

Innere Reibung von Flüssigkeiten

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	2
2	Allgemeine Grundlagen	2
2.1	Newtonsche zähe Flüssigkeiten	2
2.2	Temperaturabhängigkeit der Viskosität	2
3	Experimente	3
3.1	Kugelfall-Methode	3
3.2	Höppler-Viskosimeter	3
3.3	Kapillar-Viskosimeter	4
4	Hinweise zu den Versuchen	4
4.1	Prüfung auf laminare Strömung	4
5	Anhang	5
5.1	Viskositätswerte	5
5.2	Prüfung auf Newtonsches Verhalten	5
5.3	Zur Herleitung	5
5.3.1	Hagen-Poiseuille	5
5.3.2	Stokes	6
6	Fragen	6

1 Aufgabenstellung

1. Bestimmung einer Viskosität mit dem Kapillar-Viskosimeter nach Ubbelohde
2. Bestimmung der Temperaturabhängigkeit $\eta(T)$ nach Höppler

2 Allgemeine Grundlagen

2.1 Newtonsche zähe Flüssigkeiten

Flüssigkeiten, deren (Schub-) Viskosität im Bereich der **laminaren** Strömung eine nur von der Temperatur abhängige Konstante ist, heißen **Newtonsche Flüssigkeiten**

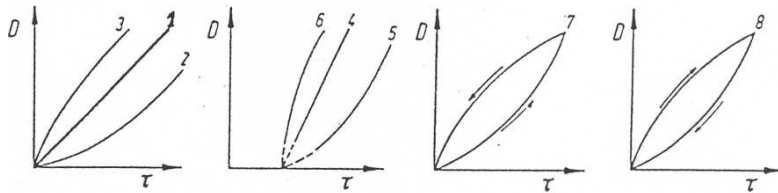


Abb. 1: Newtonsche (1) und nicht Newtonsche Flüssigkeiten ($D = \frac{dv_x}{dz}$)

(z. B. Wasser, Mineral-Öle, niedermolekulare (klare) Flüssigkeiten, auch Glasschmelzen). Beispiele für Abweichungen: 2,3 - Suspensionen (Kakao), Kolloide, Schmelzen; 4,5,6- Plaste mit Fließgrenze (Ton, Kitt, Pasten); 7,8 - zeitabhängiges Verhalten mit Hysterese [2]).

Fließt eine Newtonsche Flüssigkeit laminar in x -Richtung an einer Wand (oder einem Hindernis) entlang, so gleiten Flüssigkeitsschichten in der x - y -Ebene aufeinander ab und verursachen dabei eine Schubkraft F_x (tangentielle Reibungskraft),

für die der **Newtonsche Ansatz** gilt:

$$F_x = \eta A_{xy} \frac{dv_x}{dz} \quad (a); \quad \text{bzw.} \quad \tau = \frac{F_x}{A_{xy}} = \eta \frac{dv_x}{dz} \quad (b)$$

(η Koeffizient der (dynamischen) Viskosität oder Zähigkeit; A Fläche; $\frac{dv_x}{dz}$ Geschwindigkeitsgradient senkrecht zu \vec{v} ; τ Schubspannung; Abb. 2 a).

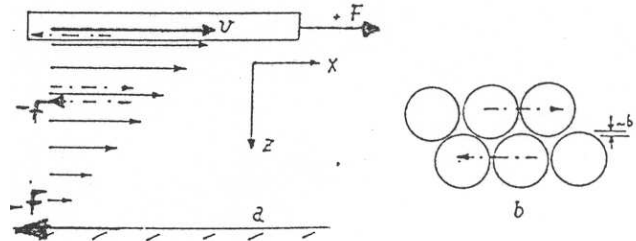


Abb. 2: Kräfte und Geschwindigkeitsabnahme zwischen aneinander abgleitenden Schichten in der zähen Flüssigkeit zwischen bewegter und ruhender Platte (a); mikroskopisch (b)

2.2 Temperaturabhängigkeit der Viskosität

Die Viskosität von Flüssigkeiten nimmt im Bereich der Raumtemperatur mit steigender Temperatur monoton ab. Bei vielen Flüssigkeiten kann der Temperaturgang mit zwei Konstanten (A, b) nach Andrade beschrieben werden:

$$\eta(T) = A e^{\frac{b}{T}} \quad (2)$$

Dabei ist $A = \eta_\infty$ der hypothetische η -Wert bei $T = \infty$ und in b steckt im wesentlichen die Aktivierungsenergie als Höhe von Potentialwällen bei Platzwechselvorgängen (Abb. 2 b) in der Flüssigkeit, die der Boltzmann-Statistik genügen (Wahrscheinlichkeit $w \sim e^{-\frac{b}{T}} \sim \frac{1}{\eta}$). Die Auswertung der

$\eta(T)$ -Messungen erfolgt anhand der **Arrhenius-Auftragung**:

$$\ln \eta(T) = \ln A + b \frac{1}{T} \quad . \quad (3)$$

3 Experimente

3.1 Kugelfall-Methode

Eine Kugel vom Radius R bewegt sich mit geringer (laminare Strömung!) Geschwindigkeit \vec{v} in einer (Newtonschen) zähen Flüssigkeit. Dabei resultiert als Folge von Gl. (1) die **Reibungskraft nach Stokes**¹

$$\vec{F} = -6 \pi \eta R \vec{v} \quad . \quad (4)$$

Bei der **absoluten Kugelfall-Methode** läßt man eine Kugel, deren Radius und Dichte bekannt sind, in der Achse eines weiten ($r \gg R$) mit der zu untersuchenden Flüssigkeit (Dichte ρ_f) gefüllten Zylinders (Radius r) fallen. Man bestimmt die Endgeschwindigkeit v_e , die sich ergibt, wenn Schwerkraft, Auftriebskraft und Reibungskraft nach (4) im Gleichgewicht stehen:

$$\rho_k \frac{4\pi R^3}{3} g - \rho_f \frac{4\pi R^3}{3} g = 6 \pi \eta R v_e \quad . \quad (5)$$

Dann gilt für die Viskosität im Idealfall sehr großer Gefäß-Weite

$$\eta = (\rho_k - \rho_f) \frac{R^2 g}{9 v_e} \quad . \quad (6)$$

Nach Francis [6] muß der endliche Durchmesser r des Fallrohres in einer Korrektur berücksichtigt werden:

$$\eta = (\rho_k - \rho_f) \frac{R^2 g}{9 v_e} \left[1 - \frac{R}{r} \right]^{\frac{9}{4}} \approx (\rho_k - \rho_f) \frac{R^2 g}{9 v_e} \left[1 - \frac{9R}{4r} \right] \quad . \quad (7)$$

(Um die Korrektur gering zu halten, sollte mit möglichst kleinen Kugeln gearbeitet werden: z. B. $2R \approx 2$ mm für $\eta \approx 10$ P; $2R \approx 8$ mm für $\eta \approx 300$ P) [3].

3.2 Höppler-Viskosimeter

Das Höppler-Viskosimeter stellt eine technische Variante der Kugelfall-Methode dar, bei dem das mit der Flüssigkeit gefüllte und leicht geneigte Rohr nur wenig größer als der Kugelradius ist und die Kugel an einer Rohrwand abwärts gleitet. Damit braucht man bei Messungen mit dem Durchfluß-Thermostaten nur ein vergleichsweise geringes Flüssigkeitsvolumen zu temperieren. Die Gleichungen (6; 7) sind stark modifiziert. Mit der vom Hersteller angegebenen Fallkörper-Konstante K und t als Fallzeit zwischen zwei Meßmarken gilt

$$\eta = K (\rho_k - \rho_f) g t \quad . \quad (8)$$

Beim Viskosimeter nach Lawaczek ist die Kugel durch zylindrische Fallkörper ersetzt.

¹G. G. Stokes 1819-1903

3.3 Kapillar-Viskosimeter

In einer laminaren Rohrströmung wird die Energie der Druckdifferenz in (innere) Reibungsarbeit umgewandelt. Nach **Hagen-Poiseuille**² besteht mit t als Zeit, in der das Volumen V durch ein Rohr mit dem Durchmesser r und der Länge l strömt, der Zusammenhang

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \Delta p \quad . \quad (9)$$

Eine technische Ausführungsform stellt das **Kapillar-Viskosimeter nach Ubbelohde** dar (Abb. 3). Die Flüssigkeit fließt aus dem Vorratsgefäß A unter der Wirkung des Schweredruckes $\rho g h$ durch die Kapillare K. Unterhalb der Kapillare zweigt das Rohr R ab. Seine obere Öffnung wird nach Ansaugen der Flüssigkeit freigegeben, wodurch unterhalb der Kapillare konstanter (äußerer Luftdruck) herrscht. Es wird die Zeit t gemessen, in der der Flüssigkeitsspiegel die Marken M_1 und M_2 passiert. Am Eingang der Kapillare muß die Flüssigkeit beschleunigt werden, womit eine Verzögerung verbunden ist. Die entsprechende Hagenbachsche Korrektur-Zeit t_k ist angegeben und von der Meßzeit zu subtrahieren, so daß gilt:

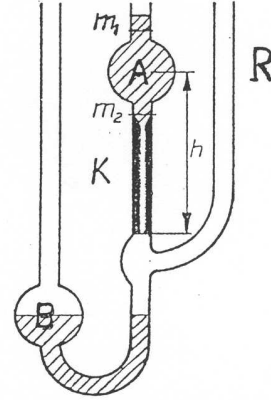


Abb. 3: Viskosimeter nach Ubbelohde

$$\eta = C \rho_f g (t - t_k) \quad . \quad (10)$$

Die nur von der Geometrie abhängige Gerätekonstante C ist ebenfalls angegeben und kann mit der mittleren Druckhöhe h aus Gl. (9) bestimmt werden.

4 Hinweise zu den Versuchen

4.1 Prüfung auf laminare Strömung

Bei höheren Temperaturen könnte bei gegebener Geschwindigkeit die laminare Strömung in die turbulente umschlagen, so daß u. U. die Anwendung der Gesetze (4 bis 9) zu Fehlern führen würde. Eine Überprüfung des möglichen Umschlags zur Turbulenz kann anhand der kritischen Reynoldsschen Zahl Re_{krit} erfolgen. Die dimensionslose Reynoldssche Zahl Re ³ als Verhältnis von Reibungs- und Beschleunigungs-Arbeit berechnet sich mit l^* als charakteristischer Länge zu

$$Re = \frac{\rho v l^*}{\eta} \quad . \quad (11)$$

Rohr: $l^* = d = 2r$

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} \quad (a) \quad ; \quad Re_{krit} \approx 2200 \quad (b) \quad [1, 3, 5] \quad . \quad (12)$$

Kugel: $l^* = 2R$

$$Re = \frac{\rho v 2R}{\eta} \quad (a) \quad ; \quad Re_{krit} \approx 1 \quad (b) \quad [7] \quad . \quad (13)$$

²G. H. L. Hagen 1797-1884; J-L. M. Poiseuille 1799-1869

³O. Reynolds 1842-1912

Der Quotient $\frac{\eta}{\rho}$ heißt kinematische Zähigkeit.

Es empfiehlt sich, zu dem jeweils niedrigsten gemessenen η -Wert anhand der eigenen Meßdaten die Reynoldssche Zahl zu bestimmen und mit dem kritischen Wert zu vergleichen.

5 Anhang

5.1 Viskositätswerte

Tab. 1: Zähigkeitswerte einiger Flüssigkeiten:

Flüssigkeit	Temperatur /°C	η /Ns m ⁻²
Wasser	0	$1,787 \cdot 10^{-3}$
	20	$1,002 \cdot 10^{-3}$
	50	$0,547 \cdot 10^{-3}$
Öthanol	0	$1,78 \cdot 10^{-3}$
	20	$1,2 \cdot 10^{-3}$
	50	$0,7 \cdot 10^{-3}$
Glyzerin	0	12,1
	20	1,48
	50	0,18

5.2 Prüfung auf Newtonsches Verhalten

Um zu entscheiden, ob eine Flüssigkeit Newtonsches Verhalten zeigt oder nicht, müßte anhand der Beziehungen (4) bzw. (8) die Konstanz des Proportionalitätsfaktors η bei Variation der Kräfte bzw. Druckdifferenzen getestet werden. Beim Höppler-Viskosimeter gelingt das in geringem Maße durch Einsatz verschiedener Kugeln mit unterschiedlichen Dichten und Radien.

Das Kappilar-Viskosimeter läßt dagegen eine Variation der Druckdifferenz nicht zu.

Bei Rotations-Viskosimetern rotiert ein Zylinder (Radius r_1) in einem zylindrischen mit der Flüssigkeit gefüllten Gefäß (Radius r_2 ; $r_2 - r_1 \ll r_1$). Die Reibungskraft am Umfang $F_\tau \approx (2\pi r_1 h) \eta (\omega r_1)/(r_2 - r_1)$, (Gl. (1 b) erzeugt das zu messende Drehmoment $M \approx F r_1$ und es gilt

$$M \approx \eta 2\pi h \frac{r_1^3}{(r_2 - r_1)} \omega = C \eta \omega \quad . \quad (14)$$

Hiermit können Drehmoment und Winkelgeschwindigkeit mit Hilfe eines Motors in weiten Grenzen variiert und die Konstanz von η überprüft werden.

5.3 Zur Herleitung

5.3.1 Hagen-Poiseuille

Am coaxialen Flüssigkeitszylinder mit dem Radius r und der Länge l greifen am Mantel die Reibungskraft $F_R = 2\pi r l \eta dv/dr = A^* \eta dV/dr$ ($dv/dr < 0$) und an der Stirnfläche die Druckkraft $F_p = \pi r^2 \Delta p = A \Delta p$ an. Aus der Gleichgewichtsbedingung $F_R = F_p$ folgt nach einer Integration [5] zunächst das parabelförmige $\vec{v}(\vec{r})$ -Profil

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r \quad ; \quad v(r) = v_0 - \frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 \quad ; \quad \text{mit } v_0 = \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2 \quad . \quad (15)$$

Betrachtet man weiter das zwischen zwei Schichten mit den Radien r und $r+dr$ strömende Volumen $dV = 2\pi r dr ds$ bzw. dessen zeitliche Änderung $\frac{dV}{dt} = 2\pi r dr v(r)$, so ergibt eine Integration über

den ganzen Querschnitt

$$\frac{V}{t} = \int_0^R 2\pi v(r) dr = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l} R^4 \quad . \quad (16)$$

5.3.2 Stokes

Die Stokes'sche Gleichung (4) wird exakt in der theoretischen Hydrodynamik hergeleitet (z. B. in [8]). Ein grobe Abschätzung, in der das Geschwindigkeits-Gefälle in (1) vereinfacht wird zu $\frac{dv}{dr} \approx \frac{v}{r}$ und als gleich auf der ganzen Kugeloberfläche angenommen wird ($A \approx 4\pi r^2$) liefert den zu geringen Wert

$$F \approx \eta 4\pi r^2 \frac{v}{r} \approx 4\pi \eta r v \quad . \quad (17)$$

6 Fragen

1. Was versteht man unter einer laminaren und einer turbulenten Strömung?
2. Wie berechnet sich der Strömungswiderstand in einer laminaren und in einer turbulenten Rohrströmung?
3. Vergleichen Sie die Maßeinheiten für die Viskosität: poise [P] und [Pa s].
4. Man prüfe anhand eines Beispiels der Tab. 1 die Gültigkeit der Gleichung (3) und bestimme die Konstanten A ; b .
5. Was versteht man unter einer Newtonschen Flüssigkeit? Wie kann der Nachweis dafür erbracht werden?
6. Wie ist die Reynoldssche Zahl definiert?
7. Berechnen Sie $x(t)$ für die Start-Phase einer Kugel, die in einer zähen Flüssigkeit zu fallen beginnt. Nach welcher Strecke erreicht die Kugel 0,67 bzw. 0,99 v_e ? (Beispiel: $\rho_k = 8 \text{ gcm}^{-3}$; $\rho_f = 1 \text{ gcm}^{-3}$; $R = 3 \text{ mm}$)
8. Wie unterscheiden sich Ursache und Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Flüssigkeiten und Gasen?
9. Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsprofil in einer laminaren Rohrströmung und für eine umströmte Kugel.
10. Was besagt das Gesetz von Stokes zur inneren Reibung?
11. Wie lautet das Gesetz von Hagen-Poiseuille?

Literatur

- [1] A. Recknagel, Physik, Bd. I, Mechanik
- [2] F. Kohlrausch, Praktische Physik, Bde. 2,3 ,Verl. Teubner 1985
- [3] F. X. Eder, Moderne Meßmethoden der Physik, Teil 1, Berlin 1960
- [4] H. J. Paus, Physik, V. C. Hanser, München 1995
- [5] Gerthsen, Physik (H. Vogel), Springer Berlin 1995
- [6] A. W. Francis, Physics **4**, 404, 1933
- [7] L. Bergmann, Cl. Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Berlin 1954
- [8] G. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik, Leipzig 1975