MAT1110 - Oblig 1

Bastian Eggum Huuse

februar 2025

Oppgave 1

i)

Vi ønsker å finne alle matriser B gitt ved $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ slik at for $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ har vi $AB = BA$.

Vi finner først AB og BA:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + (-c) \\ b + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + b \\ -c + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}$$

La $b = -c$. Vi får:

$$AB = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} = BA$$

Vi har da at $AB = BA$ $\forall B$ gitt ved $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ slik at $b = -c$

ii)

Vi ønsker å finne alle matriser D gitt ved $D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ slik at for $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ har vi $CD = DC$.

Vi finner først CD og DC:

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 0 + 0 \\ 0 + 2e + 0 \\ 0 + 0 + 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2e \\ 3i \end{pmatrix}$$
$$DC = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 0 + 0 \\ 0 + 2e + 0 \\ 0 + 0 + 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2e \\ 3i \end{pmatrix}$$

Vi har at $CD = DC$ for alle $3x3$ matriser D.

Oppgave 2

i)

Vi ønsker å vise at $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ har vi $x \cdot y = \frac{1}{2}(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2)$.

$$\begin{aligned}
x \cdot y &= x_1y_1 + x_2y_2 + \ ... + x_ny_n \\
&= \frac{1}{2}(2x_1y_1 + 2x_2y_2 + \ ... + 2x_ny_n) \\
&= \frac{1}{2}(2x_1y_1 + x_1^2 - x_1^2 + y_1^2 - y_1^2 + \ ... + 2x_ny_n + x_n^2 - x_n^2 + y_n^2 - y_n^2) \\
&= \frac{1}{2}((x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 \ ... + x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2) - (x_1^2 + \ ... + x_n^2) - (y_1^2 + \ ... + y_n^2)) \\
&= \frac{1}{2}(((x_1+y_1)^2 + \ ... + (x_n+y_n)^2) - (x_1^2 + \ ... + x_n^2) - (y_1^2 + \ ... + y_n^2)) \\
&= \frac{1}{2}(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2)
\end{aligned}$$

$\square$

ii)

$$\begin{aligned}
\angle(T(x), T(y)) &= \arccos\left(\frac{T(x) \cdot T(y)}{|T(x)||T(y)|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{\frac{1}{2}(|T(x)+T(y)|^2 - |T(x)|^2 - |T(y)|^2)}{|T(x)||T(y)|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{\frac{1}{2}(|T(x+y)|^2 - |T(x)|^2 - |T(y)|^2)}{|T(x)||T(y)|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{\frac{1}{2}(c^2|x+y|^2 - c^2|x|^2 - c^2|y|^2)}{c^2|x||y|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{\frac{1}{2}(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2)}{|x||y|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{x \cdot y}{|x||y|}\right) \\
&= \angle(x, y)
\end{aligned}$$

Oppgave 3

i)

Vi definerer l_1 som linjen mellom N og p. l_1 er da gitt ved

$$l_1 = p - N = (p_1, p_2, p_3 - 1)$$

Vi kan så definere parameterframstillingen L_1, gitt ved

$$L_1(t) = N + l_1 t = (0,0,1) + (p_1, p_2, p_3 - 1)t$$

Vi har da at $L_1(0) = N$, og at $L_1(1) = p$.
Når tredje koordinat i dette utrykket er lik 0, da ligger vi i xy-planet. Vi løser for t:

$$\begin{aligned} p_3 t - 1t + 1 &= 0 \\ (p_3 - 1)t &= -1 \\ t &= \frac{-1}{p_3 - 1} \end{aligned}$$

Dersom vi setter denne verdien for t inn igjen i $L_1(t)$, finner vi punktet vi krysser xy-planet i:

$$\begin{aligned} L_1\left(\frac{-1}{p_3-1}\right) &= (0,0,1) + (p_1, p_2, p_3 - 1)\left(\frac{-1}{p_3-1}\right) \\ &= (p_1\left(\frac{-1}{p_3-1}\right), p_2\left(\frac{-1}{p_3-1}\right), \frac{-(p_3-1)}{p_3-1} + 1) \\ &= (p_1\left(\frac{-1}{p_3-1}\right), p_2\left(\frac{-1}{p_3-1}\right), 0) \\ &= \frac{-1}{p_3-1}(p_1, p_2, 0) \\ &= \frac{1}{1-p_3}(p_1, p_2, 0) \end{aligned}$$

Dersom vi fjerner det tredje koordinatet, får vi punktet i xy-planet vi krysser i:

$$(q_1, q_2) = \frac{1}{1-p_3}(p_1, p_2)$$

Siden det bare finnes en løsning for $p_3 t - 1t + 1 = 0$, har vi at dette punktet er unikt. (vi kunne også argumentert med at L_1 er strengt monoton).

$\square$

ii)

Her gjør vi en liknende prosess som i oppgave i).
Vi definerer l_2 som linjen mellom N og q (i tre dimensjoner). l_2 er da gitt ved

$$l_2 = q - N = (q_1, q_2, -1)$$

Vi kan så definere parameterframstillingen L_2, gitt ved

$$\begin{aligned} L_2(t) &= N + l_2 t = (0,0,1) + (q_1, q_2, -1)t \\ &= (q_1 t, q_2 t, 1-t) \end{aligned}$$

L_2 skjærer $S^2 - N$ når $|L_2(t)|^2 = 1$. Vi løser for t:

$$\begin{aligned} |L_2(t)|^2 &= 1 \\ (q_1 t)^2 + (q_2 t)^2 + (1-t)^2 &= 1 \\ q_1^2 t^2 + q_2^2 t^2 + t^2 - 2t + 1 &= 1 \\ (q_1^2 + q_2^2 + 1)t - 2 &= 0 \\ t &= \frac{2}{q_1^2 + q_2^2 + 1} \\ t &= \frac{2}{|q|^2 + 1} \end{aligned}$$

Vi setter inn i $L_2(t)$:

$$\begin{aligned} L_2\left(\frac{2}{|q|^2+1}\right) &= \left(\frac{2q_1}{|q|^2+1}, \frac{2q_2}{|q|^2+1}, 1 - \frac{2}{|q|^2+1}\right) \\ &= \left(\frac{2q_1}{|q|^2+1}, \frac{2q_2}{|q|^2+1}, \frac{|q|^2+1-2}{|q|^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{|q|^2+1}\left(2q_1, 2q_2, |q|^2 - 1\right) \end{aligned}$$

Igjen har vi kun en løsning for $|L_2(t)|^2 = 1$, som betyr at punktet er unikt.

$\square$

Oppgave 4

i)

$$
\begin{aligned}
H(r,\theta) &= G(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= \frac{1}{r^2+1}\left(2r\cos\theta, 2r\sin\theta, r^2-1\right)
\end{aligned}
$$

ii)

(I Denne oppgaven kommer det fram komponentfunksjoner med navnene L_1 og L_2. Disse er forskjellige fra L_1 og L_2 fra tidligere oppgaver ☺)

Finner først Jacobi-matrisen til L:

$$
L'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial r} & \frac{\partial L_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial L_2}{\partial r} & \frac{\partial L_2}{\partial \theta} \end{pmatrix}
$$

Vi finner de 4 partiell-deriverte for $L(r,\theta)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L_1}{\partial r} &= \cos\theta \\
\frac{\partial L_1}{\partial \theta} &= -r\sin\theta \\
\frac{\partial L_2}{\partial r} &= \sin\theta \\
\frac{\partial L_2}{\partial r\theta} &= r\cos\theta
\end{aligned}
$$

Den ferdige Jacobi-matrisen $L'(r,\theta)$ blir da:

$$
L'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}
$$

Så finner vi $H'(r,\theta)$:

$$
H'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial r} & \frac{\partial H_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial H_2}{\partial r} & \frac{\partial H_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial H_3}{\partial r} & \frac{\partial H_3}{\partial \theta} \end{pmatrix}
$$

Vi finner de 6 partiell-deriverte for $G(L(r,\theta))$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H_1}{\partial r} &= \frac{\partial\left(\frac{2r\cos\theta}{r^2+1}\right)}{\partial r} \\
&= \frac{2\cos\theta(r^2+1) - 2r\cos\theta(2r)}{(r^2+1)^2} \\
&= \frac{2\cos\theta(r^2+1) - 4r^2\cos\theta}{(r^2+1)^2} \\
&= \frac{2\cos\theta(r^2+1-2r^2)}{(r^2+1)^2} \\
&= \frac{2\cos\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^2} \\
\frac{\partial H_1}{\partial \theta} &= \frac{-2r\sin\theta}{r^2+1} \\
\frac{\partial H_2}{\partial r} &= \frac{2\sin\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^2} \text{ (samme regning som for } G_1) \\
\frac{\partial H_2}{\partial \theta} &= \frac{2r\cos\theta}{r^2+1} \\
\frac{\partial H_3}{\partial r} &= \frac{\partial\left(\frac{r^2-q}{r^2+1}\right)}{\partial r} \\
&= \frac{2r(r^2+1) - (r^2-1)2r}{(r^2+1)^2} \\
&= \frac{2r(r^2+1-r^2+1)}{(r^2+1)^2} \\
&= \frac{4r}{(r^2+1)^2} \\
\frac{\partial H_3}{\partial \theta} &= 0
\end{aligned}
$$

Den ferdige Jacobi-matrisen $H'(L(r,\theta))$ blir da:

$$
H'(L(r,\theta)) = \begin{pmatrix} \frac{2\cos\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^2} & \frac{-2r\sin\theta}{r^2+1} \\ \frac{2\sin\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^2} & \frac{2r\cos\theta}{r^2+1} \\ \frac{4r}{(r^2+1)^2} & 0 \end{pmatrix}
$$

iii)

Vi har fra kjerneregelen for funksjoner av flere variable at:

$$
\begin{aligned}
H'(r,\theta) &= G'(L(r,\theta))L'(r,\theta) \\
&= G'(q)L'(r,\theta) \\
&= B \cdot L'(r,\theta)
\end{aligned}
$$

Vi har altså at:

$$
H'(r,\theta) = B \cdot L'(r,\theta)
$$

$$
\begin{pmatrix} \frac{2\cos\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^2} & \frac{-2r\sin\theta}{r^2+1} \\ \frac{2\sin\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^2} & \frac{2r\cos\theta}{r^2+1} \\ \frac{4r}{(r^2+1)^2} & 0 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}
$$

Vi kan se at v er første søyle i $L'(r,\theta)$, og w er andre søyle i $L'(r,\theta)$, multiplisert med $\frac{1}{r}$.
Vi kan da finne Bv og Bw ved å ta første og andre søyle i $H'(r,\theta)$ (og å dele alle komponentene i andre søyle på r). Vi får da:

$$
Bv = \begin{pmatrix} \frac{2\cos\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^2} \\ \frac{2\sin\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^2} \\ \frac{4r}{(r^2+1)^2} \end{pmatrix} \quad Bw = \begin{pmatrix} \frac{-2\sin\theta}{r^2+1} \\ \frac{2\cos\theta}{r^2+1} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Vi kan da regne ut normene $|Bv|$ og $|Bw|$:

$$
\begin{aligned}
|Bv|^2 &= \left| \begin{pmatrix} \frac{2\cos\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^2} \\ \frac{2\sin\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^2} \\ \frac{4r}{(r^2+1)^2} \end{pmatrix} \right|^2 \\
&= \left(\frac{2\cos\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^2}\right)^2 + \left(\frac{2\sin\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^2}\right)^2 + \left(\frac{4r}{(r^2+1)^2}\right)^2 \\
&= \frac{(2\cos\theta(1-r^2))^2}{((r^2+1)^2)^2} + \frac{(2\sin\theta(1-r^2))^2}{((r^2+1)^2)^2} + \frac{(4r)^2}{((r^2+1)^2)^2} \\
&= \frac{4\cos^2\theta(1-r^2)^2}{(r^2+1)^4} + \frac{4\sin^2\theta(1-r^2)^2}{(r^2+1)^4} + \frac{16r^2}{(r^2+1)^4} \\
&= \frac{4(1-r^2)^2}{(r^2+1)^4} + \frac{16r^2}{(r^2+1)^4} \\
&= \frac{4(r^4-2r^2+1)}{(r^2+1)^4} + \frac{16r^2}{(r^2+1)^4} \\
&= \frac{4(r^4+2r^2+1-4r^2)}{(r^2+1)^4} + \frac{16r^2}{(r^2+1)^4} \\
&= \frac{4((r^2+1)^2-4r^2)}{(r^2+1)^4} + \frac{16r^2}{(r^2+1)^4} \\
&= \frac{4(r^2+1)^2}{(r^2+1)^4} - \frac{16r^2}{(r^2+1)^4} + \frac{16r^2}{(r^2+1)^4} \\
&= \frac{4(r^2+1)^2}{(r^2+1)^4} \\
&= \frac{4}{(r^2+1)^2} \\
|Bv| &= \sqrt{\frac{4}{(r^2+1)^2}} = \frac{2}{r^2+1} \\
|Bw| &= \left| \begin{pmatrix} \frac{-2\sin\theta}{r^2+1} \\ \frac{2\cos\theta}{r^2+1} \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{-2\sin\theta}{r^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2\sin\theta}{r^2+1}\right)^2 + 0} \\
&= \sqrt{\frac{4\sin^2\theta}{(r^2+1)^2} + \frac{4\cos^2\theta}{(r^2+1)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{4}{(r^2+1)^2}} \\
&= \frac{2}{r^2+1}
\end{aligned}
$$

Vi kan også finne skalarproduktet $Bv \cdot Bw$:

$$
\begin{aligned}
Bv \cdot Bw &= \begin{pmatrix} \frac{2\cos\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^2} \\ \frac{2\sin\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^2} \\ \frac{4r}{(r^2+1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-2\sin\theta}{r^2+1} \\ \frac{2\cos\theta}{r^2+1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2\cos\theta(1-r^2)(-2\sin\theta)}{(r^2+1)^3} + \frac{2\sin\theta(1-r^2)(2\cos\theta)}{(r^2+1)^3} + 0 \\
&= \frac{4\cos\theta\sin\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^3} - \frac{4\cos\theta\sin\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^3} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Vi har altså at

$$|Bv| = |Bw| = \frac{2}{r^2+1} \ \wedge Bv \cdot Bw = 0$$

iv)

Vi har at enhver vektor $x \in \mathbb{R}^2$ kan utrykkes som

$$x = av + bw$$

for passende reelle tall a og b. Da har vi normen til x uttrykt som

$$
\begin{aligned}
|x| = |av + bw| &= |a(\cos\theta, \sin\theta) + b(-\sin\theta, \cos\theta)| \\
&= |(a\cos\theta - b\sin\theta, a\sin\theta + b\cos\theta)| \\
&= \sqrt{(a\cos\theta - b\sin\theta)^2 + (a\sin\theta + b\cos\theta)^2} \\
&= \sqrt{a^2\cos^2\theta - ab\cos\theta\sin\theta + b^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta + ab\cos\theta\sin\theta + b^2\cos^2\theta} \\
&= \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

Fra forrige oppgave har vi da at:

$$
\begin{aligned}
|Bx| &= |B(av+bw)| = |aBv+bBw| \\
&= \left| a\begin{pmatrix} \frac{2\cos\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^2} \\ \frac{2\sin\theta(1-r^2)}{(r^2+1)^2} \\ \frac{4r}{(r^2+1)^2} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \frac{-2\sin\theta}{r^2+1} \\ \frac{2\cos\theta}{r^2+1} \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= \frac{2}{r^2+1}\left| \begin{pmatrix} \frac{a\cos\theta(1-r^2)}{(r^2+1)} - 2b\sin\theta \\ \frac{a\sin\theta(1-r^2)}{(r^2+1)} + 2b\cos\theta \\ \frac{2ar}{(r^2+1)} \end{pmatrix} \right| \\
&= \frac{2}{r^2+1}\sqrt{\left(\frac{a\cos\theta(1-r^2)}{(r^2+1)} - b\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{a\sin\theta(1-r^2)}{(r^2+1)} + b\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{2ar}{(r^2+1)}\right)^2} \\
&= \frac{2}{r^2+1}\sqrt{\frac{a^2\cos^2\theta(1-r^2)^2}{(r^2+1)^2} + b^2\sin^2\theta + \frac{a^2\sin^2\theta(1-r^2)^2}{(r^2+1)^2} + b^2\cos^2\theta + \frac{4a^2r^2}{(r^2+1)^2}} \quad {}^{1} \\
&= \frac{2}{r^2+1}\sqrt{\frac{a^2(1-r^2)^2}{(r^2+1)^2} + b^2 + \frac{4a^2r^2}{(r^2+1)^2}} \\
&= \frac{2}{r^2+1}\sqrt{\frac{a^2(r^2+1)^2 - 4a^2r^2}{(r^2+1)^2} + b^2 + \frac{4a^2r^2}{(r^2+1)^2}} \\
&= \frac{2}{r^2+1}\sqrt{\frac{a^2(r^2+1)^2}{(r^2+1)^2} + b^2} \\
&= \frac{2}{r^2+1}\sqrt{a^2+b^2} \\
&= \frac{2|x|}{r^2+1}
\end{aligned}
$$

[1] Her hopper jeg over ett steg. Jeg bruker kvadratsetningene for å åpne parantesene, og de to første parantesene får ett ledd hver som ikke er tatt med her. Disse to leddene kanselerer hverandre ut, og er ikke tatt med her for å spare litt plass