

## VERSUCH 302

# Brückenschaltung

Tabea Hacheney  
tabea.hacheney@tu-dortmund.de

Bastian Schuchardt  
bastian.schuchardt@tu-dortmund.de

Durchführung: 30.11.2021

Abgabe: 07.12.2021

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
2.1 Wheatstonesche Brückenschaltung . . . . .	4
2.2 Kapazitätsmessbrücke . . . . .	4
2.3 Induktivitätsmessbrücke . . . . .	5
2.4 Maxwell-Brücke . . . . .	6
2.5 Wien-Robinson-Brücke . . . . .	7
<b>3 Durchführung</b>	<b>9</b>
3.1 Wheatstonesche Brückenschaltung . . . . .	9
3.2 Kapazitätsmessbrücke . . . . .	9
3.3 Induktivitätsmessbrücke . . . . .	9
3.4 Maxwell-Brücke . . . . .	9
3.5 Wien-Robinson-Brücke . . . . .	9
<b>4 Auswertung</b>	<b>10</b>
4.1 Fehlerrechnung . . . . .	10
4.2 Wheatston'sche Messbrücke . . . . .	10
4.3 Kapazitätsmessbrücke . . . . .	10
4.4 Induktivitätsmessbrücke . . . . .	11
4.5 Maxwellbrücke . . . . .	11
4.6 Wien-Robinson-Brücke . . . . .	12
<b>5 Diskussion</b>	<b>14</b>
<b>6 Messwerte</b>	<b>14</b>
<b>Literatur</b>	<b>20</b>

## 1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden Brückenschaltungen dazu verwendet verschiedene unbekannte Ohm'sche Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten zu bestimmen. Zudem wird die Wien-Robinson-Brücke dazu verwendet die Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung und Speisespannung zu untersuchen.

Dabei werden bisher nur in der Theorie benutzte Konzepte angewendet, wie beispielsweise die Abgleichbedingung und die Kirchhoff'schen Gesetze.

## 2 Theorie

Brückenschaltungen werden dazu benutzt, durch bereits bekannte Widerstände Unbekannte zu bestimmen. Zu diesen Widerständen zählen Ohm'sche Widerstände, induktive Widerstände und kapazitative Widerstände. Bei den letzteren Beiden handelt es sich um komplexe Widerstände.

Zudem werden Brückenschaltungen oft in der Messtechnik dazu verwendet, die Auflösung einer Messung zu erhöhen, indem sie bestimmte Frequenzen filtern kann.

Allgemein werden bei allen folgenden Schaltungen die Kirchhoffschen Gesetze verwendet. Das Erste besagt, dass die Summe aller eingehenden und ausgehenden Ströme an einem Knoten Null ist:

$$\sum_k I_k = 0 \quad (1)$$

Das Zweite besagt, dass die Summe aller Speisespannungen gleich der Summe der Produkte der Stromstärken und Widerständen innerhalb einer Masche ist:

$$\sum_k U_k = \sum_k I_k R_k \quad (2)$$

Bei Gleichung 2 werden alle  $I_k$  im Uhzeigersinn als positiv und alle gegen den Uhzeigersinn als negativ gewertet.

Aus diesen grundlegenden Gesetzen (Gleichung 1 und Gleichung 2) lässt sich die Abgleichbedingung herleiten:

$$U_{Br} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_S$$

Wenn nun die Brückenspannung verschwindet, ergibt sich:

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad (3)$$

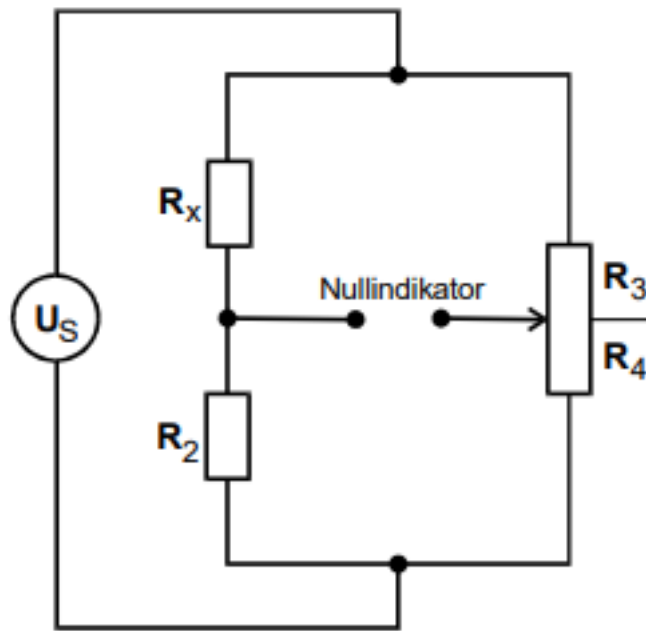


Abbildung 1: Wheatstonesche Brückenschaltung [1]

## 2.1 Wheatstonesche Brückenschaltung

Der einfachste Aufbau einer Brückenschaltung besteht aus einer Speisespannung  $U_S$ , drei bekannten und einem unbekannten Ohm'schen Widerstand und einem Spannungsmessgerät, was wie in Abbildung 1 aufgebaut wird.

Bei Abbildung 1 handelt es sich um eine Wheatstonesche Brückenschaltung. Sie kann sowohl mit Gleichstrom, als auch mit Wechselstrom betrieben werden. Diese Schaltung wird zur Bestimmung des Ohm'schen Widerstands  $R_X$  benutzt. Die Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  können in diesem Fall durch ein Potentiometer ersetzt werden, da nur das Verhältnis der beiden Widerstände relevant zur Bestimmung von  $R_X$  ist.

Mit Gleichung 3 wird nun eine Formel für  $R_X$  bestimmt:

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (4)$$

Da diese Formel nur erfüllt ist, wenn die Brückenspannung Null ist, wird das Potentiometer [Verhältnis von  $R_3$  und  $R_4$ ] angepasst, bis die mit dem Spannungsmessgerät gemessene Spannung verschwindet.

## 2.2 Kapazitätsmessbrücke

Bei der Kapazitätsmessbrücke wird grundlegend derselbe Aufbau verwendet wie bei Abbildung 1. Da Kondensatoren einen Teil der durchfließenden elektrischen Energie in Wärme umwandeln, wird ein Ersatzschaltbild verwendet. Die dielektrischen Verluste

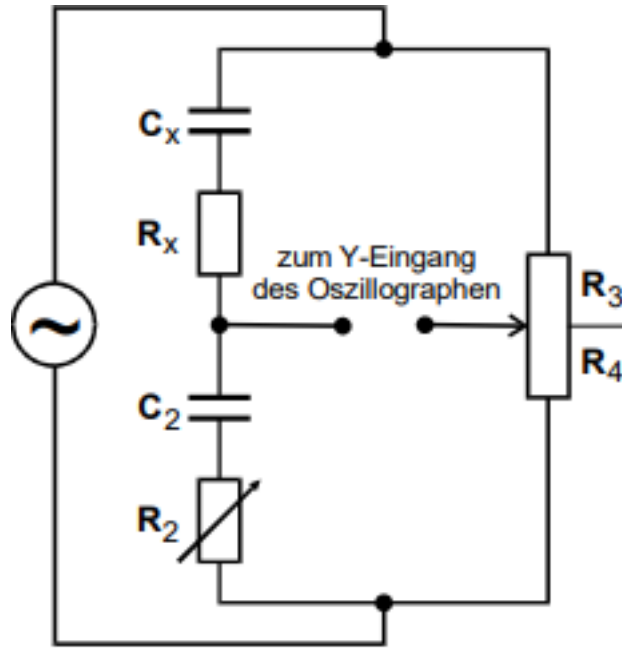


Abbildung 2: Kapazitätsmessbrücke [1]

werden durch einen mit dem Kondensator in Reihe geschalteten fiktiven Ohm'schen Widerstand dargestellt. Der reale Widerstand des Kondensators berechnet sich also aus:

$$Z_{C_{real}} = R - \frac{j}{\omega C}$$

In dem Aufbau Abbildung 2 der Brückenschaltung wird zudem ein zweiter Abstimmfreiheitsgrad ( $R_2$ ) gewählt, um die durch  $R_X$  auftretende Phasenverschiebung zu kompensieren. Die beiden Unbekannten berechnen sich dann mit Gleichung 3 folgendermaßen:

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (5)$$

$$C_X = C_2 \frac{R_4}{R_3} \quad (6)$$

### 2.3 Induktivitätsmessbrücke

Die Spule hat genau dasselbe Problem wie der Kondensator. Sie setzt einen Teil der magnetischen Feldenergie irreversibel in Wärme um. Daher wird wie beim Kondensator ein Ersatzschaltbild mit einem Ohm'schen Widerstand verwendet. Der Aufbau Abbildung 3 ist ähnlich wie bei Abbildung 2. Der reale Widerstand der Spule setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$Z_{L_{real}} = R + j\omega L$$

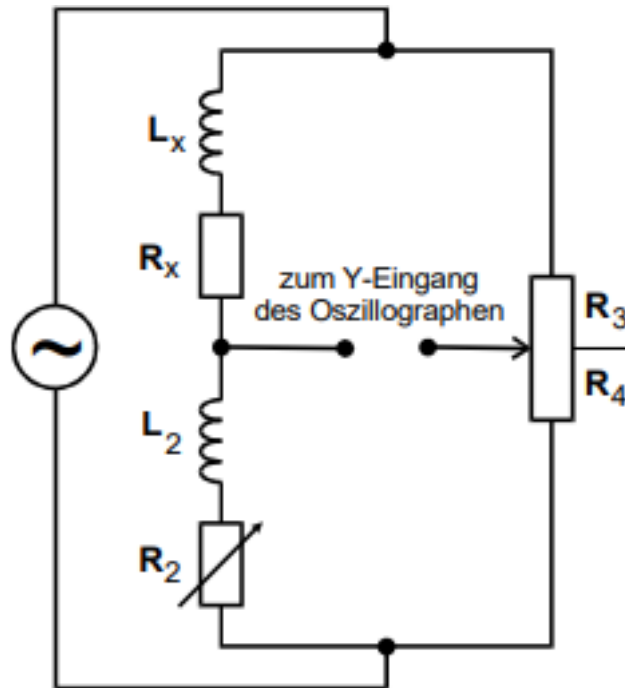


Abbildung 3: Induktivitätsmessbrücke [1]

Analog zu Gleichung 5 und Gleichung 6 lassen sich die jeweils gesuchten Größen so formulieren:

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (7)$$

$$L_X = L_2 \frac{R_4}{R_3} \quad (8)$$

Wie auch bei der Kapazitätsmessbrücke wird hier der Widerstand  $R_2$  variabel gewählt, um der durch  $R_X$  verursachten Phasenverschiebung entgegen zu wirken.

## 2.4 Maxwell-Brücke

Eine weitere Möglichkeit eine unbekannte Induktivität zu bestimmen besteht durch die Maxwell-Brückenschaltung. Der Unterschied zu allen bisherigen Schaltungen liegt darin, dass bei keiner der Abgleichbedingungen die Frequenz der Speisespannung mit einging. Der Aufbau der Schaltung Abbildung 4 ist wieder ähnlich zu Abbildung 3. Allerdings werden anstelle des Potentiometer die Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  variabel gewählt. Zudem wird parallel zu  $R_4$  ein bekannter Kondensator geschaltet.

Mit der Abgleichbedingung ergeben sich nun folgende Formeln für die gesuchten Größen:

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (9)$$

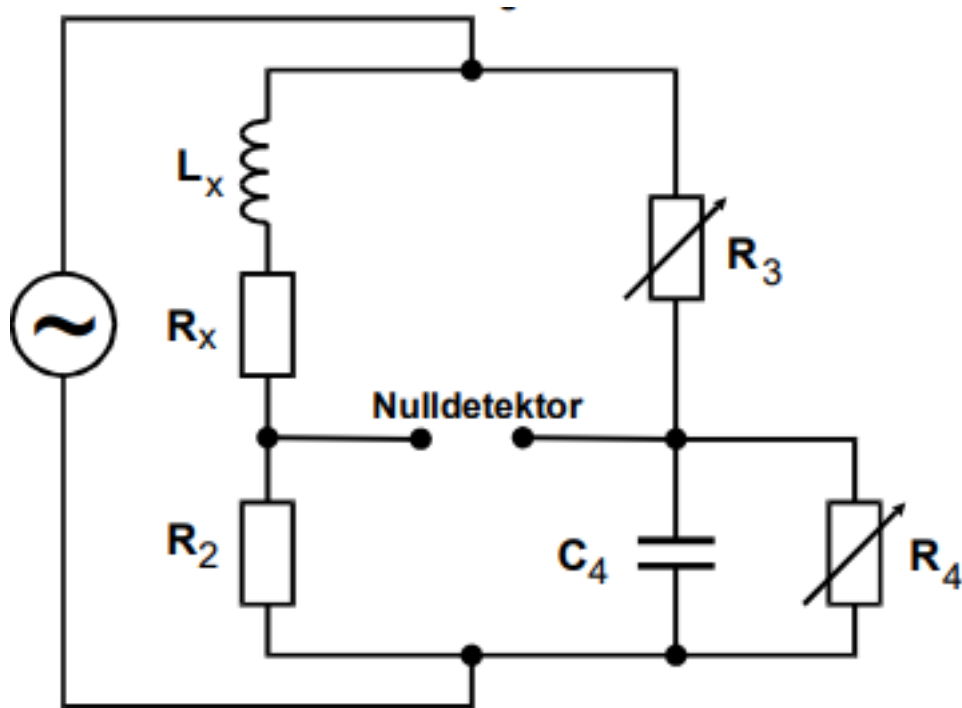


Abbildung 4: Maxwell-Brücke [1]

$$L_X = R_2 R_3 C_4 \quad (10)$$

## 2.5 Wien-Robinson-Brücke

Die Wien-Robinson-Brücke hat im Gegensatz zu den anderen keine Abgleichelemente und ist eine frequenzabhängige Brückenschaltung. Sie wird nicht zur Bestimmung von Widerständen verwendet, sondern als elektrischer Filter. Mithilfe dieser Schaltung soll im Rahmen des Versuchs die Frequenzabhängigkeit der Speisespannung und der Brückenspannung gemessen werden. Die Brückenspannung wird folgendermaßen bestimmt:

$$U_{Br} = \frac{\omega^2 R^2 C^2 - 1}{3(1 - \omega^2 R^2 C^2) + 9j\omega RC} U_S \quad (11)$$

Durch teilen von  $U_S$  und quadrieren ergibt sich folgende Formel:

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right|^2 = \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{9[(1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + 9\omega^2 R^2 C^2]} \quad (12)$$

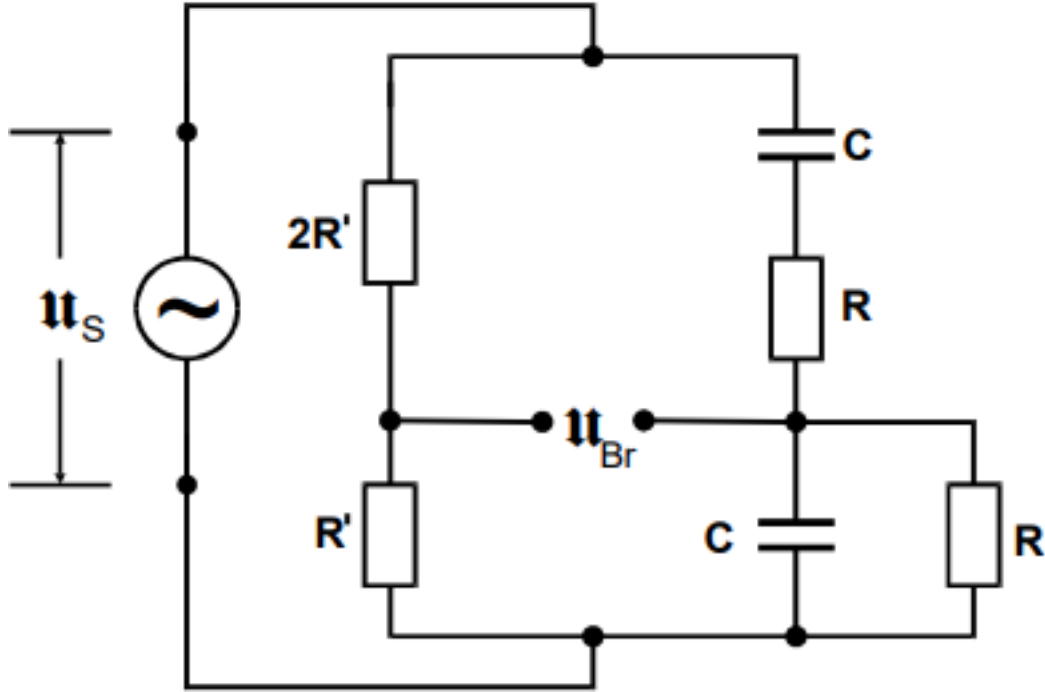


Abbildung 5: Wien-Robinson-Brücke [1]

Anhand Gleichung 12 erkennt man gut, dass die Brückenspannung verschwindet wenn  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  ist. Wir wählen zudem  $\Omega := \frac{\omega}{\omega_0}$ . Damit verkürzt sich Gleichung 12 zu:

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right|^2 = \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{9[(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2]} \quad (13)$$

Die Wien-Robinson-Brücke filtert aus einem kontinuierlichen Frequenzspektrum Schwingungen mit  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  und schwächt die in nächster Nähe stark. Bei realen Messungen wird aber trotzdem ein Wert gemessen, der durch Oberwellen verursacht wird. Das Verhältnis dieser Oberwellen kann durch den Klirrfaktor ausgedrückt werden:

$$k := \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^N U_i^2}}{U_1} \quad (14)$$

Wenn der Klirrfaktor Null ist, handelt es sich um einen idealen Sinusspannungsgenerators. Es werden also keine Oberwellen erzeugt.



### 3 Durchführung

Alle Brückenschaltungen werden mit einer Wechselspannung mit 1000 Hz betrieben und als Spannungsmessgerät wird ein digitales Oszilloskop benutzt.

#### 3.1 Wheatstonesche Brückenschaltung

Die Schaltung wird nach Abbildung 1 aufgebaut und sich zwei unbekannte Widerstände ausgesucht. In diesem Fall wurden Wert 13 und Wert 14 verwendet. Für Wert 13 wird das Potentiometer zunächst solange verstellt, bis die gemessene Brückenspannung verschwindet. Dann werden alle bekannten Werte abgelesen und notiert. Dies wird für jeweils drei verschiedene bekannte Widerstände  $R_2$  wiederholt. Anschließend wird das Ganze nochmal für Wert 14 durchgeführt.

#### 3.2 Kapazitätsmessbrücke

Die Schaltung wird zunächst wie in Abbildung 2 aufgebaut und sich zwei Kondensatoren mit unbekannten Kapazitäten und in Reihe geschalteten unbekannten Widerständen rausgesucht. Hier wurde nur Wert 8 verwendet, da Wert 15 fehlerhafte Ergebnisse am Oszilloskop angezeigt hatte.

Das Potentiometer und der veränderliche Widerstand  $R_2$  werden so lange verändert, bis die Brückenspannung minimal ist. Alle bekannten Werte werden wieder abgelesen und notiert.

#### 3.3 Induktivitätsmessbrücke

Die Schaltung wird nach Abbildung 3 aufgebaut und analog zur Kapazitätsmessbrücke durchgeführt. Nur, dass anstelle des Kondensators  $C_2$  nun eine bekannte Spule  $L_2$  verwendet wird. Die Werte werden wieder abgelesen und notiert.

#### 3.4 Maxwell-Brücke

Die Brückenschaltung wird wie in Abbildung 4 aufgebaut und sich dasselbe unbekannte Bauteil wie bei der Induktivitätsmessbrücke genommen, welches aus einer unbekannten Spule und einem unbekannten Ohm'schen Widerstand besteht. Die Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  werden so lange variiert, bis die gemessene Brückenspannung Null wird. Dann werden wieder alle Werte notiert.

#### 3.5 Wien-Robinson-Brücke

Die Schaltung wird wie in Abbildung 5 gezeigt aufgebaut. Bei diesem Versuch sind alle verwendeten Bauteile bekannt. Es wird die Spannungsfrequenz zwischen 20 und 30 000 Hz variiert und notiert wie sich die Brückenspannung  $U_{Br}$  dementsprechend verändert. Hierzu wurde bei 20 Hz begonnen und der nächste Wert immer als doppeltes des vorherigen genommen, also: 20 Hz, 40 Hz, 80 Hz... . Anschließend wurde die Speisespannung  $U_S$  nach dem gleichen Schema untersucht.

## 4 Auswertung

### 4.1 Fehlerrechnung

Da die baubedingten relativen Fehler bei den Bauteilen angegeben sind, lässt sich die Gaußsche Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta z = \bar{z} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (15)$$

für Größen der Form

$$z = x \cdot y$$

bestimmen.  $\Delta x$  und  $\Delta y$  sind dabei die relativen Fehler und  $\bar{z}$  ist der Mittelwert.

### 4.2 Wheatston'sche Messbrücke

Der relative Fehler für  $\frac{R_3}{R_4}$  ist mit 0,5 % und der für  $R_2$  ist mit 0,2 % angegeben. Die Werte für  $R_{14}$  und  $R_{13}$  sind in Tabelle 1 und 2 zu finden. Mit Hilfe von (4) lassen sich die Werte

$$\begin{aligned} R_{14} &= (704 \pm 631) \Omega \\ R_{13} &= (1724 \pm 1440) \Omega \end{aligned}$$

bestimmen. Die Fehler aus der Standarabweichung sind wesentlich größer als die angegebenen relativen Fehler.

$$\begin{aligned} \Delta R_{14} &= 4 \Omega \\ \Delta R_{13} &= 9 \Omega \end{aligned}$$

**Tabelle 1:** Messung von  $R_3$  und  $R_4$  für  $R_{14}$

$R_2/\Omega$	$R_3/\Omega$	$R_4/\Omega$	$R_{14}/\Omega$
332	243	757	106,6
664	392	608	428,1
1000	612	388	1577,3

### 4.3 Kapazitätsmessbrücke

Der relative Fehler für  $R_2$  beträgt 3 % und der für  $C_2$  ist mit 0,2 % angegeben. Der relative Fehler des Potentiometers ist gleich geblieben.  $C_2$  ist als  $C_2 = 597 \cdot 10^{-9} \text{ F}$  angegeben. Die Werte für  $C_8$  und  $R_8$  lassen sich in Tabelle 3 finden.

Mit Hilfe von (6) und (5) sind  $C_8$  und  $R_8$  bestimmt als

$$\begin{aligned} C_8 &= (578 \pm 146) \cdot 10^{-9} \text{ F} \\ R_8 &= (787 \pm 73) \Omega \end{aligned}$$

**Tabelle 2:** Messung von  $R_3$  und  $R_4$  für  $R_{13}$ 

$R_2/\Omega$	$R_3/\Omega$	$R_4/\Omega$	$R_{13}/\Omega$
332	579	421	456,6
664	595	405	975,5
1000	789	211	3739,3

Auch hier sind die Fehler aus der Standardabweichung wesentlich größer als die angegebenen relativen Fehler.

$$\Delta C_8 = 9 \cdot 10^{-9} \text{ F}$$

$$\Delta R_8 = 24 \Omega$$

**Tabelle 3:** Messung von  $C_8$  und  $R_8$ 

$R_2/\Omega$	$R_3/\Omega$	$R_4/\Omega$	$C_8/10^{-9}\text{F}$	$R_8/\Omega$
500	640	360	336	889
600	580	420	432	829
700	480	520	647	646
800	491	509	619	772
900	470	530	673	789
1000	440	560	760	786

#### 4.4 Induktivitätsmessbrücke

Der relative Fehler für  $R_2$  und das Potentiometer ist gleich geblieben. Der baubedingte Fehler für  $L_2$  ist als 0,2 % angegeben. Die Werte für  $L_{16}$  und  $R_{16}$  sind in Tabelle 4 angegeben. Mit (8) und (7) ergibt sich

$$L_{16} = (12,4 \pm 2,7) \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$R_{16} = (663 \pm 255) \Omega.$$

Die Fehler der Mittelwerte sind erneut größer als die der relativen Fehler.

$$\Delta L_{16} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$\Delta R_{16} = 20 \Omega$$

#### 4.5 Maxwellbrücke

Die relativen Fehler von  $R_3$  und  $R_4$  sind mit 3 % angegeben. Die für  $R_2$  und  $C_2$  betragen 0,2 %. Die Messwerte für  $L_{16}$  und  $R_{16}$  sind in Tabelle 5 zu finden. Mit (10) und (9) ergibt

**Tabelle 4:** Messung von  $L_{16}$  und  $R_{16}$ 

$R_2/\Omega$	$R_3/\Omega$	$R_4/\Omega$	$L_{16}/10^{-3}\text{H}$	$R_{16}/\Omega$
500	342	638	268,0	7,8
600	430	570	452,6	11,0
700	492	508	678,0	14,1
800	445	555	641,4	11,7
900	527	473	1002,7	16,3
1000	532	568	936,6	13,7

sich

$$L_{16} = (91,9 \pm 47,7) \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$R_{16} = (239 \pm 150) \Omega.$$

Auch hier sind die Fehler der Standardabweichung wieder wesentlich größer als die angegebene relativen Fehler.

$$\Delta L_{16} = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$\Delta R_{16} = 1 \Omega$$

**Tabelle 5:** Messung von  $L_{16}$  und  $R_{16}$ 

$R_3/\Omega$	$R_4/\Omega$	$L_{16}/10^{-3}\text{H}$	$R_{16}/\Omega$
222	500	132,5	444
218	600	130,1	363
210	700	125,4	300
175	800	104,5	219
95	900	56,7	106
4	1000	0,2	4

## 4.6 Wien-Robinson-Brücke

Es soll die Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung untersucht werden. Dazu wird der Quotient aus effektiver Brückenspannung  $U_{Br,eff}$  und Speisespannung  $U_s$  gegen  $\Omega = \frac{f}{f_0}$  aufgetragen und eine Theoriekurve eingezeichnet. Die Messwerte sind in Tabelle 7 eingetragen. Die Theoriekurve bestimmt sich aus (12) und ist in Abbildung 6 aufgezeichnet. Die effektive Brückenspannung ist gegeben durch

$$U_{Br,eff} = \frac{U_{Br}}{2\sqrt{2}}.$$

Die Werte der verwendeten Bauteile lassen sich in Tabelle 6 finden.  $f_0$  bestimmt sich durch

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{1000 \Omega \cdot 660 \cdot 10^{-9} \text{ F}} = 1515 \text{ Hz}$$

$$\Leftrightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 241 \text{ Hz}$$

**Tabelle 6:** Bauteile der Wien-Robinson-Brücke

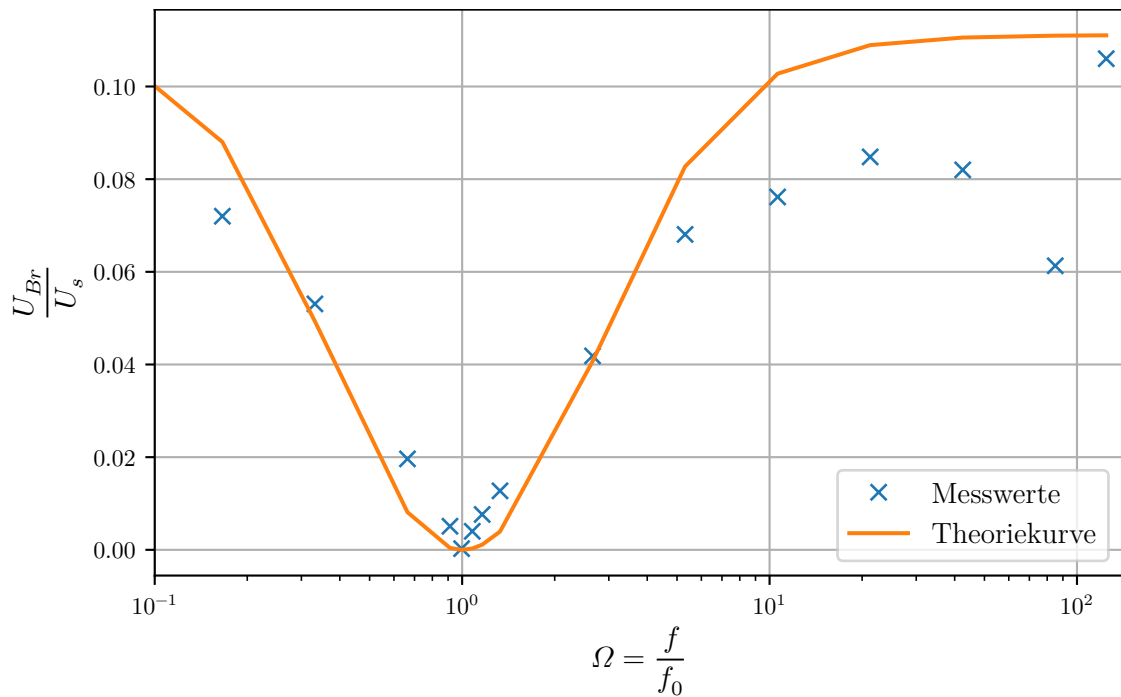
$R/\Omega$	$R'/\Omega$	$2R'/\Omega$	$C/10^{-9}\text{F}$
1000	332	664	660

**Tabelle 7:** Spannung in Abhängigkeit von der Frequenz des Sinusgenerators

$f/\text{Hz}$	$U_{Br}/10^{-3}\text{V}$	$U_{Br,eff}/10^{-3}\text{V}$	$U_S/10^{-3}\text{V}$
20	560	198	2500
40	510	180	2500
80	390	138	2600
160	150	53	2700
220	40	14	2750
240	2	0,71	2750
260	30	11	2750
280	60	21	2750
320	100	35	2750
640	320	113	2700
1280	500	177	2600
2560	560	198	2600
5120	600	212	2500
10240	580	205	2500
20480	400	141	2300
30000	300	106	1000

Es fällt auf, dass die Messwerte immer mehr von der Theoriekurve abweichen, je weiter sie vom Minimum entfernt sind. Dies spricht für eine ungenaue Messung. Weiterhin lässt sich die Abweichung um das Minimum herum durch einen relativ hohen Klirrfaktor erklären. Nichts desto trotz ist eine Ähnlichkeit zur Theoriekurve feststellbar.

Der Klirrfaktor bestimmt sich durch (14). Dabei wird die Näherung verwendet, dass die Summe der Oberwellen nur von der zweiten Oberwelle abhängt. Dementsprechend werden nur noch  $U_1$  und  $U_2$  benötigt.  $U_1$  ist durch 2,75 V von  $U_s$  bei  $f_0$  gegeben.  $U_2$  bestimmt



**Abbildung 6:** Abgleich mit Theoriekurve

sich aus (12) und  $\Omega = 2$  zu

$$U_2 = \frac{0,71 \text{ V}}{\sqrt{\frac{(2^2-1)^2}{9((1-2^2)^2+9 \cdot 2^2)}}} = 4,76 \text{ V}.$$

Der Klirrfaktor ergibt sich dann zu

$$k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{4,76 \text{ V}}{2,75 \text{ V}} = 1,73.$$

## 5 Diskussion

## 6 Messwerte

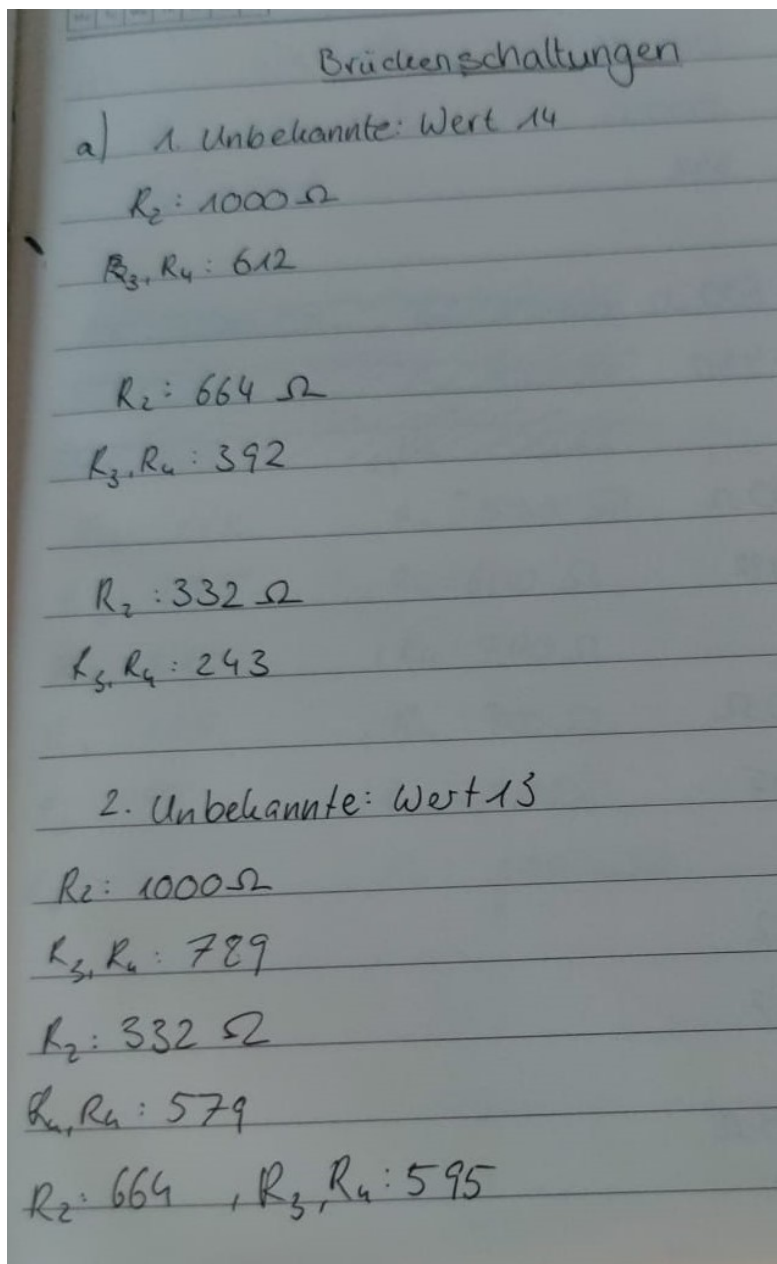


Abbildung 7: Messdaten 1

6)	Wert 8	$C_2: 597nF$
	$R_2: 500$	$R_3, R_4: 640$
	$R_2: 600$	" : 580
	$R_2: 700$	" : 480
	$R_2: 800$	" : 491
	$R_2: 900$	" : 470
	$R_2: 1000$	" : 440
	Wert 15	$C_2: 597nF$
	$R_2: 500$	$R_3, R_4:$
	$R_2: 600$	" :
	" : 700	" :
	" : 800	" :
	" : 900	" :
	" : 1000	" :

Abbildung 8: Messdaten 2



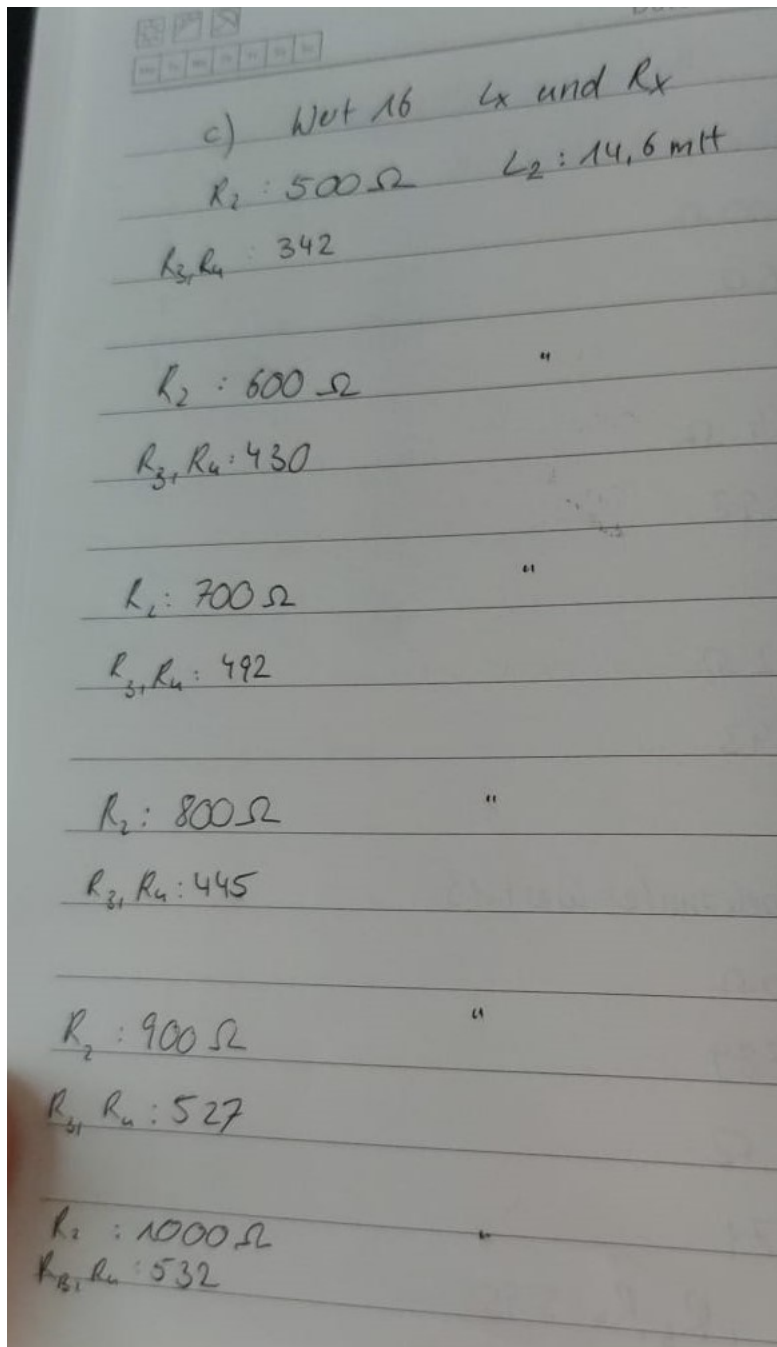


Abbildung 9: Messdaten 3

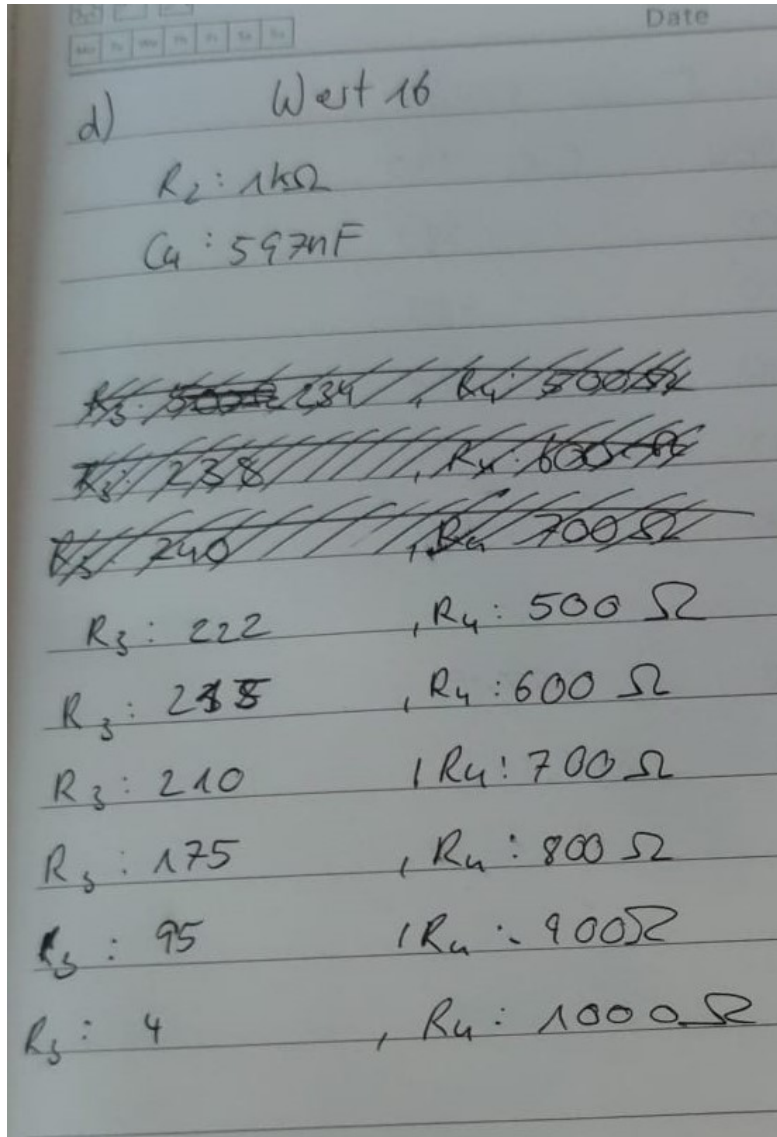


Abbildung 10: Messdaten 4

e)  $C = 660 \text{ nF}$   
 $R' = 332 \Omega$   $2R' = 664 \Omega$   
 $R = 1 \text{ k}\Omega$

$U_R$	$\varphi$	$U_s$
<del>560</del> 510	20	2500 V
390	40	
	80	$U_{gr}$ 2600
<del>128</del> 150	160	2700
100	320	2750
320	640	2800
500	1280	2800
560	2560	<del>2600</del> 2600
600	<sup>1</sup> <del>4425</del> 5620	<del>2600</del> 2500
580	10240	<del>2600</del> 2500
400	20480	<del>2600</del> 2300
300	<del>40960</del> 30000	<del>2600</del> 1800

K. Poppe

Abbildung 11: Messdaten 5

## Literatur

- [1] *Versuchsanleitung zu Elektrische Brückenschaltungen*”.