

VERSUCH 353

Relaxation eines RC-Kreises

Tabea Hacheney
tabea.hacheney@tu-dortmund.de

Bastian Schuchardt
bastian.schuchardt@tu-dortmund.de

Durchführung: 07.12.2021

Abgabe: 14.12.2021

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Allgemeine Relaxationsgleichung	3
2.2	Entladevorgang eines Kondensators	3
2.3	Relaxationsverhalten bei angelegter Wechselspannung	4
2.3.1	Phasenverschiebung	4
2.4	Integrationsverhalten eines RC-Kreises	5
3	Durchführung	5
3.1	Messung der Zeitkonstanten	5
3.2	Messung der Amplitude der Kondensatorspannung	5
3.3	Messung der Phasenverschiebung	5
3.4	Messung zur Bestätigung der Integratorfunktion	6
4	Auswertung	7
4.1	Zeitkonstante des RC-Gliedes beim Entladevorgang	7
4.2	Amplitude der Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz .	8
4.3	Phasenverschiebung des RC-Kreis	10
4.4	RC-Kreis als Integrator	11
5	Diskussion	13
6	Messwerte	14
6.1	Aufgabenteil A	14
6.2	Aufgabenteil B	14
6.3	Aufgabenteil C	14
6.4	Aufgabenteil D	14
	Literatur	16

1 Zielsetzung

Es soll das Relaxationsverhalten des Entladevorgangs eines RC-Kreises untersucht werden.

2 Theorie

2.1 Allgemeine Relaxationsgleichung

Es handelt sich um Relaxationsverhalten, wenn ein System aus einem Ausgangszustand ausgelenkt wird und ohne Oszillation in denselben Zustand zurückkehrt. Allgemein lässt sich eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)] \quad (1)$$

für die Änderungsgeschwindigkeit der Größe A aufstellen. Diese lässt sich durch Umformung lösen zu

$$A(t) = A(\infty) + [A(t) - A(\infty)]e^{ct}. \quad (2)$$

2.2 Entladevorgang eines Kondensators

Die Spannung U_C , die auf einem Kondensator mit der Ladung Q und Kapazität C , anliegt bestimmt sich durch

$$U_C = \frac{Q}{C}.$$

Wegen des Widerstands R fließt nach dem Ohm'schen Gesetz ein Strom

$$I = \frac{U_C}{R},$$

der für einen Ladungsausgleich sorgt. Die Ladungsänderung auf dem Kondensator ist durch

$$dQ = -Idt$$

gegeben. Aus diesen Zusammenhängen erhält man die DGL

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q(t)}{RC}, \quad (3)$$

die eine hohe Ähnlichkeit zu (1) aufweist. Da der Grenzwert $Q(\infty)$ nicht erreichbar ist, wird er vernachlässigt und die Lösung der DGL ist durch

$$Q(t) = Q(0)e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4)$$

gegeben.

2.3 Relaxationsverhalten bei angelegter Wechselspannung

Wechselspannung lässt sich im Allgemeinen durch die Funktion

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$$

beschreiben. Da sich eine Phasenverschiebung zwischen der eingehenden Spannung des Sinusgenerators und der verzögerten Spannung des Kondensators bildet, ergibt sich für die ausgehende Spannung

$$U_C(t) = A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi),$$

mit der Kondensatorspannungsamplitude A . Weiterhin gilt

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}. \quad (5)$$

Aus den Kirchhoffschen Gesetzen ergibt sich für den RC-Kreis

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t). \quad (6)$$

Aus Formeln (3), (5) und (6) und weiteren Umformungen erhält man

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (7)$$

2.3.1 Phasenverschiebung

Die Phasenverschiebung φ lässt sich aus dem Abstand der Nullstellen a der beiden Wellen und der Wellenlänge b in Bogenmaß durch

$$\varphi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \quad (8)$$

ausdrücken.

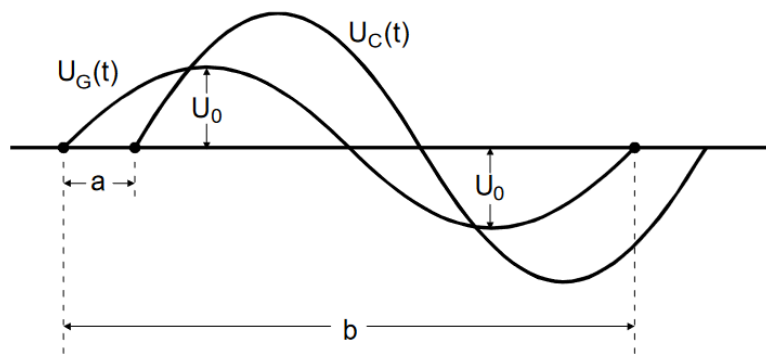


Abbildung 1: Skizze zur Phasenverschiebung [1].

2.4 Integrationsverhalten eines RC-Kreises

Damit ein RC-Kreis als Integrator funktionieren kann, muss $\omega \gg \frac{1}{RC}$ gelten. Gleichung (6) lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} U(t) &= R \cdot I(t) + U_C(t) \\ &= RC \cdot \frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t). \end{aligned}$$

Unter der Bedingung $\omega \gg \frac{1}{RC}$ löst sich die Gleichung zu

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt'. \quad (9)$$

3 Durchführung

3.1 Messung der Zeitkonstanten

Es soll die Zeitkonstante des RC-Kreises bestimmt werden. Dazu wird die in Abbildung 2 gezeigte Schaltung verwendet. Es wird ein Kondensator mit der Kapazität C und ein Widerstand R verwendet. Weiterhin wird durch einen Spannungsgenerator eine Rechtecksspannung angelegt und die Entladekurve kann durch das Oszilloskop betrachtet werden.

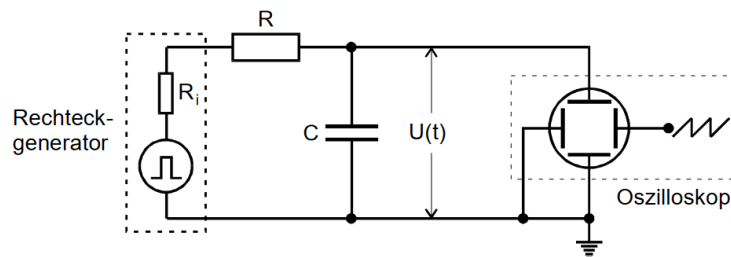


Abbildung 2: Schaltung zur Messung der Zeitkonstanten [1].

3.2 Messung der Amplitude der Kondensatorspannung

Bei dieser Messung bleibt der Versuchsaufbau unverändert. Es wird lediglich am Spannungsgenerator eine Sinusspannung eingestellt. Die Frequenz f der Spannung wird im Bereich von 250 Hz bis 60 kHz gemessen. Die Kondensatorspannungsamplitude A kann wieder am Oszilloskop abgelesen werden.

3.3 Messung der Phasenverschiebung

Nun wird die Schaltung zu der in Abbildung 3 gezeigten Schaltung geändert. Das Oszilloskop zeigt nun die Spannungsverläufe des Kondensators $U_C(t)$ und des Generators

$U_G(t)$ an. Die Spannungsverläufe sind in Abbildung 1 skizziert. Dabei wird der Abstand der Nullstellen a gemessen und die Wellenlänge b von $U_G(t)$. Der Messbereich ist der gleiche wie in Abschnitt 3.2.

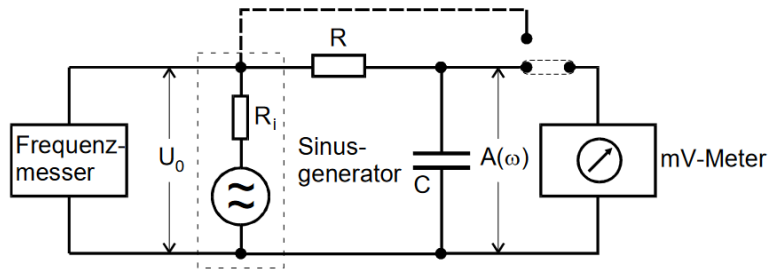


Abbildung 3: Schaltung zur Messung der Phasenverschiebung [1].

3.4 Messung zur Bestätigung der Integratorfunktion

Nun wird die in Abbildung 4 gezeigte Schaltung verwendet. Auf dem Zweikanal-Oszillographen ist nun die generierte Spannung und die integrierte Spannung zu sehen. Es werden jeweils Rechtecks-, Sinus- und Dreiecksspannung am Generator eingestellt und von jeder Einstellung ein Bild gemacht.

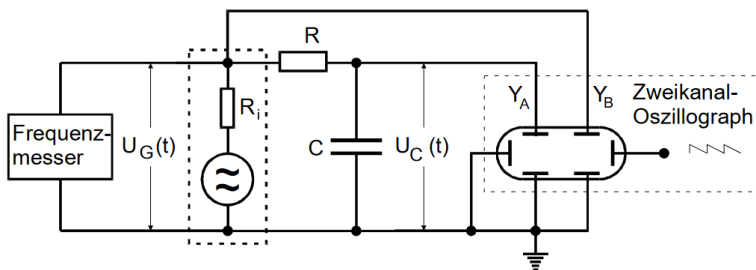


Abbildung 4: Schaltung zur Überprüfung des Integrators [1].

4 Auswertung

4.1 Zeitkonstante des RC-Gliedes beim Entladevorgang

Um die Zeitkonstante des Entladevorgangs des Tiefpasses zu bestimmen, wurde die Spannung $U_C(t)$ bei angelegter Rechteckspannung $U_S(t)$ bei einer Frequenz von 5820 Hz beobachtet. Dazu wurde ein Foto aufgenommen:

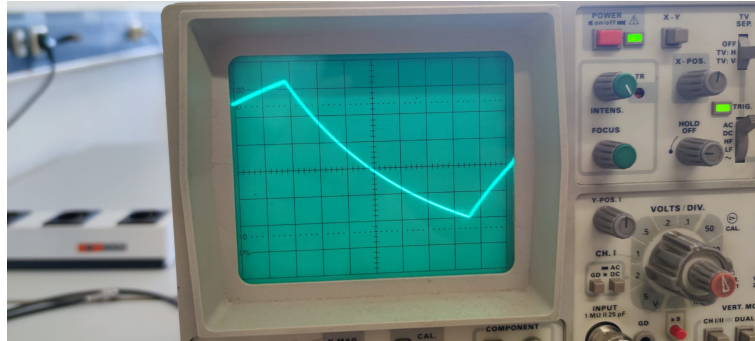


Abbildung 5: Entladenvorgang des RC-Gliedes bei angelegter Rechteckspannung

Der Momentaufnahme wurden fünfzehn Wertepaare entnommen, die sich in Tabelle 1 finden lassen. Die Spannungsamplitude wurde zu $U_0 = 1,1446$ V abgelesen.

Tabelle 1: Ablesen von $U_C(t)$ zu bestimmten t

$U_C(t)/V$	$\ln\left(\frac{U_C}{U_0}\right)$	$t/\mu s$
1.0974	-0.042111	1
0.9912	-0.143894	2.5
0.885	-0.257223	5
0.767	-0.400324	7.5
0.6608	-0.549359	10
0.5546	-0.724563	12.5
0.4838	-0.861139	15
0.413	-1.01936	17.5
0.354	-1.17351	20
0.2832	-1.39666	22.5
0.2242	-1.63027	25
0.1888	-1.80212	27.5
0.1416	-2.0898	30
0.0944	-2.49527	32.5
0.0708	-2.78295	34

Mit der Gleichung 4 lässt sich eine Ausgleichsrechnung für die Zeitkonstante RC

bestimmen:

$$U_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} + k$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{U_C}{U_0}\right) = -\frac{1}{RC} \cdot t + \ln\left(\frac{k}{U_0}\right)$$

Das wird nun in Abbildung 6 geplottet und mit Python die Parameter ausgerechnet.

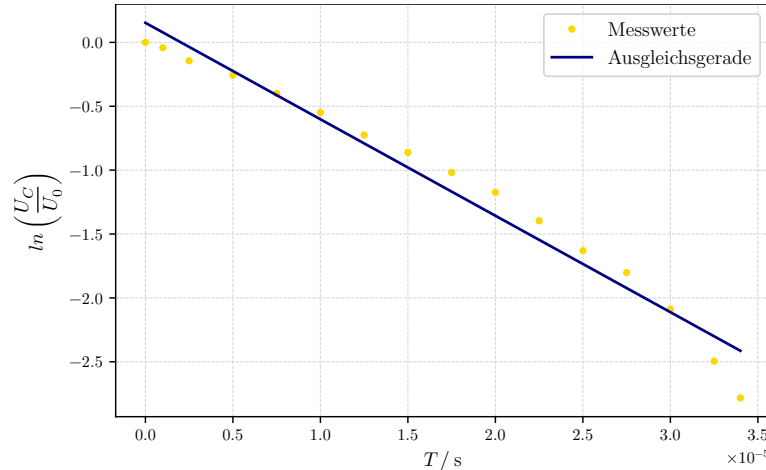


Abbildung 6: Lineare Regression um die Zeitkonstante zu bestimmen

Damit ergibt sich für den Parameter $\ln\left(\frac{k}{U_0}\right) = 0,153 \pm 0,071$ und für unsere Zeitkonstante $RC = (1,3245 \pm 0,0063) \cdot 10^{-5} \text{ s}$.

4.2 Amplitude der Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz

Bei dem nächsten Versuchsteil wurde die Kondensatorspannungsamplitude A_C und die Speisespannungsamplitude A_S in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen. Es ist zu erwarten, dass die Speisespannungsamplitude nicht variiert. Dies würde auf einen Fehler des Versuchsaufbaus hindeuten. Es wurden die Amplituden in einem Frequenzbereich von 250 Hz bis 60 kHz gemessen, verwendet wurde diesmal eine Sinusspannung.

In der nachfolgenden Tabelle 6 wurden die Versuchsergebnisse notiert.

Mit Gleichung 7 ergibt sich die Ausgleichsrechnung:

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A(\omega)}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Die Formel mit den Messergebnissen wird nun in Abbildung 7 geplottet.

Eine lineare Ausgleichsrechnung ergibt nun $RC = (6,12 \pm 0,9) \cdot 10^{-5} \text{ s}$. Die Messgenauigkeit wurde mittels Python ermittelt.

Tabelle 2: Kondensatorsspannungsamplituden in Abhängigkeit der Frequenz

f/Hz	A_C/V	A_S/V	$\frac{A_C(\omega)}{U_0}$
250	3.90	1.60	2.44
500	3.90	1.60	2.44
1000	3.60	1.60	2.25
2500	2.90	1.60	1.81
5000	1.75	1.60	1.09
7500	1.25	1.60	0.78
10000	1.00	1.60	0.63
15000	0.64	1.60	0.40
20000	0.50	1.60	0.31
30000	0.34	1.60	0.21
40000	0.25	1.60	0.16
50000	0.20	1.60	0.13
60000	0.17	1.60	0.11

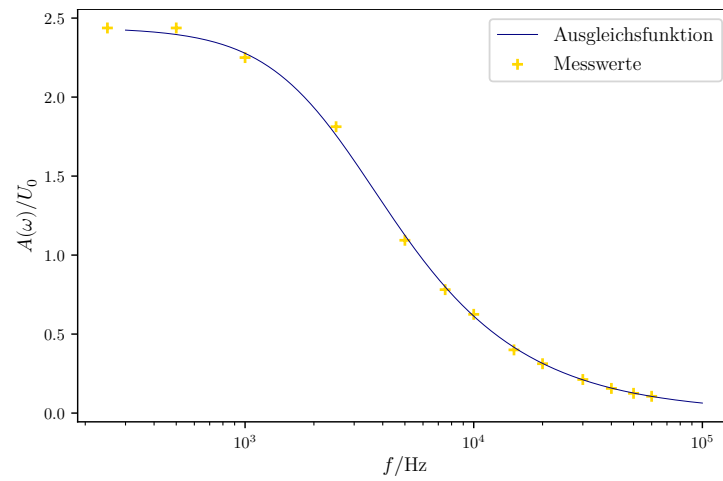


Abbildung 7: Frequenzabhängiges Amplitudenverhältnis um die Zeitkonstante zu bestimmen

4.3 Phasenverschiebung des RC-Kreis

In diesem Versuchsteil wird die Phasenverschiebung einer externen Sinusspannung und Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz untersucht. Um die Phasenverschiebung zu bestimmen, wird Gleichung 8 verwendet. Die Messwerte zu diesem Versuch lassen sich in Tabelle 7 finden.

Tabelle 3: Messwerte von a und b in Abhängigkeit der Frequenz

f/Hz	a/s	b/s	φ/rad
250	0.000025	0.001500	0.104720
500	0.000025	0.001500	0.104720
1000	0.000022	0.000390	0.354436
2500	0.000019	0.000170	0.702238
5000	0.000012	0.000078	0.966644
7500	0.000010	0.000052	1.208305
10000	0.000008	0.000039	1.288859
15000	0.000006	0.000026	1.449966
20000	0.000005	0.000020	1.413717
30000	0.000003	0.000013	1.449966
40000	0.000002	0.000010	1.507964
50000	0.000002	0.000008	1.570796
60000	0.000002	0.000006	1.675516

Mit den Messwerten, wurde mittels Python φ gegen die Frequenz geplottet, woraus die Zeitkonstante RC bestimmt wird: $RC = (5,37 \pm 0,00002) \cdot 10^{-5} \text{ s}$.

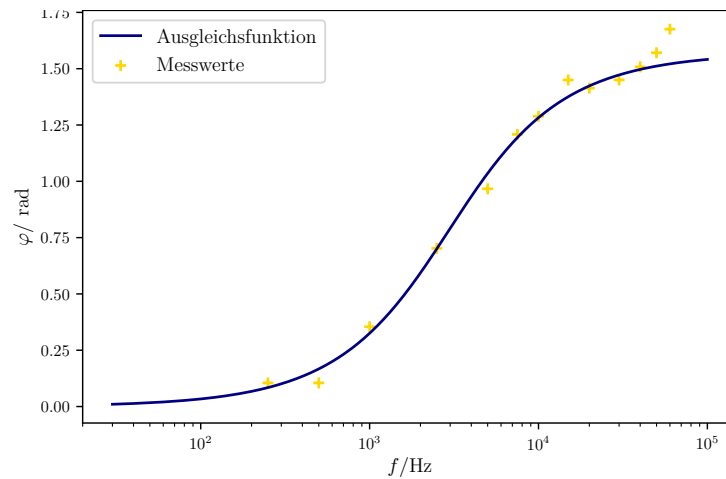


Abbildung 8: Phasenverschiebung

4.4 RC-Kreis als Integrator

Mithilfe der Ergebnisse der Phasenverschiebung und unseren Messwerte aus dem Versuchsteil davor, lässt sich eine neue Tabelle aufstellen. In dieser Tabelle wird die Phasenverschiebung mit dem Amplitudenverhältnis verglichen.

Tabelle 4: Amplitudenverhältnis und Phasenverschiebung

U_C/V	φ/rad
2.44	0.104720
2.44	0.104720
2.25	0.354436
1.81	0.702238
1.09	0.966644
0.78	1.208305
0.63	1.28859
0.40	1.449966
0.31	1.413717
0.21	1.449966
0.16	1.507964
0.13	1.570796
0.11	1.675516

Zu diesen Wertepaaren ist nun eine alternative Darstellung mittels eines Polarplots möglich. Dieser ist in Abbildung 9 zu sehen.

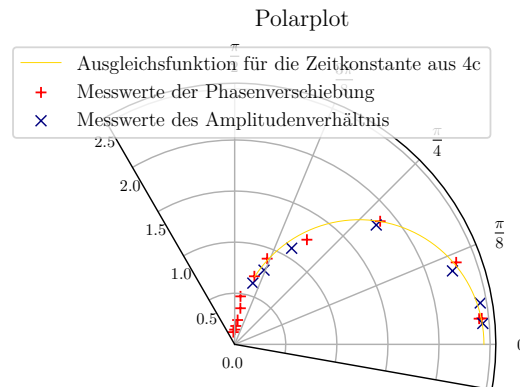
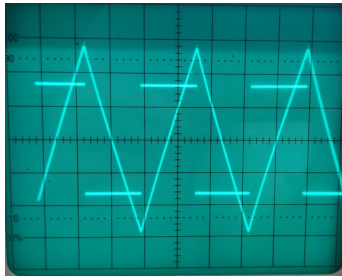


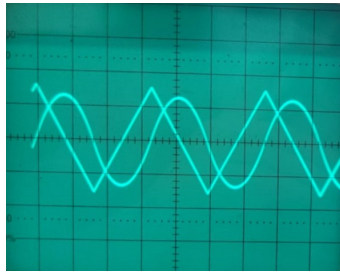
Abbildung 9: Polarplot

Radial ist das Amplitudenverhältnis abzulesen und in dem Polarwinkel die Phasenverschiebung. Da der Erwartungswert mit dem Realwert des Oszilloskops übereinstimmt, ist die Integrierbarkeit des RC-Kreises bewiesen.

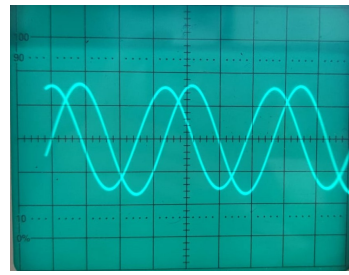
Zur weiteren Untersuchung der Integrator-Identität des RC-Kreises wurden in Abbildung 10 drei verschiedene Wechselspannungen angelegt:



(a) Rechteckschwingung



(b) Dreieckschwingung



(c) Sinus-Schwingung

Abbildung 10: Drei verschiedene Spannungen

5 Diskussion

Durch die ersten drei Versuchsteile konnten drei verschiedene Werte für Die Zeitkonstante RC ermittelt werden:

$$\begin{array}{ll} RC_1 = (13,245 \pm 0,063) \cdot \mu\text{s} & \text{Bestimmung durch Entladekurve} \\ RC_2 = (61,2 \pm 9) \cdot \mu\text{s} & \text{Bestimmung durch das Amplitudenverhältnis} \\ RC_3 = (53,7 \pm 0,0002) \cdot \mu\text{s} & \text{Bestimmung durch die Phasenverschiebung} \end{array}$$

Auffällig ist hier, dass der erste Wert deutlich von den anderen beiden Werten abweicht. Das kann durch Messfehler oder durch Fehler der Messappartatur zu begründen sein. Da die anderen beiden Werte nur um 12,3% voneinander abweichen, ist es wahrscheinlich, dass der erste Wert falsch ist.

Erfreulich ist jedoch, dass die experimentell ermittelten Werte immer sehr gut zu den theoretisch ermittelten passen und die Ausgleichsgeraden nur kleine Abweichungen zu den Messwerten haben.

Allerdings muss bei der Versuchsdurchführung des zweiten Versuchteils ein Fehler passiert sein. Die Amplitude der Speisespannung wurde nämlich besonders bei kleinen Frequenzen kleiner gemessen, als die Amplitude der Kondensatorspannung. Hier liegt entweder ein Fehler des Oszilloskops oder ein Fehler beim Ablesen der Werte vor. Vewunderlicherweise passen die gemessenen Werte trotzdem gut zu den Theoriewerten.

6 Messwerte

6.1 Aufgabenteil A

Tabelle 5: Ablesen von $U_C(t)$ zu bestimmten t

$U_C(t)/V$	$\ln\left(\frac{U_C}{U_0}\right)$	$t/\mu s$
1.0974	-0.042111	1
0.9912	-0.143894	2.5
0.885	-0.257223	5
0.767	-0.400324	7.5
0.6608	-0.549359	10
0.5546	-0.724563	12.5
0.4838	-0.861139	15
0.413	-1.01936	17.5
0.354	-1.17351	20
0.2832	-1.39666	22.5
0.2242	-1.63027	25
0.1888	-1.80212	27.5
0.1416	-2.0898	30
0.0944	-2.49527	32.5
0.0708	-2.78295	34

6.2 Aufgabenteil B

6.3 Aufgabenteil C

6.4 Aufgabenteil D

Tabelle 6: Kondensatorsspannungsamplituden in Abhängigkeit der Frequenz

f/Hz	A_C/V	A_S/V	$\frac{A_C(\omega)}{U_0}$
250	3.90	1.60	2.44
500	3.90	1.60	2.44
1000	3.60	1.60	2.25
2500	2.90	1.60	1.81
5000	1.75	1.60	1.09
7500	1.25	1.60	0.78
10000	1.00	1.60	0.63
15000	0.64	1.60	0.40
20000	0.50	1.60	0.31
30000	0.34	1.60	0.21
40000	0.25	1.60	0.16
50000	0.20	1.60	0.13
60000	0.17	1.60	0.11

Tabelle 7: Messwerte von a und b in Abhängigkeit der Frequenz

f/Hz	a/s	b/s	φ/rad
250	0.000025	0.001500	0.104720
500	0.000025	0.001500	0.104720
1000	0.000022	0.000390	0.354436
2500	0.000019	0.000170	0.702238
5000	0.000012	0.000078	0.966644
7500	0.000010	0.000052	1.208305
10000	0.000008	0.000039	1.288859
15000	0.000006	0.000026	1.449966
20000	0.000005	0.000020	1.413717
30000	0.000003	0.000013	1.449966
40000	0.000002	0.000010	1.507964
50000	0.000002	0.000008	1.570796
60000	0.000002	0.000006	1.675516

Tabelle 8: Amplitudenverhältnis und Phasenverschiebung

U_C/V	φ/rad
2.44	0.104720
2.44	0.104720
2.25	0.354436
1.81	0.702238
1.09	0.966644
0.78	1.208305
0.63	1.288859
0.40	1.449966
0.31	1.413717
0.21	1.449966
0.16	1.507964
0.13	1.570796
0.11	1.675516

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch Nr. 353 - Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 2014.