Technische Universität Dresden Fachrichtung Physik T. Fischer 08/ 2000 bearbeitet 03/ 2004	Physikalisches Praktikum Versuch: ST

Stoß

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung **2**

2 Allgemeine Grundlagen **2**
2.1 Grundgleichungen der Mechanik 2
2.2 Impulserhaltung 2
2.3 Energieerhaltung der Mechanik 3
2.4 Stoßprozesse, Elastizität 3

3 Experimente **4**
3.1 Fallrinne 4
3.2 Elastischer Stoß 4
3.3 Unelastischer Stoß 5

4 Anhang **6**
4.1 Kreisgleichungen 6
4.2 Fehler 7

5 Fragen **8**

1 Aufgabenstellung

1. Qualitative Untersuchung des elastischen Stoßes zweier Körper a) gleicher und b) unterschiedlicher Masse in Abhängigkeit vom Stoßwinkel φ (schiefer bzw. ungerader Stoß).
2. Quantitative Untersuchung des geraden unelastischen Stoßes zweier Körper gleicher Masse und Bestimmung der Stoßzahl k für die verwendeten Materialien.

2 Allgemeine Grundlagen

2.1 Grundgleichungen der Mechanik

Die grundlegenden Gesetze der Mechanik spielen in diesem Versuch eine zentrale Rolle.
1. Newton'sches Axiom:
Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn keine Kraft auf ihn wirkt.
2. Newton'sches Axiom:
Die Ursache einer Impulsänderung ist eine auf den Körper wirkende Kraft, die über die Beziehung

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{1}$$

definiert ist. Mit $\vec{p} = m\vec{v}$ erhält man

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2}$$

und für den Fall einer zeitlich konstanten Masse ($dm/dt = 0$) ergibt sich das Newton'sche Grundgesetz:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{3}$$

3. Newton'sches Axiom:
Die Kraft F_{12} eines Körpers 1 auf einen Körper 2 ist immer umgekehrt gleich zur Kraft F_{21} des Körpers 2 auf den Körper 1 (*actio* = *reactio*), wenn keine weiteren Wechselwirkungen mit anderen Körpern existieren.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{4}$$

2.2 Impulserhaltung

Aus dem 1. und 2. Axiom lässt sich ableiten, dass man einem System von Körpern, auf das keine äußeren Kräfte wirken, einen konstanten Impuls $\vec{P}$ als Summe der Einzelimpulse $\vec{p}_i$ zuordnen kann. Dieser ist vollkommen unabhängig von den Wechselwirkungen, die zwischen den einzelnen Körpern stattfinden, denn diese müssen sich nach dem 3. Axiom kompensieren. Damit lässt sich der Impulserhaltungssatz wie folgt formulieren:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = const. \qquad \text{mit } \vec{p}_i = m_i\vec{v}_i \tag{5}$$

2.3 Energieerhaltung der Mechanik

Den Energieerhaltungssatz der Mechanik erhält man durch Integration des Newton'schen Grundgesetzes über die Zeit und vorherige Multiplikation mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$
(für $dm/dt = 0$).

$$\int_{t_0}^{t} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt' \;=\; m \int_{t_0}^{t} \frac{d\vec{v}}{dt'} \cdot \vec{v}\, dt' \tag{6}$$

Das linke der beiden Integrale lässt sich für den Fall eines konservativen Kraftfeldes, d.h. es existiert ein Potenzial $V(\vec{r})$, berechnen. Man erhält dabei unter Berücksichtigung von $\vec{v}\, dt' = d\vec{r}'$ und $\vec{F} = -\,\overrightarrow{grad}\, V$:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}' \;=\; V(\vec{r}_0) - V(\vec{r}) \tag{7}$$

Die Potenzialdifferenz $V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)$ ist definiert als die potenzielle Energie E_{pot}, wobei man den Ort $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ beliebig frei wählen kann.
Das rechte Integral in Glg. (6) kann man ebenfalls berechnen und erhält:

$$m \int_{t_0}^{t} \frac{d\vec{v}}{dt'} \cdot \vec{v}\, dt' \;=\; m \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \vec{v}' \cdot d\vec{v}' \;=\; \frac{m}{2}\, v^2 - \frac{m}{2}\, v_0^2 \tag{8}$$

Die kinetische Energie E_{kin} wird hier repräsentiert durch den Term $\frac{m}{2}\, v^2$ und der zweite Term ist eine Konstante, denn auch $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$ ist beliebig wählbar konstant.
Der in Gleichung (6) dargestellte Energiesatz erhält nach Einsetzen von (7) und (8) und Benutzung der Definitionen für die potenzielle und kinetische Energie die Gestalt:

$$E_{mech} \;=\; const. \tag{9}$$

$$\text{wobei} \quad E_{mech} \;=\; E_{kin} + E_{pot} \tag{10}$$

Wenn man nun ein System aus mehren Teilchen betrachten möchte, erhält man den Energieerhalungssatz aus der Summe der Energien der einzelnen Teilchen.

$$\sum_i E^i_{mech} \;=\; const. \tag{11}$$

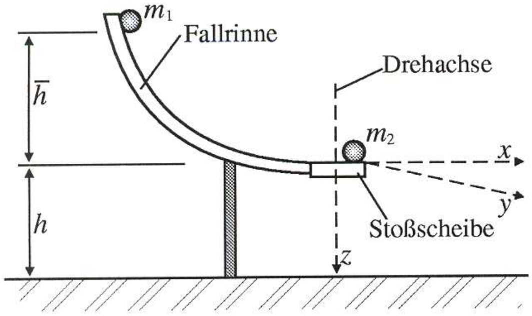
2.4 Stoßprozesse, Elastizität

Beim Stoß von zwei Körpern, der von außen unbeeinflusst bleibt, ist der Gesamtimpuls des Systems eine Erhaltungsgröße (Glg. 5). Ebenso muss die Gesamtenergie immer eine Erhaltungsgröße sein. Die mechanische Energie, deren Erhaltung oben diskutiert wurde, muss jedoch nicht unbedingt erhalten bleiben. Es kann mechanische (bei Stoßprozessen speziell kinetische) Energie in andere Energieformen umgewandelt werden.
Wenn auch die mechanische Energie eine Erhaltungsgröße ist, spricht man von einem vollkommen elastischen Stoß. Wenn nur die kinetische Energie des Schwerpunktes als mechanische Energie verbleibt, spricht man von einem vollkommen unelastischen Stoß (d. h. es findet keine Relativbewegung der Stoßpartner mehr statt). Ein Parameter zur Kennzeichnung der Elastizität eines Stoßes ist die Stoßzahl k (siehe unten).

3 Experimente

3.1 Fallrinne

Die Messung von Impulsen bzw. Geschwindigkeiten ist mit einfachen Mitteln nur sehr schwer möglich. Mit Hilfe der Fallrinne lässt sich aber die Messung der Impulse auf die Messung von Längen (und Massen) reduzieren.



Die Geschwindigkeit v_1 der stoßenden Kugel ist bestimmt durch die Höhe $\bar{h}$ der Rinne und die der gestoßenen Kugel ist vor dem Stoß $v_2 = 0$. Nach dem Stoß führen die beiden Kugeln eine geradlinige, gleichförmige Bewegung in x- und y-Richtung aus, werden allerdings mit g in z-Richtung beschleunigt. Aus dem Weg-Zeit-Gesetz in z-Richtung lässt sich eine Fallzeit t_F bestimmen, die für alle Kugeln gleichermaßen gilt.

$$\begin{aligned} z &= \frac{gt^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t_F = \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ x(t) &= v_x t, \quad x_F = v_x t_F, \qquad \Rightarrow \qquad x_F \sim v_x \end{aligned} \tag{12}$$

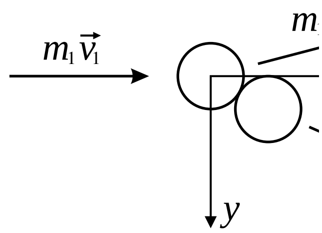
Somit ist die Geschwindigkeit v_x bzw. v_y proportional zu den Orten x bzw. y des Auftreffens auf dem Papier.

3.2 Elastischer Stoß

Beim elastischen Stoß bleiben Impuls und mechanische Energie erhalten. Die Erhaltungssätze in vektorieller Form lauten dabei:

$$\text{IES} \qquad m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \tag{13}$$

$$\text{EES} \qquad \frac{m_1}{2}v_1^2 = \frac{m_1}{2}v'^2_1 + \frac{m_2}{2}v'^2_2 \tag{14}$$



Wenn man die Gleichungen in ihre Komponenten zerlegt und berücksichtigt, dass man keine Geschwindigkeiten sondern Orte misst, erhält man für die Auftreffpunkte der Kugeln Kreisgleichungen (siehe Anhang).
Die Messung von v_1 erfolgt dabei, indem man die stoßende Kugel ohne einen Stoßpartner durch die Rinne laufen lässt und den Ort $x_0 = v_0\, t_F$ misst. Die Mittelpunkte der beiden Kreise für stoßende und gestoßene Kugel sind dann am gleichen Punkt mit den Koordinaten:

$$x_m = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, x_0\,, \qquad y_m = 0 \tag{15}$$

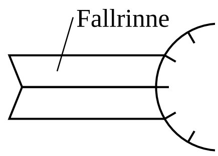
Die Radien der beiden Kreise unterscheiden sich allerdings, da sie von den Massen von stoßender und gestoßener Kugel abhängen.

$$\text{stoßende Kugel:} \qquad r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, x_0 \tag{16}$$

$$\text{gestoßene Kugel} \qquad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, x_0 \tag{17}$$

In dem Versuch sollen jetzt mit Hilfe der Fallrinne die Auftreffpunkte der Kugeln durch Blaupapier abgebildet werden. Dazu ist es notwendig das Papier und das Blaupapier fest auf der Unterlage zu justieren (mit Hilfe von Reißzwecken). Wichtig ist weiterhin, dass die Stoßplattform der Fallrinne genau horizontal ausgerichtet ist, was man durch eine Höhenjustage mit einer Libelle erreicht.
Der Nullpunkt unseres Koordinatensystems ist die senkrechte Projektion des Mittelpunktes der Stoßplattform auf das Papier. Das erreicht man durch Markieren eines Lotpunktes an der Vorderkante der Plattform und der Bestimmung des Radius.

Die Messung a) erfolgt nun, indem man von $\varphi = -90$ bis 90 in 10-Schritten eine der beiden Stahlkugeln mit gleicher Masse aus immer der selben Höhe (durch eine Kante markiert) auf die in der kleinen Vertiefung der Plattform sitzenden zweiten Kugel stoßen lässt. Vorher ist durch einfachen Durchlauf einer der beiden Kugeln der Punkt x_0 zu bestimmen und zu markieren.



Die Messung b) erfolgt auf die gleiche Weise mit neuem Papier. Hier ist darauf zu achten, dass die Kugel mit der größeren Masse m_1 die stoßende Kugel ist.
Nach den Messungen erfolgt die Bestimmung der Massen der benutzten Kugeln.
Mit diesen Information kann man dann die durch Gleichung (15) bzw. (16) und (17) definierten Kreise in das Bild der Auftreffpunkte eintragen. Die auftretenden Unterschiede zwischen den theoretischen Kreisen und den Messpunkten sind zu diskutieren.

Für Physikstudenten:
Bestimmen Sie den theoretischen Wert für x_0! Dazu ist es notwendig die Höhen h und $\bar{h}$ zu messen.

$$x_0^t = v_0\ t_F, \qquad E^1_{pot}(z = \bar{h}) = mg\bar{h}, \qquad E^1_{kin}(z = 0) = \frac{m}{2}\ v_0^2 \tag{18}$$

Welcher Unterschied tritt zwischen x_0^t und x_0 auf, woher kommt er?

3.3 Unelastischer Stoß

Betrachtet wird in diesem Experiment nur der gerade Stoß zweier Kugeln gleicher Masse und gleichen Materials. Der Stoßprozess läuft so ab, dass die Körper während der Wechselwirkung sich gegenseitig verformen. Je nachdem wie stark diese Verformung nach dem Stoß erhalten bleibt, handelt es sich um einen mehr oder weniger unelastischen Stoß.
Der Energieerhaltungssatz der Mechanik gilt in diesem Fall nicht, denn es wird Energie in andere Formen umgewandelt (z.B. therm. Energie).
Zur qualitativen Beschreibung ist es sinnvoll, den Stoß in zwei Perioden zu unterteilen.

1. Die Körper drücken einander zusammen, von dem stoßenden Körper wird ein Impuls p_A an den gestoßenen abgegeben. Zum Zeitpunkt der größten Verformung bewegen sich beide Körper mit der Geschwindigkeit v:
   (Der gestoßene Körper ist vor dem Stoß in Ruhe, $v_2 = 0$)

$$p_A = m_1(v_1 - v) = m_2\, v \tag{19}$$

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, v_1 \tag{20}$$

2. Die beiden Körper dehnen sich wieder aus, zwischen den Körpern wird der Impuls p_B ausgetauscht, der im elastischen Fall kleiner gleich p_A ist.

$$p_B = m_1(v - v'_1) = m_2\,(v'_2 - v) \tag{21}$$

Der Quotient dieser beiden Impulse wird als Stoßzahl k bezeichnet und hat einen Wert zwischen $k = 1$ für einen vollkommen elastischen Stoß und $k = 0$ für den vollkommen unelastischen.

$$\frac{p_B}{p_A} = k \qquad \text{mit } 0 \leq k \leq 1 \tag{22}$$

Wenn man die Impulse p_A und p_B in die Gleichung (22) einsetzt und mit (20) v eliminiert, erhält man durch Erweitern mit t_F die Gleichung

$$k = \frac{x_2 - x_1}{x_0}. \tag{23}$$

Mit deren Hilfe können die Stoßzahlen für verschiedene Materialien bestimmt werden.
Da bei elastischeren Materialien das Abkippen der stoßenden Kugel von der Plattform einen anderen Auftreffpunkt erzeugt als den wahren Punkt x_1 (Warum?), ist es sinnvoll eine korrigierte Stoßzahl k' anzugeben, die x_1 nicht mehr zur Berechnung benötigt. Diese erhält man indem man den Impulssatz

$$m_1 v_0 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{24}$$

mit t_F multilpiziert und wegen $m_1 = m_2$ die Gleichung

$$x_0 = x_1 + x_2 \tag{25}$$

erhält. Diese eingesetzt in die Gleichung (23) ergibt für die korrigierte Stoßzahl k':

$$k' = 2\,\frac{x_2}{x_0} - 1 \tag{26}$$

Wenn keine Fehler durch das Abkippen der stoßenden Kugel auftreten, stimmen k und k' überein.
Für die Messung bauen wir wieder die Fallrinne auf. Für mindestens drei der vier Materialien, die zur Verfügung stehen, werden die Orte x_0, x_1 und x_2 je mindestens zehn mal bestimmt. Man muss also eine der beiden Kugeln zehn mal ohne einen Stoßpartner durchlaufen lassen und die Punkte x_0 markieren. Danach wird die Prozedur mit einem gleichartigen Stoßpartner gleicher Masse wiederholt und die Punkte x_1 und x_2 markiert. Der Nullpunkt dieser Messung ist jetzt der Lotpunkt.
Berechnen Sie die Stoßzahlen und die korrigierten Stoßzahlen für die gemessenen Materialien. Bestimmen Sie den Fehler dieser Größen aus der statistischen Streuung der Messwerte für x_0, x_1 und x_2.

4 Anhang

4.1 Kreisgleichungen

Die Gleichungen (13) und (14) lauten in Komponenten aufgegliedert:

$$\text{IES} \qquad m_1 v_{1,x} = m_1 v'_{1,x} + m_2 v'_{2,x} \tag{27}$$

$$0 = m_1 v'_{1,y} + m_2 v'_{2,y} \tag{28}$$

$$\text{EES} \qquad \frac{m_1}{2} v_{1,x}^2 = \frac{m_1}{2}({v'}_{1,x}^2 + {v'}_{1,y}^2) + \frac{m_2}{2}({v'}_{2,x}^2 + {v'}_{2,y}^2) \tag{29}$$

Da wir keine Geschwindigkeiten messen, ersetzen wir nun die Geschwindigkeiten durch die Ortskoordinaten durch Multiplikation mit t_F bzw. t_F^2. Die einzelnen Ortskoordinaten lauten dann:

$$x_i = v'_{i,x}\, t_F \qquad y_i = v'_{i,y}\, t_F \tag{30}$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{IES} \qquad m_1 x_0 &= m_1 x_1 + m_2 x_2 &(31)\\ 0 &= m_1 y_1 + m_2 y_2 &(32)\end{aligned}$$

$$\text{EES} \qquad m_1 x_0^2 = m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) \qquad (33)$$

Aus den Gleichungen (31) und (32) folgt durch geeignetes Quadrieren und Addieren:

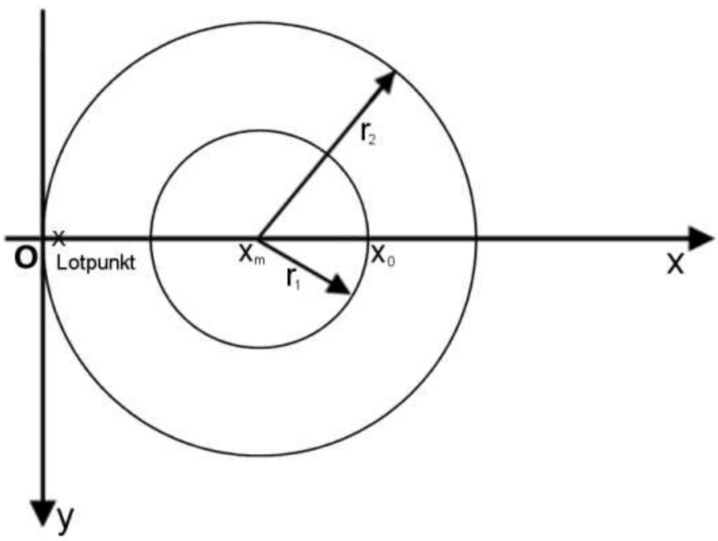
$$\begin{aligned} m_1^2(x_1^2 + y_1^2) &= m_2^2(x_2^2 + y_2^2) + m_1^2 x_0^2 - 2m_1 m_2 x_0 x_2 &(34)\\ m_2^2(x_2^2 + y_2^2) &= m_1^2(x_1^2 + y_1^2) + m_1^2 x_0^2 - 2m_1^2 x_0 x_1 &(35)\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (34) in (33) bzw. (35) in (33) und Umordnen erhält man für die gestoßene und die stoßende Kugel jeweils eine Kreisgleichung.

$$\text{stoßende Kugel:} \qquad \left(x_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, x_0\right)^2 + y_1^2 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\, x_0\right)^2 \qquad (36)$$

$$\text{gestoßene Kugel} \qquad \left(x_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, x_0\right)^2 + y_2^2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\, x_0\right)^2 \qquad (37)$$

Beide Kreise haben die gleiche Mittelpunktskoordinate, aber unterschiedliche Radien.



Geometrische Figur der Auftreffpunkte der Kugeln

4.2 Fehler

Eine Fehlerrechnung ist notwendig für die beiden Stoßzahlen k und k'. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz lautet für die beiden Fehler:

$$\begin{aligned} \Delta k &= \left|-\frac{\Delta x_1}{x_0}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_0}\right| + \left|-\frac{x_2 - x_1}{x_0^2}\Delta x_0\right| &(38)\\ \Delta k' &= \left|\frac{2\Delta x_2}{x_0}\right| + \left|-\frac{2x_2 \Delta x_0}{x_0^2}\right| &(39)\end{aligned}$$

Damit ist die Bestimmung der Fehler für k und k' reduziert auf die Bestimmung der Messfehler für die einzelnen x_i. Da hier aber die statistische Streuung der Messpunkte deutlich größer ist als der systematische Fehler der Messinstrumente (Bankmaßstab), ist letzterer gegenüber dem statistischen Fehler zu vernachlässigen.
Den statistischen Fehler einer Messgröße erhält man, wenn man die Standardabweichung σ aus den Einzelmessungen ermittelt. Der statistische Fehler der Messgröße ergibt sich dann aus σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)^2}{N-1}} \qquad \text{wobei} \qquad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{40}$$

$$\Delta x = 2\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{41}$$

Mit dem Faktor Zwei vergrößert man die Wahrscheinlichkeit der Reproduzierbarkeit im Rahmen der Fehlerangabe von $P = 0.68$ auf $P = 0.96$.
Die Berechnung dieser Fehler bzw. direkt die Berechnung von σ ist mit Hilfe der Statistikfunktionen eines Taschenrechners sehr einfach möglich. Die Angabe des Ergebnisses erfolgt in der Form:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \tag{42}$$

Man sollte dabei insbesondere auf die Anzahl der Stellen achten, deren Angabe mit Rücksicht auf den Fehler noch sinnvoll erscheint.

5 Fragen

Über die folgenden Begriffe und Fragen sollte vor dem Versuch Klarheit bestehen.

- Impulserhaltung, Energieerhaltung in der Mechanik
- Geltungsbedingungen dieser Erhaltungssätze
- Definition der Stoßzahl
- Warum kann man das Stoßexperiment auf das Messen von Längen reduzieren?
- elastischer und unelastischer Stoß
- Welche Bedeutung kommt der Stoßzahl zu, was gibt sie an?
- Warum führt man bei sehr elastischen Materialien eine korrigierte Stoßzahl k' ein?
- Was versteht man unter einem konservativen Kraftfeld?
- Warum entstehen Kreise als geometrische Figuren der Auftreffpunkte?

Literatur

[1] A. Recknagel, Physik (Mechanik) Verlag Technik Berlin 1990

[2] W. Demtröder, Experimentalphysik 1, Springer-Verlag Berlin 1998

[3] C. Gerthsen, Physik, Springer-Verlag Berlin 1997