OSTBAYERISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE REGENSBURG
ELEKTRO- UND INFORMATIONSTECHNIK

Formelsammlung Mathematik 2 (Ma2)

nach Vorlesungsunterlagen von
G. Dietel

Erstellt von:	Bastian Nagler
Letzter Stand:	Sommersemester 2025

Inhaltsverzeichnis

1 1-dim Integrale **2**

2 Komplexe Zahlen **3**

3 Reihen **4**

4 Funktionen mit mehreren Variablen **7**

5 Differentialrechnung **9**

5.1 DGL 1. Ordnung 9

5.1.1 Seperable DGL 1. Ordnung 9

5.1.2 Seperabel durch Substitution 9

5.2 Lineare DGL 1. Ordnung: 10

5.3 DGL 2. Ordnung: 10

6 Winkeltabelle **11**

1 1-dim Integrale

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$$

f(x)	F(x)
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
x^{-1}	$\ln\|x\|$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$

Partielle Integration:

$$\int u \cdot v' = uv - \int v \cdot u'$$

Substitution:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du$$

Fläche zwischen zwei Graphen:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

2 Komplexe Zahlen

Exponetialform

$$a \cdot \cos(\varphi) + b \cdot j \cdot \sin(\varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{j\varphi}$$
$$(\cos(x) + j \cdot \sin(x))^n = \cos(n \cdot x) + j \cdot \sin(n \cdot x)$$
$$Arg(z) = \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$$

Konjugation und Betrag

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \quad , \quad \overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w} \tag{1}$$
$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \quad , \quad \overline{z \div w} = \overline{z} \div \overline{w} \tag{2}$$
$$\overline{\overline{z}} = z \tag{3}$$
$$Rez = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad , \quad Imz = \frac{z - \overline{z}}{2j} \tag{4}$$
$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad , \quad |z \div w| = |z| \div |w| \tag{5}$$
$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \tag{6}$$
$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad , \quad |z - w| \geq ||z| - |w|| \tag{7}$$

Mengen

$$\text{Ebene: } M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |z - j|\} \tag{8}$$
$$\text{Kreis: } M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\} \tag{9}$$

Exponentialfunktion

Ergibt Kreis in der komplexen Ebene.

$$e^z \neq 0$$
$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$$

Wurzelberechnung

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{j\frac{1}{n}(Arg(z)+2k\pi)} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Graphisch:
Drehung des Punktes z n-mal um den Ursprung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ und Skalierung mit dem Betrag $\sqrt[n]{|z|}$.
Es gibt n Punkte der n-ten Wurzel, die gleichmäßig auf dem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{|z|}$ verteilt sind.

Logarithmus

$$log(z) = ln|z| + j \cdot (Arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$
$$Log(z) = ln|z| + j \cdot Arg(z)$$

3 Reihen

- Notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k \quad \rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

- Vergleichskriterium:
  - Majorantenkirterium:

$$|a_k| \leq b_k \quad \text{und} \quad \sum_{k}^{\infty} b_k < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k}^{\infty} a_k < \infty$$

  - Minorantenkriterium:

$$|a_k| \geq b_k \quad \text{und} \quad \sum_{k}^{\infty} b_k = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k}^{\infty} a_k = \infty$$

- Wurzelkriterium:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L, \quad L < 1 \Rightarrow \sum_{k}^{\infty} a_k < \infty, \quad L > 1 \Rightarrow \sum_{k}^{\infty} a_k = \infty, \quad L = 1 \text{ unbestimmt}$$

- Quotientenkriterium:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L, \quad L < 1 \Rightarrow \sum_{k}^{\infty} a_k < \infty, \quad L > 1 \Rightarrow \sum_{k}^{\infty} a_k = \infty, \quad L = 1 \text{ unbestimmt}$$

- Leibniz-Kriterium:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \quad \text{mit} \quad a_k > 0, \quad a_{k+1} < a_k, \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \text{ konvergiert}$$

Standardgrenzwerte:

a_k	$\lim_{k\to\infty} a_k$
$\sqrt[k]{k!}$	∞
$\sqrt[k]{k}$	1
$\sqrt[k]{k+C}$	1
$\sqrt[k]{C}$	1
$\sqrt[k]{ln(k)}$	1

Potenzreihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad x_0 \widehat{=} \text{Entwicklungspunkt}$$

Konvergenzradius:

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \quad \text{mit} \quad |x-x_0| < R \Rightarrow \text{Potenzreihe konvergiert}$$

Integration und Differentiation von Potenzreihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-x_0)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$$

Beachte, dass bei der Differentiation evtl. die untere Grenze der Summe angepasst werden muss. (kein -1 im Exponenten)

Einsetzen in Potenzreihen:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{mit Konvergenzradius} R$$

$$\Rightarrow \quad f(Cx) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k C^k x^k \quad \text{mit Konvergenzradius} \frac{R}{|C|}$$

$$\Rightarrow \quad f(x^m) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{mk} \quad \text{mit Konvergenzradius } \sqrt[m]{R} \qquad m \in \mathbb{N}$$

Addition und Subtraktion von Potenzreihen:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \quad \text{mit } R_1 \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k \quad \text{mit } R_2$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)(x-x_0)^k$$

mit Konvergenzradius $R = \min(R_1, R_2)$, wenn $R_1 \neq R_2$
$R \geq R_1$, wenn $R_1 = R_2$

Multiplikation von Potenzreihen:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \quad \text{mit } R_1 \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k \quad \text{mit } R_2$$

$$\Rightarrow \quad f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k \quad \text{mit}$$

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_k b_0$$

mit Konvergenzradius $R \geq \min(R_1, R_2)$

Division von Potenzreihen:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \quad \text{mit } R_1 \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k \quad \text{mit } R_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k \quad \text{mit}$$

$$c_k = \frac{1}{b_0}\left(a_k - b_1 c_{k-1} - b_2 c_{k-2} - ... - b_{k-1} c_0\right)$$

mit Konvergenzradius $R = \min(R_1, R_2)$, wenn $R_1 \neq R_2$

$R \geq R_1$, wenn $R_1 = R_2$

Taylorreihe:

$$T_{x_0}^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Taylorformel:

$$f(x) = T_{x_0}^n f(x) + R_n(f, x_0) \quad \text{mit} \quad R_n(f, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \text{für} \quad \xi \in (x_0, x)$$

Außerdem gilt: $f'(\xi) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ für $\xi \in (x_0, x)$

Wichtige Taylorreihen:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{10}$$

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k \tag{11}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{12}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{13}$$

$$\frac{1}{1-qx} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k x^k \quad \text{für} \quad |qx| < 1 \tag{14}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{für} \quad |x| < 1 \tag{15}$$

4 Funktionen mit mehreren Variablen

Differenzierbarkeit:
Es gilt:
Jede nicht abschnittsweise definierte Funktion, welche aus den Grundrechenarten (e, ln, sin, cos, ...) zusammengesetzt ist, ist differenzierbar.

Höhenlinen:

$$f(x, y) = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

Gradient:

$$grad_f(x, y) = \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}$$
$$grad_f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Jakobimatrix:

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \end{pmatrix}$$
$$J_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Tangeltialebene:

$$T_f = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Richtungsableitung:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \circ \vec{v_0} = \nabla f(x_0, y_0) \circ \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$$

Differentiationsregeln:

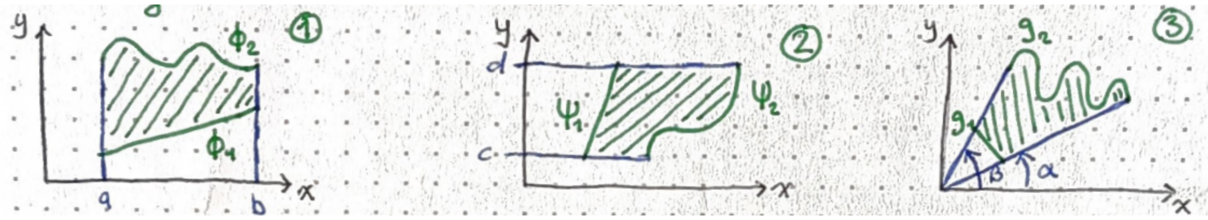
$$\begin{array}{ll} \lambda \cdot f + \mu \cdot g \rightarrow J_{\lambda f + \mu g}(x, y) = \lambda \cdot J_f(x, y) + \mu \cdot J_g(x, y) & \text{Linearität} \\ f \cdot g \rightarrow J_{f \cdot g}(x, y) = f(x, y) \cdot J_g(x, y) + g(x, y) \cdot J_f(x, y) & \text{Produktregel} \\ f \circ g \rightarrow J_{f \circ g}(a) = J_f(g(a)) \cdot J_g(a) & \text{Kettenregel} \end{array}$$

Extremwerte:

$$\begin{array}{rl} & H_f = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} \\ & det(H_f) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 \\ \text{Notwendige Bedingung:} & f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0, y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ und } y_0 \\ & det(H_f(x_0, y_0)) < 0 \quad \text{(Sattelpunkt)} \\ & det(H_f(x_0, y_0)) > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx} > 0 \quad \text{(Minimum)} \\ & det(H_f(x_0, y_0)) > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx} < 0 \quad \text{(Maximum)} \end{array}$$

Wichtig: Auch Rand des Definitionsbereich beachten!

Normgebiete:



$$
\begin{aligned}
1: &\quad \int_{x=a}^{b} \int_{y=\phi_1}^{\phi_2} f(x,y)\, dy\, dx \\
2: &\quad \int_{y=c}^{d} \int_{x=\Psi_1}^{\Psi_2} f(x,y)\, dx\, dy \\
3: &\quad \int_{\varphi=\alpha}^{\beta} \int_{r=g_1}^{g_2} f(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi)) r\, dr\, d\varphi
\end{aligned}
$$

Flächeninhalt:

$$A = \int_{x=a}^{b} \int_{y=\phi_1}^{\phi_2} 1\, dy\, dx = \int_{y=c}^{d} \int_{x=\Psi_1}^{\Psi_2} 1\, dx\, dy = \int_{\varphi=\alpha}^{\beta} \int_{r=g_1}^{g_2} r\, dr\, d\varphi$$

Flächenschwerpunkt:

$f(x,y)$ sei eine Dichte-Funktion, so ist der Schwerpunkt (x_S, y_S)

$$x_S = \frac{1}{A} \int\int_A x \cdot f(x,y)\, dA \qquad y_S = \frac{1}{A} \int\int_A y \cdot f(x,y)\, dA$$

5 Differentialrechnung

Definition Seperabel:
Eine Differentialgleichung heißt separabel, wenn sie in der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$ geschrieben werden kann.
Genauer heißt dies, dass die rechte Seite der DGL in ein Produkt von zwei Funktionen zerlegt werden kann, wobei eine Funktion nur von x und die andere nur von y abhängt.

5.1 DGL 1. Ordnung

5.1.1 Seperable DGL 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y' &= f(x) \cdot g(y) \left(\text{bzw. } y' = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \text{oder} \quad y' = \frac{g(y)}{f(x)} \right) \\ \frac{dy}{dx} &= f(x) \cdot g(y) \\ \frac{dy}{g(y)} &= f(x)\, dx \\ \int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x)\, dx \end{aligned}$$

Beachte: Triviale Lösung $y = 0$ möglicherweise auch Lösung der DGL.

5.1.2 Seperabel durch Substitution

A) Lineare Substitution:

$$\begin{aligned} y' &= F(ax + by + c) \\ &\rightarrow z = ax + by + c \Rightarrow y = \frac{1}{b}(z - ax - c) \Rightarrow y' = \frac{1}{b}(z' - a) \\ \rightarrow \textbf{Einsetzen: } &\frac{1}{b}(z' - a) = F(z) \end{aligned}$$

B) Euler-homogene DGL:

$$\begin{aligned} y' &= F\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow z = \frac{y}{x} \\ &\rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z' \cdot x + z \\ &\rightarrow z'x + z = F(z) \end{aligned}$$

5.2 Lineare DGL 1. Ordnung:

$$y' = f(x) \cdot y + g(x) \quad , \quad g(x) \hat{=} \text{Störfunktion}$$
$$y_h = C \cdot e^{\int f(x)\,dx}$$
$$y_p = y_h \cdot \int \frac{g(x)}{y_h}\,dx$$
$$\Rightarrow y = y_h + y_p = C \cdot e^{\int f(x)\,dx} + C \cdot e^{\int f(x)\,dx} \int \frac{g(x)}{C \cdot e^{\int f(x)\,dx}}\,dx$$

Bemerkung: Ist die DGL homogen, d.h. $g(x) = 0$, so ist die Lösung der DGL nur die homogene Lösung y_h.
Beachte: Auch die triviale Lösung $y = 0$ ist eine Lösung der DGL, wenn $g(x) = 0$.

Ist h(x) eine spezielle Lösung der DGL, so ist die allgemeine Lösung gegeben durch:

$$y = h(x) + C \cdot e^{\int f(x)\,dx}$$

5.3 DGL 2. Ordnung:

Homogone DGL mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \text{ sind die Wurzeln des charakteristischen Polynoms}$$
$$\Rightarrow y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$$

Bei mehrfachen Wurzeln mit Grad n:

$$\Rightarrow C \cdot x^{n-1} \cdot e^{\lambda x}$$

Bei komplexen Wurzeln:

$$\Rightarrow C \cdot e^{zx} = C \cdot e^{(a+jb)x} = C \cdot e^{ax} \cdot e^{jbx} = C_1 \cdot e^{ax} \cdot \cos(bx) + C_2 \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx)$$

Inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = f(x)$$
$$\text{Lösung: } y = y_h + y_p$$
$$\text{mit } y_h = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$$
$$\text{und } y_p = \text{partikuläre Lösung} \quad (\Rightarrow \textit{Papula})$$

6 Winkeltabelle

φ in °	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
φ in $[0; 2\pi[$ rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
φ in $]-\pi; \pi]$ rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi\ (-\pi)$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Beachte, dass die Umkehrfunktionen nicht alle vier Quadranten abdecken (d.h. Die Arcus-Funktionen liefern den Winkel nur für einen bestimmten Wertebereicht):

$$\varphi = \arcsin(x): \ x \in [-1; 1] \rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\varphi = \arccos(x): \ x \in [-1; 1] \rightarrow \varphi \in [0; \pi]$$
$$\varphi = \arctan(x): \ x \in \mathbb{R} \rightarrow \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$