Technische Universität Dresden Fachrichtung Physik

 $\begin{array}{c} \mathrm{M.\ Lehmann\ 08/2000} \\ \mathrm{bearbeitet\ 04/\ 2004} \end{array}$

Physikalisches Praktikum

Versuch: MI

Mikroskop

Inhaltsverzeichnis

1	Versuchsziel	2
2	Grundlagen	2
	2.1 Das menschliche Auge	2
	2.2 Allgemeine Wirkungsweise optischer Instrumente	2
	2.3 Das Lichtmikroskop	3
	2.4 Das Lichtmikroskop mit Projektiv	5
	2.5 Die Bildentstehung im Mikroskop nach E. Abbe	6
3	Versuchsdurchführung	8
4	Fragen	9

1 Versuchsziel

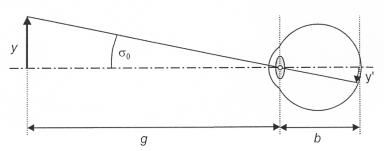
Das Lichtmikroskop ist trotz seines scheinbar einfachen Aufbaus ein sehr komplexes, aber auch vielseitiges Instrument. In diesem Versuch sollen die Grundlagen der Bildentstehung und die Abbildung durch ein zweistufiges optisches System kennengelernt werden.

2 Grundlagen

2.1 Das menschliche Auge

Die optische Wirkung des menschlichen Auges beruht auf der Abbildung des betrachteten Gegenstandes y auf die Netzhaut (Abbildung 1). Ohne Akkomodation des Auges, d.h. ohne Anspannung der Augenmuskulatur, wird normalerweise ein Gegenstand y in einer Gegenstandsweite g von Unendlich bis herab zur **deutlichen Sehweite** $(S=25\ cm)$, auch als **Bezugssehweite** bezeichnet, als scharf empfunden. Der Grund dafür liegt in der Struktur der Netzhaut: Solange der abgebildete Objektpunkt nicht wesentlich größer als der Querschnitt eines einzelnen Stäbchens oder Zapfens ist, bleibt der Eindruck eines scharfen Bildpunktes erhalten. Erst wenn der Leuchtfleck mehrere Stäbchen bzw. Zapfen beleuchtet, wird dies als unscharf empfunden.

Abbildung 1: Das menschliche Auge aus der Sicht eines Physikers: Der Gegenstand y wird durch die Augenlinse in das Bild y' auf der Netzhaut abgebildet. Dabei ist nur der Mittelpunktsstrahl eingezeichnet, der mit der optischen Achse den Sehwinkel σ_0 einschließt.



Die Stelle der größten Bildschärfe befindet sich in der Netzhautgrube, da hier die Zapfen am dichtesten stehen. Ihr gegenseitiger Abstand beträgt dort etwa $4\mu m$. Damit ein Netzhautbild von dieser Größe zustande kommt, müssen zwei Strahlen durch den Mittelpunkt der Augenlinse unter einem Sehwinkel von $\sigma_0 = 1' = 291\mu rad$ eintreten. Dies ist z.B. für zwei Strahlen erfüllt, die von zwei y = 0.2mm entfernten Punkten aus einer Entfernung von g = 1m kommen. Die Punkte können vom Auge gerade noch aufgelöst werden. Man bezeichnet den Sehwinkel von $\sigma_0 = 1'$ als den **physiologischen Grenzwinkel** des Auges.

2.2 Allgemeine Wirkungsweise optischer Instrumente

Das menschliche Auge kann von zu weit entfernten oder zu kleinen Gegenständen Einzelheiten nicht mehr erkennen, wenn diese unter einem zu kleinen Sehwinkel σ_0 erscheinen. Andererseits können durch die begrenzte Akkomodationsfähigkeit des Auges kleine Gegenstände nicht beliebig nahe herangebracht werden. Aufgabe von optischen Instrumenten wie Lupe, Mikroskop und Fernrohr ist es, Bilder zu erzeugen, die dem Auge unter einem hinreichend großen Sehwinkel σ_m erscheinen. Diese Eigenschaft der optischen Instrumente wird mit dem Begriff Vergrößerung beschrieben und quantifiziert. Die Vergrößerung M (Magnification) eines Instrumentes ist definiert als Verhältnis aus dem Tangens des Sehwinkels σ_0 ohne Instrument:

$$M = \frac{\tan \sigma_m}{\tan \sigma_0} \approx \frac{\sigma_m}{\sigma_0} \qquad (FrkleineWinkel)$$
 (1)

Dies lässt sich anhand folgender Überlegungen bestätigen: Entsprechend gilt:

$$\tan \sigma_0 = \frac{y}{q} = \frac{y'}{b} \tag{2}$$

wobei y' die Größe des auf die Netzhaut geworfenen Bildes und b der Abstand des Bildes von dem Mittelpunkt der Augenlinse ist. Wird nun vom Gegenstand der Größe y nach Zwischenschaltung eines optischen Instrumentes in der gleichen Entfernung g vom Mittelpunkt der Augenlinse ein Bild entworfen, das dann dem Auge unter dem Sehwinkel σ_m erscheint, so gilt

$$\tan \sigma_m = \frac{y_m}{g} = \frac{y'_m}{b} \Rightarrow M = \frac{\tan \sigma_m}{\tan \sigma_m} = \frac{y_m}{y} = \frac{y'_m}{y'}$$
 (3)

wobei die mit einem Index m versehenen Größen die Wirkung des optischen Instrumentes kennzeichnen. Die Vergrößerung ist in diesem Fall gleich dem Größenverhältnis der auf die Netzhaut geworfenen Bilder mit und ohne Instrument.

2.3 Das Lichtmikroskop

Die historische Entwicklung des Lichtmikroskops umfasst einen langen Zeitraum. Hier sollen nur die wichtigsten Meilensteine genannt werden (nach Bergmann, Schäfer: Optik): A. van Leeuwenhoek (1673) gilt als Erfinder des einfachen, einlinsigen Mikroskops. Chr. Huygens erfand 1684 das zweilinsige Okular. C.A. Spencer entwickelte um 1860 Mikroobjektive hoher numerischer Apertur und verbesserte deren Farbkorrektion durch Kombination von Glas und Fluorit. 1853 führte F. Wenham den Dunkelfeld-Kondensor ein. E. Abbe (1840 - 1905) erfand apochromatische Mikroobjektive, führte Kompensationsokulare ein und entwickelte eine Theorie zur Bildentstehung im Mikroskop. F. Zernike entwickelte 1932 das Phasenkontrastverfahren und erhielt dafür 1953 den Nobel-Preis.

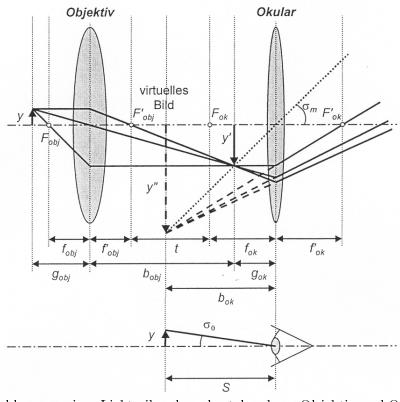


Abbildung 2: Strahlengang eines Lichtmikroskops bestehend aus Objektiv und Okular bei Akkomodation des Auges auf die Bezugssehweite S. Zur Ableitung der Gesamtvergrößerung ist unten der Hauptstrahl von der Objektspitze zum unbewaffneten Auge dargestellt.

Das Lichtmikroskop besteht aus zwei getrennten optischen Systemen, dem **Objektiv** und dem **Okular** (Abbildung 2): Das zu betrachtende kleine Objekt y liegt dicht vor dem vorderen (dingseitigen) Brennpunkt F_{obj} der Objektivlinse. Das Objektiv, das eine kurzbrennweitige Sammellinse mit Brennweite f_{obj} ist, erzeugt in der Zwischenbildebene ein umgekehrtes reelles, vergrößertes Zwischenbild y' des Objekts y. Das Zwischenbild y' liegt innerhalb der einfachen, vorderen Brennweite

des Okulars f_{ok} . Daher wirkt das Okular (langbrennweitige Sammellinse) als Lupe und erzeugt vom Zwischenbild y' ein virtuelles, nochmals vergrößertes aufrechtes Bild y''. Das Auge sieht also in der Bezugssehweite S=25~cm vom Gegenstand y ein umgekehrtes virtuelles, stark vergrößertes Bild y''. Die wesentlich gesteigerte Leistungsfähigkeit des Mikroskops gegenüber einer Lupe beruht folglich auf der Tatsache, dass mit der Lupe (d.h. dem Okular) nicht direkt das Objekt, sondern das vom Objektiv erzeugte, vergrößerte Bild des Objekts betrachtet wird.

Die Gesamtvergrößerung Mges ergibt sich bei diesem Strahlengang mit Objektiv und Okular

$$M_{ges} = \frac{\tan \sigma_m}{\tan \sigma_0} = \frac{\frac{y''}{S}}{\frac{y}{s}} = \frac{y''}{y} \qquad (nurbeiS = s)$$
(4)

wenn man ohne Instrument das Objekt in der Bezugssehweite S betrachtet und auch das virtuelle Bild im Abstand S erscheint. Wählt man einen anderen Abstand, so ändert sich die Vergrößerung. Aufgrund der Akkomodierfähigkeit kann sich das Auge den Veränderungen in einem weiten Bereich anpassen.

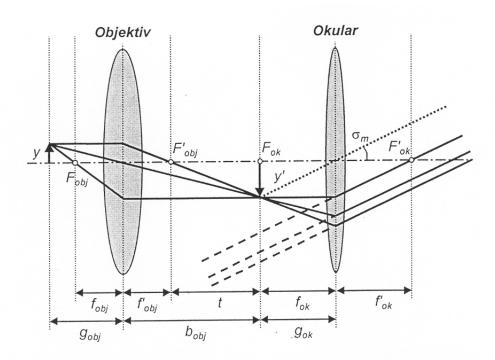


Abbildung 3: Strahlengang eines Lichtmikroskops bestehend aus Objektiv und Okular bei entspanntem Auge. Im Vergleich zum Strahlengang in Bezugssehweite (Abbildung 2) wurde nur die Gegenstandsweite gobj so vergrößert, dass das Zwischenbild y' in der vorderen Brennebene des Okulars entsteht. Folglich liegt das virtuelle Zwischenbild y'' im Unendlichen. Die Lichtstrahlen fallen dann parallel in das entspannte Auge.

Das angespannte Auge ermüdet jedoch sehr viel schneller als das entspannnte Auge, das auf Objekte im Unendlichen eingestellt ist. Folglich ist beim Mikroskopieren darauf zu achten, dass sich das virtuelle Bild y'' im Unendlichen befindet. Dies ist der Fall, wenn das Zwischenbild y' in der vorderen Brennebene des Okulars liegt (Abbildung 3). Man spricht dann von der **Normalvergrößerung** des Mikroskops. Für diese kann aus der allgemeinen Definition der Vergrößerung (Gleichung (1)) die Formel (10) abgeleitet werden:

In einem ersten Schritt bildet das Objektiv das Objekt y in das Zwischenbild y' ab. Für den **Abbildungsmaßstab des Objektivs**, wo im Gegensatz zur Vergrößerung (Gleichung (1)) nur das Größenverhältnis von Zwischenbild y' und Objekt y eingeht, gilt:

$$\beta_{obj} = \frac{y'}{y} = -\frac{b}{q} \tag{5}$$

Über die allgemeine Abbildungsgleichung für dünne Linsen

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \tag{6}$$

kann der Abbildungsmaßstab β_{ogj} umgeformt werden zu:

$$\beta_{obj} = -\frac{b_{obj}}{f'_{obj}} + 1 \tag{7}$$

Da bei Normalvergrößerung das Zwischenbild in der vorderen Brennebene des Okulars liegt, ergibt sich für die Bildweite $b_{obj} = f'_{obj} + t$, wobei t der Abstand zwischen dem hinteren (bildseitigen) Brennpunkt des Objektivs und dem vorderen Brennpunkt des Okulars ist und als **optische Tubuslänge** bezeichnet wird. Für den Abbildungsmaßstab des Objektivs erhält man dann

$$\beta_{obj} = -\frac{t}{f'_{obj}} \tag{8}$$

was leicht in Abbildung 3 mittels des geometrischen Strahlensatzes nachvollzogen werden kann. Im zweiten Schritt bildet das Okular das Zwischenbild y', welches sich in der vorderen Brennebene des Okulars befindet, in das virtuelle Bild y'' ab. In diesem Fall gilt für die **Okularvergrößerung** (Normalvergrößerung einer Lupe)

$$M_{ok} = \frac{s}{f_{ok}} \tag{9}$$

Die Normalvergrößerung des Mikroskops ergibt sich dann als Produkt aus Abbildungsmaßstab des Objektivs β_{obj} und Vergrößerung des Okulars M_{ok} :

$$M_{norm} = \beta_{obj} \cdot M_{ok} = -\frac{t \cdot s}{f'_{obj} \cdot f_{ok}}$$

$$\tag{10}$$

Die Normalvergrößerung des Mikroskops ist also direkt proportional zur Bezugssehweite S sowie zur optischen Tubuslänge t, welche der Hersteller festlegt, und ist umgekehrt proportional dem Produkt der beiden Brennweiten f'_{obj} und f_{ok} . Das negative Vorzeichen berücksichtigt die auf das Objekt bezogene Bildumkehr.

2.4 Das Lichtmikroskop mit Projektiv

Beim Mikroskopieren muss nicht unbedingt visuell beobachtet werden. Um ein reelles Endbild y'' zu erhalten, z.B. für eine Aufzeichnung auf einer Photoplatte, wird das Okular durch ein sogenanntes Projektiv ersetzt. Auch das Projektiv ist eine Sammellinse; um ein reelles Endbild zu erreichen, muss jedoch das Zwischenbild y' vor der vorderen Brennebene des Projektivs liegen. In Abbildung 4 ist der Versuchsaufbau eines Lichtmikroskops mit Objektiv, Projektiv und Leuchtschirm dargestellt. Das Beleuchtungssystem, welches hier nicht dargestellt ist, erzeugt eine parallele Beleuchtung des Objekts. Die Objektivlinse vergrößert das Objekt y in das reelle, umgekehrte Zwischenbild y', welches durch das Projektiv in das reelle, bezüglich des Objekts aufrechte Endbild y'' abgebildet wird.

Der **Abbildungsmaßstab** β dieses Mikroskops berechnet sich aus dem Produkt der einzelnen Abbildungsmaßstäbe (Gleichung (5)) von Objektiv β_{obj} und Projektiv $\beta proj$ zu

$$\beta = \beta_{obj} \cdot \beta_{proj} = \frac{b_{obj}}{g_{obj}} \cdot \frac{b_{proj}}{g_{proj}} = \frac{y'}{y} \cdot \frac{y''}{y'}$$
(11)

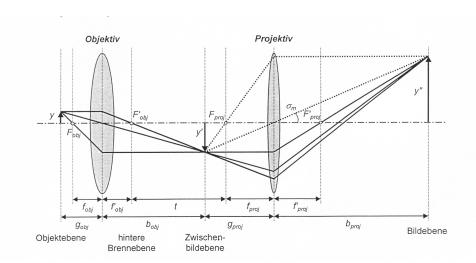


Abbildung 4: Strahlengang des Lichtmikroskops bestehend aus Objektiv und Projektiv. Dieser Aufbau ermöglicht die Aufzeichnung des reellen vergrößerten Bildes auf einem Leuchtschirm oder einer Photoplatte.

2.5 Die Bildentstehung im Mikroskop nach E. Abbe

 $E.\ Abbe$ entwickelte 1873 eine Theorie zur Bildentstehung im Mikroskop für den Fall, dass das Objekt mit einer kohärenten Lichtquelle beleuchtet wird. Die Theorie lässt sich an einem einfachen Modellobjekt wie dem Strichgitter gut umreißen (Abbildung 5): Wird dieses Strichgitter mit einer kohärenten Lichtquelle wie dem Laser beleuchtet, so befinden sich hinter dem Objekt ungebeugte und gebeugte Strahlen. Ungebeugte Strahlen werden Strahlen nullter Ordnung bezeichnet, gebeugte Strahlen je nach Ablenkwinkel als Strahlen erster und höherer Ordnung. Damit sich die am Gitter gebeugten Wellen so überlagern, dass Interferenzmaxima, d.h. Helligkeitsmaxima entstehen, müssen die Wegunterschiede der Wellenzüge im Fernfeld ganzzahlige Vielfache der Lichtwellenlänge λ betragen. Die ganze Zahl bezeichnet die Ordnung.

Die Strahlen werden, soweit sie durch die Objektivlinse gehen, von ihr abgebildet. In der hinteren Brennebene der Objektivlinse liegen dann die Bilder unterschiedlicher Beugungsordnung der Lichtquelle vor. Im Falle polychromatischen Lichts erfolgt außerdem eine spektrale Zerlegung des Lichts in seine Spektralfarben. Das eigentliche Bild des Objekts entsteht in der Bildebene durch kohärente Überlagerung aller Beugungsbilder. Mathematisch gesehen wird die Abbildung des Objekts in ein sogenanntes **Beugungsspektrum** und dann in das Bild durch zwei Fouriertransformationen (FT) beschrieben. Dem Beugungsspektrum kommt eine besondere Bedeutung zu, da hier das Objekt in seinen periodischen Komponenten zerlegt vorliegt. Dies soll die folgende Überlegung veranschaulichen: Das Beugungsspektrum eines strukturlosen Objekts würde bei paralleler Beleuchtung und idealer Abbildung nur aus einem Punkt bestehen, dem Brennpunkt F. Die Information über die Struktur des Objekts muss also in den abgebeugten Strahlen und folglich in den zusätzlichen Beugungsbildern S_{+1} und S_{-1} liegen. Je kleiner Objektdetails wie z.B. der Gitterabstand d sind, desto weiter außen liegen die Beugungsbilder. Dies bedeutet aber auch gleichzeitig, dass jeder Eingriff in den Strahlengang durch Ausblenden von Beugungsbildern oder Begrenzung des Winkels der einfallenden Strahlen in das Objektiv das Bild gravierend verfälscht. Da die Beugungsbilder in ihrer Intensität mit höherer Ordnung abnehmen, erkannte Abbe, dass zur Darstellung der Gitterstruktur neben dem zentralen Lichtbündel auch mindestens beide Beugungsbilder erster Ordnung vom Objektiv durchgelassen werden müssen. Das Bild wird um so getreuer, je mehr Strahlen (Beugungsmaxima) zur Abbildung beitragen.

Bei einem **Strichgitter** mit der Gitterkonstanten d findet man das erste Beugungsmaximum unter dem Winkel ϕ_1 , gegeben durch

$$\sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{n \cdot d} \tag{12}$$

Abbildung 5: Abbildung eines Strichgitters (Gitterkonstante d) mittels einer Linse. Das Strichgitter, das in der Objektebene liegt, ist als Transparenzfunktion dargestellt. Je mehr abgebeugte Strahlen unter höherem Beugungswinkel durch die Linse abgebildet werden, desto getreuer wird das Bild. In diesem Fall kommen nur Strahlen nullter und erster Ordnung zur Abbildung; Strahlen zweiter und höherer Ordnung tragen infolge des begrenzenden Aperturwinkels α des Objektivs nicht zur Abbildung bei. Das resultierende vergrößerte Bild des Strichgitters entspricht daher einer \cos – Funktion, das als Helligkeitsprofil in der Bildebene dargestellt ist.

wobei λ die Wellenlänge des Lichts ist und n der Brechnungsindex einer etwaigen Immersionsflüssigkeit, in welche man das Objekt einbetten kann (wodurch also die Wellenlänge um den Faktor 1/n herabgesetzt würde). Damit die Gitterstruktur noch erkannt werden kann, muss mindestens das erste (unter dem Winkel ϕ_1 auftretende) Intensitätsmaximum noch von dem Objektiv mit dem halben Öffnungswinkel α erfasst werden. α ist der halbe Öffnungswinkel des Objektivs, unter welchem das Objektiv vom Gegenstand aus erscheint. Er wird **Aperturwinkel des Objektivs** genannt (apertur (lat.): Öffnung). Der mit dem Mikroskop gerade noch **auflösbare Abstand zweier Punkte** mit Abstand d, die **sogenannte Auflösungsgrenze**, beträgt demnach

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{n \cdot s} \tag{13}$$

wobei nach Abbe unter A die **numerische Apertur** des Objektivs verstanden wird. Je kleiner die Objektstruktur d ist, desto besser muss das **Auflösungsvermögen des Mikroskops** sein, welches definiert wird durch

$$U = \frac{1}{d} = \frac{A}{\lambda} \tag{14}$$

Es soll noch auf den Umstand aufmerksam gemacht werden, dass die numerische Apertur die Helligkeit des Bildes bestimmt. Je größer die Apertur, desto heller das Bild. Eine Einbettung des Objekts in Immersionsöl bewirkt also neben der Verbesserung des Auflösungsvermögens auch eine Steigerung der Bildhelligkeit, da Lichtstrahlen in das Objektiv gelangen, die sonst ausgeblendet würden. In Abbe's Theorie wird die Beugung des Lichts aufgrund des endlichen Durchmessers der Objektivlinse nicht berücksichtigt. H. v. Helmholtz, der etwa zur selben Zeit wie Abbe das Auflösungsvermögen optischer Instrumente untersuchte, entwickelte einen ähnlichen Ansatz jedoch für selbstleuchtende Objekte (d.h. für inkohärentes Licht), in welchem die Auflösung des Mikroskops durch Beugung am Rand der Objektivlinse bestimmt wird. In diesem Fall verringert sich die Auflösungsgrenze um einen konstanten Faktor zu

$$d = 0.61 \cdot \frac{\lambda}{n \cdot \sin \alpha} = 0.61 \cdot \frac{\lambda}{A} \tag{15}$$

Trotz Verwendung von Zedernöl (n=1.5) als Immersionsflüssigkeit und einer Apertur nahe $\alpha=90$ ergibt sich der **kleinste noch aufzulösende Abstand zweier Objektpunkte** aus der

Wellenlänge des verwendeten Lichts,

$$d_{\min} \cong \frac{\lambda}{2} \tag{16}$$

d.h. zwei Objektpunkte, die näher als die halbe Wellenlänge des benutzten Lichts beieinanderliegen, können aufgrund der Wellennatur des Lichts auch im besten Mikroskop nicht getrennt wahrgenommen werden. Die Leistungsfähigkeit eines Lichtmikroskops ist demnach ausgeschöpft, wenn der Abstand zweier Objektpunkte d=200~nm bei Verwendung von blauem Licht ($\lambda=400~nm$) auf den physiologischen Grenzwinkel des Auges vergrößert wird, was einem Abstand der vergrößerten Objektstruktur von etwa 0.2~mm entspricht. Die dazu notwendige förderliche Vergrößerung beträgt

$$\frac{0.2 \cdot \text{mm}}{200 \cdot \text{nm}} = 1000 \tag{17}$$

Eine stärkere Vergrößerung würde zwar die Objektpunkte dem Auge noch weiter voneinander entfernt erscheinen lassen, jedoch keine neue Einzelheiten der Struktur des Gegenstandes aufdecken. Man spricht von einer leeren Vergrößerung.

Noch feinere Strukturen lassen sich mit einem **Elektronenmikroskop** abbilden, da die Elektronen entsprechend der de Broglie- Beziehung ($\lambda = h / (m v)$; h: Planck'sches Wirkungsquantum, m: Elektronenmasse, v: Elektronengeschwindigkeit) eine Wellenlänge besitzen (Welle-Teilchen Dualismus), die je nach Geschwindigkeit der Elektronen etwa fünf Zehnerpotenzen kleiner ist als die des Lichts. Die Auflösung eines Elektronenmikroskops wird dann jedoch nicht mehr durch die Wellenlänge der Elektronen, sondern vornehmlich durch die Abbildungsfehler der magnetischen Objektivlinse beschränkt. Die Auflösungsgrenze beträgt bei modernen Geräten etwa zwischen $0.1 \ nm$ und $0.2 \ nm$ (Vergleich: $0.1 \ nm$ entsprechen etwa dem Durchmesser des Wasserstoffatoms). Folglich können im Elektronenmikroskop Strukturen mit atomarer Auflösung abgebildet werden.

3 Versuchsdurchführung

Zu Beginn des Versuchs wird das Lichtmikroskop auf einer optischen Bank aufgebaut. Damit ein reelles Endbild zur Vermessung auf dem Leuchtschirm entsteht, kommt die Konfiguration bestehend aus Objektiv und Projektiv zum Einsatz. Nach Bestimmung der Brenn- und Bildebenen sowie der einzelnen Abbildungsmaßstäbe wird die theoretischen Gesamtabbildungsmaßstab berechnet und mit der gemessenen Gesamtabbildungsmaßstab verglichen. Durch Einbringen einer Aperturblende vor der Objektivlinse wird der Aperturwinkel des Objektivs verringert. Daraus ergibt sich eine Reduzierung des Auflösungsvermögens des Mikroskops. Durch gezieltes Ausblenden von Beugungsbildern in der hinteren Brennebene des Objektivs wird zudem die Bildentstehung auf dem Leuchtschirm studiert.

4 Fragen

- 1. Wie ist ein Lichtmikroskop aufgebaut? Zeichnen Sie den Strahlengang bestehend aus Objektiv und Okular für die Akkomodation des Auges auf Bezugssehweite S. Was muss an dem Versuchsaufbau bei konstanter Tubuslänge t geändert werden, um das Bild im Unendlichen zu sehen?
- 2. Wie unterscheidet sich der Versuchsaufbau, wenn statt dem Okular ein Projektiv eingesetzt wird? Konstruieren Sie den Strahlengang.
- 3. Wie ist die numerische Apertur des Objektivs definiert? Leiten Sie die Formel für die Auflösungsgrenze an dem Beispiel der Abbildung eines Strichgitters mit Gitterkonstante d ab.
- 4. Welche Wirkung hat die Verwendung einer Immersionsflüssigkeit? Zeichnen Sie den Strahlengang eines Strichgitters vor dem Objektiv mit und ohne Immersionsflüssigkeit. Wo liegt die physikalische Auflösungsgrenze, wenn man die Leistungsfähigkeit des Lichtmikroskops voll ausschöpft?
- 5. Was versteht man unter der "förderlichen Vergrößerung" eines Mikroskops?

Literatur

- [1] Bergmann, Schäfer: Lehrbuch der Experimentalphysik III, Optik, Verlag Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1987
- [2] Müller u.a.: Übungsbuch Physik, Fachbuchverlag Leipzig im Hanser-Verlag, 1996
- [3] Recknagel: Physik, Optik, VEB Verlag Technik Berlin, 1975