OBLIG 2 — BASTIAN EGEDAHL HUUSE

1)

a)

$\mathrm{Col}(A)$ er gitt ved

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

vi radreduserer A:

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&3\\3&4&1&2\\1&3&2&-1\end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III},\ \mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\sim} \begin{pmatrix}1&3&2&-1\\2&1&-1&3\\3&4&1&2\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&3&2&-1\\0&-5&-5&5\\0&-5&-5&5\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-2\cdot\mathrm{I}\\-3\cdot\mathrm{I}\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&2&-1\\0&-5&-5&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\-\mathrm{II}\end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&3&2&-1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)$$

Dette gir oss basisen $B = \left\{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\right\}$ for $\mathrm{Col}(A)$.

(vi kan sjekke, og får at $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$, og $\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$)

b)

vi fortsetter å radredusere A:

$$\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}-3\cdot\mathrm{II}\\ \\ \\ \end{matrix}$$

Vi vet at denne matrisen vil ha samme nullrom som A. vi får at:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{\vec{v} \;\middle|\; \begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\vec{v} = 0\right\}.$$ vi løser for $\vec{v}$:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{matrix}x - z + 2w = 0\\ y + z - w = 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}x = z - 2w\\ y = w - z\end{matrix}$$

vi har at $\vec{v} = \begin{pmatrix}z-2w\\w-z\\z\\w\end{pmatrix}$

Alle $\vec{v} \in \mathcal{N}(A)$ er på denne formen. Vi kan da danne basisen for $\mathcal{N}(A)$:

$$\begin{pmatrix}z-2w\\w-z\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\-z\\z\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2w\\w\\0\\w\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Siden denne basisen har 2 element, har vi at $\mathrm{Dim}(\mathcal{N}(A)) = 2$ (Dette svarer også på oppgave c)

2)

Siden vi vet at P er en ortogonal matrise, har vi at $P^T = P^{-1}$. vi får at

$P^TAP = P^{-1}AP = D$, der D er en diagonal matrise. vi får:

$$P^{-1}AP = D$$
$$\Downarrow$$
$$A = PDP^{-1}$$

Vi vet da at P er dannet av As egenvektorer.

$$\mathrm{Det}(A - I\lambda) = \begin{vmatrix}6-\lambda & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (6-\lambda)(3-\lambda) - 4$$
$$= 18 - 6\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 4$$
$$= \lambda^2 - 9\lambda + 14$$

vi løser for λ:

$$\lambda = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4\cdot1\cdot14}}{2} = \frac{9\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{9\pm5}{2}$$

Vi får at egenverdien til A er $\lambda = 2, \lambda = 7$.
Vi finner så egenvektorene til A:

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix}6-\lambda & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \vec{0}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix}(6-\lambda)x_1 + 2x_2\\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Setter inn $\lambda = 2$:

$$\begin{matrix}4x_1 + 2x_2 = 0\\ 2x_1 + x_2 = 0\end{matrix} \Rightarrow x_2 = -2x_1$$

Vi får $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ (dette er en vektor av vanlig multiple)

Setter inn $\lambda = 7$:

$$\begin{matrix}-x_1 + 2x_2\\ 2x_1 - 4x_2\end{matrix} \Rightarrow x_1 = 2x_2$$

Vi får $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

vi tester om disse er ortogonale: $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$ ✓

Vi får da $P = \begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$.

(vi tester: $P^TAP = \begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix}2&-4\\14&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10&0\\0&35\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}2&0\\0&7\end{pmatrix}$,

Som er en Diagonal matrise. Det er forventet at denne matrisen har 2 og 7 på diagonalen, siden diagonale matriser har egenverdier på diagonalen, og denne matrisen er similar med A.)

b)

Siden A er en symmetrisk matrise, og vi har at $\|\vec{x}\| = 1$, $\forall\vec{x} \mid x_1^2 + x_2^2 = 1$, har vi at maks- og min-verdi innenfor denne betingelsen er gitt ved største og minste egenverdi. vi har at:

Maks $= 7$, min $= 2$.

c)

Vi sjekker aksiomene for indreprodukt:

1) $\langle u, v\rangle = u^TAv = (u_1\ u_2)\begin{pmatrix}6&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}6u_1 + 2u_2\\ 2u_1 + 3u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}6u_1v_1 + 2u_2v_1 + 6u_1v_2 + 2u_1v_2\\ 2u_1v_1 + 3u_2v_1 + 2u_1v_2 + 3u_1v_2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}6v_1 + 2v_2\\ 2v_1 + 3v_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$
$$= (v_1\ v_2)\begin{pmatrix}6&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$
$$= v^TAu = \langle v, u\rangle \quad ✓$$

2) $\langle u + v, w\rangle = (u + v)^TAw$
$= (u^T + v^T)Aw$
$= u^TAw + v^TAw = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

3) $\langle cu, v\rangle = (cu)^TAv$
$= c(u^TAv) = c\langle u, v\rangle$

4) $\langle u, u\rangle = u^TAu$

$$= 6u_1^2 + 4u_1u_2 + 3u_2^2$$

Vi ser at denne er lik 0 dersom $u = \vec{0}$, og at uttrykket vil være større enn 0 ellers. (jeg sliter med å bevise det siste, men jeg har et argument. Dersom u_1 og u_2 har samme fortegn er uttrykket åpenbart >0. anta u_1 og u_2 motsatte fortegn. vi får: $6u_1^2 + 3u_2^2 - 4|u_1||u_2|$. Jeg klarer ikke å se for meg et eksempel der det negative er større enn det positive (men igjen, dette er ikke et bevis))

d)

Vi bruker Gram-Schmidt prosessen:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \frac{\langle\vec{x}_2, \vec{v}_1\rangle}{\langle\vec{v}_1, \vec{v}_1\rangle}\vec{v}_1$$
$$= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \frac{\vec{x}_2^TA\vec{v}_1}{\vec{v}_1^TA\vec{v}_1}\vec{v}_1$$
$$= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \frac{(0\ 1)\begin{pmatrix}6&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{6}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$$

Vi får den ortogonale Basisen $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}\right\}$

(vi kan sjekke at disse er ortogonale:

$$\langle v_1, v_2\rangle = (1\ 0)\begin{pmatrix}6&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix} = (6\ 2)\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix} = -\frac{6}{3} + 2 = 0 \quad ✓)$$

c) Jeg Hopper over denne foreløpig ☺

3)

a)

$$B = \begin{pmatrix}30&10\\10&15\end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{(30\cdot15)-(10\cdot10)}\begin{pmatrix}15&-10\\-10&30\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{350}\begin{pmatrix}15&-10\\-10&30\end{pmatrix}$$

b)

Vi finner normal-likningen

$$A^TA\vec{x} = A^T\vec{b}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix}1&3&2&4\\-1&-1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\3&-1\\2&3\\4&2\end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix}1&3&2&4\\-1&-1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8\\10\\-1\\0\end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix}1+9+4+16 & -1-3+6+8\\ -1-3+6+8 & 1+1+9+4\end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix}-8+30-2\\ 8-10-3\end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix}30&10\\10&15\end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix}20\\-5\end{pmatrix}$$

Vi multipliserer med B^{-1}:

$$\frac{1}{350}\begin{pmatrix}15&-10\\-10&30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30&10\\10&15\end{pmatrix}\vec{x} = \frac{1}{350}\begin{pmatrix}15&-10\\-10&30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\-5\end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{x} = \frac{1}{350}\begin{pmatrix}300+50\\-200-150\end{pmatrix}$$
$$\vec{x} = \frac{1}{350}\begin{pmatrix}350\\-350\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Minste kvadraters løsning på $A\vec{x} = \vec{b}$ er $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

4)

a) $\|1\| = \sqrt{\langle 1, 1\rangle} = \sqrt{\frac{1}{3}(1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1)} = \sqrt{\frac{3}{3}} = 1$ ✓

$\left\|\sqrt{\frac{3}{2}}x\right\| = \sqrt{\langle\sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{3}{2}}x\rangle} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cdot\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 0\cdot0 + \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}$

$= \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)} = \sqrt{\frac{3}{3}} = 1$ ✓

b)

$$3x^2 + 3x + 1 = \sqrt{2}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}x^2 - \sqrt{2}\right) + 3x + 2$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}x^2 - \sqrt{2}\right) + 2\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + 2\cdot(1)$$

Vi har nå dannet $P(x)$ som en lineær komb. av elementene i basisen. vi kan da danne koordinat-vektoren ved å se på koeffisientene:

$$P(x) = \left(2, 2\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{2}\right)$$

(Jeg plasserte elementene feil vei i lin. komb.-en ☺)

5)

a)

$$M\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$N\vec{v} = (M^2 + M - 3I)\vec{v}$$
$$= M^2\vec{v} + M\vec{v} - 3I\vec{v}$$
$$= \lambda^2\vec{v} + \lambda\vec{v} - 3v$$
$$= (\lambda^2 + \lambda - 3)\vec{v}$$

Vi har da at $\vec{v}$ er en egenvektor for N, med egenverdi $(\lambda^2 + \lambda - 3)$.

Jeg hadde gjerne gjort ekstraoppgavene, men jeg har dårlig tid! ☹