümmt sei, habe die zentrale Dicke  $d_0$ . Man kann sich anhand eines Parallelstrahles klar machen, daß für achснаhe Strahlen eine Hauptebene ( $H'$ ) die konvexe Linsenoberfläche tangiert. Die andere Hauptebene ( $H$ ) liegt im Innern der Linse im Abstand  $h = d_0 - d$  von  $H'$  (Abb. 10).

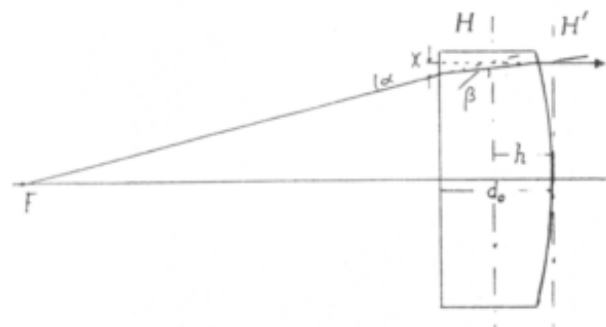


Abb. 10: Dicke plankonvexe Linse

Zur Abschätzung von  $h$  findet man für den von links kommenden Brennpunktstrahl

$$x = d_0 \tan \beta = (d_0 - h) \tan \alpha \quad \text{oder} \quad \frac{d_0}{(d_0 - h)} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \approx \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx n \quad . \quad (14)$$

Die Umstellung nach  $h$  ergibt

$$h \approx d_0 \frac{(n-1)}{n} \quad , \quad (15)$$

woraus z. B. für  $n \approx 1,5$  folgt:  $h \approx d_0/3$ .

**2. Krümmungsradius:** Sind die Radien, die Brechzahl und die zentrale Dicke  $d_0$  der Linse bekannt, so lautet die allgemeine Linsenmacherformel

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{(n-1)d_0}{n r_1 r_2} \right) \quad , \quad (16)$$

woraus für die plankonvexe Linse mit  $r_2 \rightarrow \infty$  folgt  $r_1 = \frac{f}{(n-1)}$ .

Z. B. ergibt sich danach für  $n \approx 1,5$ :  $r_1 \approx 2f$ .

**3. Effektive Linsendicke  $d$ :** Für achsenferne Strahlen nimmt die effektive Linsendicke  $d$  mit zunehmendem Zonendurchmesser  $D$  ab ( $d = d_0 - h$ ; z. B. Abb. 10)).

$$r_1^2 = (r_1 - d_0 + d)^2 + \frac{D^2}{4} \quad ; \quad 0 = d^2 + 2d(r_1 - d_0) - 2r_1 d_0 + d_0^2 + \frac{D^2}{4} \quad . \quad (17)$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ergibt

$$d(D) = d_0 - r_1 \pm \sqrt{r_1^2 + \frac{D^2}{4}} \quad ; \quad \text{oder} \quad r \approx \frac{D^2}{8[d_0 - d(D)]} \quad (18)$$



### 5 Fragen

1. Was besagt das Fermat'sche Prinzip?
2. Wie unterscheiden sich dünne und dicke Linsen?
3. Was versteht man unter der Brechzahl?
4. Zeichnen Sie die Strahlengänge für die in der Anleitung beschriebenen Verfahren zur Brennweitenbestimmung.
5. Wie leiten sich Linsenmacher-Formel bzw. Abbildungsgleichung (1 bzw. 2) her?
6. Wie ändert sich der Charakter der Abbildung, wenn man bei einer Kombination zweier Sammellinsen für verschiedene Gegenstandsweiten den Abstand der Linsen  $d$  bei Null beginnend systematisch vergrößert?
7. Was versteht man unter einer Kaustik?
8. Was versteht man unter sphärischer und chromatischer Aberration?
9. Welche weiteren Linsenfehler gibt es? Wie kann man sie nachweisen und unterdrücken?
10. Wie bestimmt man Brennweiten von dicken und dünnen Linsen sowie von Linsensystemen?
11. Mit Hilfe einer (dünnen) Sammellinse werde ein entfernter Gegenstand abgebildet, der langsam näher kommt. In welche Richtung muß der Schirm verschoben werden, damit das Bild scharf bleibt?
12. Welche Linsen-Systeme ergeben Kondensoren, Projektive, Okulare, Lupen oder Fernrohre?
13. Wie kann man ein Teleobjektiv realisieren?
14. Wie wird ein punktförmiges Objekt mit einer Zylinderlinse abgebildet?
15. Wozu dient eine Fresnel'sche Stufenlinse?
16. Zeichnen Sie für eine Abbildung (mit einer bikonkaven, einer plankonvexen dicke Linse sowie für ein Linsensystem) den Parallel-, den Brennpunkt- und den Mittelpunktstrahl.

### Literatur

- [1] A. Recknagel, Physik, Optik, Verlag Technik, 1990
- [2] H.-J. Paus, Physik in Experimenten und Beispielen, V. V.-Hanser München 1995
- [3] W. Ilberg, M. Krötsch, D. Geschke, P. Kirsten, W. Schenk, A. Schneider, H. Schulze, Physikalisches Praktikum für Anfänger, Leipzig 1994
- [4] W. Walcher, Praktikum der Physik, V. Teubner, Stuttgart 1989
- [5] Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Optik, V. de Gruyter 1993
- [6] E. Hecht, Optik, Addison-Wesley 1989
- [7] W. H. Westphal, Physikalisches Praktikum, V. Vieweg 1970