

# Fraunhoferbeugung

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Aufgabenstellung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Fraunhoferbeugung</b>	<b>2</b>
2.1	Beugung und Interferenz mit LASER-Licht . . . . .	2
2.1.1	Fresnelsche und Fraunhofersche Beugung . . . . .	2
2.1.2	He-Ne-LASER, Graukeil und Fotoelement . . . . .	2
2.2	Elementare qualitative Vorbetrachtung . . . . .	2
2.3	Berechnung der Intensitätsverteilung . . . . .	3
2.3.1	Intensitätsverteilung am Spalt . . . . .	3
2.3.2	Doppelspalt und Gitter . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Experimente</b>	<b>7</b>
3.1	Versuchsaufbau und Justierung . . . . .	7
3.2	Prüfen des Linearitätsbereichs . . . . .	7
3.3	Messen der Intensitätsverteilungen . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Anhang</b>	<b>8</b>
4.1	Gitter (Doppel-Spalt) . . . . .	8
4.2	Fouriertransformation (FT) . . . . .	8
4.2.1	Mathematischer Formalismus . . . . .	8
4.2.2	Beispiele für FT . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Fragen</b>	<b>13</b>

# 1 Aufgabenstellung

1. Aufnahme der Beugungsbilder von LASER- Licht am Einfach-und Doppelspalt.
2. Bestimmung der Geometrie der Blenden-Objekte aus den Beugungsbildern und Kontrolle am Mikroskop.

## 2 Fraunhoferbeugung

### 2.1 Beugung und Interferenz mit LASER-Licht

#### 2.1.1 Fresnelsche und Fraunhofersche Beugung

**Prinzip von Huygens und Fresnel:** Wird in den Strahlengang einer ebenen Welle ein Hindernis (Blende) gebracht, so entsteht das Beugungsbild als Überlagerung einer Vielzahl von Kugelwellen, die von allen Punkten der Blendenöffnung ausgehen und in der Bildebene interferieren. Voraussetzung für Interferenzen ist die **Kohärenz** der sich überlagernden Teil-Wellen des Lichts.

Bei der Fresnelschen Beugung wird bei divergentem Licht eine Winkelabhängigkeit der Amplituden und Phasen der Elementarwellen betrachtet. Bei der **Fraunhofer'schen Beugung**, als Grenzfall sehr großer Entfernungen, sind die interferierenden Lichtstrahlen parallel, so daß **nur Phasenunterschiede** wichtig sind.

#### 2.1.2 He-Ne-LASER, Graukeil und Fotoelement

Die Gasentladung im He erzeugt die Besetzungsinversion im Ne. Durch induzierte Emission entsteht kohärentes Licht mit der Wellenlänge von  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ . Für die laterale Abhängigkeit der Intensität  $I = I(r)$  gilt bei minimaler Strahldivergenz von ca.  $0,5 \text{ mrad}$  näherungsweise eine Gaußverteilung (Glockenkurve, Gaußsches Wellenbündel). Die Gl. (1) besagt z. B. bei  $\delta_0 \approx 0,65 \text{ mm}$ , daß die Intensität im Abstand von  $r \approx 0,7 \delta_0$  vom Strahlzentrum auf  $1/e^2$  abgesunken ist,

$$I(r) = I_0 \cdot e^{-\frac{2r^2}{\delta_0^2}} \quad . \quad (1)$$

Infolge dieser seitlichen Begrenzung können breite Blendenobjekte ohne Hilfsmittel zur Strahlaufweitung nicht gleichmäßig ausgeleuchtet werden (begrenzte räumliche Kohärenz). In  $z \approx 1,5 \text{ m}$  Abstand vom Blendenobjekt befindet sich hinter dem Empfängerspalt ( $50 \mu\text{m}$ ) ein Halbleiter-Fotoelement (Si-Fotodiode ohne äußere Spannung). Dieses soll möglichst im linearen Bereich seiner Kennlinie  $U = U(I)$  arbeiten.  $U(I)$  wird relativ bei voller Beleuchtung (ohne Beugungsobjekt) mit den Stufen des Graukeils aufgenommen, wobei bei konstanter Wellenlänge für die relative Intensität nach n Keilstufen gilt:

$$I_n = I_0 \cdot 10^{-n \Delta D} \quad . \quad (2)$$

Jede Stufe des Graukeils hat eine Breite von  $4 \text{ mm}$  und einen Zuwachs an optischer Dichte (Absorption) von  $\Delta D = 0,1$ . Trägt man die Fotospannung  $U$  über der nach Gl. (2) berechneten relativen Intensität  $I_n$  auf, so erhält man oberhalb einer bestimmten Graustufe, d. h. unterhalb einer Intensitätsgrenze  $I_{gr}$ , einen linearen Verlauf.  $I_{gr}$  darf bei einer quantitativen Auswertung der Hauptmaxima nicht überschritten werden.

### 2.2 Elementare qualitative Vorbetrachtung

Paralleles, kohärentes und monochromatisches Licht fällt auf einen Spalt (bzw. einen Doppelspalt oder ein Gitter), wobei gilt:

1. Die betrachteten Spalte sind sehr hoch, so daß nur ihre Breiten  $A$  das Beugungsgeschehen bestimmen.
2. Die Breite  $A$  und der Abstand des Doppelspalt (bzw. die Gitterkonstante)  $a$  sind wesentlich

größer als die Wellenlänge ( $A \gg \lambda$ ;  $a \gg \lambda$ ).

3. Der Abstand zum Schirm ist so groß ( $z_0 \gg A$ ), daß er bezüglich der Amplituden für alle Beugungsordnungen gleich ist ( $r \approx z_0$ , Fraunhoferbeugung). Daher ist auch  $\sin \Theta \approx \Theta \approx \alpha/z_0$  ( $z_0$  = Schirmabstand,  $\alpha \approx z_0 \Theta$  = Auslenkung in der Schirmebene ( $[\alpha] = \text{m}$ )).

#### Spalt:

Entsprechend Abb. 1 sollen z. B. von dem Spalt  $N = 16$  Elementarwellen ausgehen. Man kann qualitativ das Beugungsbild erklären, wenn man annimmt, daß von einer Hälfte des Spaltes  $N/2 = 8$  Elementarwellen ausgehen, die mit den 8 Wellen der anderen Hälfte interferieren mögen (Nr. 1 mit Nr. 9; 2 mit 10 usw.).

Die sich für  $\Theta > 0$  auf dem Bildschirm überlagernden Wellenkombinationen (1 - 9; 2 - 10 usw.) besitzen einen **Gangunterschied** (Unterschied in der optischen Weglänge) von  $\Delta = (A \sin \Theta)/2$ . Die

**Auslöschung am Spalt** finden wir daher wegen

$$\Delta = \frac{A \sin \Theta}{2} = \frac{\lambda}{2} \quad \text{d. h. wenn} \quad A \sin \Theta = \lambda \quad \text{allgemein} \quad A \sin \Theta = n \lambda \quad . \quad (3)$$

( $n = 1, 2, \dots$ ). Die analoge Maximumbedingung lautet:

$$A \sin \Theta = ((2n + 1) \lambda)/2.$$

#### Beim Gitter (Doppelspalt)

interferieren Elementarwellen benachbarter Spalte (Abb. 1.b) und die

**Nebenmaxima am Doppelspalt** erscheinen unter den Beugungswinkeln

$$a \sin \Theta_{\max, n} = n \lambda \quad . \quad (4)$$

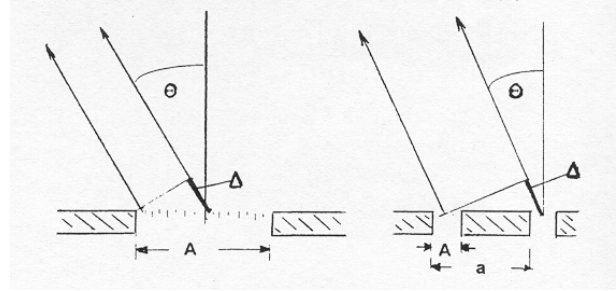


Abb. 1: Elementare Veranschaulichung der Gangunterschiede beim Spalt (a) und Gitter (b)

## 2.3 Berechnung der Intensitätsverteilung

### 2.3.1 Intensitätsverteilung am Spalt

Um die experimentell beobachtete kontinuierliche Intensitätsverteilung  $I(\Theta) \sim I(\alpha)$  (Abb. 3) theoretisch zu berechnen, muß über **alle Elementarwellen**, die von benachbarten Spaltpunkten ausgehen, **aufsummiert bzw. integriert** werden (einfachster = linearisierter Fall des Kirchhoffschen Beugungsintegrals bzw. einer **Fouriertransformation**).

Die vom Spalt ausgehenden Elementarwellen haben die gleiche Schwingungsphase. Unter einem bestimmten Beobachtungswinkel  $\Theta \neq 0$  interferieren eine große Zahl von Elementarwellen. Deren Phasenunterschiede bzw. Gangunterschiede in der Schirmebene entsprechen den Wegunterschieden.

Der maßgebliche elektrische Feldvektor  $E(t, z)$  der einfallenden harmonischen, monochromatischen Welle werde komplex beschrieben durch ( $j = \sqrt{-1}$ )

$$E(t, z) = \hat{E}_0 e^{j(\omega t - kz)} \approx \hat{E}_0 e^{j(\omega t - kr)} \quad . \quad (5)$$

Die sich in der Ebene des Schirmes für den Winkel  $\Theta$  überlagernden Wellen unterscheiden sich in ihren Phasenwinkeln  $\varphi$

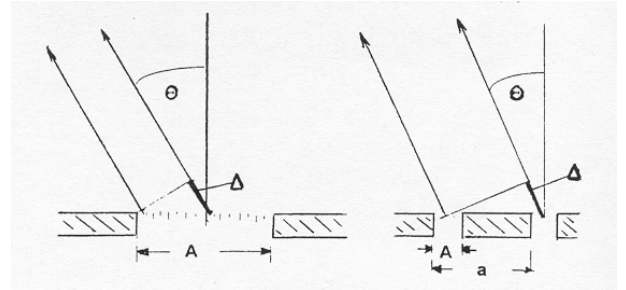


Abb. 2: Geometrie des Spaltes und des Doppelspaltes

$$\begin{aligned} E(t, r, \varphi) &= \hat{E}_0 e^{j(\omega t - kr - \varphi)} \quad \text{mit} \\ kr + \varphi &= k(R + x \sin \Theta) \quad . \end{aligned} \quad (6)$$

(Fraunhofer-näherung:  $r \approx R + x \sin \Theta$ ) Zur resultierenden Amplitudenverteilung gelangt man nach Integration über  $x$  in den Grenzen der beiderseits halben Spaltbreite.

Mit  $\int dx e^{ax} = \frac{1}{a} e^x$  sowie  $\sin x = (e^{jx} - e^{-jx})/(2j)$  und einer Erweiterung mit  $(A/2j)$  in Zeile 2 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{res} &\sim \hat{E}_0 \int_{-A/2}^{A/2} dx e^{j(\omega t - k(R + x \sin \Theta))} = \hat{E}_0 e^{j(\omega t - kR)} \int_{-A/2}^{A/2} dx e^{-jkx \sin \Theta} \\ &= \hat{E}_0 e^{j(\omega t - kR)} \frac{1}{jk \sin \Theta} \frac{A/2j}{A/2j} \left[ e^{(jk \sin \Theta A/2)} - e^{(-jk \sin \Theta A/2)} \right] \\ &= \hat{E}_0 e^{j(\omega t - kR)} \frac{2j}{j} \frac{A}{2} \left[ \frac{\sin(k \sin \Theta A/2)}{k \sin \Theta A/2} \right] = \hat{E}_0 A \left[ \frac{\sin(\pi \frac{A}{\lambda} \sin \Theta)}{\pi \frac{A}{\lambda} \sin \Theta} \right] e^{j(\omega t - kR)}. \end{aligned}$$

Die Amplitude ist  $\hat{E}_{res} \sim \hat{E}_0 A \operatorname{sinc} U \approx \hat{E}_0 A \frac{\sin(\frac{\pi A}{\lambda} \frac{\alpha}{z})}{(\frac{\pi A}{\lambda} \frac{\alpha}{z})}$ . (7)

Die Intensität folgt aus dem Quadrat von (7) (Multiplikation mit der konjugiert komplexen Größe) zu

$$I(\alpha) \sim \hat{E}_0^2 A^2 \frac{[\sin(\pi \frac{A}{\lambda} \sin \Theta)]^2}{(\pi \frac{A}{\lambda} \sin \Theta)^2} = I_0 (\operatorname{sinc} U)^2. \quad (8)$$

Diskussion und Bedeutung der Größen in Gl. (8), dargestellt in Abb. 3:

- Nach Sommerfeld wird mit der Abkürzung  $U = U(k) = (\pi A \sin \Theta)/\lambda$ , die Fouriertransformierte der **Spaltfunktion**,  $\frac{\sin U}{U} = \operatorname{sinc} U$  (Sinus-Koeffizient; engl. coefficient) genannt;
- Bei gegebener Wellenlänge ist für die Periode der  $\operatorname{sinc} U$ -Funktion maßgeblich  $A \cdot \sin \Theta$ . Daher findet man bei schmalen Spalten die größeren Beugungswinkel  $\Theta$ .
- Die Intensität  $I(\alpha) \sim (\operatorname{sinc} U)^2 \sim E_0^2 \sim A^2$ . Sie ist dem Quadrat der Spaltbreite  $A$  proportional.
- $\alpha = z_0 \sin \Theta$  ist die gemessene x-Koordinate in der Schirmebene ( $\Theta \approx \sin \Theta = \alpha/z_0$ );
- Die  $\operatorname{sinc} U$ -Funktion hat ihren normierten Maximalwert  $\frac{I(0)}{E_0^2 A^2} = 1$  bei  $\Theta = 0$  ( $\alpha = 0$ , nullte Ordnung; man zeige, daß  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  ist);
- Für die Auswertung haben die **Nullstellen** große Bedeutung:  
 $\operatorname{sinc} U$  hat Nullstellen für  $U = \pi; 2\pi; 3\pi; \dots$ . Das bedeutet z. B. für die erste, zweite und dritte Nullstelle:  
 $\pi = (\pi A \sin \Theta_1)/\lambda$  oder  $\lambda = A \sin \Theta_1$ ,  
 $2\lambda = A \sin \Theta_2$ ,  $3\lambda = A \sin \Theta_3$ , usw. in Übereinstimmung mit (3).
- Die ebenfalls für die Auswertung geeigneten **Nebenmaxima erster und höherer Ordnung** der Intensitäts-Funktion  $(\operatorname{sinc} U)^2$  liegen nicht genau bei den ungeraden Vielfachen von  $\pi/2$  (vergl. (4)), sondern sind, wie man sich durch Differenzieren und Null-Setzen von  $(\operatorname{sinc} U)^2$  überzeugt, durch  $\tan U = U$  gegeben. Die grafische Lösung dieser Bedingung zeigt Abb. 3 oben links. Damit liegen die Nebenmaxima nicht bei  $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$ , sondern bei

$$\pm 1,4303\pi, \pm 2,459\pi, \pm 3,47\pi, \dots \quad (9)$$

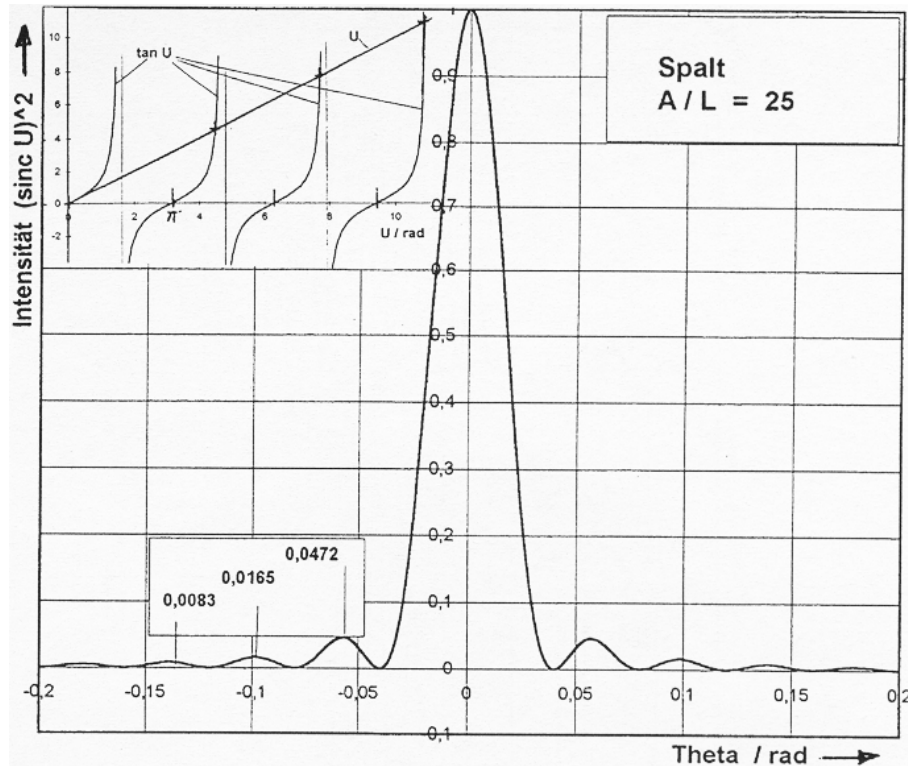


Abbildung 3: Intensitätsverteilung in der Schirmebene hinter dem Einzelspalt:  $(\sin cU)^2 = f(U)$ ; Einsatz oben: Lösung von  $\tan U = U$

### 2.3.2 Doppelspalt und Gitter

Beim Gitter (bzw. beim Doppelspalt,  $n=2$ ) überlagern sich die Beugungsbilder von  $n$  Einzelspalten der Breite  $A$ , die den Abstand  $a$  haben. Die resultierende Intensität ist im wesentlichen bestimmt durch 2 Faktoren:

1. durch die Geometrie des Einzelspalt, den **Formfaktor**  $(\sin cU)^2$  und
2. den Überlagerungsterm, den **Strukturfaktor**  $\frac{\sin^2(n\pi \frac{a}{\lambda} \frac{\alpha}{z})}{\sin^2(\pi \frac{a}{\lambda} \frac{\alpha}{z})} = \frac{\sin^2(ny)}{(\sin^2 y)}$  (s. Anhang).

Beim **Doppelspalt** ( $n = 2$ ) ergibt sich nach der Umformung ( $\frac{\sin^2 2\beta}{\sin^2 \beta} = 4 \cos^2 \beta$ ) am Strukturfaktor für die Intensität

$$I(\alpha) \sim \frac{I_0}{4} \frac{\sin^2(\pi \frac{A}{\lambda} \frac{\alpha}{z})}{(\pi \frac{A}{\lambda} \frac{\alpha}{z})^2} \cdot 4 \cos^2(\pi \frac{a}{\lambda} \frac{\alpha}{z}) = I_0 \frac{\sin^2(\pi \frac{A}{\lambda} \frac{\alpha}{z})}{(\pi \frac{A}{\lambda} \frac{\alpha}{z})^2} \cdot \cos^2(\pi \frac{a}{\lambda} \frac{\alpha}{z}) \quad (10)$$

Diskussion und Bedeutung der Größen in Gl. (10), für 2 Beispiele dargestellt in Abb. 4:

- Die Nebenminima sind nur dann eindeutig abzählbar, wenn  $a/A$  rational, im günstigsten Fall ein Verhältnis kleiner ganzer Zahlen ist (z. B. Abb. 4a).
- Die Nebenmaxima werden durch Maxima des Strukturfaktors in Gl. (10) bestimmt:  $\cos^2(\pi \frac{a}{\lambda} \frac{\alpha}{z})$  wird maximal für  $\pi \frac{a}{\lambda} \frac{\alpha}{z} = n\pi$  ( $n=1,2,\dots$ ; vergl. mit (4)). Damit kann bei bekannter Wellenlänge  $a = \frac{n\lambda}{\sin \Theta}$  bestimmt werden.
- Entsprechend gilt für die Nullstellen oder **Nebenminima**:  

$$a = \frac{\lambda}{2} \frac{(2n+1)}{2} \sin \Theta;$$
- Die Anzahl  $l$  der **Nebenminima** innerhalb des zentralen Hauptmaximums ( $l = 2a/A$ ) ist ebenfalls zur Bestimmung von  $a$  geeignet, sofern der Quotient  $(2a/A)$  rational ist (s. z. B. Abb. 4a mit  $l = 10$ ; entsprechend findet man  $l^* - 1 = 2a/A$  für die  $l^*$  Nebenmaxima).

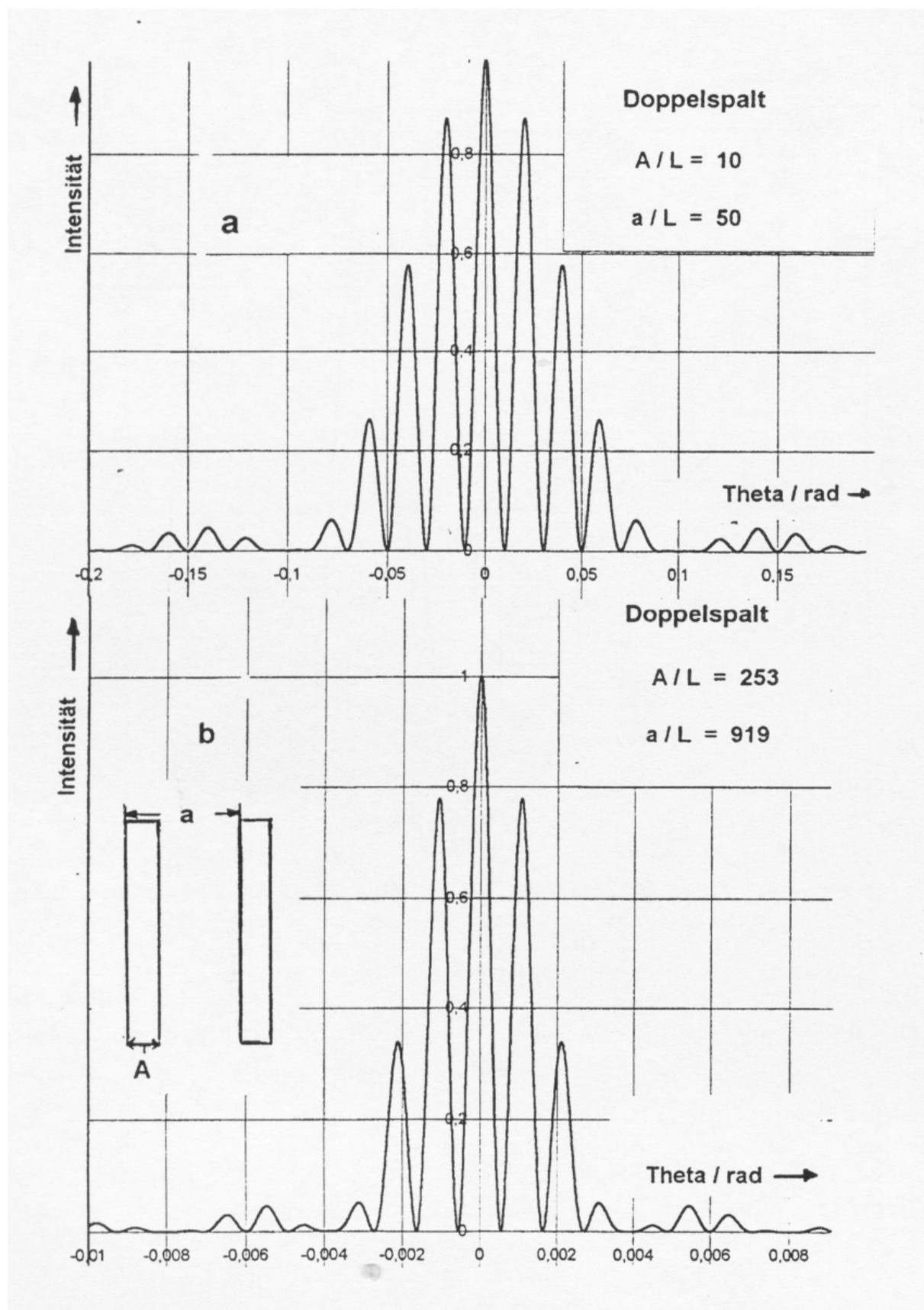


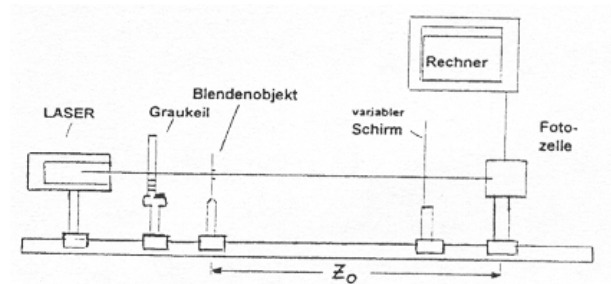
Abbildung 4: Zwei Intensitätsverteilungen  $I(\alpha)$  für zwei Doppelspalte mit unterschiedlichen  $a/A$  bzw.  $A/\lambda$ .

### 3 Experimente

#### 3.1 Versuchsaufbau und Justierung

**Weder direkt noch indirekt (Reflexionen an Metallflächen) in das Laserlicht hineinsehen!!**

Der Versuch ist an einen Rechner gekoppelt und wird durch ein Menü geführt. Das Prinzip des Versuchsaufbaus ist in Abb. 5 skizziert. Der Stellmotor für den Empfängerspalt überstreicht  $\alpha$ -Werte von 0 bis 60 mm. Die Intensität  $I(\alpha)$  wird automatisch registriert, kann ausgedruckt und punktweise abgefragt werden.



**Abb. 5:** Versuchsaufbau mit Laser, Graukeil, Blendenobjekt, Fotometer

Die Auswertung erfolgt teils von Hand, teils vom Rechner. Während des gesamten Versuchs bleibt der Laser abgeblendet. Zunächst wird für maximale mögliche Entfernung ( $z_0 \approx 1,5$  m) der Laserstrahl auf die Mitte des Empfänger-Spalt der Fotodiode gerichtet. Danach wird ein Blendenobjekt, z. B. der Einzelspalt eingeschoben und das Beugungsbild qualitativ auf einem Papierschirm betrachtet und das Blendenobjekt justiert. Dann wird der Graukeil eingeschoben und der aus der Linearitätsprüfung ermittelte Graukeilwert, z. B. 5, eingestellt und die Justierung mit Fotozelle und digitaler Anzeige wiederholt.

#### 3.2 Prüfen des Linearitätsbereichs

Alle Intensitäten werden relativ zum Maximalwert bestimmt. Dazu muß als Voraussetzung eine **lineare Kennlinie** der Fotodiode vorliegen, die allerdings begrenzt ist. Zur Ermittlung dieser Grenze wird mit dem breiten Einzelspalt der Fotozellenspalt in das Intensitätsmaximum gefahren und im Menüschritt **Kalibrierung** die Intensität für die verschiedenen Werte des Graukeils aufgenommen. Die angezeigte Fotospannung wird über den nach Gl. (2) berechneten relativen Intensitätswerten aufgetragen und die Linearitätsgrenze ermittelt (z. B. 50 mV). Diese kann auch absichtlich überschritten werden, wenn z. B. das Interesse nur den Minima gilt und die Intensitätsmaxima fehlerhaft (zu gering) sein können.

#### 3.3 Messen der Intensitätsverteilungen

Das Menü umfaßt im wesentlichen die Schritte **Kalibrierung**, **Messung** und **Darstellung**.

Der Meßspalt vor der Fotozelle hat eine endliche Breite ( $b \approx 50 \mu\text{m}$ ), wodurch der registrierte Intensitätsverlauf im Vergleich zum wahren Verlauf etwas modifiziert wird: Die Maxima von sehr schmalen Reflexen erscheinen flacher, die Minima angehoben, die Lage der Extrema etwas verschoben. Diese Beeinflussung kann nur qualitativ diskutiert werden. Da der Fehler mit abnehmender Halbwertsbreite anwächst, sollte vor allem bei großen Spaltbreiten der Abstand  $z_0$  so groß wie möglich gewählt werden.

## 4 Anhang

### 4.1 Gitter (Doppel-Spalt)

Zur Herleitung der Formel (10): Mit der Amplitude  $E_0$  der einfallenden Lichtwelle wird jeder der  $n$  Einzelspalte angeregt. Zur Berechnung der resultierenden Amplitude wird über jeden der  $n$  Spalte (Abb. 2 b) integriert (analog zum Einzelspalt) und anschließend über die  $n$  einzelnen Integrale summiert. Die resultierende Intensität ergibt sich zu  $\underline{E}_{res} \sim$

$$\hat{E}_0 \left( \int_{-A/2}^{A/2} [dx e^{j(\omega t - k(R+x\sin\Theta))}] + \int_{a-A/2}^{a+A/2} [\dots] + \dots + \int_{(n-1)a-A/2}^{(n-1)a+A/2} [\dots] \right) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{E}_0 e^{j(\omega t - kR)} \frac{1}{j k \sin \Theta} [(e^{j k \sin \Theta A/2} - e^{-j k \sin \Theta A/2}) + (e^{j k \sin \Theta (a+A/2)} - \\ &e^{-j k \sin \Theta (a-A/2)}) + \dots] = \hat{E}_0 e^{j(\omega t - kR)} \frac{1}{j k \sin \Theta} [e^{j k \sin \Theta A/2} - e^{-j k \sin \Theta A/2}] \cdot [1 \\ &+ e^{j k \sin \Theta a} + e^{j k \sin \Theta 2a} + \dots] = \hat{E}_0 e^{j(\omega t - kR)} \text{Asinc} U \left[ \sum_{m=0}^{(n-1)} e^{-j k \sin \Theta m a} \right] = \\ &\hat{E}_0 e^{j(\omega t - kR)} \text{Asinc} U \left[ \frac{e^{+j k \sin \Theta a/2} e^{-j k \sin \Theta a/2} - e^{-j k \sin \Theta a/2} e^{-j k \sin \Theta a/2}}{e^{+j k \sin \Theta a/2} e^{-j k \sin \Theta a/2} - e^{-j k \sin \Theta a/2} e^{-j k \sin \Theta a/2}} \right] \end{aligned}$$

Nach Ausklammern von  $(e^{-j k \sin \Theta a/2} / e^{-j k \sin \Theta a/2}) = e^{-j k (n-1) \sin \Theta a/2}$  wird die kleine Strecke  $(n-1) \sin \Theta a/2$  im Exponenten zum mittleren Abstand

$\bar{R}^* = (z + (n-1) \sin \Theta a/2)$  addiert und der periodische Term  $\hat{E}_0 e^{j(\omega t - k \bar{R}^*)}$  vorgezogen. Damit (und nach Erweitern mit  $n$ ) wird

$$\begin{aligned} \hat{E}_{res} &\sim E_0 A \text{Asinc} U \left[ \frac{\sin(k \sin \Theta a/2)}{\sin(k \sin \Theta a/2)} \right] = \frac{n}{n} E_0 A \left[ \frac{\sin(\pi \frac{A}{\lambda} \frac{\alpha}{z})}{(\pi \frac{A}{\lambda} \frac{\alpha}{z})} \right] \left[ \frac{\sin(\pi n \frac{a}{\lambda} \frac{\alpha}{z})}{\sin(\pi \frac{a}{\lambda} \frac{\alpha}{z})} \right] \\ &\sim \frac{n E_0 A}{n} \left[ \frac{\sin(\pi \frac{A}{\lambda} \frac{\alpha}{z})}{(\pi \frac{A}{\lambda} \frac{\alpha}{z})} \right] \left[ \frac{\sin(\pi n \frac{a}{\lambda} \frac{\alpha}{z})}{\sin(\pi \frac{a}{\lambda} \frac{\alpha}{z})} \right] ; I(\alpha) \sim \left( \frac{n E_0 A}{n} \right)^2 \sim I_0 (\text{sinc} U)^2 \left[ \frac{\sin(ny)}{\sin y} \right]^2. \quad (12) \end{aligned}$$

Die maximale Intensität wächst mit  $n^2$ . Normiert man die gebeugten Intensitäten auf den Maximalwert ( $I_0 = 1$ ) der nullten Ordnung, so sind die gebeugten Intensitäten durch  $n^2$  zu dividieren (vergl. mit (10),  $n^2 = 4$ ; s. Frage 12).

### 4.2 Fouriertransformation (FT)

#### 4.2.1 Mathematischer Formalismus

Die Gln. (8 und 10) sind Beispiele von FT. Mit einer FT wird eine **Raumfunktion** = **Objektfunktion**  $f(x)$ , z. B. ein Spalt [ $f(x) = 1$  für  $-A/2 \leq x \leq +A/2$ ; sonst  $f(x) = 0$ ] bzw. eine Zeitfunktion  $f(t)$  in der Nachrichtentechnik in eine **Amplitudenfunktion** im **reziproken Raum**  $F(k)$  bzw. in ein Frequenzspektrum  $F(f)$  überführt. Die allgemeine mathematische Vorschrift für FT lautet in komplexer Schreibweise:

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{jkx} dx \quad (a); \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{-jkx} dk \quad (b). \quad (13)$$

Man nennt  $F(k) = F^* f(x)$  die F.-Transformierte (FT) von  $f(x)$  und umgekehrt nennt man  $f(x) = F^{*-1} F(k) = F^{*-1} F^* f(x)$  die inverse FT.

Der oft nur bei einer der Gln. (13) ,b) stehende Faktor  $1/2\pi$  wurde symmetrisch auf beide Transformationen als  $1/\sqrt{2\pi}$  verteilt ( $j = \sqrt{-1}$ ).



### 4.2.2 Beispiele für FT

In den Abb. 6 und 7 sind Beispiele von FT aus der Optik und Nachrichtentechnik skizziert. Auf der rechten Seite stehen die Amplituden des Frequenzspektrums, durch deren Quadrieren man die Intensitäten erhält. Die der Abb. 7 entsprechenden FT für die Fraunhoferbeugung  $F(k)$  erhält man mit  $t \rightarrow x$  sowie  $f \rightarrow k$  und mit  $s(t) \rightarrow f(x)$  sowie  $\underline{S}(f) \rightarrow F(k)$ .

Etwas ausführlicher sollen folgende Fälle erörtert werden:

1. Noch einmal erwähnt sei die schon behandelte Beugung am Einzelspalt mit der maßgeblichen  $\text{sinc}U$ -Funktion nach GL. (8) als FT der Spaltfunktion (Rechteckfunktion nach Abb. 7,1).
2. Die FT der **Gaußschen Glockenkurve** (Abb. 7,4) wird mit  $f(x) = C e^{-ax^2}$ ; ( $C = \sqrt{a/\pi} = \text{const}$ ) sowie

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{jkx} dx = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{jkx} dx \quad , \quad (14)$$

und  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2} = \sqrt{\pi}$  (Tafelwerk) sowie mit  $-ax^2 + jkx = -(x\sqrt{a} - jk/s\sqrt{a})^2 - k^2/4a$  und  $\beta = (x\sqrt{a} - jk/s\sqrt{a})$

wieder **eine Gauß-Kurve**:

$$F(k) = e^{\frac{k^2}{4a}} \quad . \quad (15)$$

Die Standardabweichungen von  $f(x)$  bzw.  $F(k)$  sind  $\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$  bzw.  $\sigma_k = \sqrt{2a}$ , dh.,  $\sigma_x \cdot \sigma_k = 1$ . Wird z. B. die Gauß-Verteilung  $f(x)$  um den Faktor 2 schmaler ( $a'$  2 mal größer:  $a' = 4a$ ;  $\sigma'_x = \sigma_x/2$ ) so wird die FT um den Faktor 2 breiter, wobei das Amplitudenmaximum wegen der Normierungsbedingung  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{k^2}{4a}} = 1$  um den gleichen Faktor sinkt.

3. **Dirak'sche Delta-Funktion:**  $\delta(x)$

Für verschwindenden  $\sigma$ -Wert ( $a \rightarrow \infty$ ) geht die Gaußsche Glockenkurve über in die Dirak'sche  $\delta$ -Funktion (Singularität), die nebst der Normierungsbedingung definiert ist:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0 \quad \text{fr } x \neq 0 \\ \delta(x) &= \infty \quad \text{fr } x = 0 \quad . \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) &= 1 \quad . \end{aligned} \quad (16)$$

Hat z. B. das Objekt (angenähert) die Form eines  $\delta$ -peaks, so ist die zugehörige FT ein (angenähert)  $\infty$  breites Raumfrequenz-Spektrum (weißes Rauschen als Frequenzspektrum in der Nachrichtentechnik, s. Abb. 7,7), bzw. im Falle der Beugung an einem sehr feinen Spalt erhält man eine diffuse gleichmäßige Ausleuchtung auf dem Schirm.

Wichtig sind weitere **Eigenschaften** der  $\delta$ -Funktion, die Multiplikation mit einer stetigen Fkt. bzw. den Zusammenhang zur FT betreffend:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx &= f(0) \quad (a) \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad (b) \\ \delta(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jkx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jkx} dk \quad (c) \\ \delta(x) &= F^{*-1}[1] \quad (d) \quad ; \quad \delta(x) = F^*[\delta(x)] = 1 \quad (e) \\ \delta(x - x') &= \delta(x' - x) \quad (f) \quad \delta(x) = \delta(-x) \quad (g) \quad . \end{aligned} \quad (17)$$

In Worten: Durch a. bzw. b ist ein Funktionswert an der Stelle  $x = 0$  bzw. an der Stelle  $x_0$  gegeben;

Die FT der  $\delta$ -Fkt. ist die 1; die  $\delta$ -Fkt. ist die inverse FT der Zahl 1., s. Abb. 7,6 und 7,7.

4. **Beispiel:** Doppel- $\delta$ -Funktion ( $\infty$  schmaler Doppelspalt, Abb. 6 A):

Mit  $f(x) = \delta[x - (+a/2)] + \delta[x - (-a/2)]$  und den Gln. (13 a, 17 b) sowie

$$[e^{jx} + e^{-jx}]/2 = \cos x \quad (18)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{jkx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[x - (+a/2)] + \delta[x - (-a/2)] e^{jkx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{jka/2} + e^{-jka/2}] \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} 2 \cos\left(\frac{ka}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{ka}{2}\right) . \end{aligned} \quad (19)$$

Die Amplituden-Funktion der gebeugten Welle ist also periodisch mit konstanter Amplitude.

5. **Beispiel:** cos-Gitter, Umkehrung von 4., Abb. 6,(b):

Mit den in (17) angegebenen Beziehungen sowie Gl. (18) findet man

$$\begin{aligned} f(x) &= A \cos(k_0 x) = \frac{A}{2} [e^{jk_0 x} + e^{-jk_0 x}] \\ F(k) &= \frac{A}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk_0 x} e^{jkx} dx + \frac{A}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jk_0 x} e^{jkx} dx \\ &= \frac{A}{2} [\delta(-k - k_0) + \delta(k - k_0)] = \frac{A}{2} [\delta(k + k_0) + \delta(k - k_0)] . \end{aligned} \quad (20)$$

In Worten: Ein cos-Gitter als Beugungsobjekt erzeugt zwei scharfe Amplituden- (und Intensitäts-) peaks auf dem Schirm.

6. **cos-Gitter** mit überlagerter gleichmäßiger Ausleuchtung, Abb. 6,(d):

In diesem meist praktisch realisierten Fall haben wir eine Überlagerung der Fälle der Abb. 6(a) und 6(b).

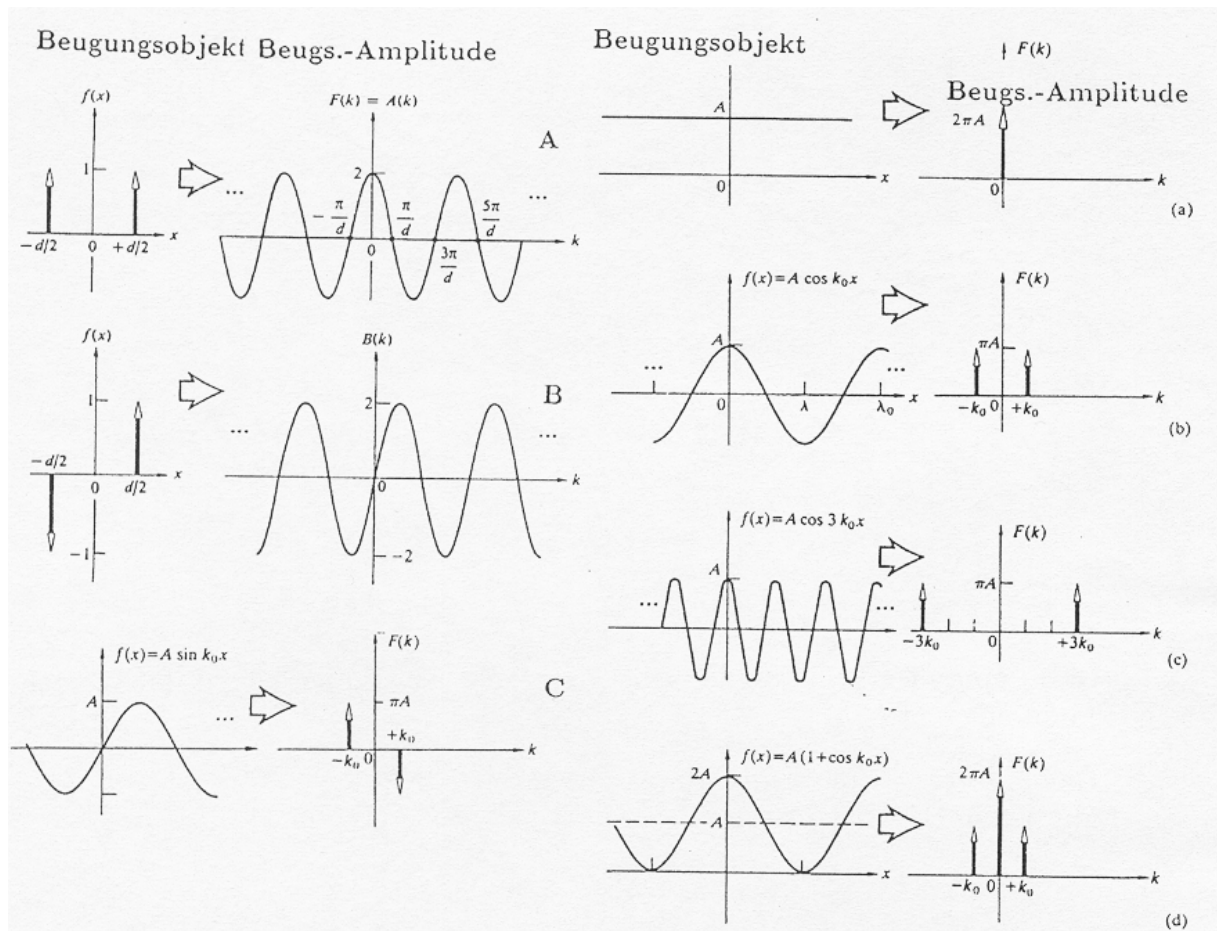


Abbildung 6: Beispiele von FT [1]:

Rechts sind Amplituden dargestellt, durch Quadrieren erhält man Beugungsbilder

A: Zwei  $\infty$  schmale Spalte ergeben ein periodisches Bild;

B: Hypothetisch, experimentell von A nicht zu unterscheiden;

C: Umkehrung von A, exp. von (b) nicht zu unterscheiden;

(a): Gleichmäßige Ausleuchtung ergibt nur nullte Ordnung;

(b,c): cos-Gitter ergibt zwei scharfe Beugungsbilder;

(d): cos-Gitter mit konstantem Untergrund, entspricht Überlagerung von (a) und (b)

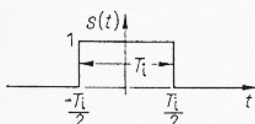
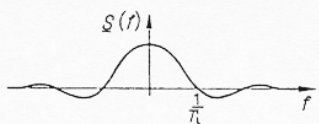
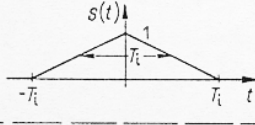
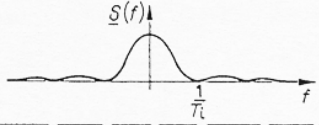
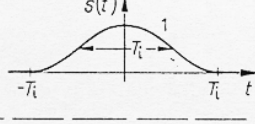
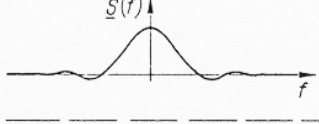
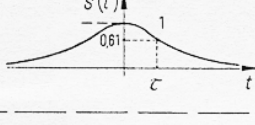
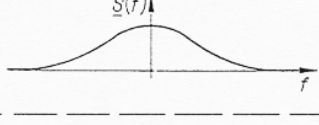
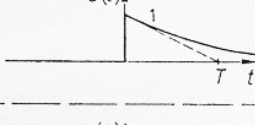
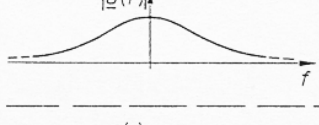
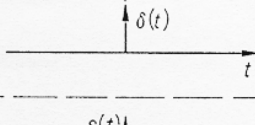
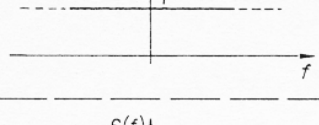
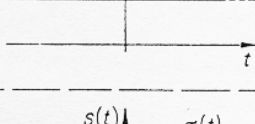
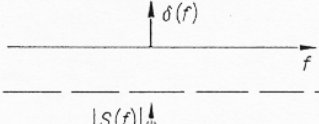
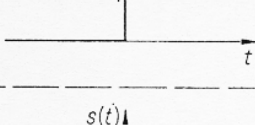
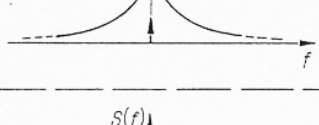
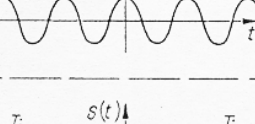
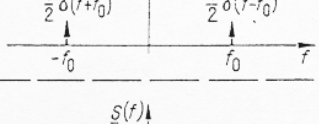
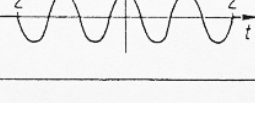
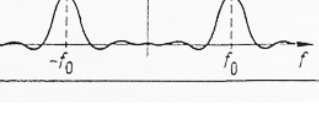
entspr. Beugungsobjekt			entspr. Beugs.-Amplitude	
Nr.	Zeitfunktion	$s(t)$	$\underline{S}(f)$	Spektraldichte
1		$s(t) = \begin{cases} 1, &  t  < \frac{T_i}{2} \\ 0, &  t  > \frac{T_i}{2} \end{cases}$ Rechteck-Impuls	$\underline{S}(f) = T_i \frac{\sin(\pi f T_i)}{(\pi f T_i)}$	
2		$s(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{T_i}, &  t  < T_i \\ 0, &  t  > T_i \end{cases}$ Dreieck-Impuls	$\underline{S}(f) = T_i \cdot \left( \frac{\sin(\pi f T_i)}{\pi f T_i} \right)^2$	
3		$s(t) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi t}{2 T_i}\right), &  t  < T_i \\ 0, &  t  > T_i \end{cases}$ $\cos^2$ -Impuls	$\underline{S}(f) = T_i \frac{\sin(2\pi f T_i)}{2\pi f T_i} \cdot \frac{1}{1 - (2f T_i)^2}$	
4		$s(t) = e^{-\frac{t^2}{2c^2}}$ Gauß-Impuls	$\underline{S}(f) = c \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{-2(\pi c f)^2}$	
5		$s(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{T}}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ Exponential-Impuls	$\underline{S}(f) = \frac{T}{1 + j2\pi f T}$	
6		$s(t) = \delta(t) \left( = \frac{d\sigma(t)}{dt} \right)$ Dirac-(Einheits-) Impuls	$\underline{S}(f) = 1$	
7		$s(t) = 1$ Gleichspannung(-signal)	$\underline{S}(f) = \delta(f)$ (Vertauschungs-Satz, vgl. $\delta(t) \leftrightarrow 1$ )	
8		$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$ Sprungfunktion	$\underline{S}(f) = \frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$	
9		$s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ cos-Schwingung	$\underline{S}(f) = \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$	
10		$s(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t), &  t  < \frac{T_i}{2} \\ 0, &  t  > \frac{T_i}{2} \end{cases}$ cos-Schwingung mit Dauer $T_i$	$\underline{S}(f) = \frac{T_i}{2} \cdot \frac{\sin(\pi(f-f_0)T_i)}{\pi(f-f_0)T_i} + \frac{T_i}{2} \cdot \frac{\sin(\pi(f+f_0)T_i)}{\pi(f+f_0)T_i}$	

Abbildung 7: Wichtige Zeitfunktionen  $s(t)$  aus der Nachrichtentechnik mit ihren FT ( $\underline{S}(f)$ ), völlig analog den Blendenobjekten mit zugehörigen Beugungsamplituden [6]

## 5 Fragen

1. Wie lassen sich Amplitude und Phase einer ebenen harmonischen Welle darstellen? (auch Komplexe Darstellung).
2. Was versteht man unter Beugung und Interferenz?
3. Wie hängen Amplitude und Intensität zusammen? Woraus resultiert bei Fraunhofer-Beugung der Gangunterschied?
4. Erläutern Sie die Fraunhoferbeugung am Einzel-Spalt.
5. Was besagt das Theorem von Babinet (Beispiele)?
6. Was besagt das Prinzip von Huygens-Fresnel?
7. Nennen Sie Beispiele zu Fraunhofer'scher und Fresnel'scher Beugung.
8. Erläutern Sie in Fraunhofer-Näherung die Gangunterschiede und Intensitätsverteilungen für Spalt und Gitter.
9. Was versteht man unter der Kohärenzbedingung und der Kohärenz-Länge?
10. Skizzieren Sie das (Fraunhofer-) Beugungs-Bild, d. h.  $E(\alpha)$ ;  $I(\alpha)$  für folgenden Einzelspalt: anhand der Gl. 8):  
 $A=0,1 \text{ mm}$ ;  $z=1,5 \text{ m}$ ;  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ !
11. Warum ist LASER- Licht besonders kohärent?
12. Bezüglich der  $n^2$ -Abhängigkeit der maximalen Beugungsintensität beim Gitter zeige man, daß gilt für das Maximum von  $f^* = (\sin(ny))/(\sin y)$  (s. Gl. (12):  
Wegen  $\frac{\partial f^*}{\partial y} = 0$  wird  $f_{max}^* = n$ .

## Literatur

- [1] E. Hecht, Optik, Add. Wesley 1989
- [2] H. J. Paus, Physik, C.h.-V. München 1995
- [3] Gerthsen (Vogel), Physik, Springer Berlin 1995
- [4] H. Niedrig, Physik, Springer Berlin 1992
- [5] A. Recknagel, Physik, Bd. IV, Optik
- [6] E. Herter, W. Lörcher, Nachrichtentechnik, V. C.-Hanser, München 1994