

Universität Stuttgart

Institut für Biomedizinische Technik

Institutsleiter: Prof. Dr. Ing. G. Cattaneo

Masterarbeit

*Konzipierung und Realisierung eines
numerischen Algorithmus zur
Modellierung des menschlichen
Bronchialbaums für die anschließende
Fertigung physikalischer Modelle zur in-
vitro Untersuchung der kleinen
Atemwege*

cand. tech. kyb.
Bastian Neuber

16.06.2020



Gliederung

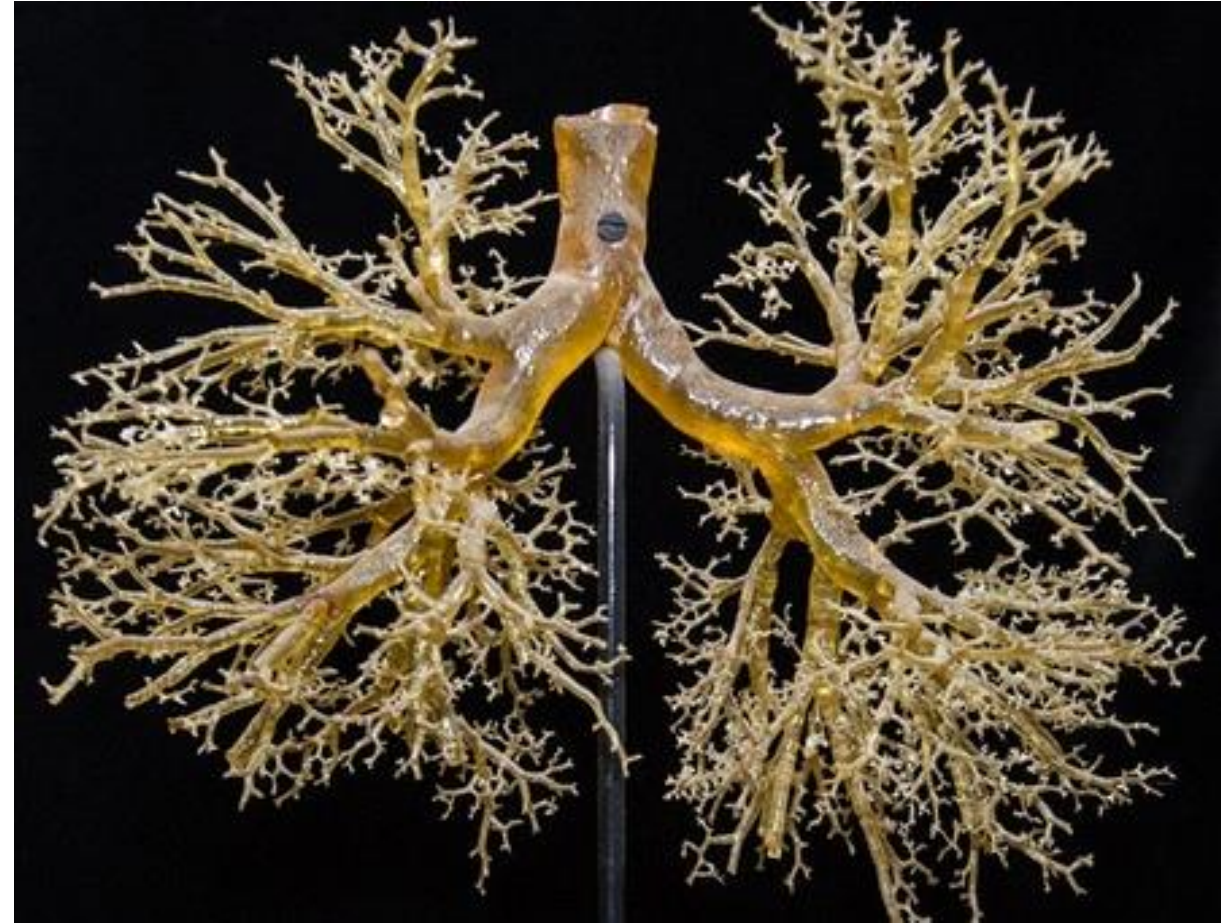
- Motivation
- Literaturrecherche
- Modellierung
- Implementierung des Modells
- Weiterverarbeitung der Geometriedaten
- Fertigung physikalischer Prototypen
- Zusammenfassung und Ausblick

Gliederung

- **Motivation**
- Literaturrecherche
- Modellierung
- Implementierung des Modells
- Weiterverarbeitung der Geometriedaten
- Fertigung physikalischer Prototypen
- Zusammenfassung und Ausblick

Motivation

- Experimentelle Untersuchung von Auswaschverfahren
- Physikalisches Bronchialbaummodell erforderlich
- 23 Verzweigungsgenerationen
⇒ 2^{23} Bronchiolen in der letzten Generation
- Manuelle Konstruktion unpraktikabel
⇒ automatische Konstruktion

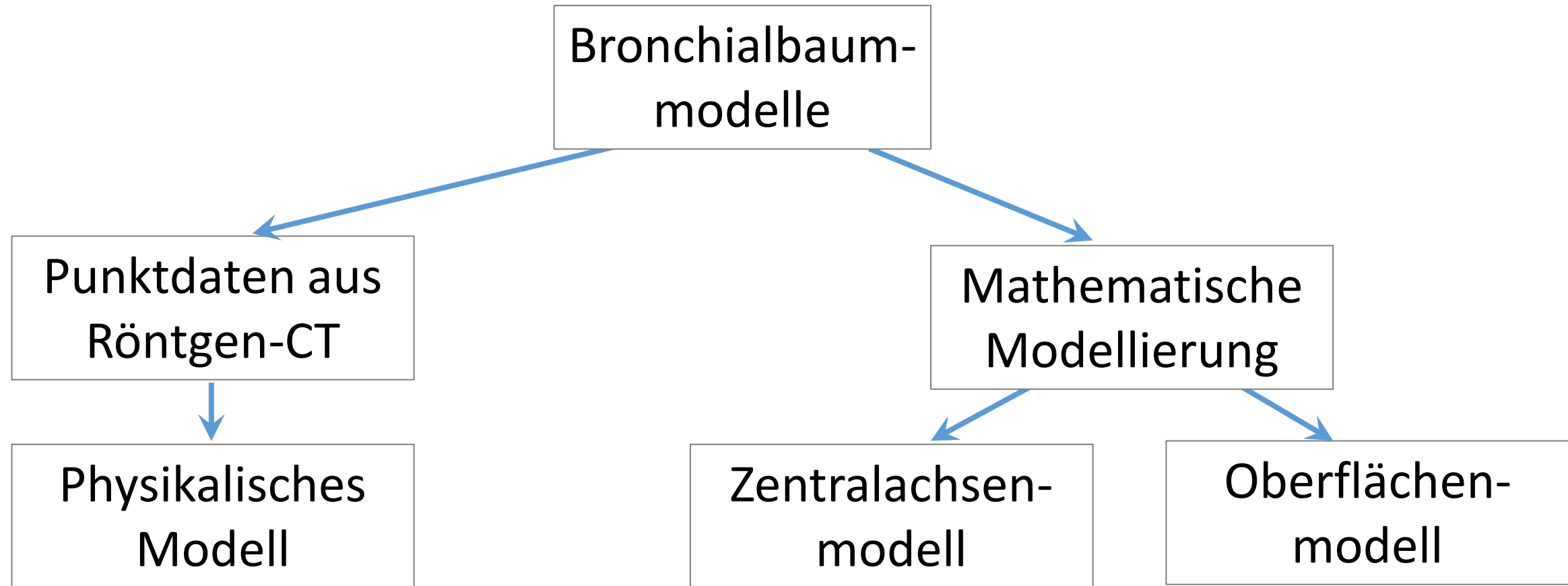


Quelle: Bayerischer Rundfunk [1]

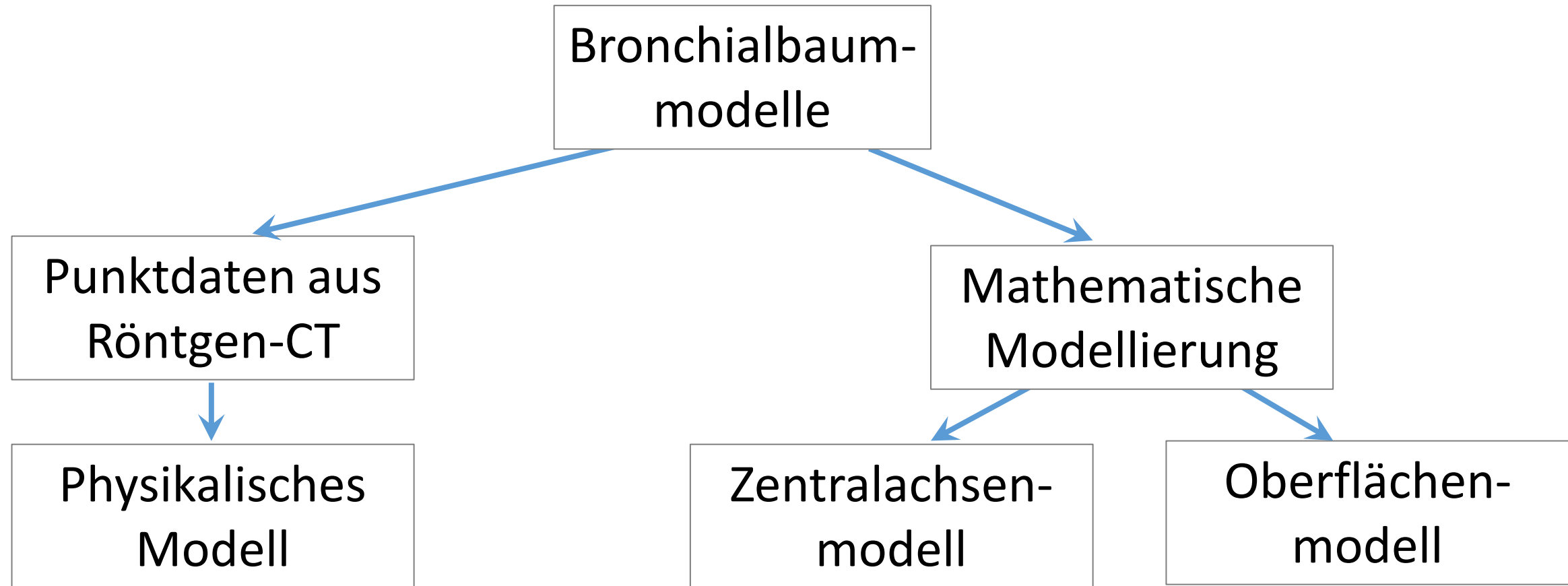
Gliederung

- Motivation
- **Literaturrecherche**
- Modellierung
- Implementierung des Modells
- Weiterverarbeitung der Geometriedaten
- Fertigung physikalischer Prototypen
- Zusammenfassung und Ausblick

Literaturrecherche

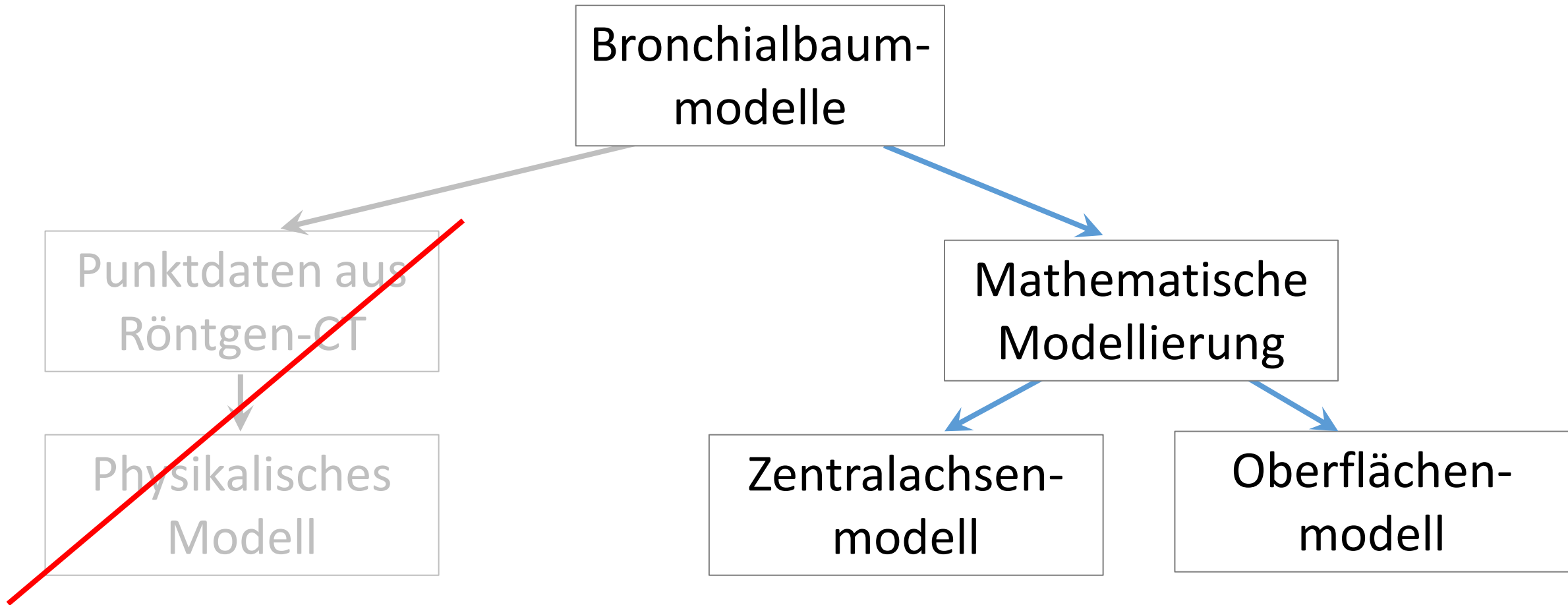


Literaturrecherche



- Anforderungen:
- Flexible, parametrisierbare Konstruktion
 - Umsetzbarkeit in physikalische Modelle

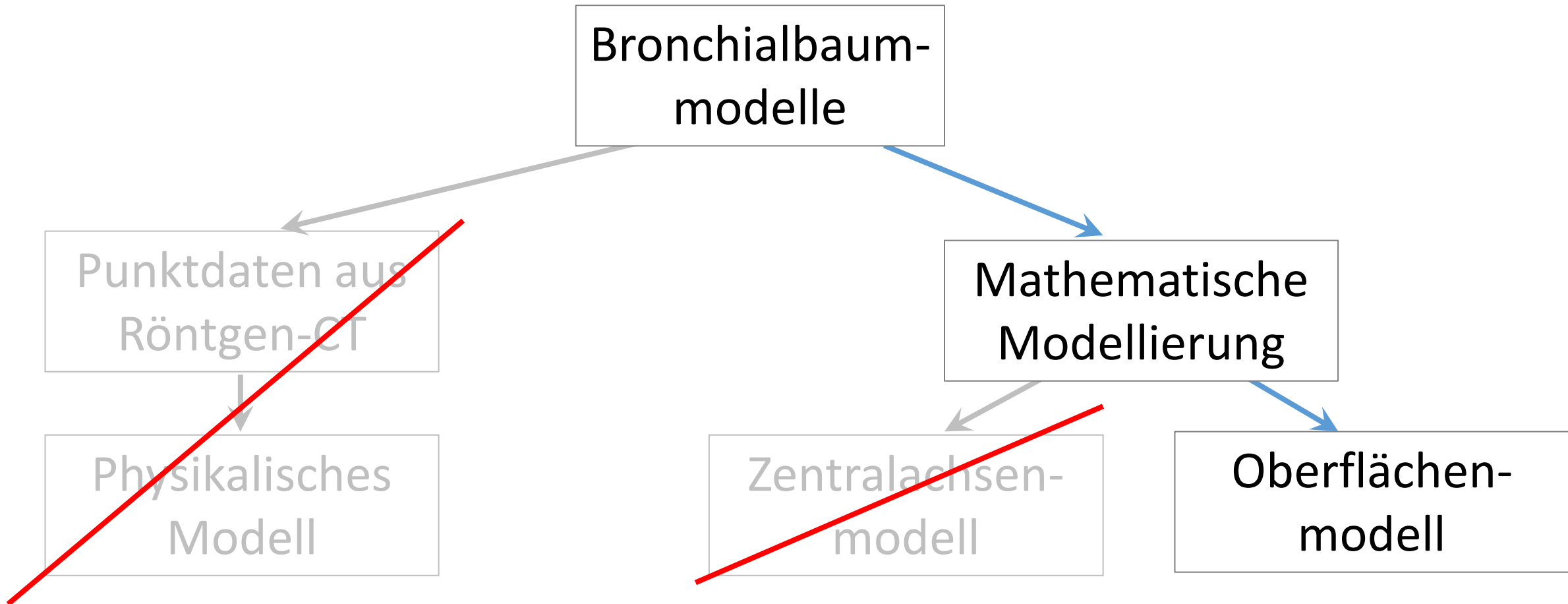
Literaturrecherche



Anforderungen:

- Flexible, parametrisierbare Konstruktion
- Umsetzbarkeit in physikalische Modelle

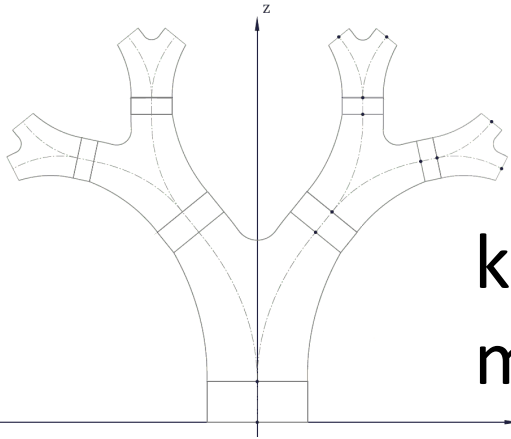
Literaturrecherche



Anforderungen:

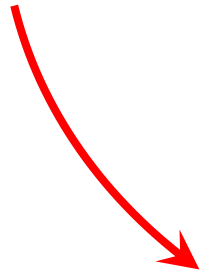
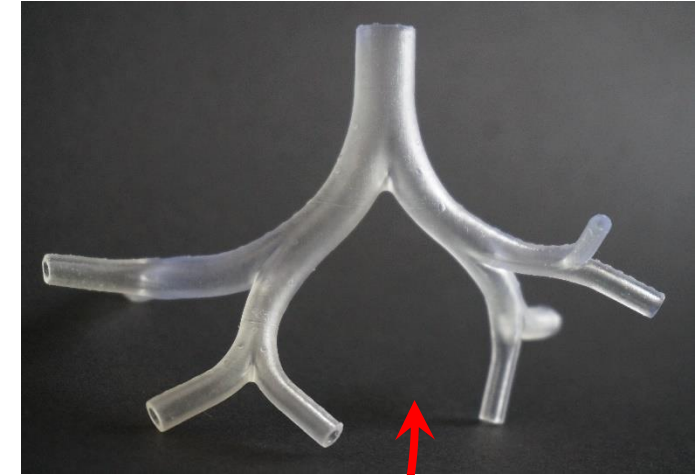
- Flexible, parametrisierbare Konstruktion
- Umsetzbarkeit in physikalische Modelle

Modellierungsstrategie

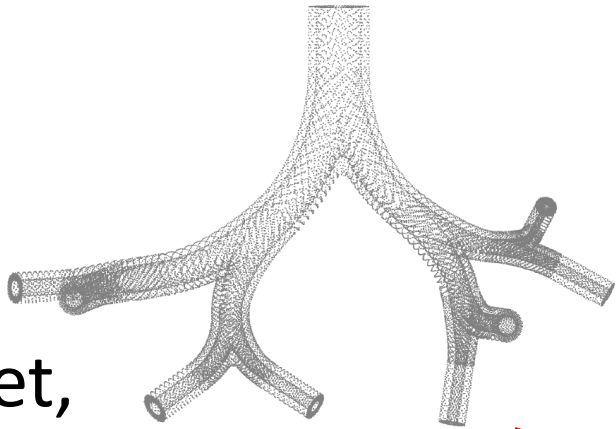


kontinuierlich,
mathematisch

physikalisch

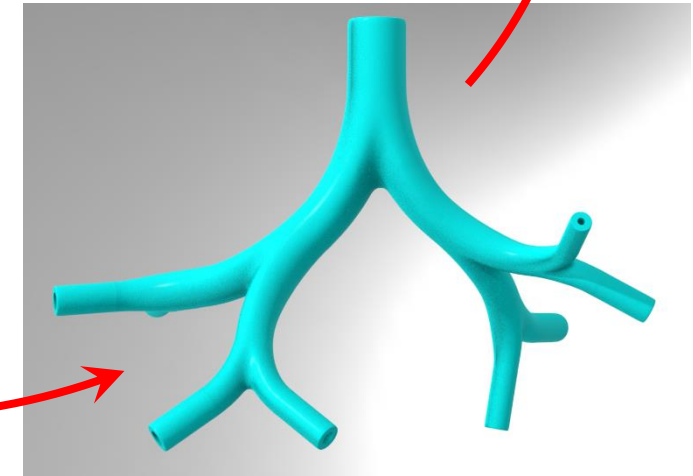


diskret,
mathematisch



diskret, numerisch

	1	2	3
3896187	-28.1077	-41.5004	62.5372
3896188	-28.1090	-41.4935	62.5385
3896189	-28.1105	-41.4866	62.5394
3896190	-28.1123	-41.4797	62.5401
3896191	-28.1144	-41.4729	62.5405
3896192	-28.1168	-41.4661	62.5406
3896193	-28.1195	-41.4595	62.5406
3896194	-28.1226	-41.4531	62.5403
3896195	-28.1250	-41.4460	62.5390

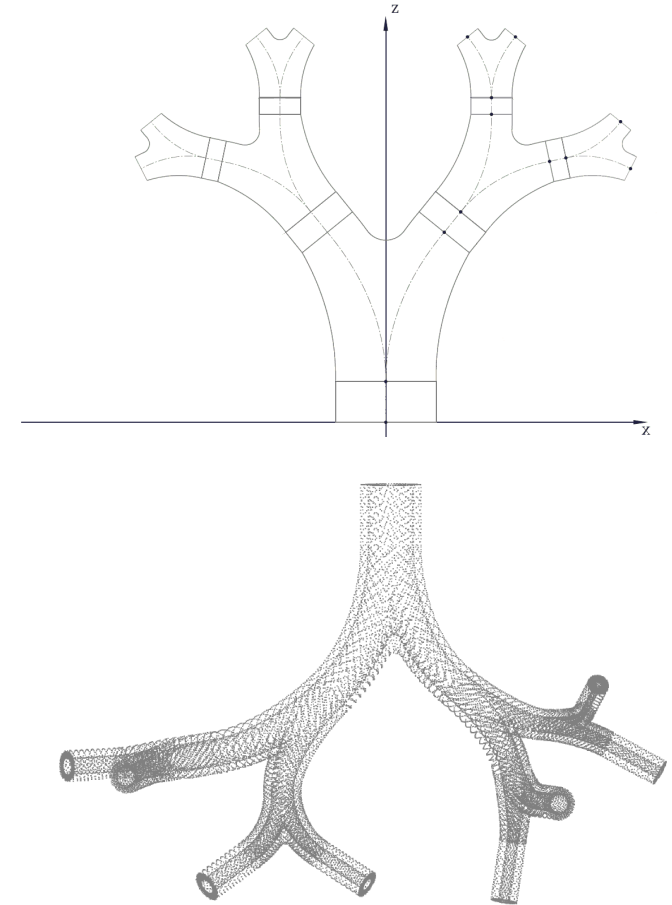


diskrete Flächen

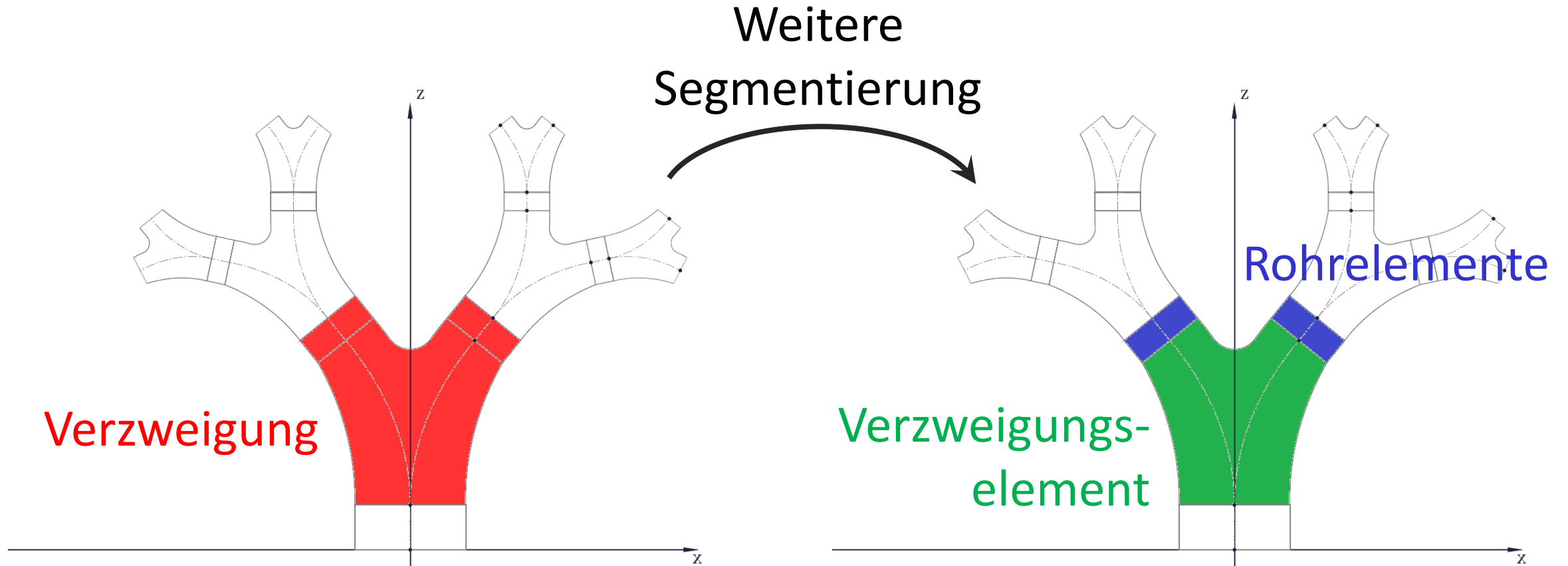


Gliederung

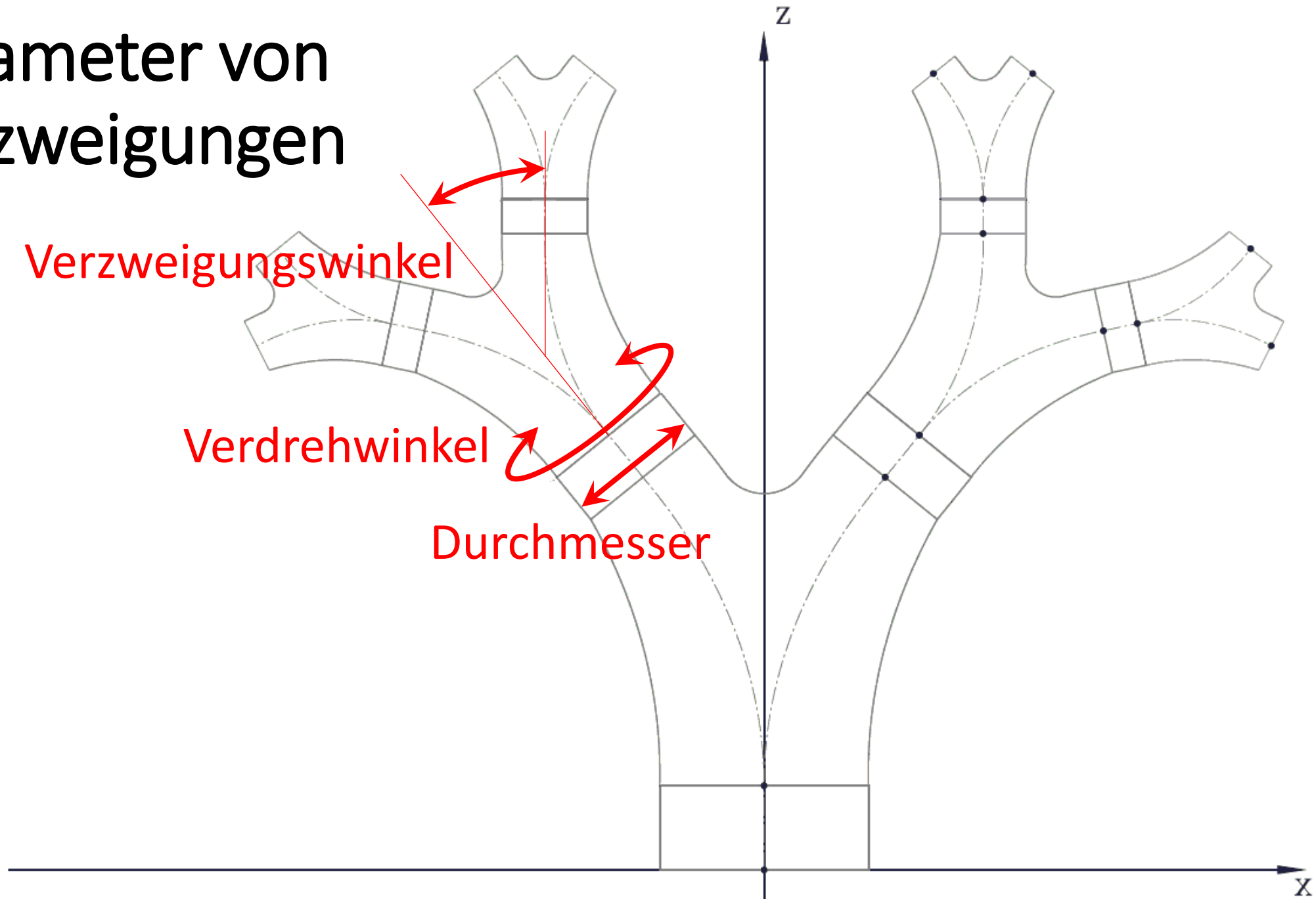
- Motivation
- Literaturrecherche
- **Modellierung**
- Implementierung des Modells
- Weiterverarbeitung der Geometriedaten
- Fertigung physikalischer Prototypen
- Zusammenfassung und Ausblick



Segmentierung

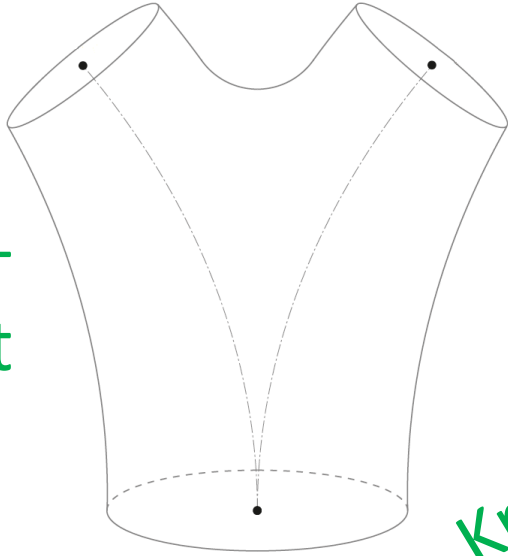


Parameter von Verzweigungen



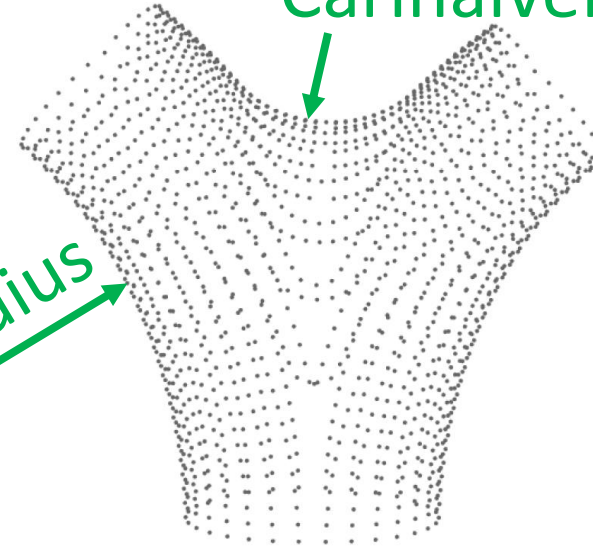
Formparameter und Diskretisierung

Verzweigungs-
element

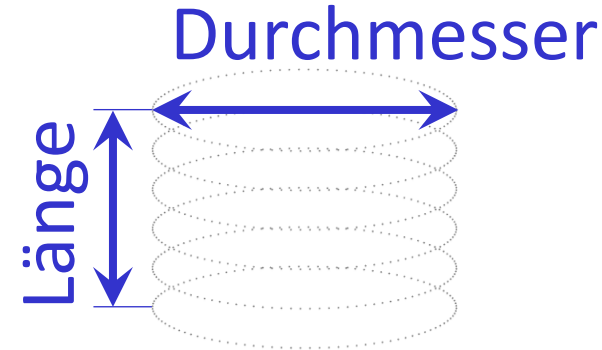
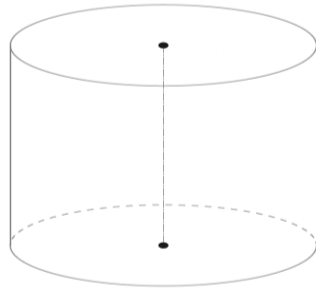


Krümmungsradius

Carinalverrundung

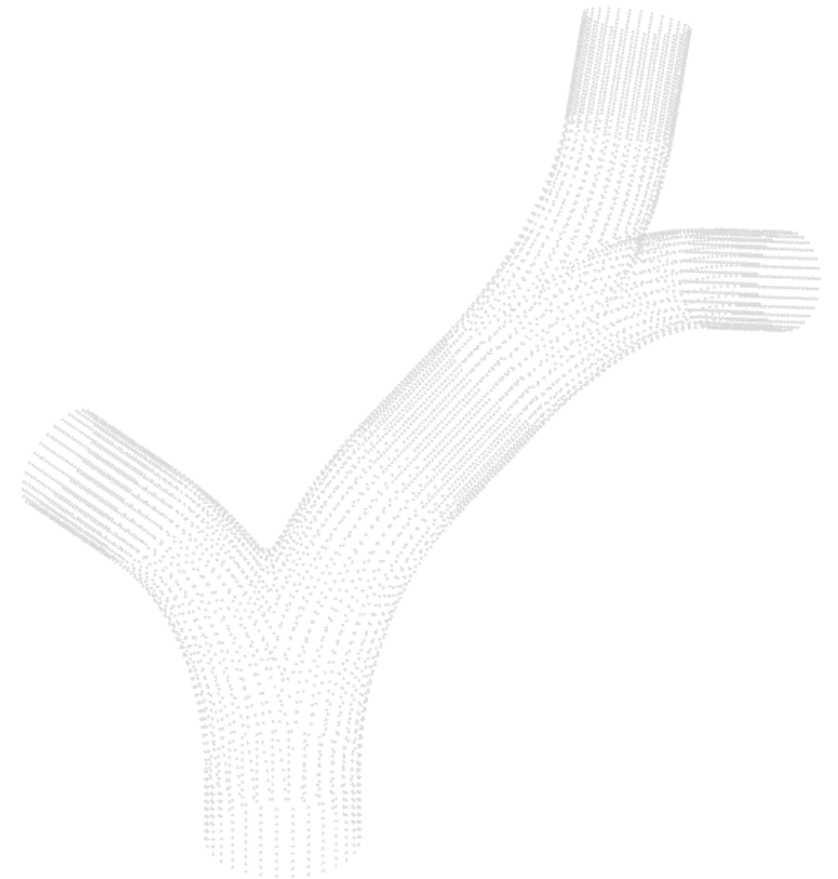


Rohrelement



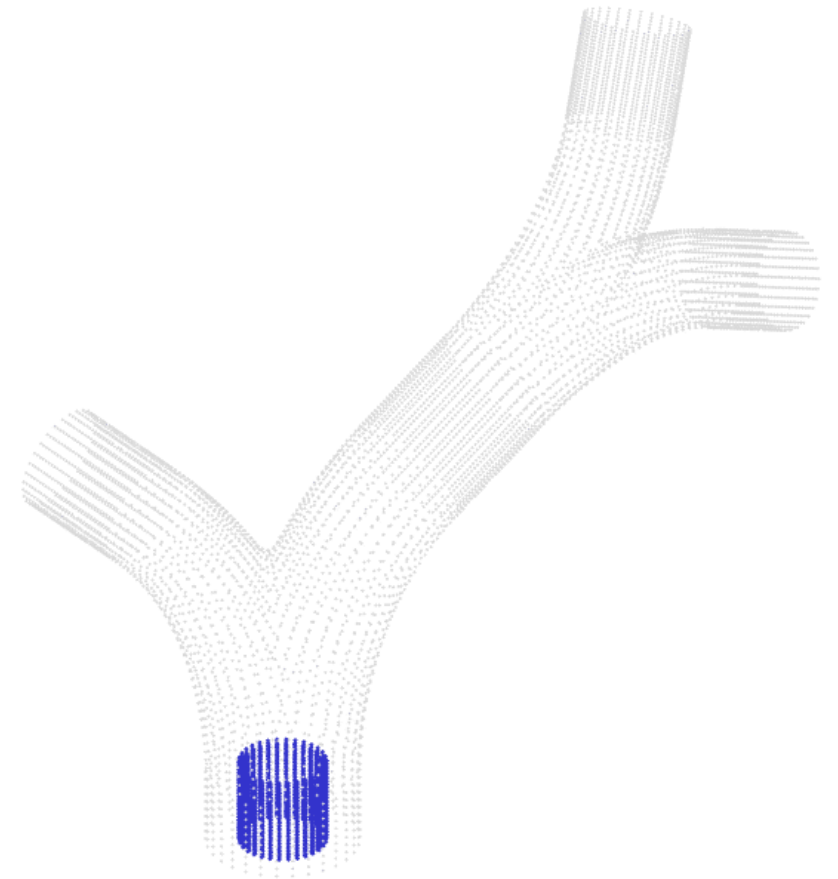
Anordnung der Konstruktionselemente

- Konstruktion der Rohr- und Verzweigungselemente im Ursprung
- Drehung und Verschiebung der Rohrelemente
- Drehung und Verschiebung der Verzweigung
- Ausrichtung der Verzweigungen an den Zentralachsen der Rohrelemente



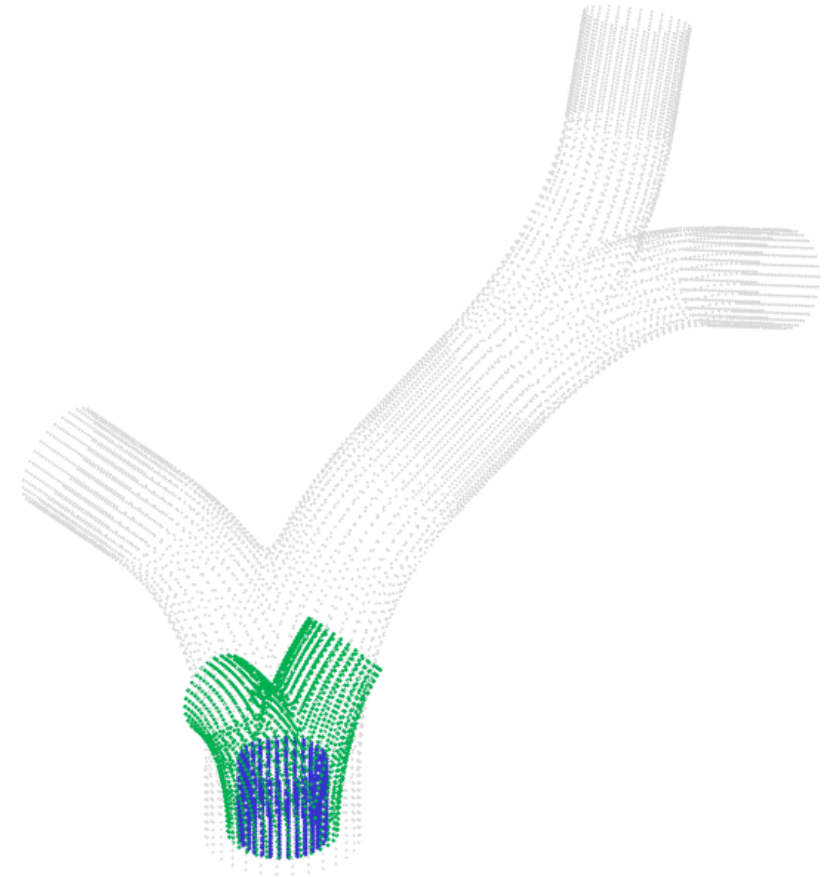
Anordnung der Konstruktionselemente

- Konstruktion der Rohr- und Verzweigungselemente im Ursprung
- Drehung und Verschiebung der Rohrelemente
- Drehung und Verschiebung der Verzweigung
- Ausrichtung der Verzweigungen an den Zentralachsen der Rohrelemente



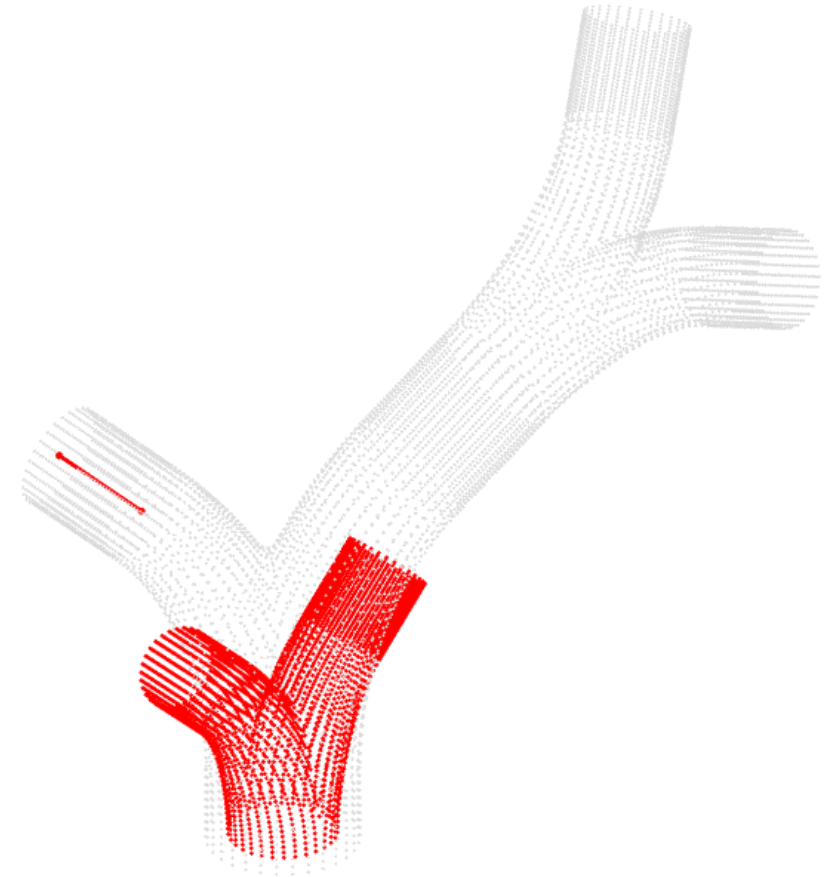
Anordnung der Konstruktionselemente

- Konstruktion der Rohr- und Verzweigungselemente im Ursprung
- Drehung und Verschiebung der Rohrelemente
- Drehung und Verschiebung der Verzweigung
- Ausrichtung der Verzweigungen an den Zentralachsen der Rohrelemente



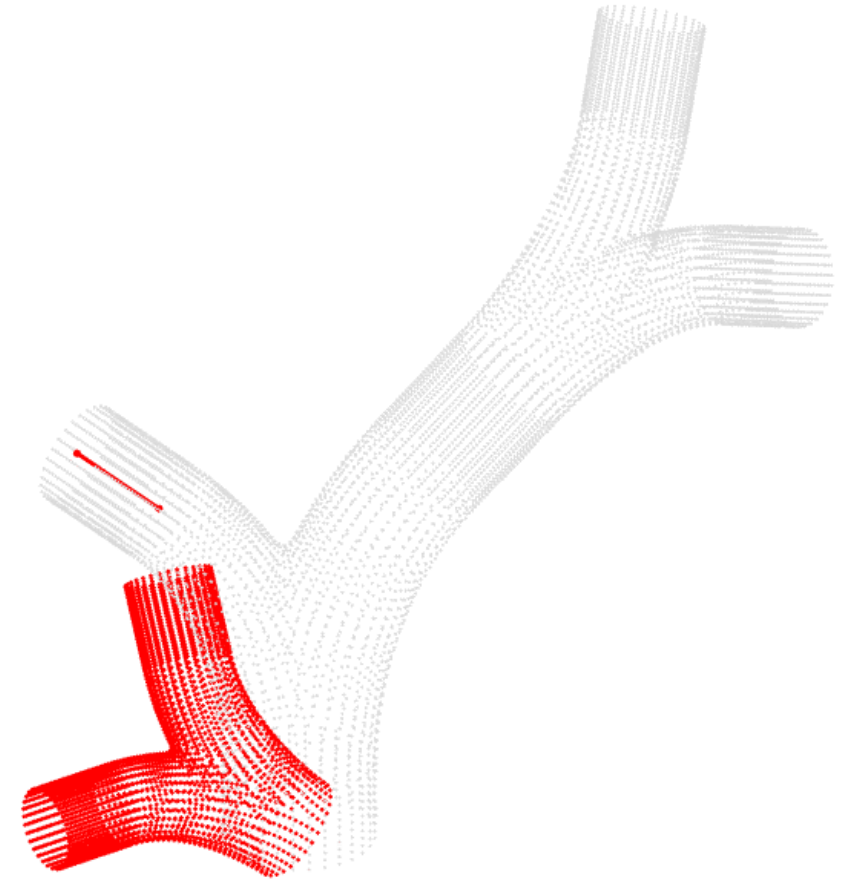
Anordnung der Konstruktionselemente

- Konstruktion der Rohr- und Verzweigungselemente im Ursprung
- **Drehung und Verschiebung der Rohrelemente**
- Drehung und Verschiebung der Verzweigung
- Ausrichtung der Verzweigungen an den Zentralachsen der Rohrelemente



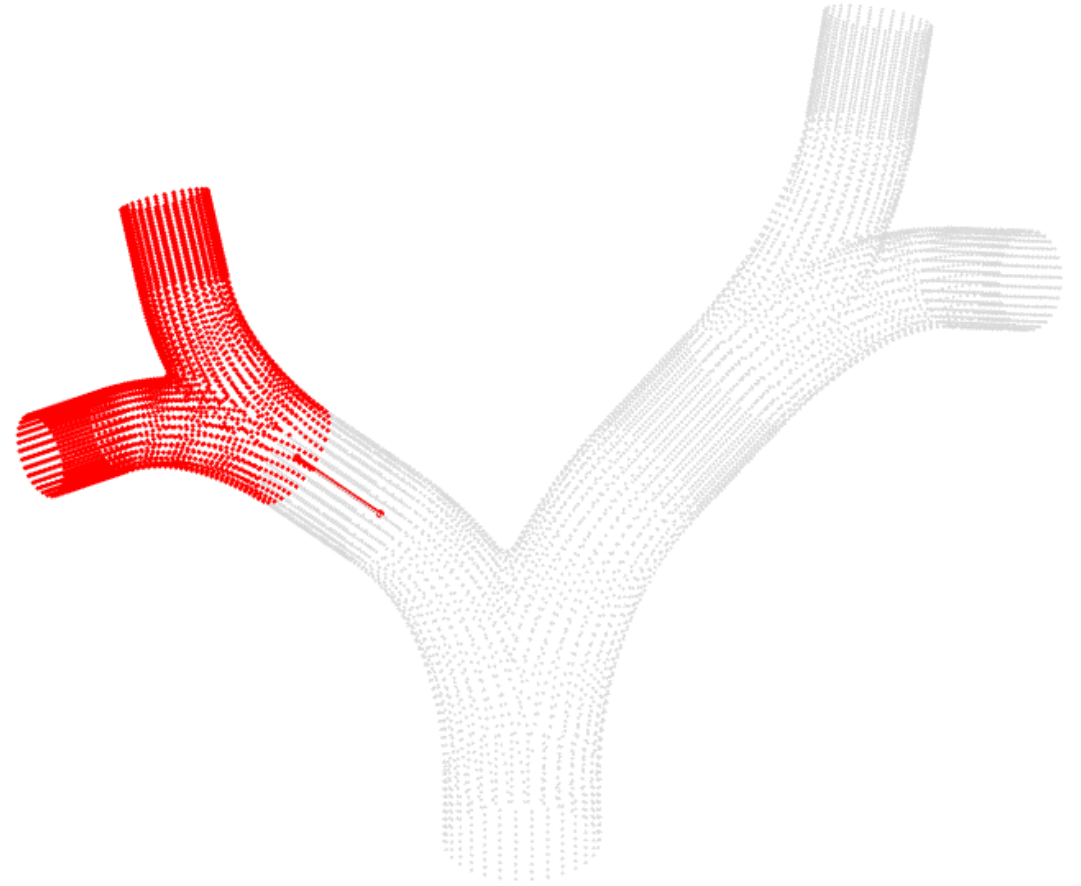
Anordnung der Konstruktionselemente

- Konstruktion der Rohr- und Verzweigungselemente im Ursprung
- Drehung und Verschiebung der Rohrelemente
- Drehung und Verschiebung der Verzweigung
- Ausrichtung der Verzweigungen an den Zentralachsen der Rohrelemente



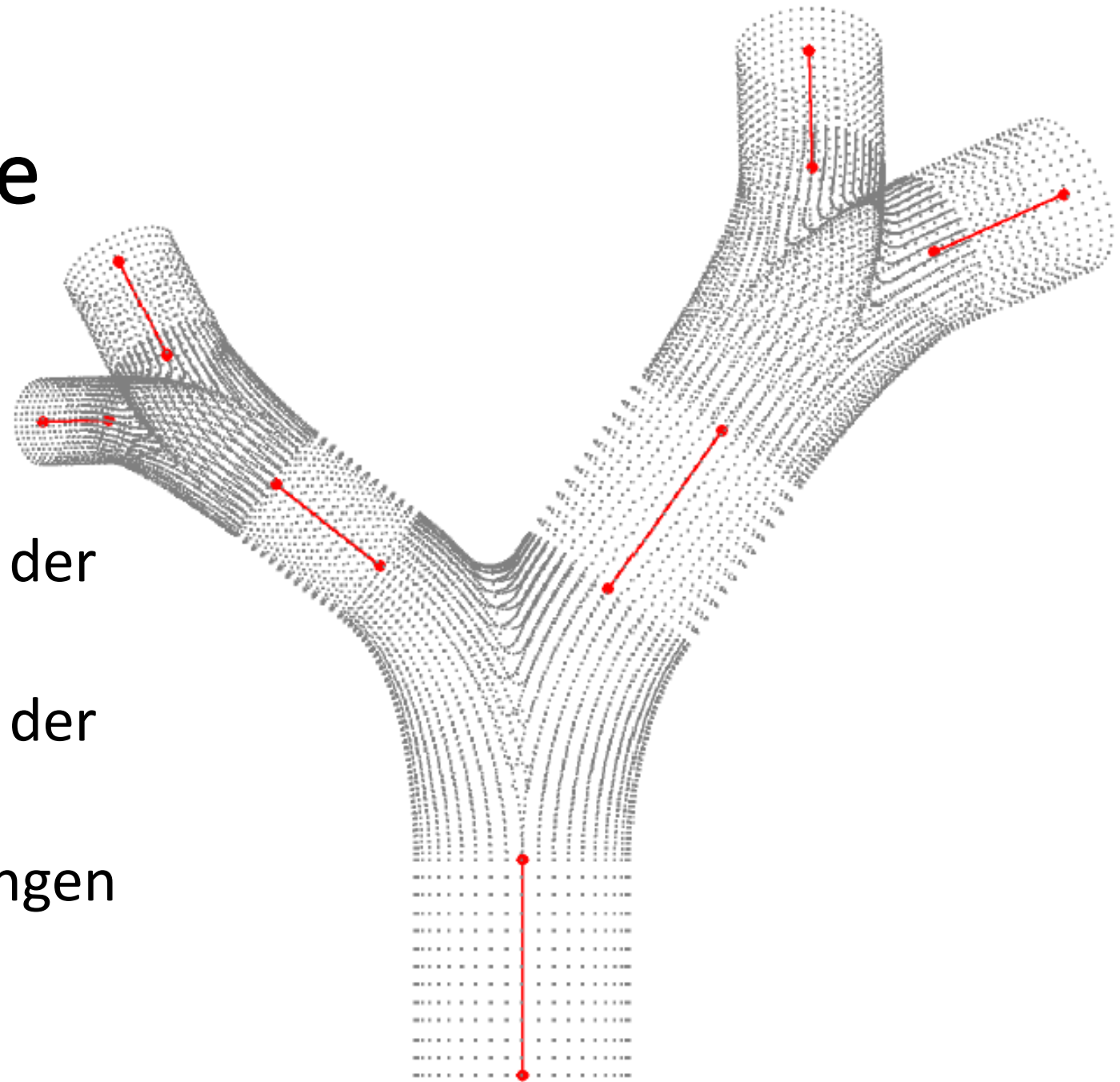
Anordnung der Konstruktionselemente

- Konstruktion der Rohr- und Verzweigungselemente im Ursprung
- Drehung und Verschiebung der Rohrelemente
- Drehung und Verschiebung der Verzweigung
- Ausrichtung der Verzweigungen an den Zentralachsen der Rohrelemente



Anordnung der Konstruktionselemente

- Konstruktion der Rohr- und Verzweigungselemente im Ursprung
- Drehung und Verschiebung der Rohrelemente
- Drehung und Verschiebung der Verzweigung
- Ausrichtung der Verzweigungen an den Zentralachsen der Rohrelemente



Gliederung

- Motivation
- Literaturrecherche
- Modellierung
- **Implementierung des Modells**
- Weiterverarbeitung der Geometriedaten
- Fertigung physikalischer Prototypen
- Zusammenfassung und Ausblick

Implementierung des Modells

- Implementiert in Matlab
- Berechnung der Punktkoordinaten Punktmodells
- Eingabe über eine GUI (graphical user interface)
- Modulare Programmstruktur aus Haupt- und Unterfunktionen
- Ausgabe einer Datei mit Koordinaten

Eingabe

- Allgemeine Eigenschaften:
 - Ursprung der Geometrieparam.
 - Auflösung
- Geometrieparametererzeugung:
 - Stochastische Erzeugung von Geometrieparametern
 - optional
- Bifurkationsmodell:
 - Formparameter der Verzweigungselemente
- Post-Processing:
 - Wandstärke
 - Endstücke

The screenshot shows the 'Hauptmenü Bronchialbaummodell' window with the 'Geometrieparametererzeugung' tab selected. The interface includes a title bar with standard window controls and a tab bar with four tabs: 'Allgemeine Modelleigenschaften', 'Geometrieparametererzeugung', 'Bifurkationsmodell', and 'Post-Processing'.

The main content area is divided into two sections:

- Erzeugung von Winkeln, Längen und Durchmessern**
 - ☐ Hauptgeometrieparameter vorgeben
 - Name des Unterordners im aktuellen Verzeichnis: \ Eingabe \
 - Name der Datei, welche die Eingabevariablen enthält: [] .mat
 - ☒ zufällig verteilte Parameter
- Auflösung**
 - Anzahl Punkte in radialer Richtung: 50
 - Anzahl Punkte in Längsrichtung der Rohrelemente: 6
 - Anzahl Punkte in Längsrichtung des ersten Rohrelementes: 20
 - Verfeinerungsfaktor der Carinalkurvenauflösung: 3

At the bottom, there are three buttons: 'Eingaben speichern', 'Standardeingabe wiederherstellen', and 'Berechnung starten'.

Eingabe

- Allgemeine Eigenschaften:
 - Ursprung der Geometrieparam.
 - Auflösung
- Geometrieparametererzeugung:
 - Stochastische Erzeugung von Geometrieparametern
 - optional
- Bifurkationsmodell:
 - Formparameter der Verzweigungselemente
- Post-Processing:
 - Wandstärke
 - Endstücke

The screenshot shows the 'Hauptmenü Bronchialbaummodell' window with four tabs: 'Allgemeine Modelleigenschaften', 'Geometrieparametererzeugung', 'Bifurkationsmodell', and 'Post-Processing'. The 'Allgemeine Modelleigenschaften' tab is active, displaying several input fields and checkboxes.

allgemeine Eigenschaften des Verzweigungsmodells

Anzahl der Generationen	4	[-]
Durchmesser des ersten Mutterastes	10	[mm]
Länge des ersten Mutterastes	10	[mm]

Nennendurchmesser der Tochteräste

normalverteilt:

Varianz (initial)	2	[-]
Exponent: Änderung des Strömungsquerschnitts	2.885	[-]

Verzweigungswinkel

Grenzverzweigungswinkel	90	[°]
exponentieller Zusammenhang zwischen Durchmesser und Verzweigungswinkel mit Exponent	2	

Lage der Bifurkationsebenen

☒ Alle Bifurkationsebenen liegen in einer gemeinsamen Ebene.
☐ Jede Bifurkation erhält eine eigene Bifurkationsebene.

Abhängigkeit zwischen Durchmesser und Rohrelementlänge

normalverteilt:

Varianz (initial)	0	[-]
Erwartungswert (Länge = x*Durchmesser)	0	[-]
minimale Länge (Länge = x*Durchmesser)	0	[-]
maximale Länge (Länge = x*Durchmesser)	0	[-]

Buttons at the bottom: 'Eingaben speichern', 'Standardeingabe wiederherstellen', and 'Berechnung starten'.

Eingabe

- Allgemeine Eigenschaften:
 - Ursprung der Geometrieparam.
 - Auflösung
- Geometrieparametererzeugung:
 - Stochastische Erzeugung von Geometrieparametern
 - optional
- Bifurkationsmodell:
 - Formparameter der Verzweigungselemente
- Post-Processing:
 - Wandstärke
 - Endstücke

The screenshot shows the 'Hauptmenü Bronchialbaummodell' window with the 'Geometrieparametererzeugung' tab selected. The interface includes several input fields and checkboxes for defining bronchial tree geometry parameters.

Verhältnis Krümmungsradius zum Rohrdurchmesser

- ☐ Länge der Bronchien einhalten (nur bei vorgegebenen Hauptgeometrieparametern)
- ☒ Verrundungsparameter einhalten

Anteil gekrümmter Abschnitt: [-]

Parameter der Polynomfunktion

$D2K = 1 * D^{1.5} + 0 * D + 0 + 1 * D(ME)$

Carinalverrundung

- Parameter: Einfluss der Tochterdurchmesser: [-]
- Parameter: Einfluss der Verzweigungswinkel: [-]
- Parameter: Breite der Carinalkurve: [-]

Sigmoidfunktion

- ☒ modifiziert
- Modulationsparameter: [-]
- ☐ original
- Modulationsparameter: [-]

Buttons at the bottom: Eingaben speichern, Standardeingabe wiederherstellen, Berechnung starten

Eingabe

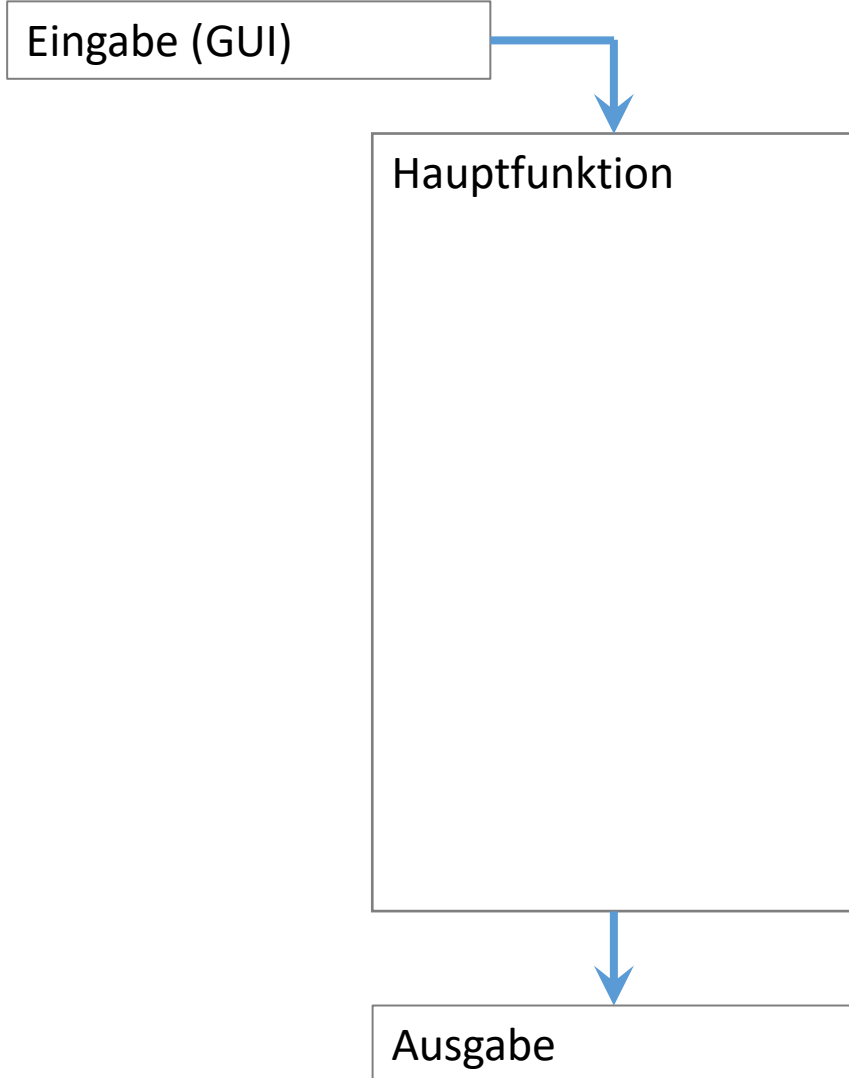
- Allgemeine Eigenschaften:
 - Ursprung der Geometrieparam.
 - Auflösung
- Geometrieparametererzeugung:
 - Stochastische Erzeugung von Geometrieparametern
 - optional
- Bifurkationsmodell:
 - Formparameter der Verzweigungselemente
- **Post-Processing:**
 - Wandstärke
 - Endstücke

The screenshot shows the 'Hauptmenü Bronchialbaummodell' window with the 'Post-Processing' tab selected. The interface includes three main sections for configuration:

- Abschluss-Rohrelemente:**
 - Länge: 4 [mm]
 - Punkteanzahl in Längsrichtung: 25 [-]
- Sockel:**
 - ☐ Sockel erzeugen
 - Länge: 25 [mm]
 - Durchmesser: 25 [mm]
 - Punkteanzahl in radialer Richtung: 25 [-]
- Wandstärke:**
 - ☐ Wandstärke konstruieren
 - Wandstärke: 1 [mm]
 - ☒ Wandstärke nach außen auftragen
 - ☒ Carinalverrundung anpassen
 - ☐ Wandstärke nach innen auftragen

At the bottom, there are three buttons: 'Eingaben speichern', 'Standardeingabe wiederherstellen', and 'Berechnung starten'.

Programmstruktur

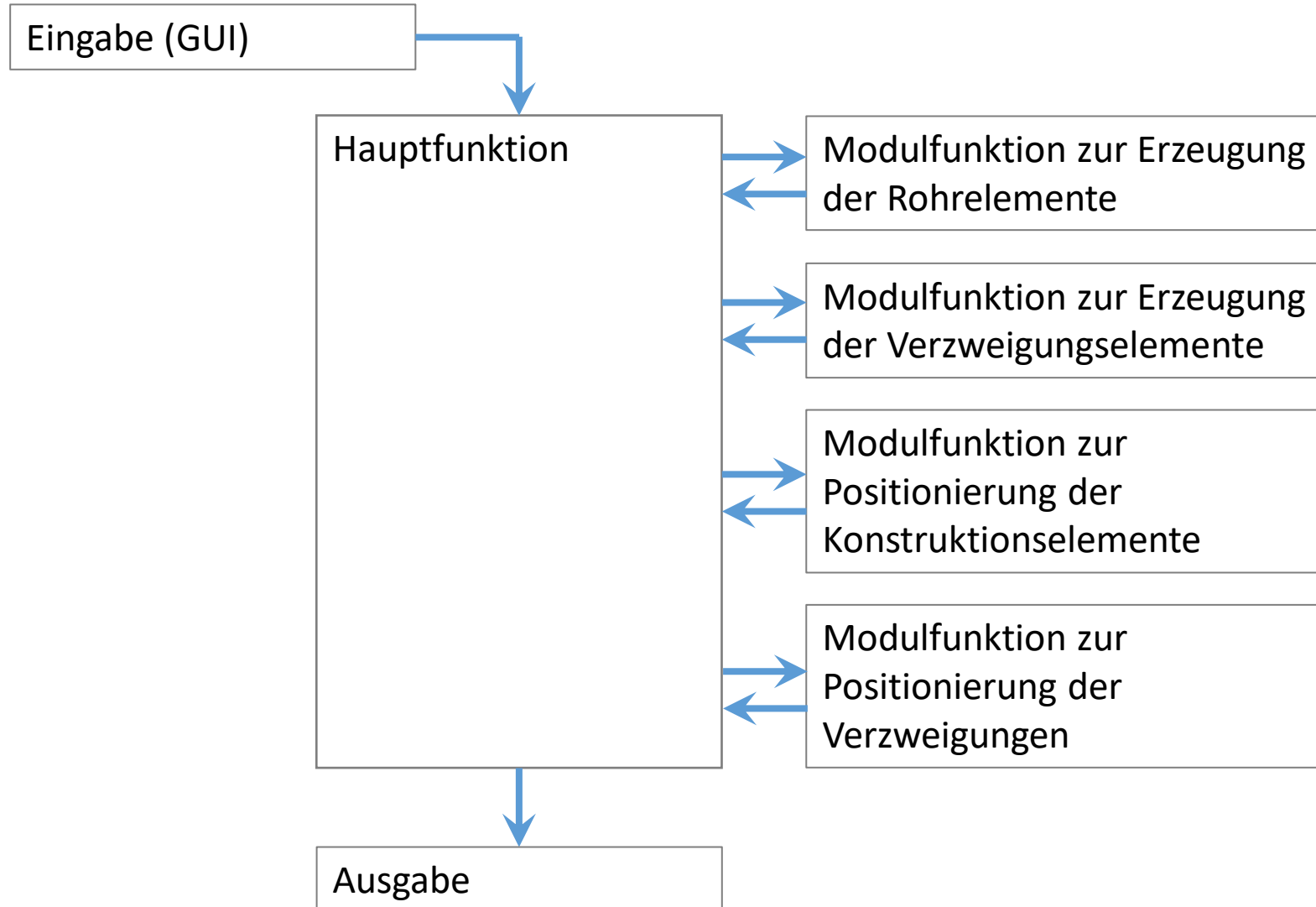


```

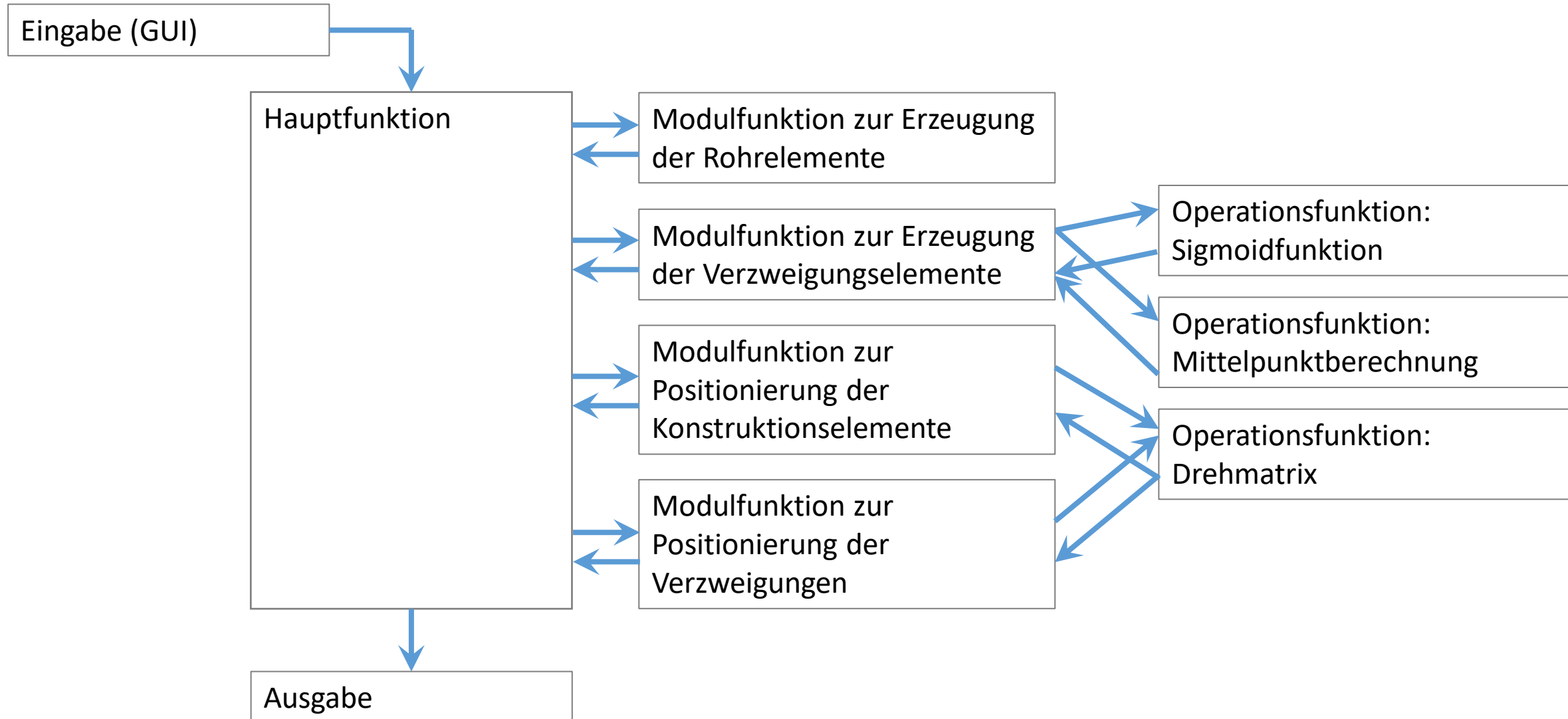
114 %% Bronchialbaummodell erzeugen
115 for g = 2 : Gen % Schleife über alle Generationen
116     Offset = 0; % Schleife über alle Verzweigungen einer Generation
117     for v = 1 : n_VZW % Schleife über alle Tochteräste einer Verzweigung
118         for t = 1 : size(D{g-1,v},1)
119             %% Anpassung von Geometrieparametern
120             if Eingabemodus == 'a' % Falls der stochastische Erzeugungsprozess zur I
121                 [D{g,Offset + t},L{g,Offset + t},Alpha{g,Offset + t},Beta{g,Offset +
122                     Alpha{g,Offset + t} = [zeros(size(Alpha{g,Offset + t},1),1),Alpha{g,C
123                     elseif Eingabemodus == 'm' % Falls der manuelle Eingabemodus verwendet
124                         if Param_VE{1}{6} == true
125                             Param_VE{1} = {0,0,0,Param_VE{1,1}{7}*BL{g,Offset + t}./Alpha{g,C
126                             L{g,Offset + t} = Param_VE{1,1}{7}*BL{g,Offset + t};
127                         end
128                     elseif Eingabemodus == 'w' % Falls die Wandstärke konstruiert wird, ...
129                         D_nenn = D{g,Offset + t};
130                         D{g,Offset + t} = D{g,Offset + t} + ones(size(D{g,Offset + t},1),1)*2
131                         Param_VE{1} = {0,0,0,M_K_WS{g,Offset + t}(2:end,1),0}; % Konstruktiv
132                         % Carinalverrundungsparameter sowohl für den Durchmesser als auch für
133                         % des Mutterastes durch Wandstärke abhängig machen. => Außenwand führt
134                         if Param_WS(4) == 1
135                             Param_VE{2} = [sum(D_nenn)^2/(sum(D{g,Offset + t})^2)*Param_VE2_r
136                                 sum(D_nenn)^2/(sum(D{g,Offset + t})^2)*Param_VE2_nenn(2), ...
137                                 Param_VE2_nenn(3)]; % Breite der Carinalkurve bleibt unveränd
138                         end
139                     end
140
141             %% Haltestelle
142             Halt = 1;
143
144             %% Erzeugung des Verzweigungselementes
145             [P_VZW,M_RE{1},M_K{g,Offset + t}] = FNC_Erzeugung_VE([D{g-1,v}(t);D{g,Off
146             M_RE{1} = M_RE{1}(2:end,:); % Anpassung des Variablenformats: Löschen de
147
148             %% Erzeugung der Rohrelemente
149             P_RE = zeros(N(1)*N(2),3,size(D{g,Offset + t},1));
150             for r = 1 : size(D{g,Offset + t},1)
151                 P_RE(:,r) = FNC_Erzeugung_RE(N(1),N(2),L{g,Offset + t}(r),D{g,Offse
152             end
153
154             %% Bestimmung der lokalen Anschlussmittelpunkte

```

Programmstruktur



Programmstruktur



Ausgabe

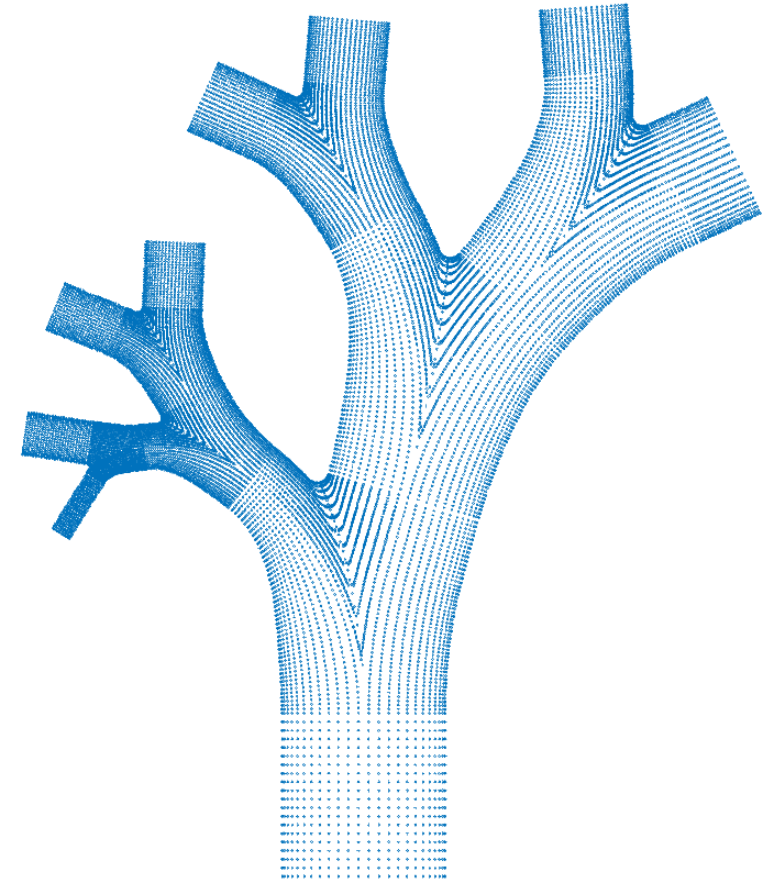
Punktkoordinaten

X	y	Z
5.5109106e-16	9.0000000e+00	-8.9772727e+00
-5.6511468e-01	8.9822406e+00	-8.9772727e+00
-1.1279991e+00	8.9290323e+00	-8.9772727e+00
-1.6864318e+00	8.8405853e+00	-8.9772727e+00
-2.2382090e+00	8.7172485e+00	-8.9772727e+00
-2.7811529e+00	8.5595086e+00	-8.9772727e+00
-3.3131210e+00	8.3679884e+00	-8.9772727e+00
-3.8320136e+00	8.1434435e+00	-8.9772727e+00
-4.3357831e+00	7.8867601e+00	-8.9772727e+00
-4.8224412e+00	7.5989513e+00	-8.9772727e+00
-5.2900673e+00	7.2811529e+00	-8.9772727e+00
-5.7368159e+00	6.9346192e+00	-8.9772727e+00
-6.1609240e+00	6.5607176e+00	-8.9772727e+00
-6.5607176e+00	6.1609240e+00	-8.9772727e+00
-6.9346192e+00	5.7368159e+00	-8.9772727e+00
-7.2811529e+00	5.2900673e+00	-8.9772727e+00
-7.5989513e+00	4.8224412e+00	-8.9772727e+00
-7.8867601e+00	4.3357831e+00	-8.9772727e+00
-8.1434435e+00	3.8320136e+00	-8.9772727e+00
-8.3679884e+00	3.3131210e+00	-8.9772727e+00
-8.5595086e+00	2.7811529e+00	-8.9772727e+00
-8.7172485e+00	2.2382090e+00	-8.9772727e+00
-8.8405853e+00	1.6864318e+00	-8.9772727e+00
-8.9290323e+00	1.1279991e+00	-8.9772727e+00
-8.9822406e+00	5.6511468e-01	-8.9772727e+00
-9.0000000e+00	1.021821e-15	-8.9772727e+00
-8.9822406e+00	-5.6511468e-01	-8.9772727e+00
-8.9290323e+00	-1.1279991e+00	-8.9772727e+00
-8.8405853e+00	-1.6864318e+00	-8.9772727e+00
-8.7172485e+00	-2.2382090e+00	-8.9772727e+00
-8.5595086e+00	-2.7811529e+00	-8.9772727e+00
-8.3679884e+00	-3.3131210e+00	-8.9772727e+00
-8.1434435e+00	-3.8320136e+00	-8.9772727e+00
-7.8867601e+00	-4.3357831e+00	-8.9772727e+00
-7.5989513e+00	-4.8224412e+00	-8.9772727e+00
-7.2811529e+00	-5.2900673e+00	-8.9772727e+00

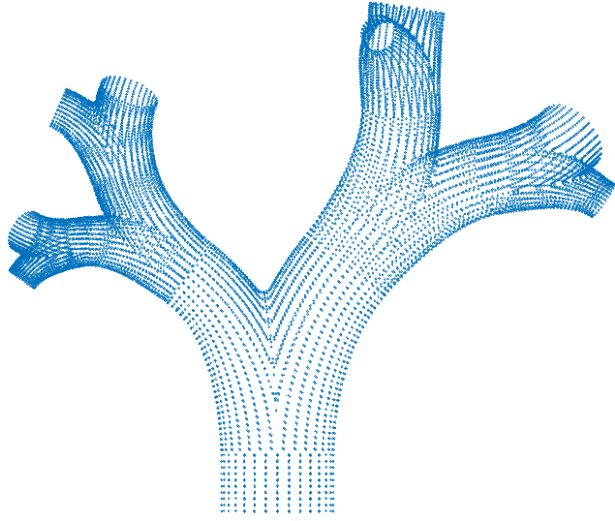
Matlab-Variablen

Name ▲	Value
Alpha	4x4 cell
Beta	4x4 cell
BL	4x1 cell
D	4x4 cell
Eingabemodus	'a'
empty	4x4 logical
g	4
Gen	4
i	8
L	4x4 cell
M	4x4 cell
M_K	4x4 cell
M_RE	2x1 cell
M_REx	4x3 double
ME	[10,10]
N	[50,6,20,3]
n_VZW	4
Offset	4
P	45897x3 double
P_AE	1250x3 double
P_Gruppe	4951x3 double
P_RE	300x3x2 double
P_VZW	4351x3 double
Param_Modell	2
Param_PP	1x6 cell
Param_RE	4x1 cell
Param_VE	3x1 cell
Param_WS	[0,1,1,1]
r	2
s	2
t	2
tt	2
v	2

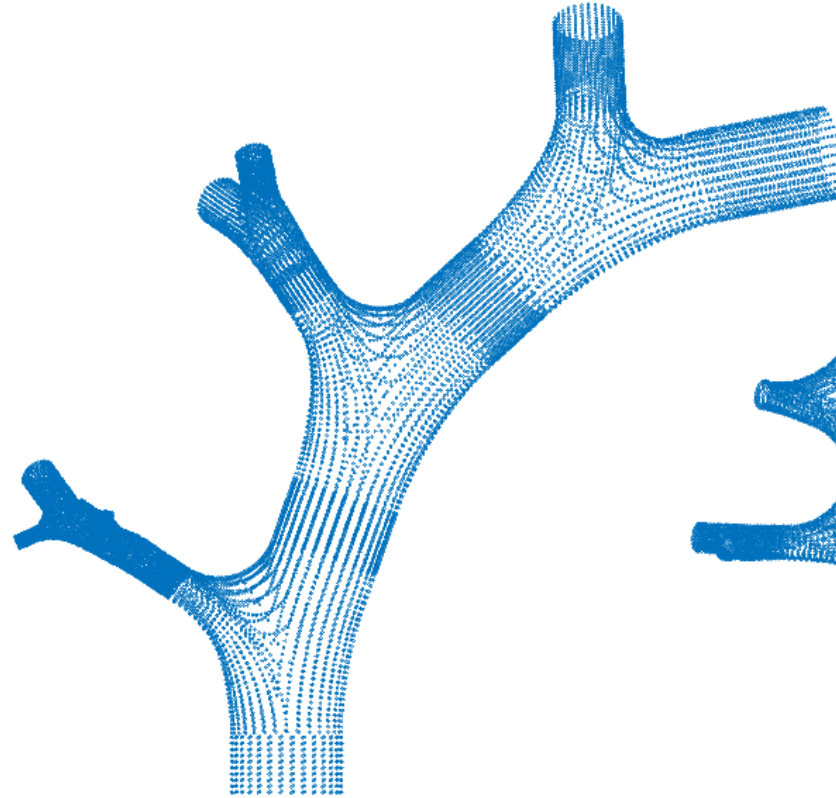
Plot des Ergebnisses



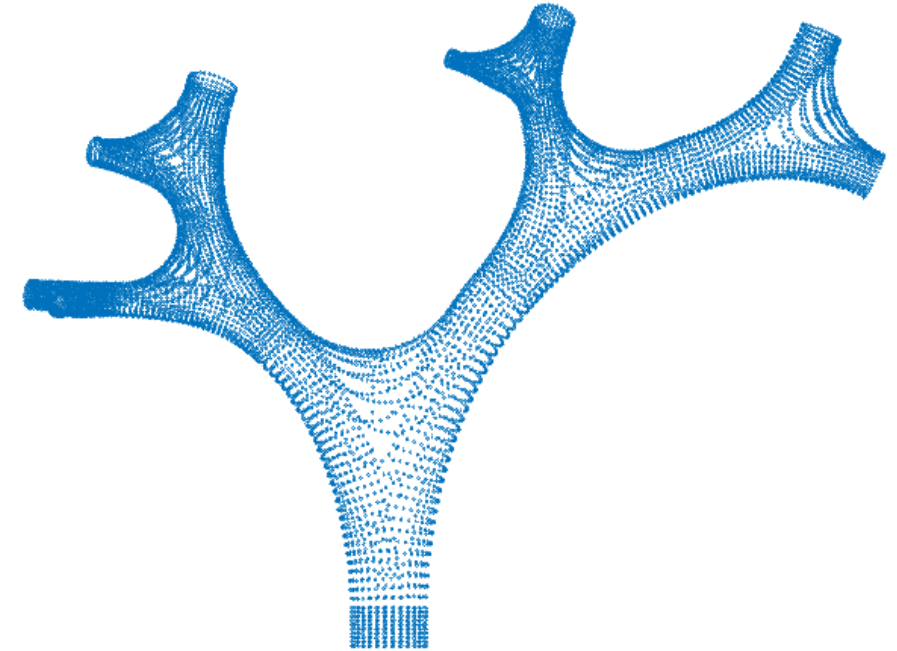
Variationsbreite und Parametrisierbarkeit



- kleine Carinalverrundung
- mittlere Krümmung
- kurze Rohrelemente

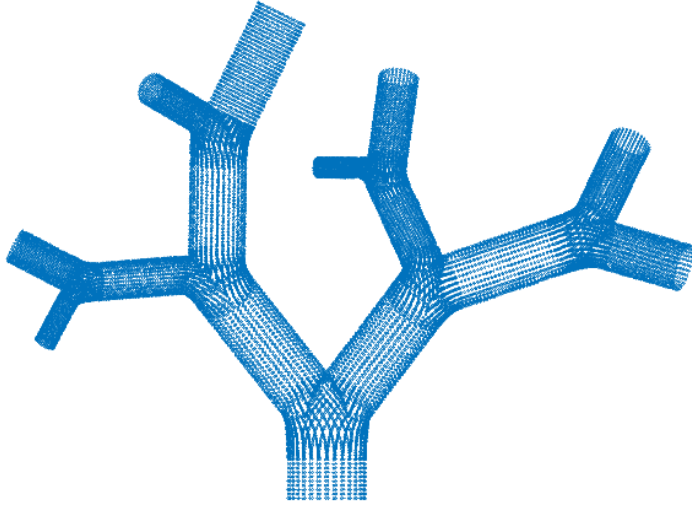


- mittlere Carinalverrundung
- mittlere Krümmung
- mittlere Rohrelemente

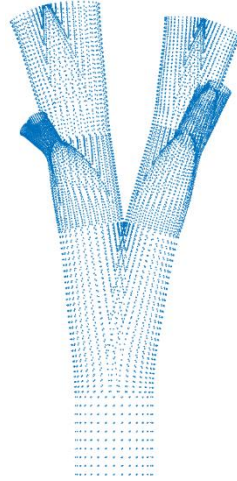


- große Carinalverrundung
- große Krümmung
- kurze Rohrelemente

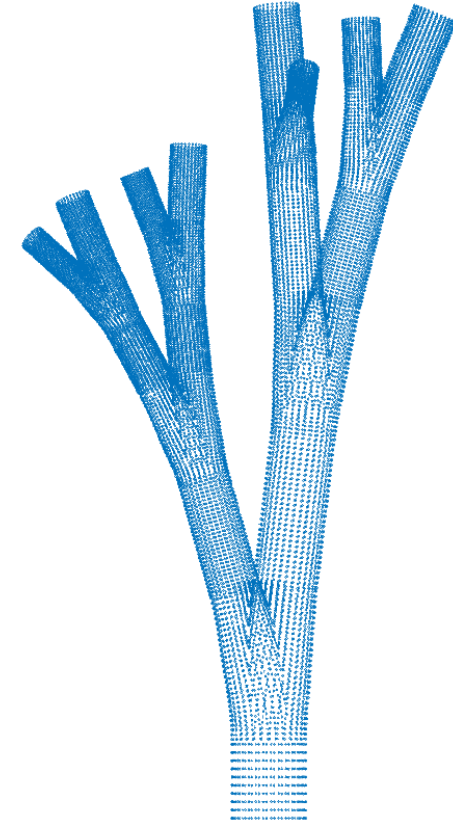
Variationsbreite und Parametrisierbarkeit



- große Verzweigungswinkel
- lange Rohrelemente



- kleine Verzweigungswinkel
- kurze Rohrelemente



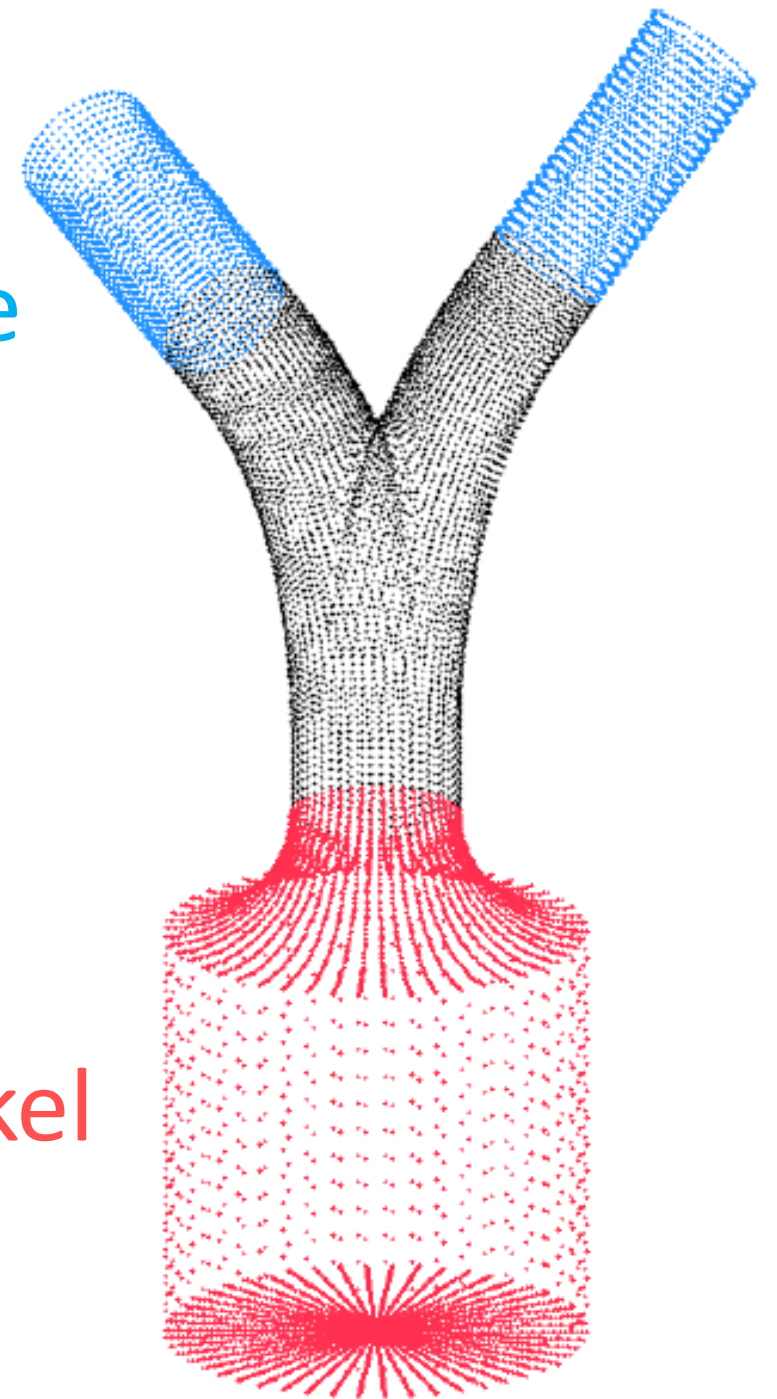
- kleine Verzweigungswinkel
- lange Rohrelemente

Erweiterung der Punktwolke

Endstücke

- Endstücke an allen terminalen Bronchien als gerade Zylinder
- Sockel vor der ersten Generation
- Wandstärke

Sockel



Gliederung

- Motivation
- Literaturrecherche
- Modellierung
- Implementierung des Modells
- **Weiterverarbeitung der Geometriedaten**
- Fertigung physikalischer Prototypen
- Zusammenfassung und Ausblick

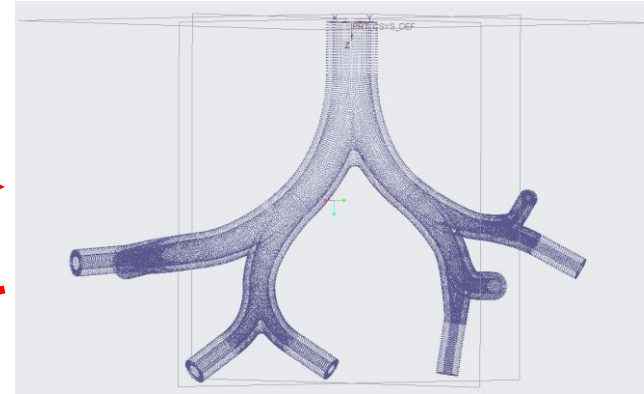
Überführung der Punktkoordinaten in ein Oberflächenmodell

9247864x3 double

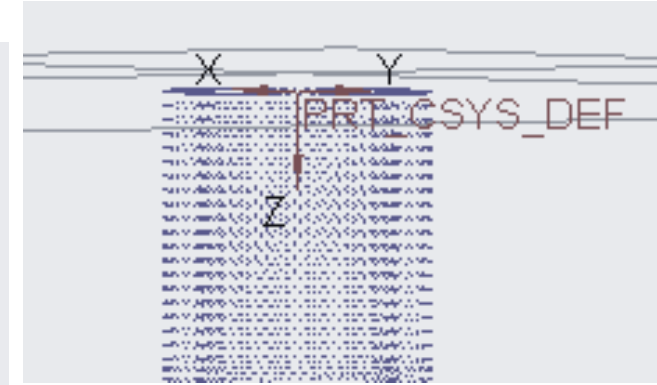
	1	2	3
3896187	-28.1077	-41.3004	62.3372
3896188	-28.1090	-41.4935	62.5385
3896189	-28.1105	-41.4866	62.5394
3896190	-28.1123	-41.4797	62.5401
3896191	-28.1144	-41.4729	62.5405
3896192	-28.1168	-41.4661	62.5406
3896193	-28.1195	-41.4595	62.5406
3896194	-28.1226	-41.4531	62.5403

Punktkoordinaten

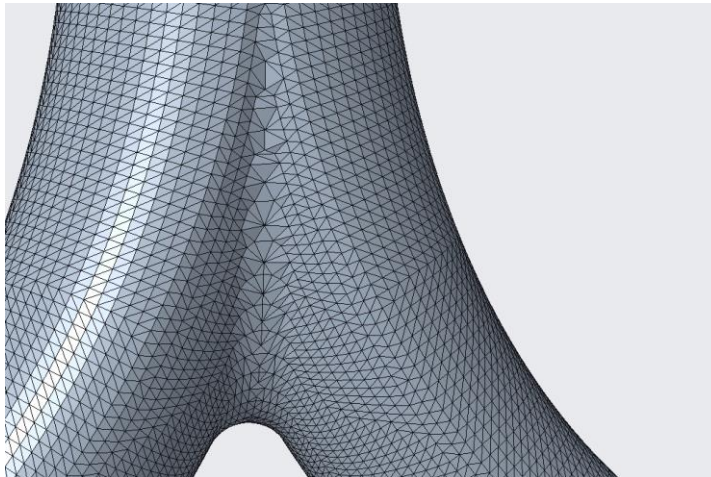
Datenimport



Punktewolke

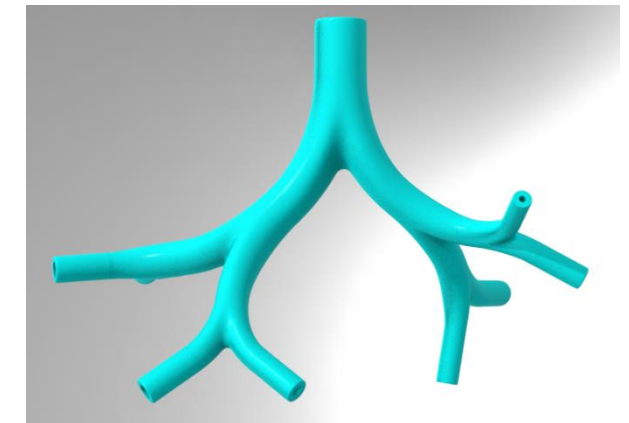


Triangulation



Einzelflächen

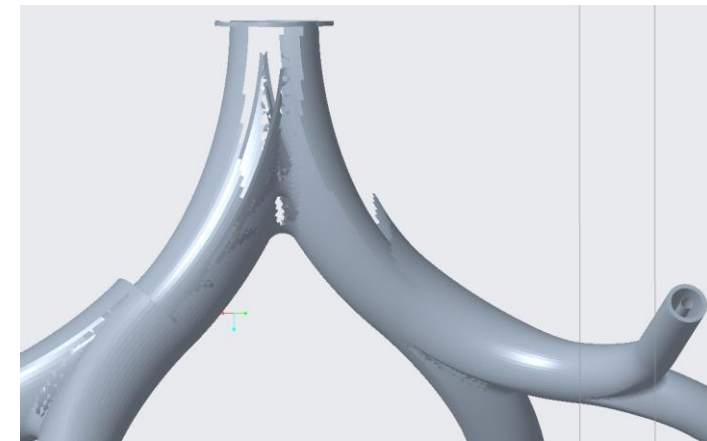
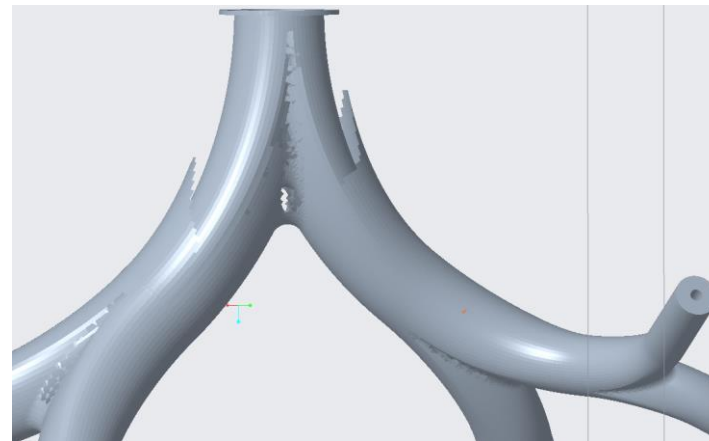
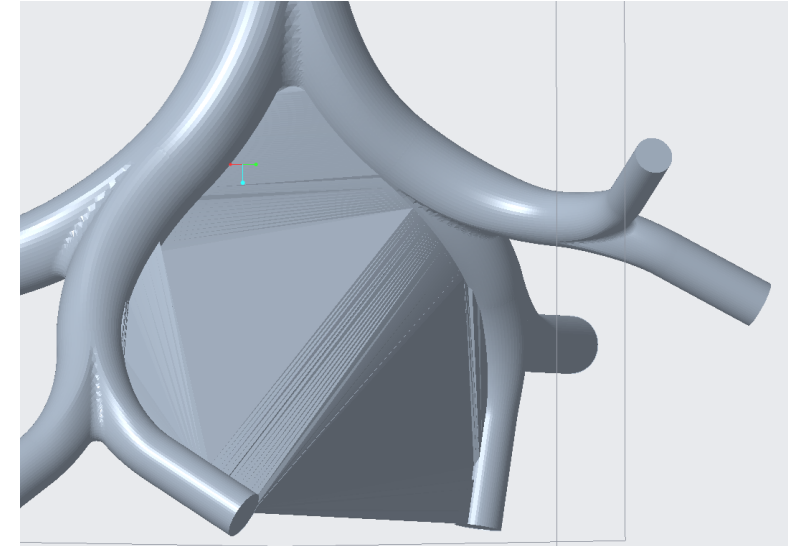
Schließen der
Oberflächen



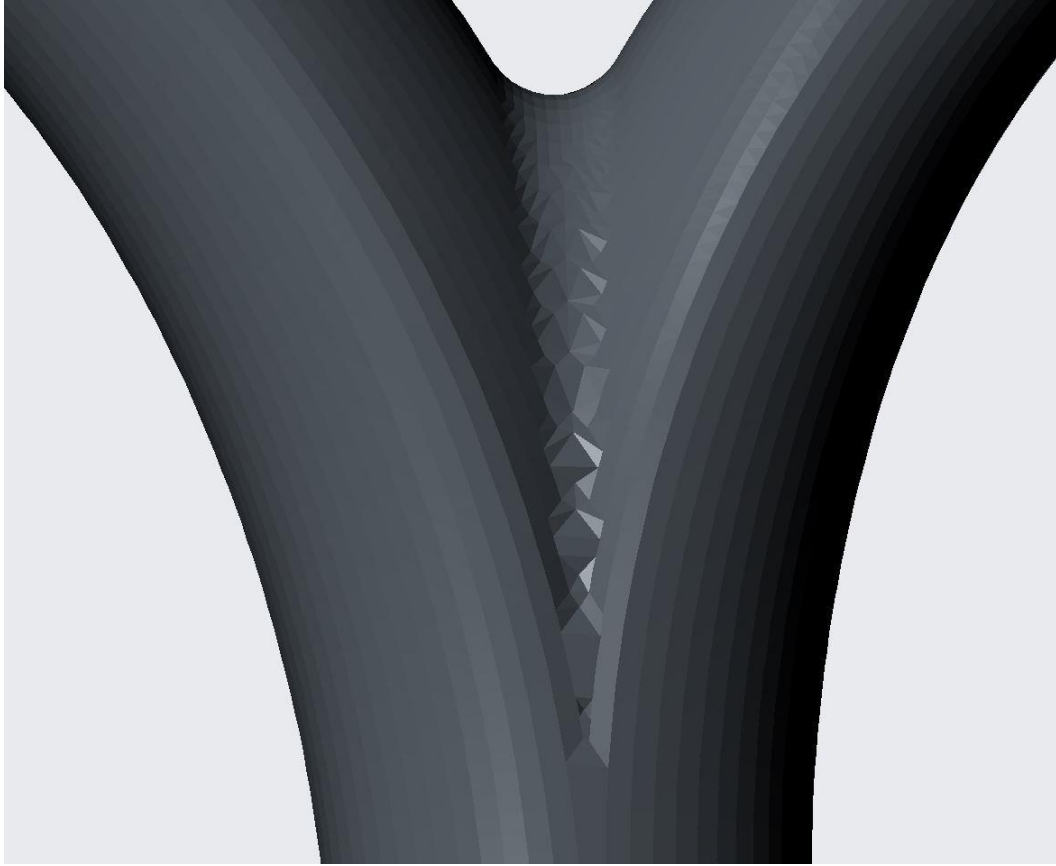
Oberflächenmodell

Oberflächenfehler bei der Triangulation

- Entfernen der „Schwimmhäute“
 - Löcher in der Oberfläche möglich
- ⇒ Auflösung der Punktwolke ist entscheidend für erfolgreiche Oberflächenbildung



Verfeinerung der Triangulation



Gliederung

- Motivation
- Literaturrecherche
- Modellierung
- Implementierung des Modells
- Weiterverarbeitung der Geometriedaten
- **Fertigung physikalischer Prototypen**
- Zusammenfassung und Ausblick

Fertigungsmethode und Werkstoff

- 3D-Druckverfahren
- Transparentes, elastisches Kunstharz
- 2 Prototypen gefertigt

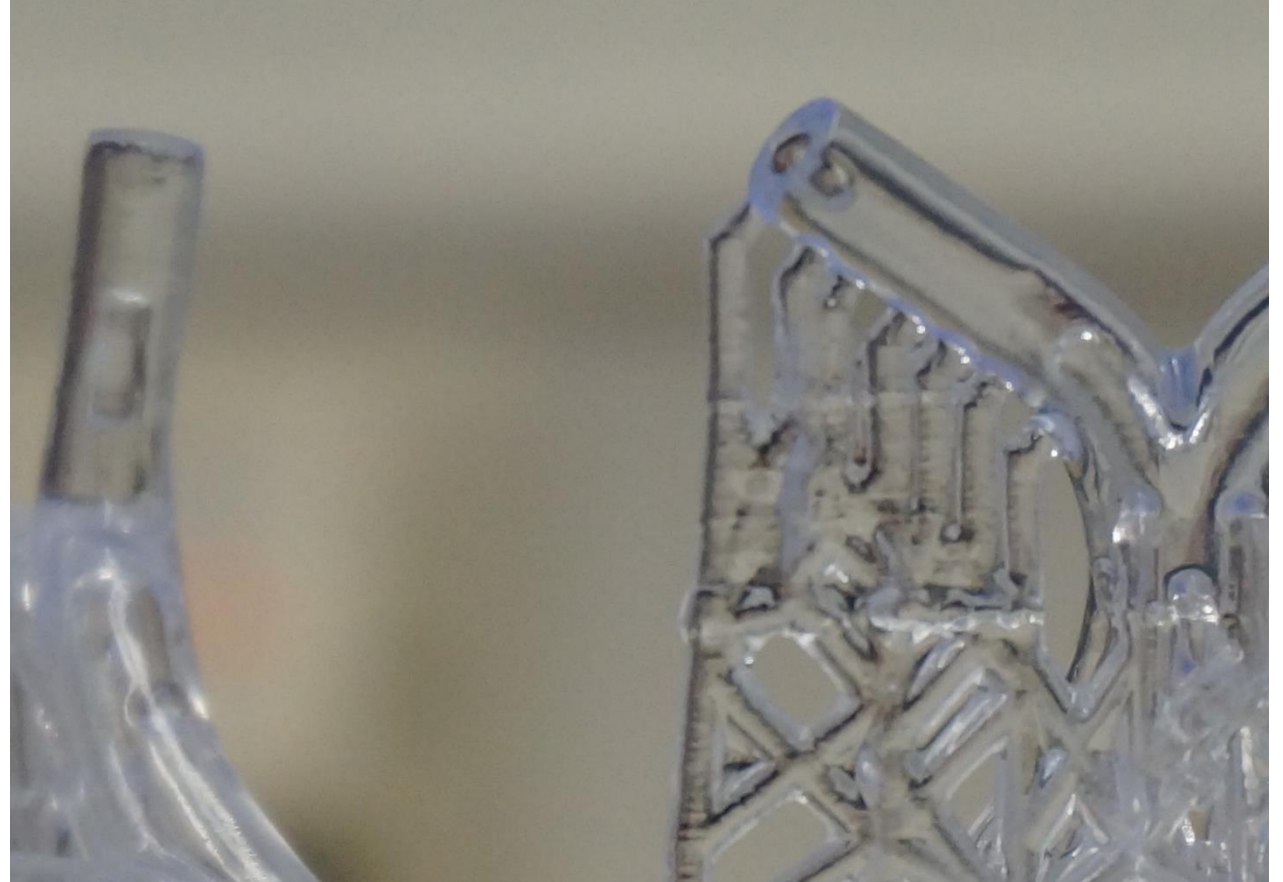
Fertigungsschritte

- Druck
- Reinigen des Werkstücks
- Entfernen der Stützstruktur
- Aushärten
- Sichtprüfung des Werkstücks
- Prüfung der Maßtreue



Fertigungsschritte

- Druck
- Reinigen des Werkstücks
- Entfernen der Stützstruktur
- Aushärten
- Sichtprüfung des Werkstücks
- Prüfung der Maßtreue



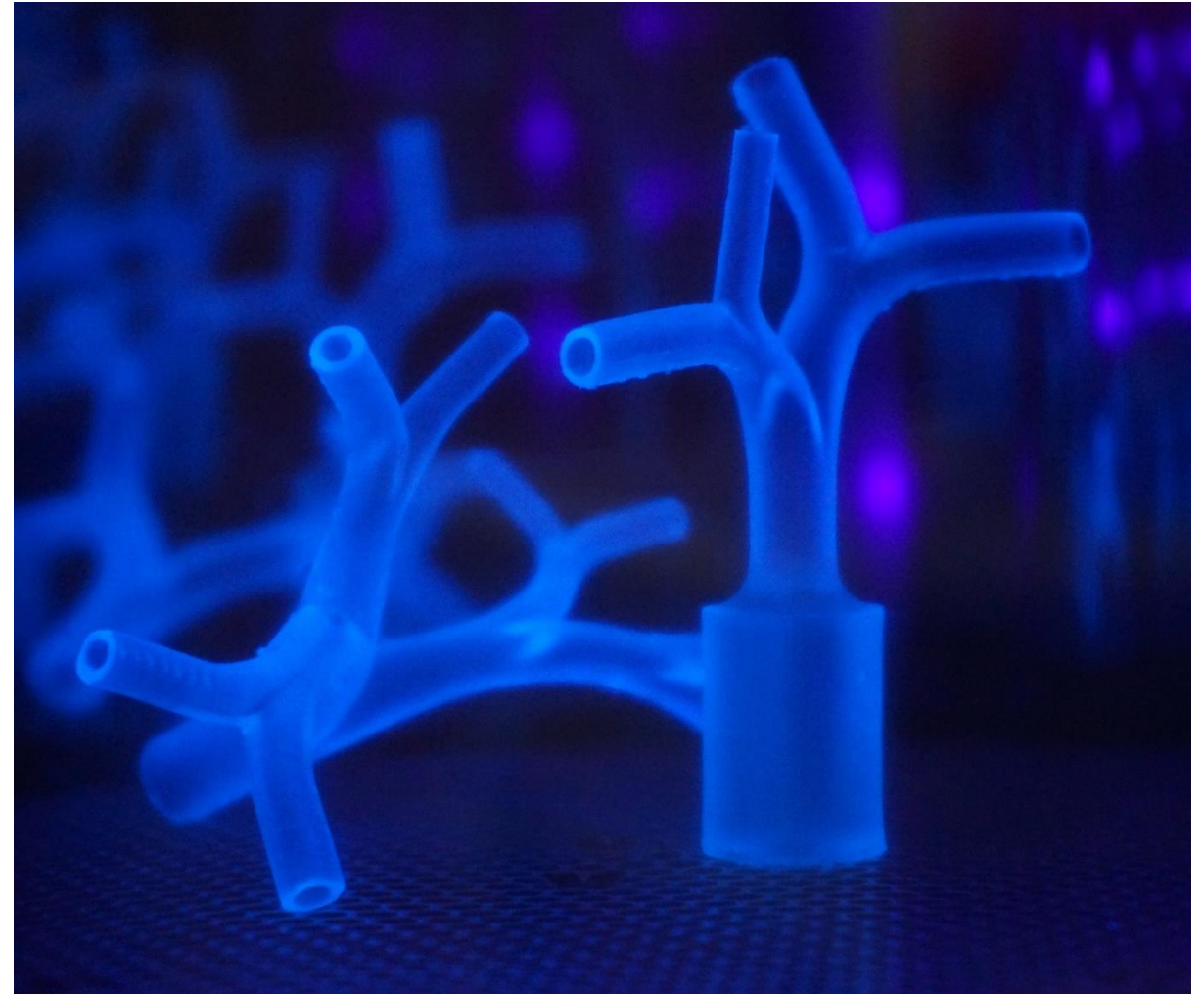
Fertigungsschritte

- Druck
- Reinigen des Werkstücks
- **Entfernen der Stützstruktur**
- Aushärten
- Sichtprüfung des Werkstücks
- Prüfung der Maßtreue



Fertigungsschritte

- Druck
- Reinigen des Werkstücks
- Entfernen der Stützstruktur
- **Aushärten**
- Sichtprüfung des Werkstücks
- Prüfung der Maßtreue



UV-Licht bei 60 °C

Fertigungsschritte

- Druck
- Reinigen des Werkstücks
- Entfernen der Stützstruktur
- Aushärten
- Sichtprüfung der Werkstücke
- Prüfung der Maßtreue



Gliederung

- Motivation
- Literaturrecherche
- Modellierung
- Implementierung des Modells
- Weiterverarbeitung der Geometriedaten
- Fertigung physikalischer Prototypen
- **Zusammenfassung und Ausblick**

Zusammenfassung

- Geometrisches Modell
- Implementierung einer automatisierten Modellkonstruktion
- Weiterverarbeitung der Punktwolke
- Fertigung eines physikalischen Modells

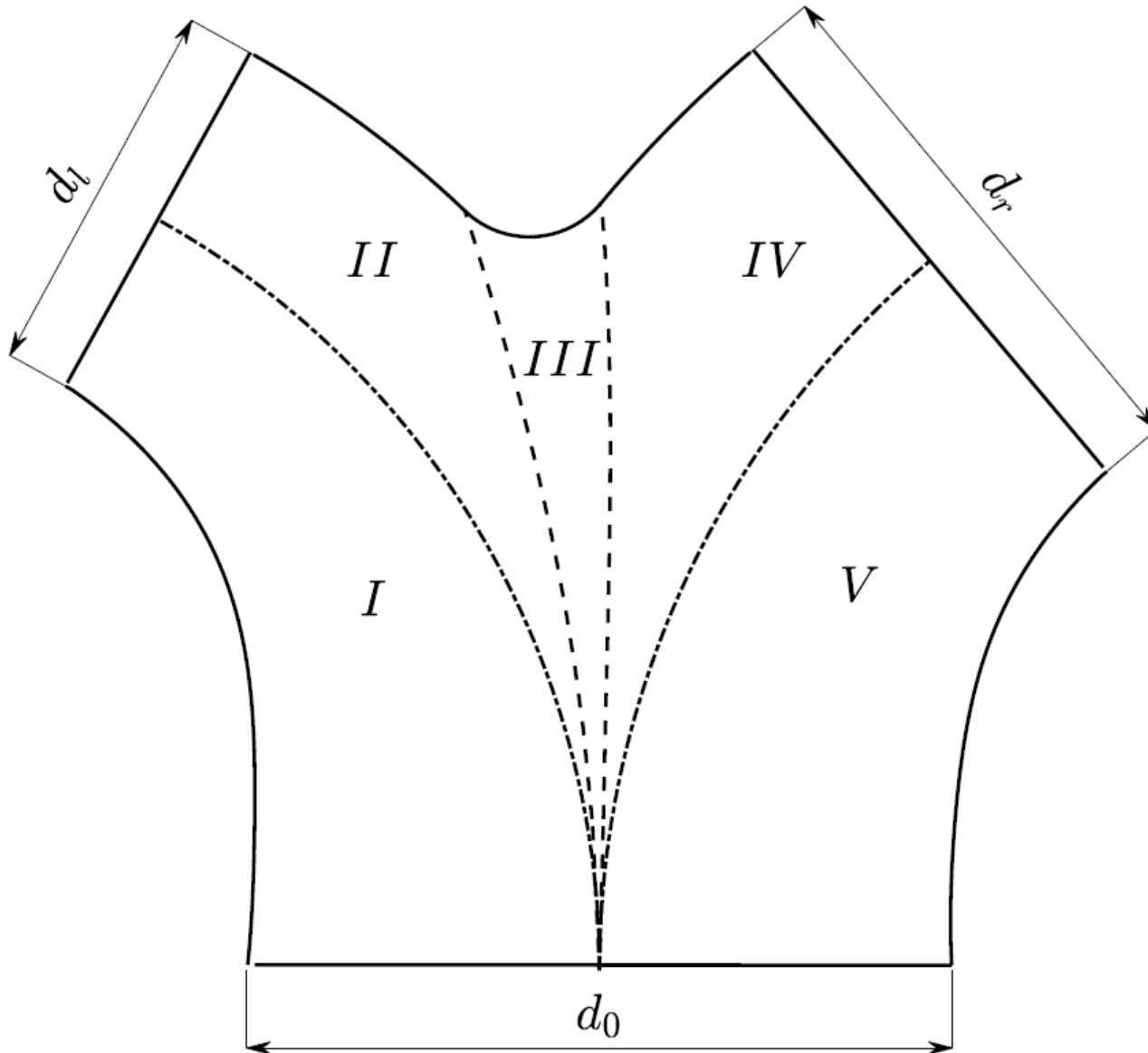
Ausblick

- Kollisionsdetektion
 - ⇒ Berechnung einer optimalen Zentralachse
- Endstücke
 - ⇒ Trompetenform, Glockenform
 - ⇒ Flansche zur Fertigung großer Bronchialbäume
- Fertigungsmethode verbessern
- Validierung
 - ⇒ Auswirkung der Carinalverrundung
 - ⇒ Abgleich des Modells mit Messdaten realer Bronchialbäume



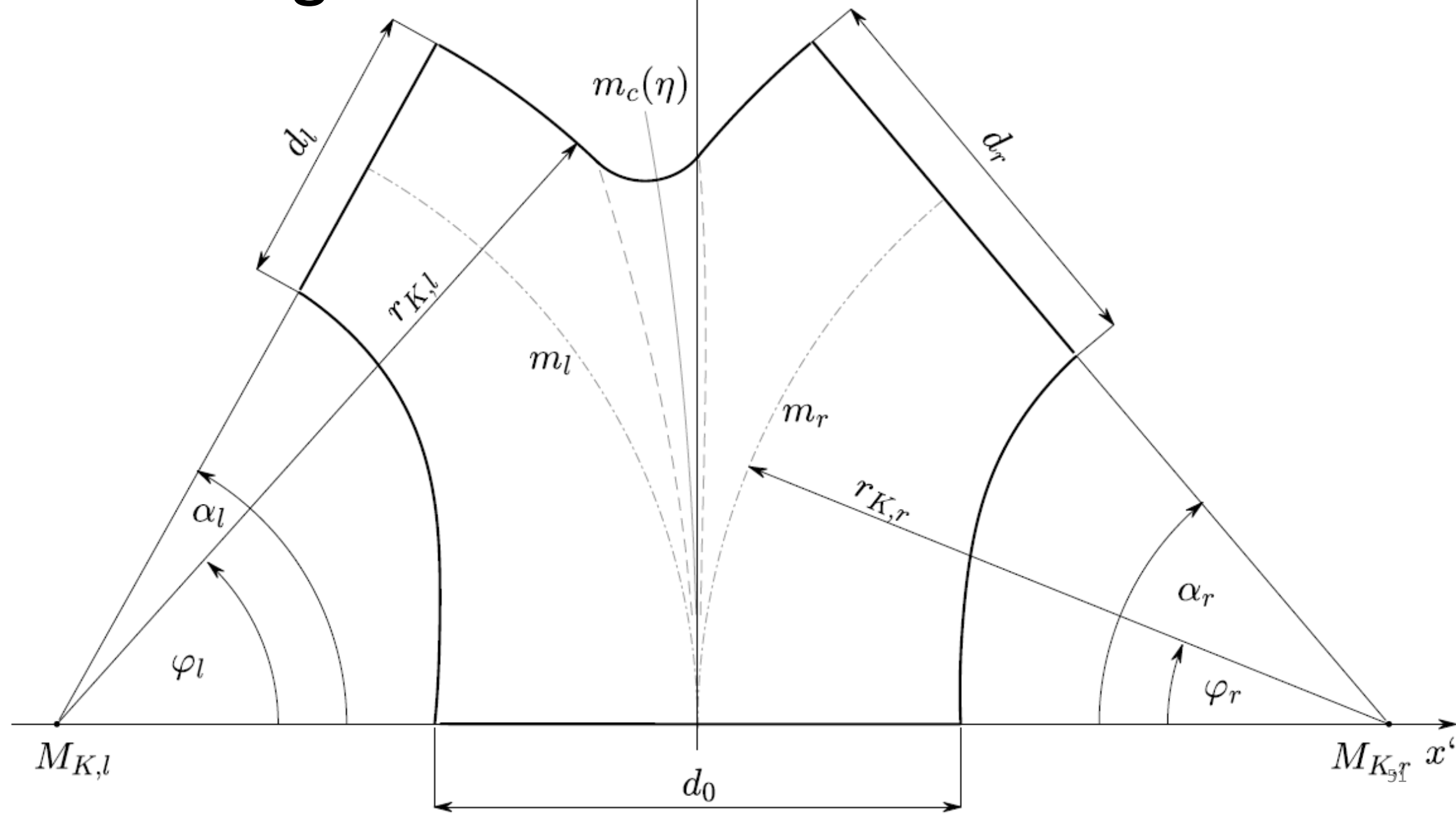
Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Teilflächen

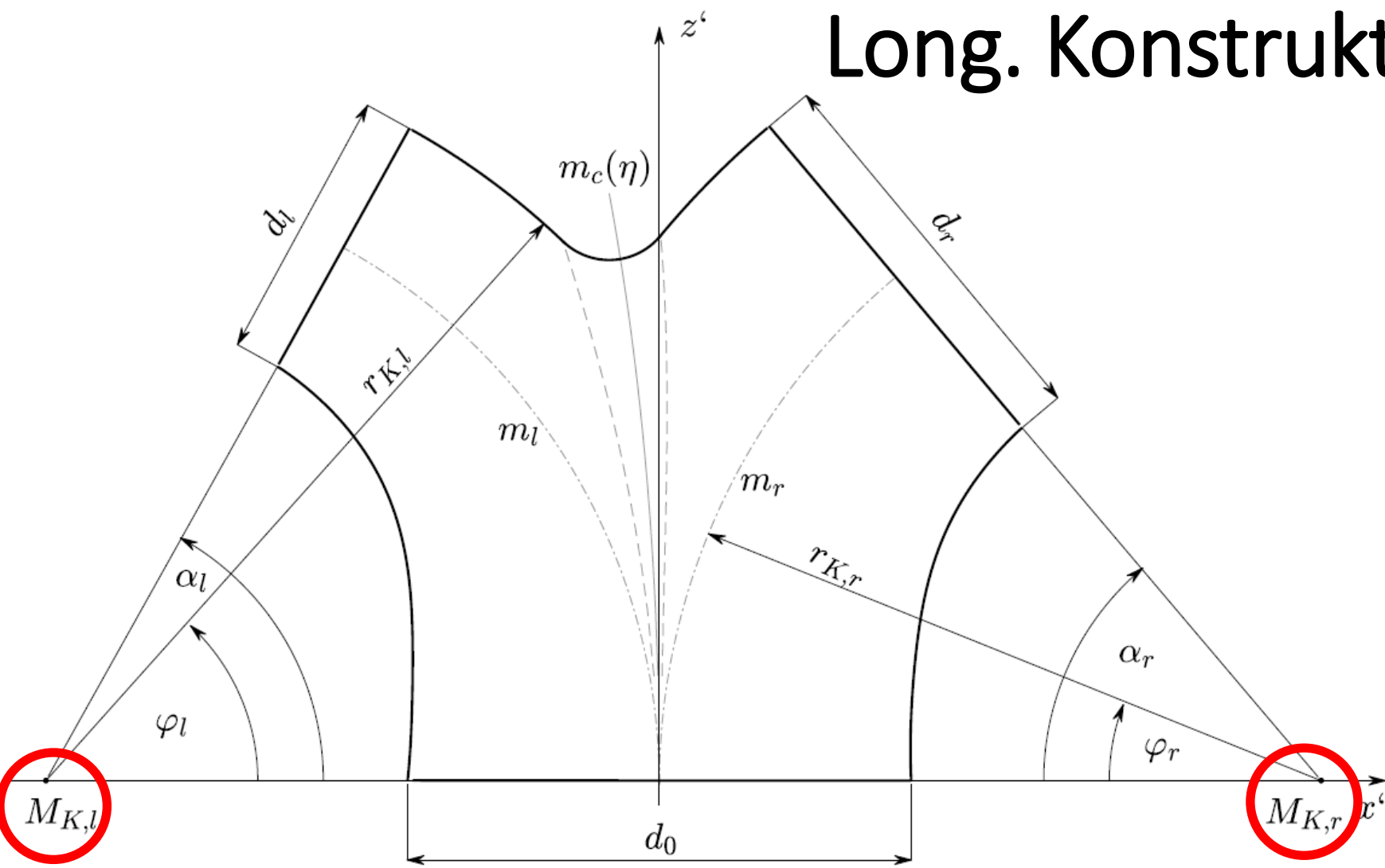


- I: rechte Außenfläche
- II: linke Innenfläche
- III: Carinalfläche
- IV: rechte Innenfläche
- V: rechte Außenfläche

Modellierungsansatz

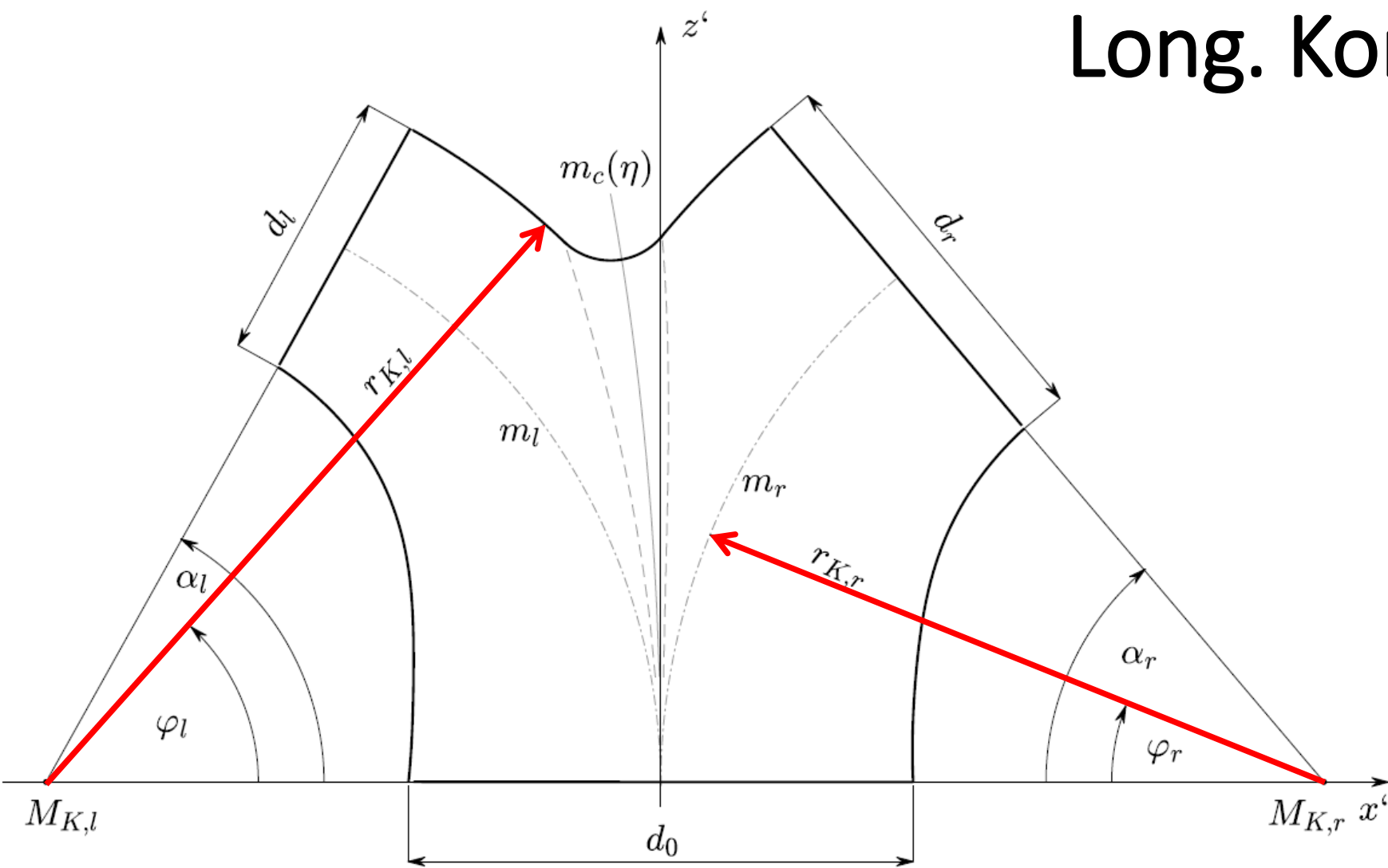


Long. Konstruktionsmittelpunkte



$$M_{K,i} = \begin{bmatrix} (\tau_{M,1} \cdot d_i^{\tau_{M,2}} + \tau_{M,3} \cdot d_i + \tau_{M,4} + \tau_{M,5} \cdot d_0) \cdot \operatorname{sgn}(\alpha_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

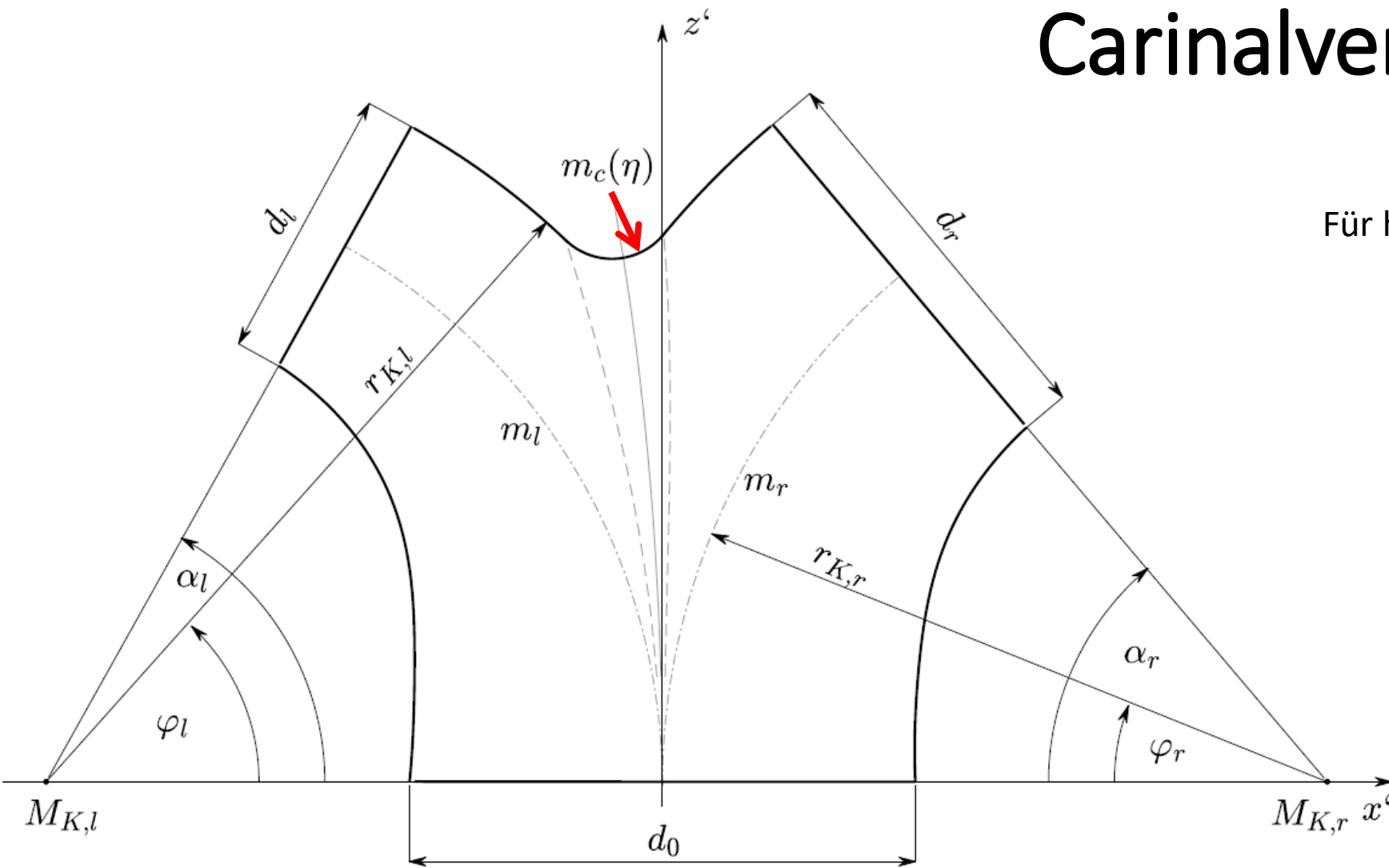
Long. Konstruktionsradien



$$r_{K,i}(\eta) = \left| |M_{K,i,x'}| + \sin(\eta) \cdot \frac{d_i}{2} \right|$$

Carinalverrundungs-Radius

Für h vgl. Folie 21



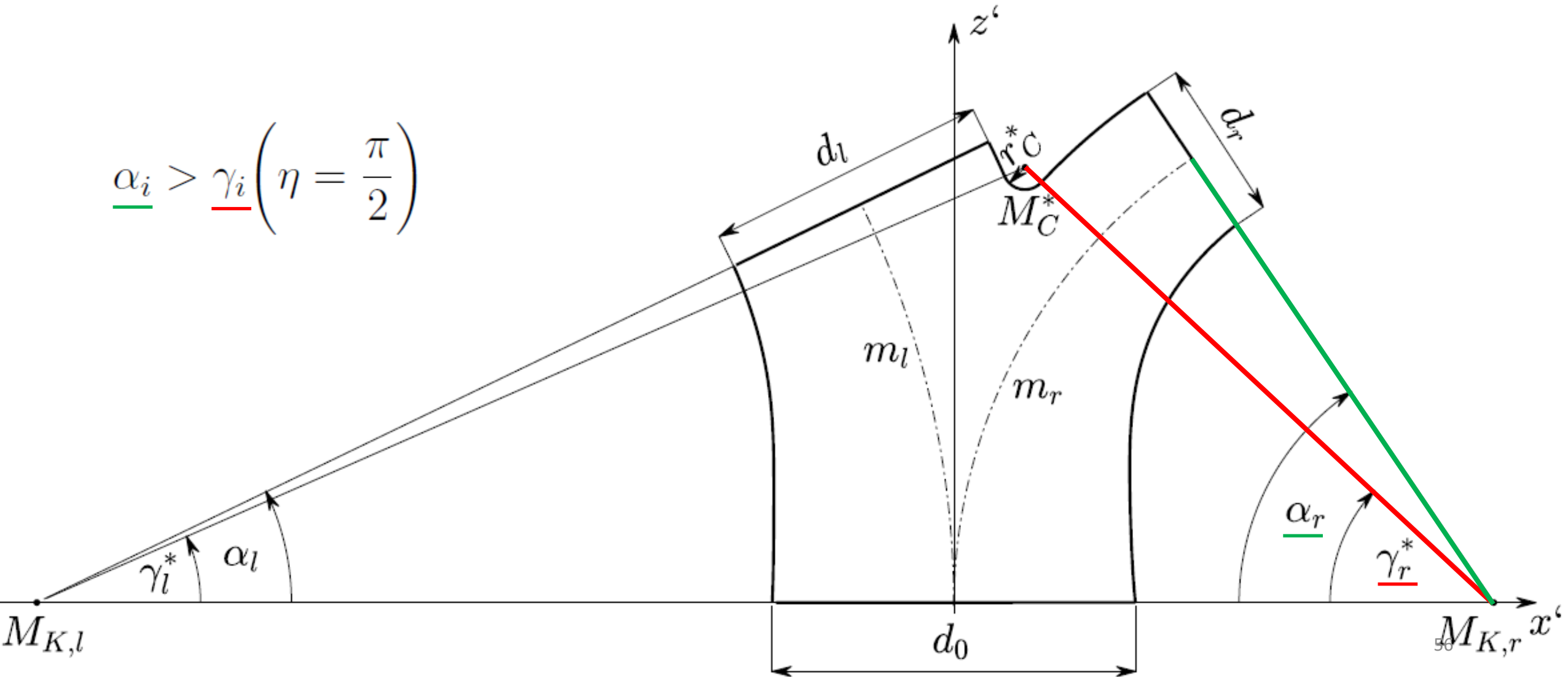
$$r_C(\eta) = \sin(\eta) \cdot (\tau_{C,1} \cdot (d_r + d_l) + \tau_{C,2} \cdot (\alpha_r + \alpha_l))$$

Fallunterscheidung: VE-Typ

Fallunterscheidung: Verzweigungselementtypen

VE-Typ 1

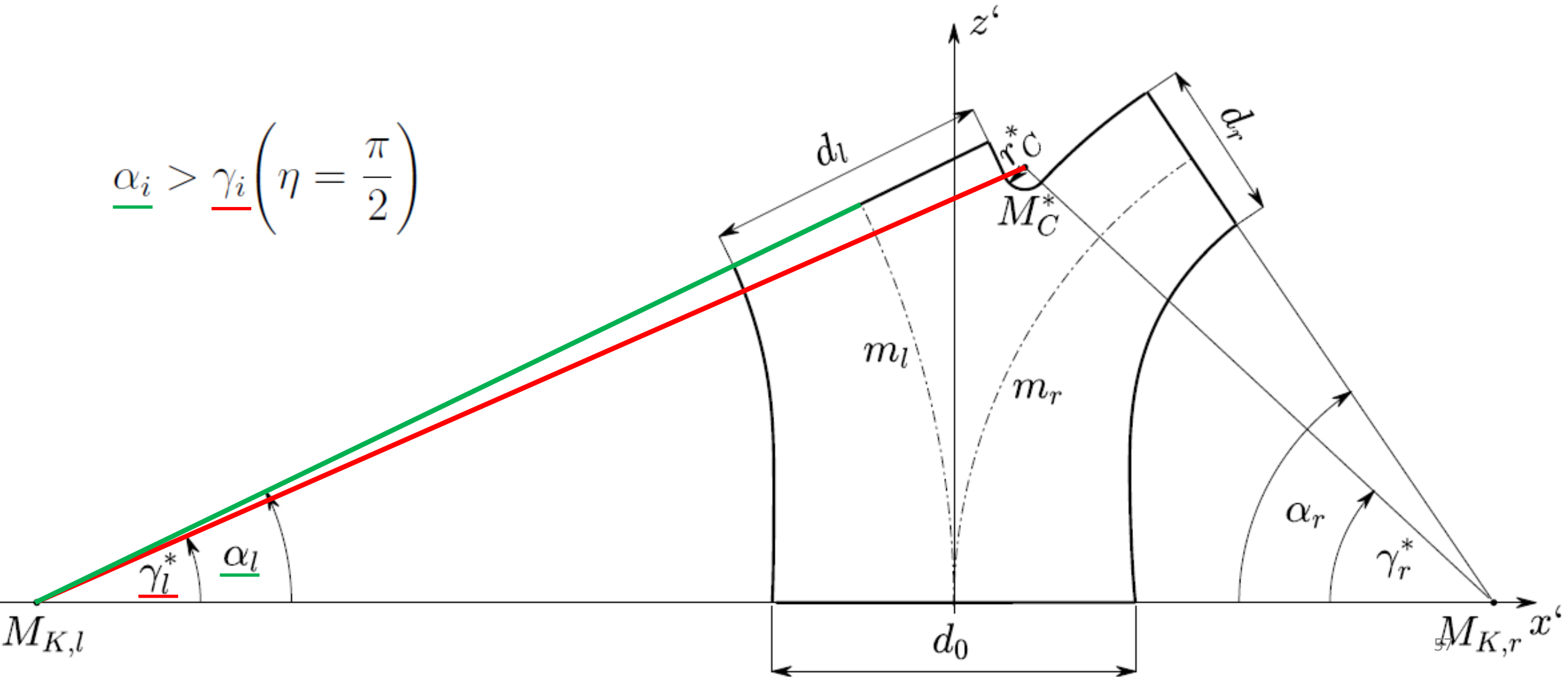
$$\underline{\alpha_i} > \underline{\gamma_i} \left(\eta = \frac{\pi}{2} \right)$$



Fallunterscheidung: Verzweigungselementtypen

VE-Typ 1

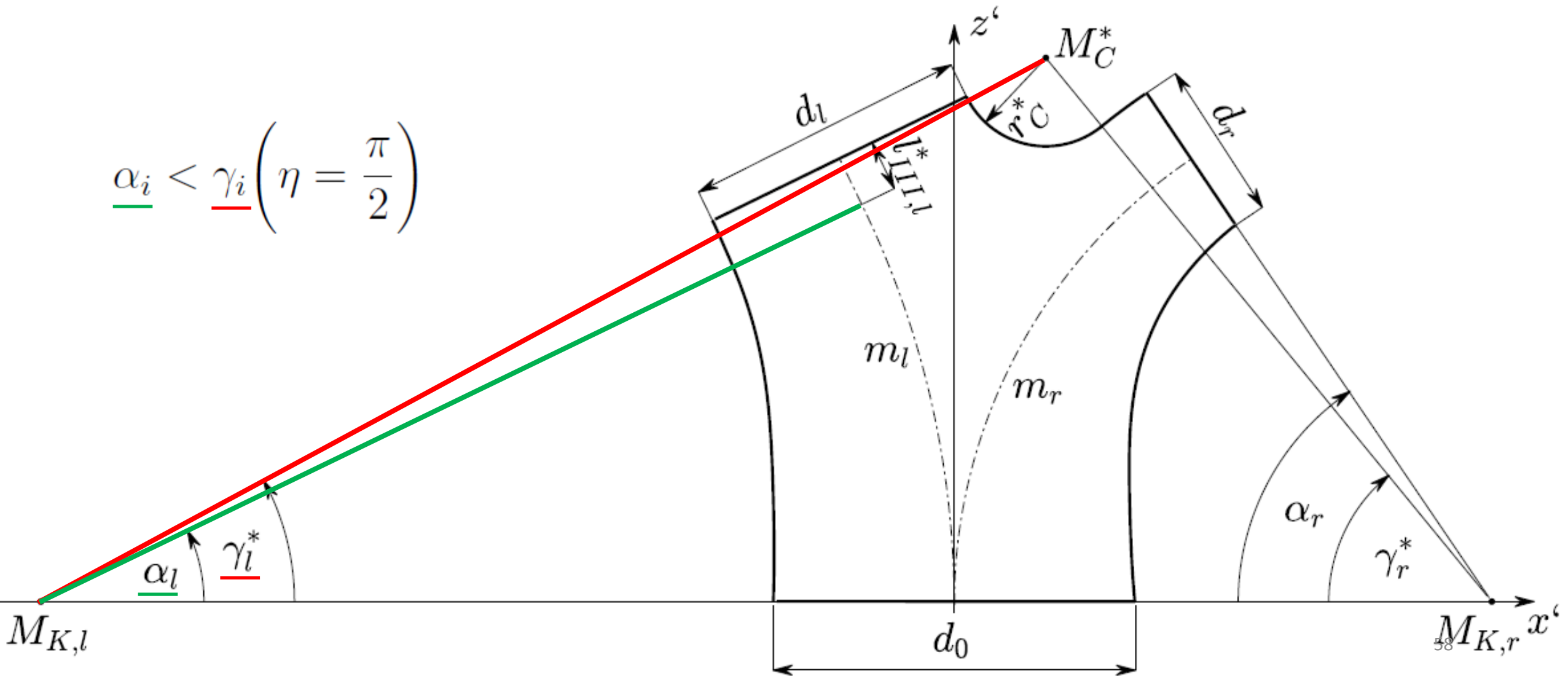
$$\underline{\alpha_i} > \underline{\gamma_i} \left(\eta = \frac{\pi}{2} \right)$$



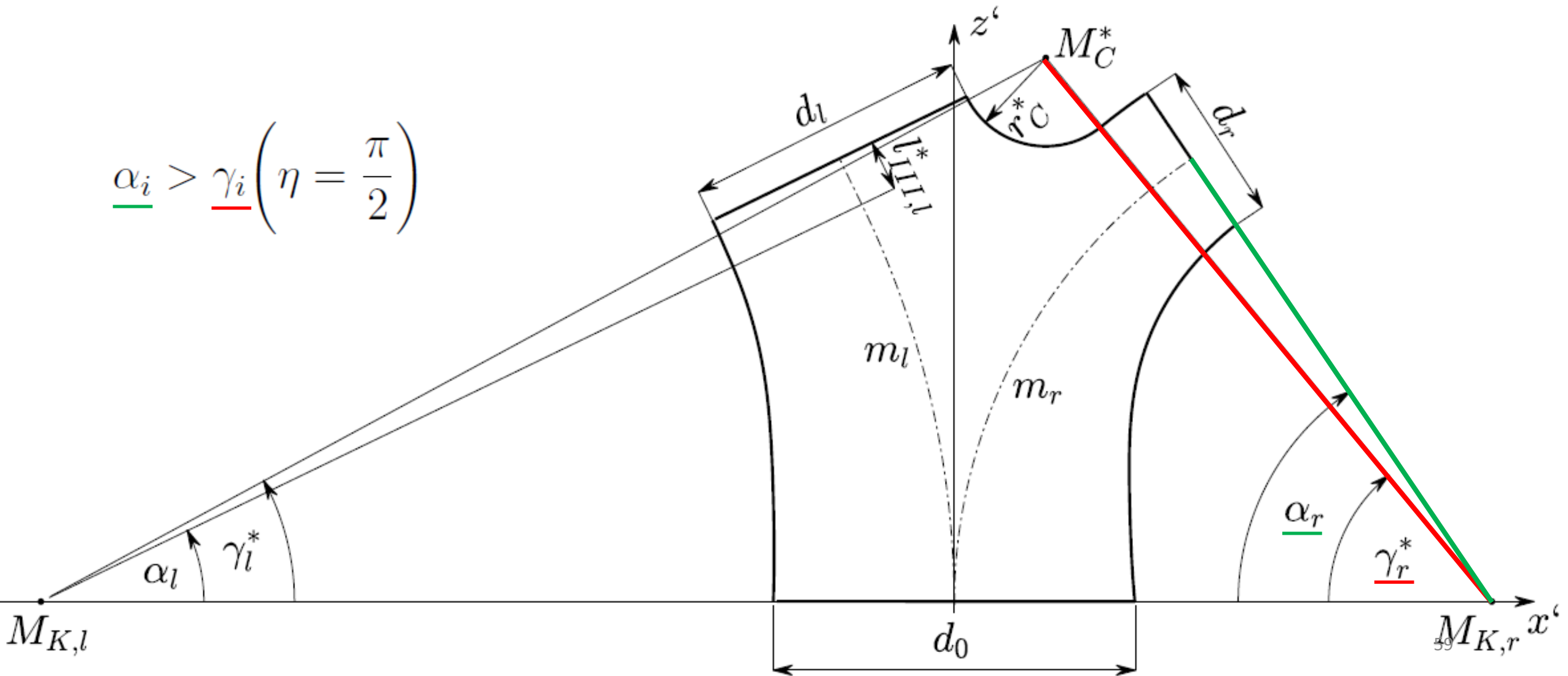
Fallunterscheidung: Verzweigungselementtypen

VE-Typ 2

$$\underline{\alpha_i} < \underline{\gamma_i} \left(\eta = \frac{\pi}{2} \right)$$



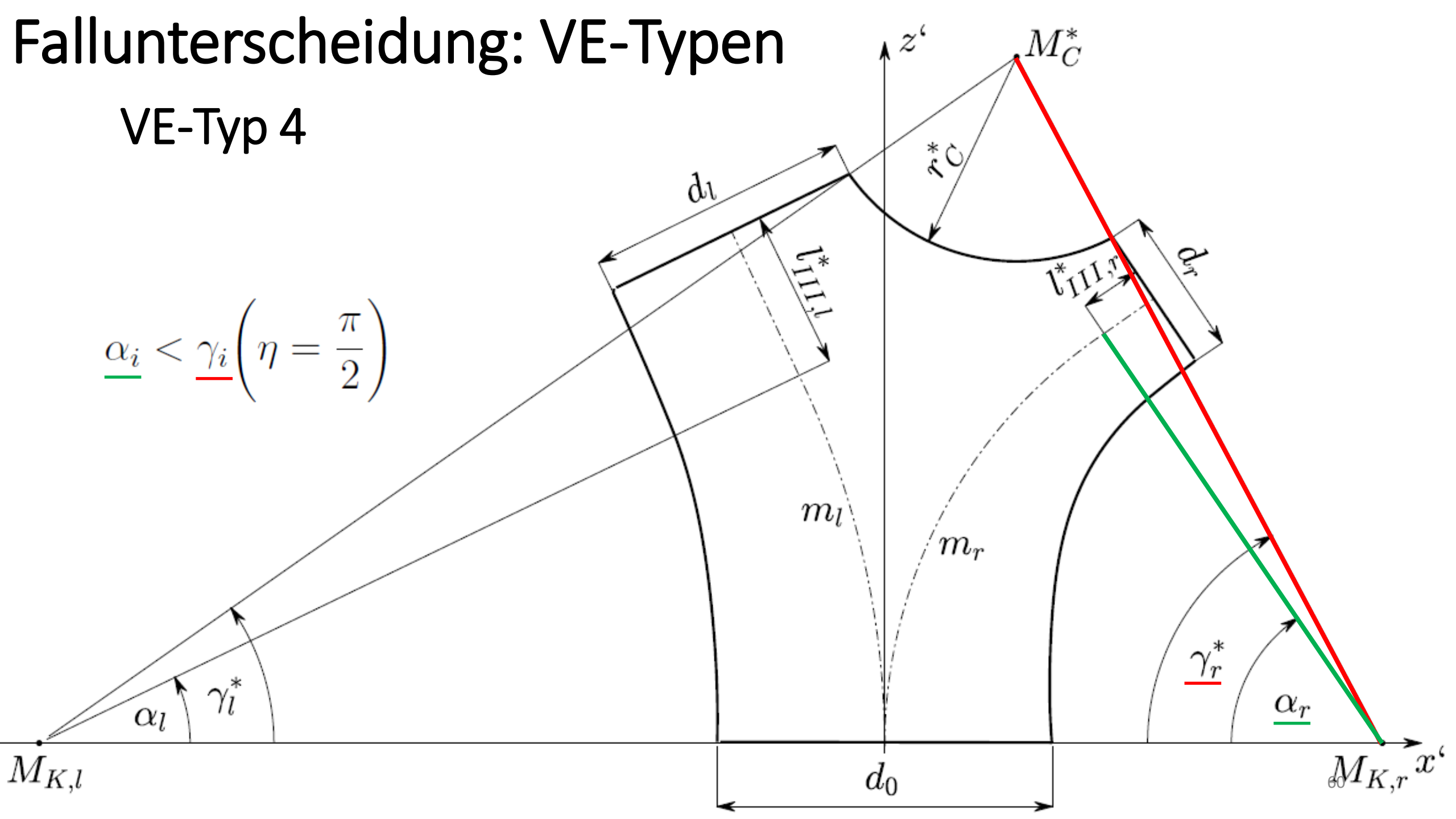
VE-Typ 2



Fallunterscheidung: VE-Typen

VE-Typ 4

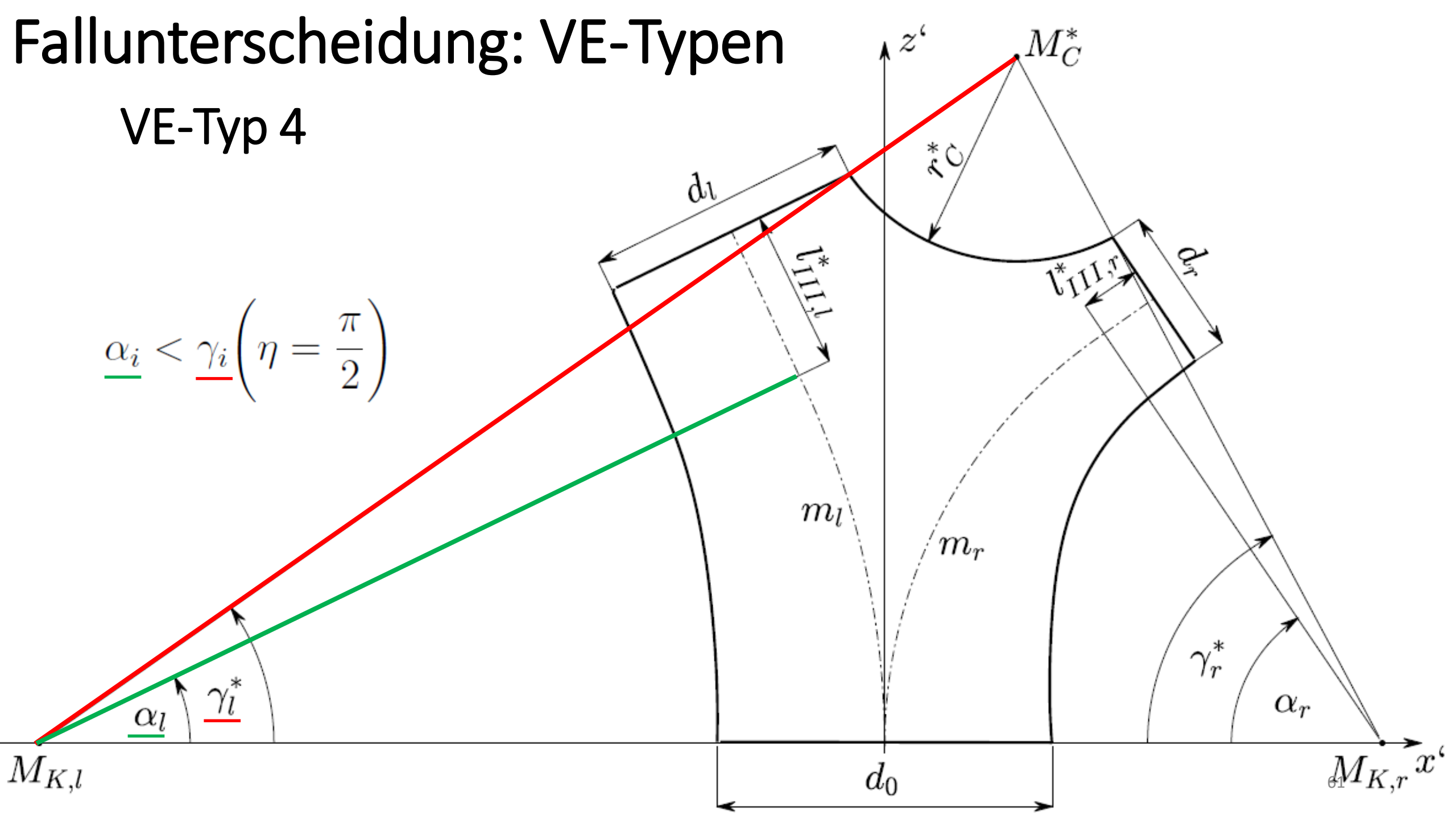
$$\underline{\alpha_i} < \underline{\gamma_i} \left(\eta = \frac{\pi}{2} \right)$$



Fallunterscheidung: VE-Typen

VE-Typ 4

$$\underline{\alpha_i} < \underline{\gamma_i} \left(\eta = \frac{\pi}{2} \right)$$

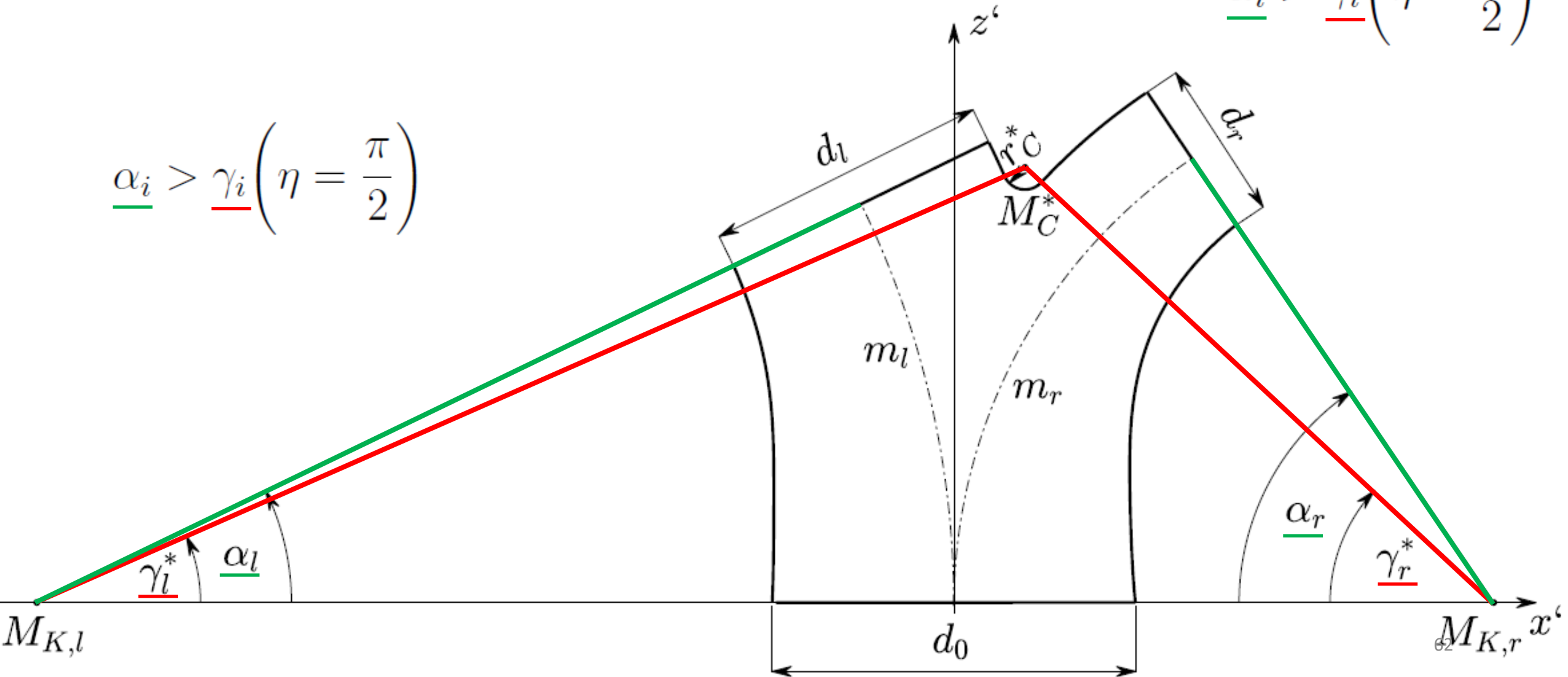


Fallunterscheidung: Verzweigungselementtypen

VE-Typ 1

$$\underline{\alpha}_i > \underline{\gamma}_i \left(\eta = \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\underline{\alpha}_i > \underline{\gamma}_i \left(\eta = \frac{\pi}{2} \right)$$



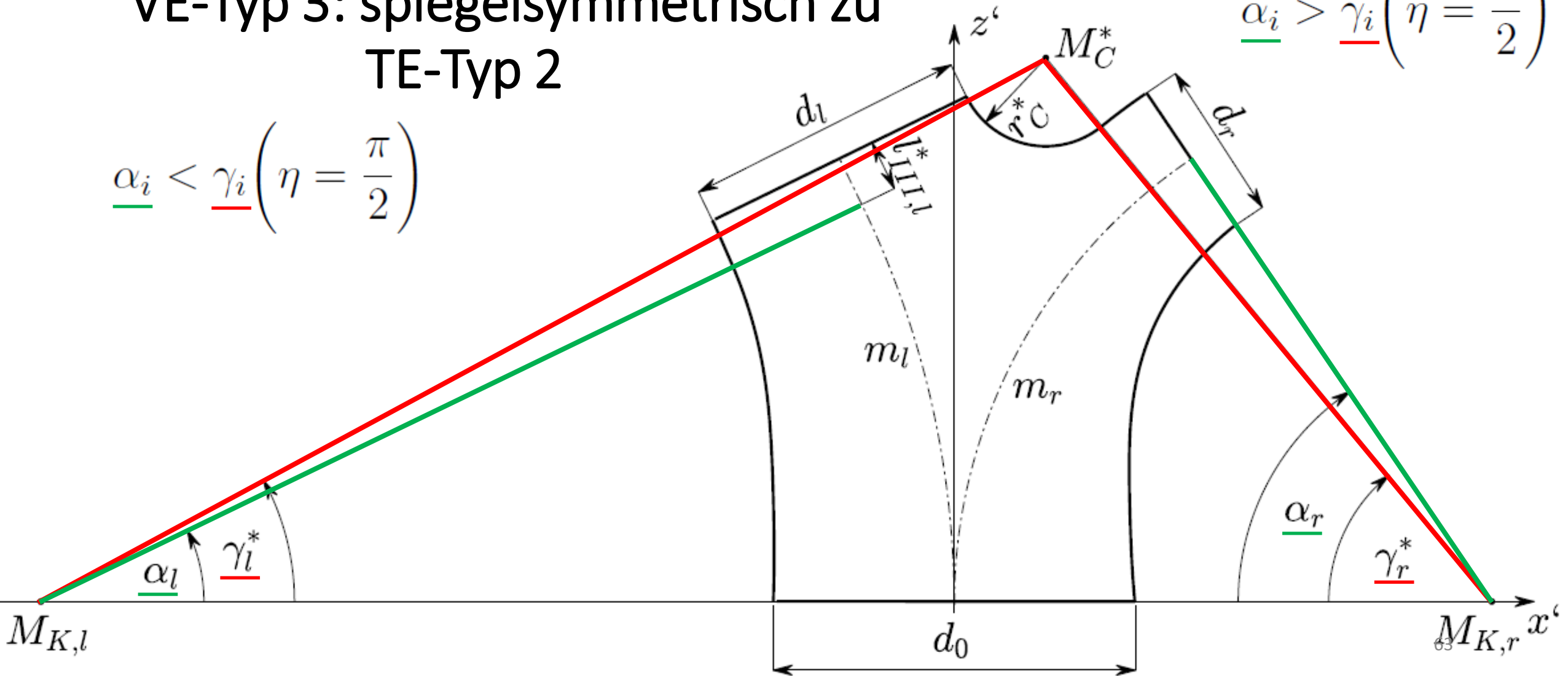
Fallunterscheidung: Verzweigungselementtypen

VE-Typ 2

VE-Typ 3: spiegelsymmetrisch zu
TE-Typ 2

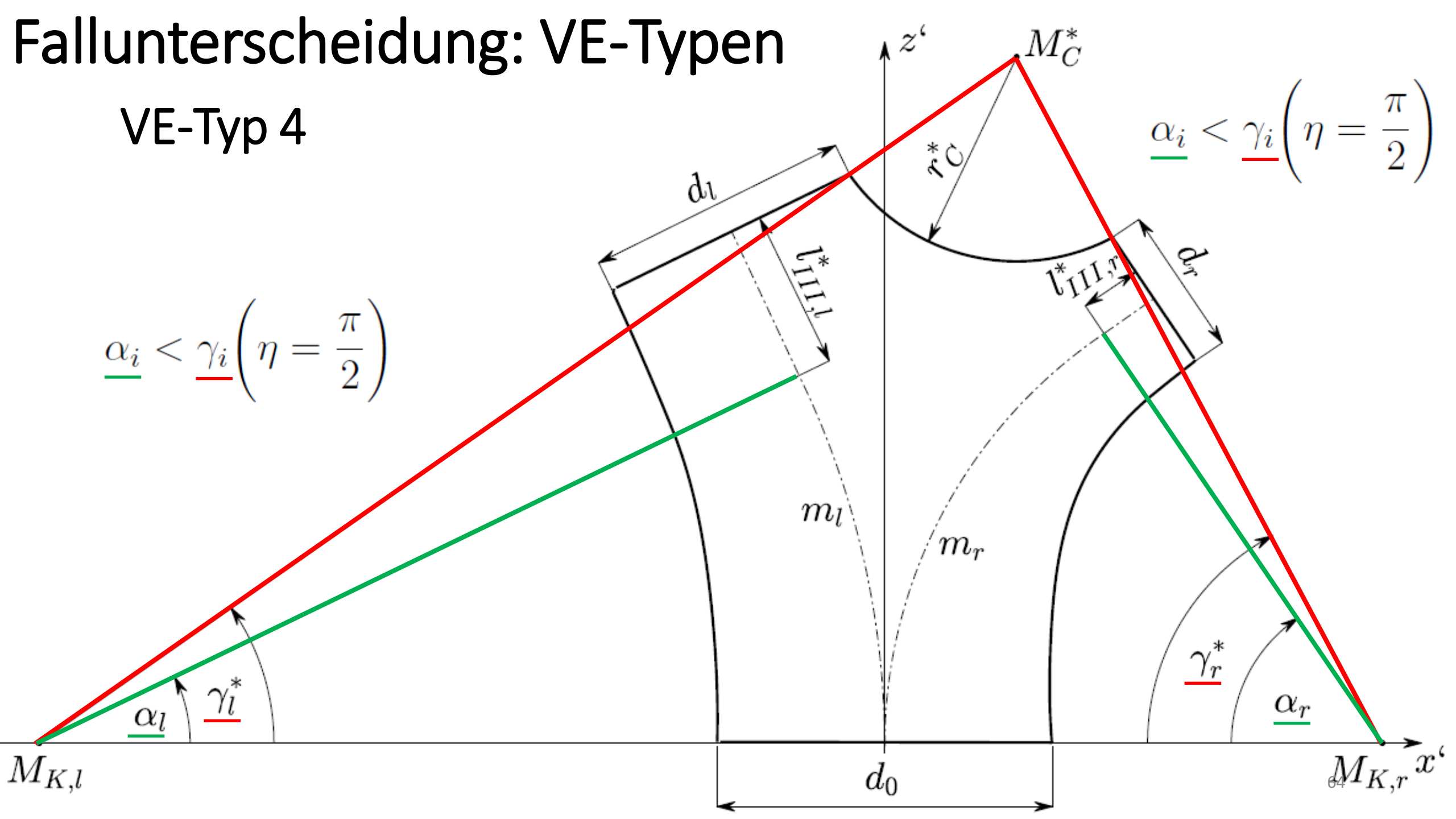
$$\underline{\alpha}_i < \underline{\gamma}_i \left(\eta = \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\underline{\alpha}_i > \underline{\gamma}_i \left(\eta = \frac{\pi}{2} \right)$$



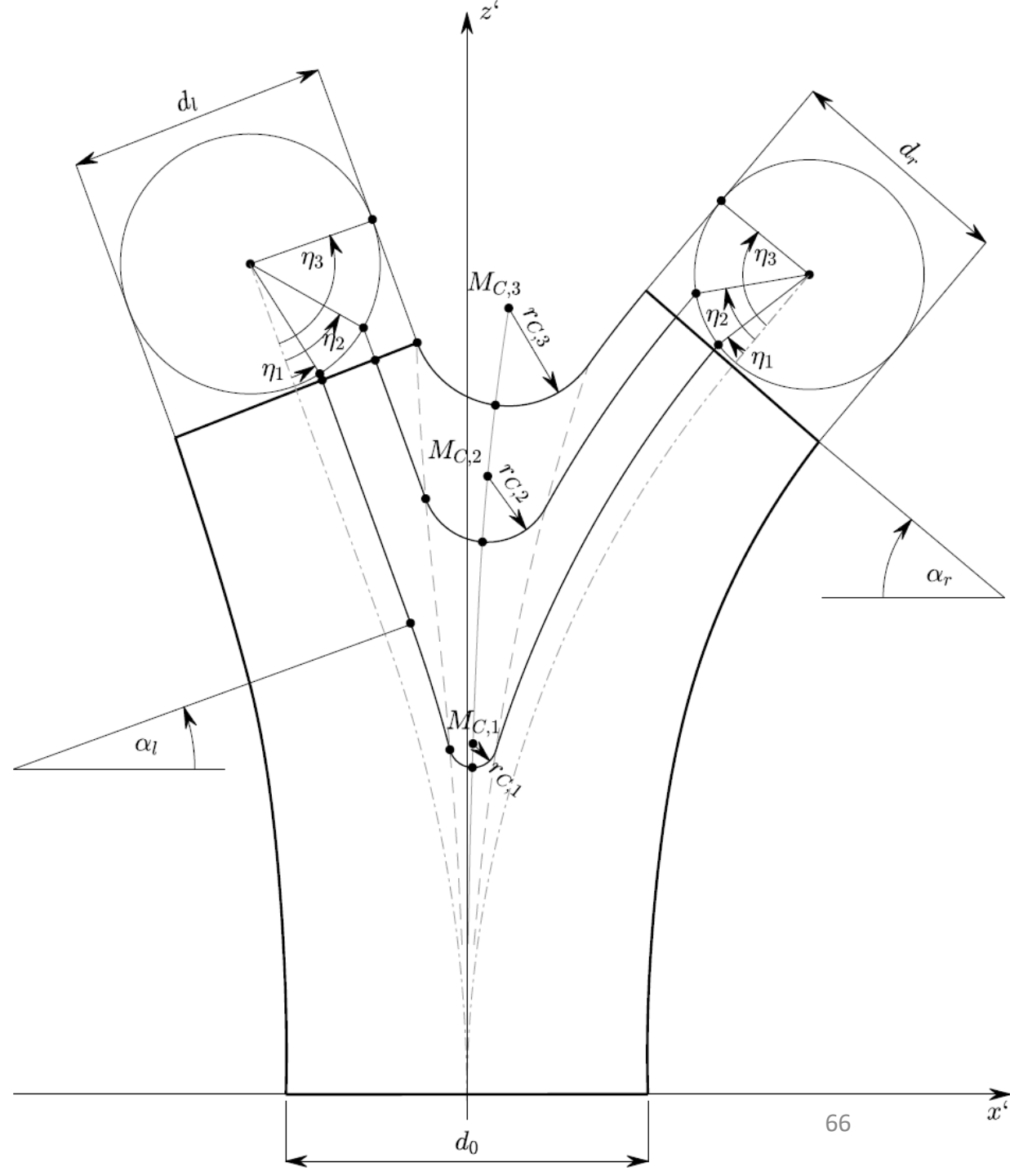
Fallunterscheidung: VE-Typen

VE-Typ 4



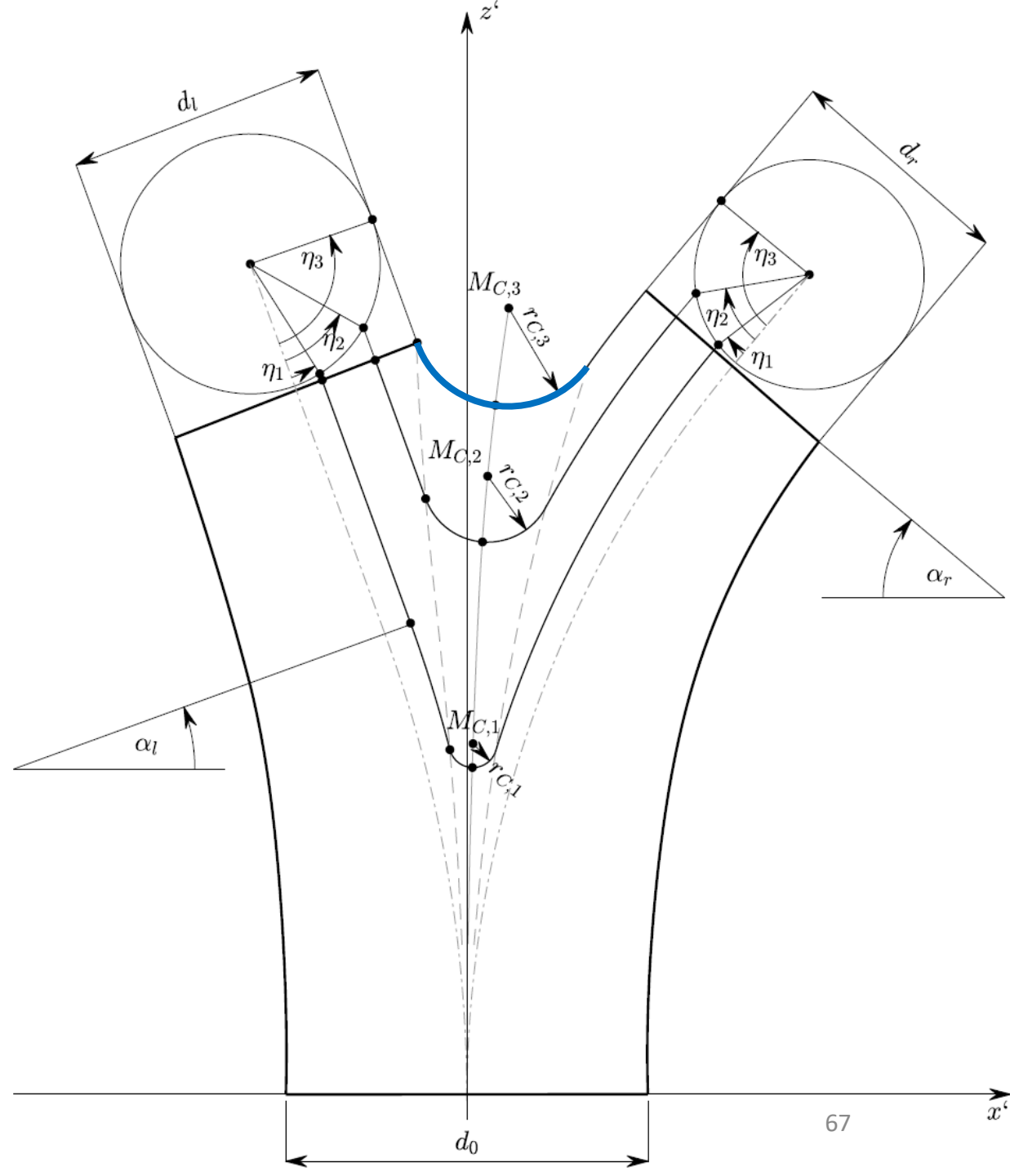
Fallunterscheidung: ZK-Typ

Zwischenflächenkurven (ZK)



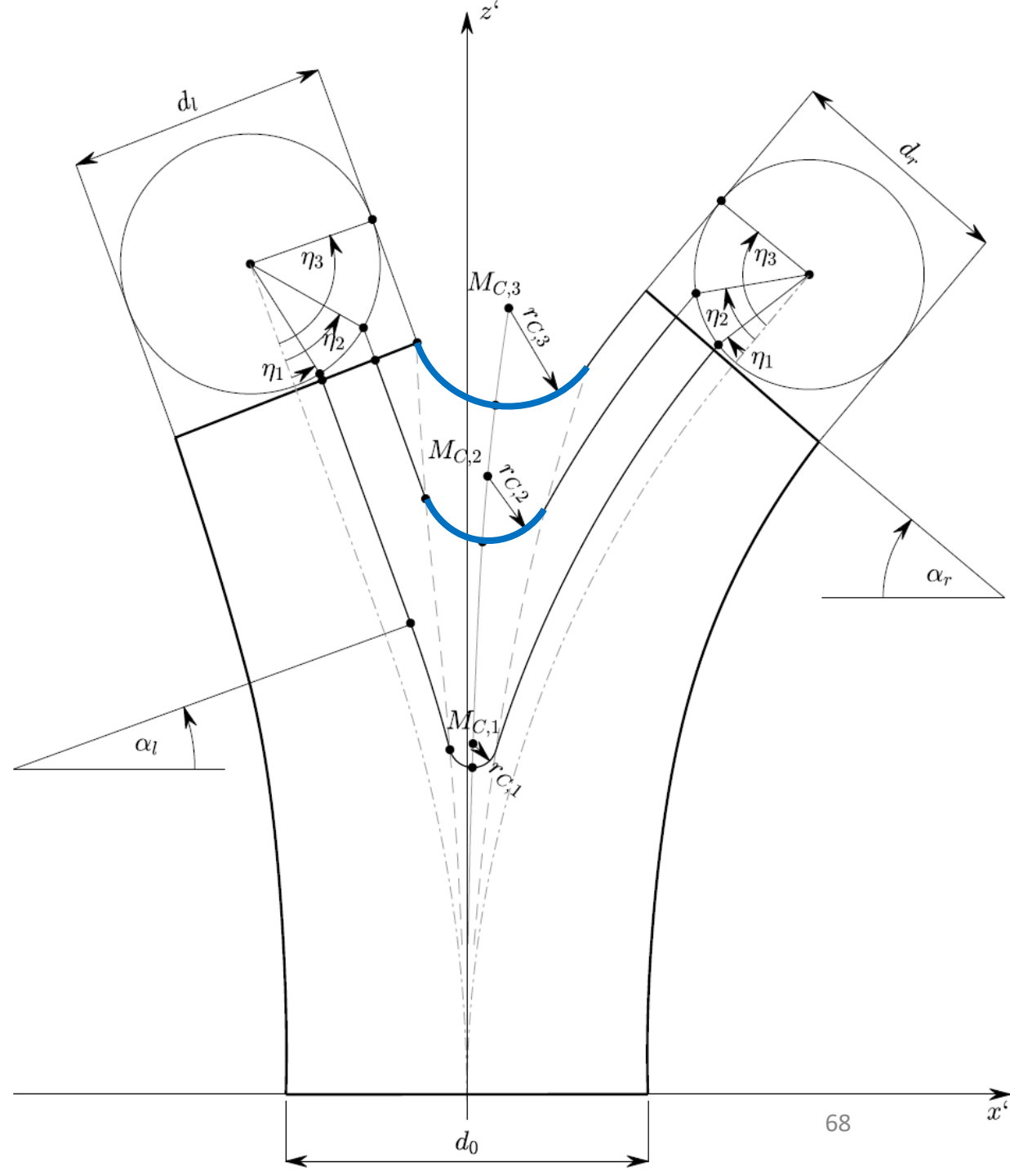
ZK-Abschnitte

Abschnitt I: Carinalverrundungsbogen



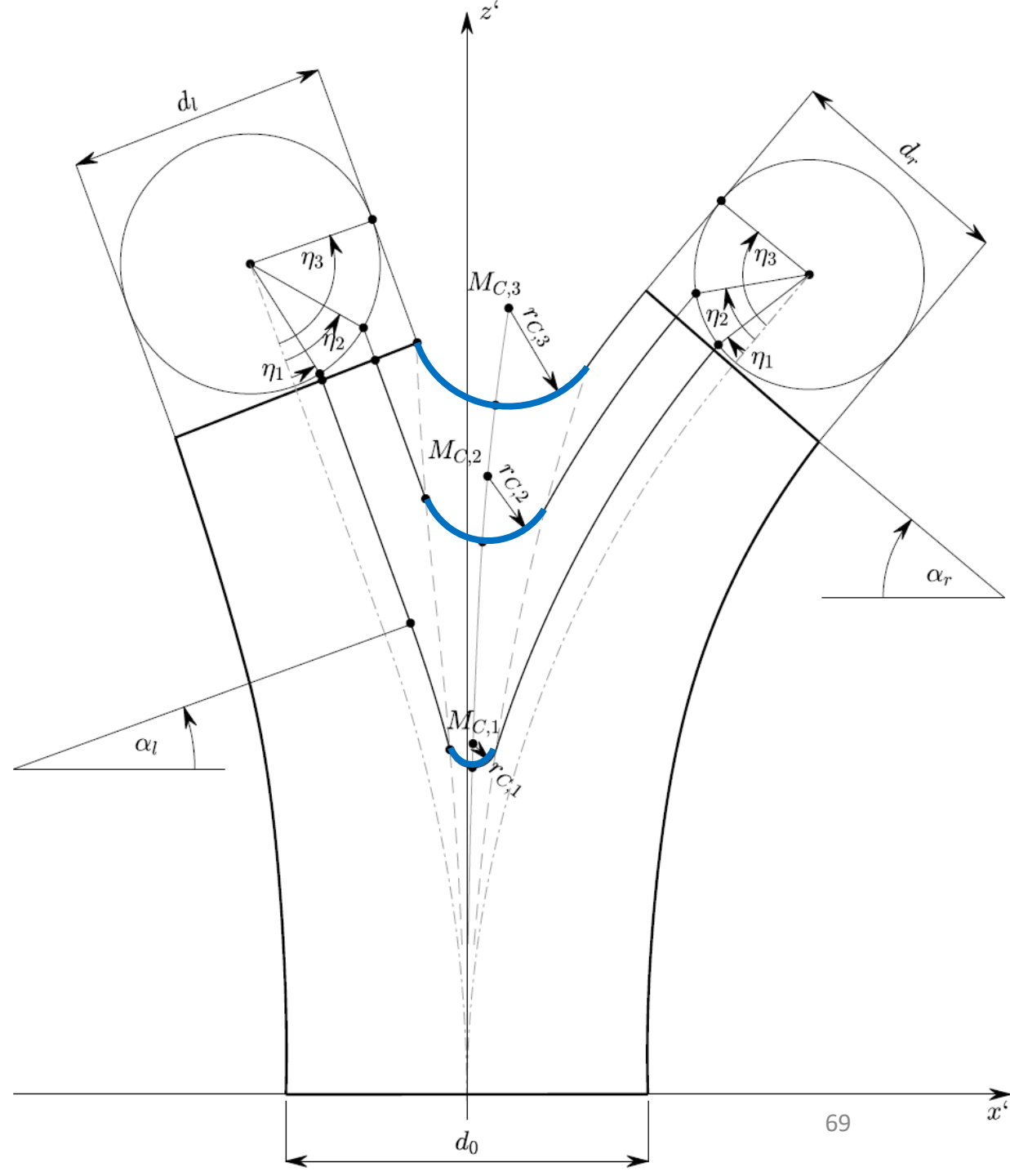
ZK-Abschnitte

Abschnitt I: Carinalverrundungsbogen



ZK-Abschnitte

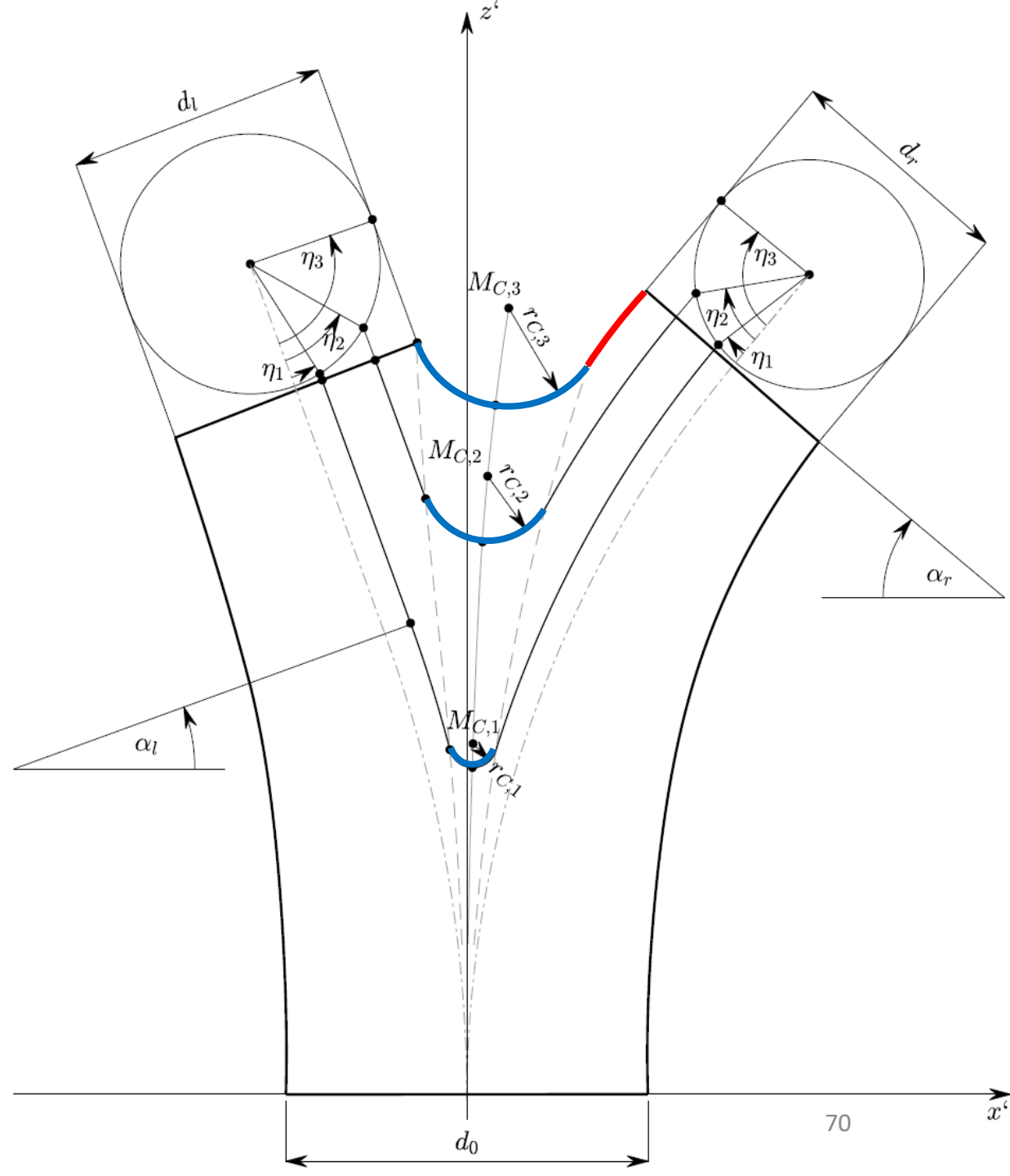
Abschnitt I: Carinalverrundungsbogen



ZK-Abschnitte

Abschnitt I:
Carinalverrundungsbogen

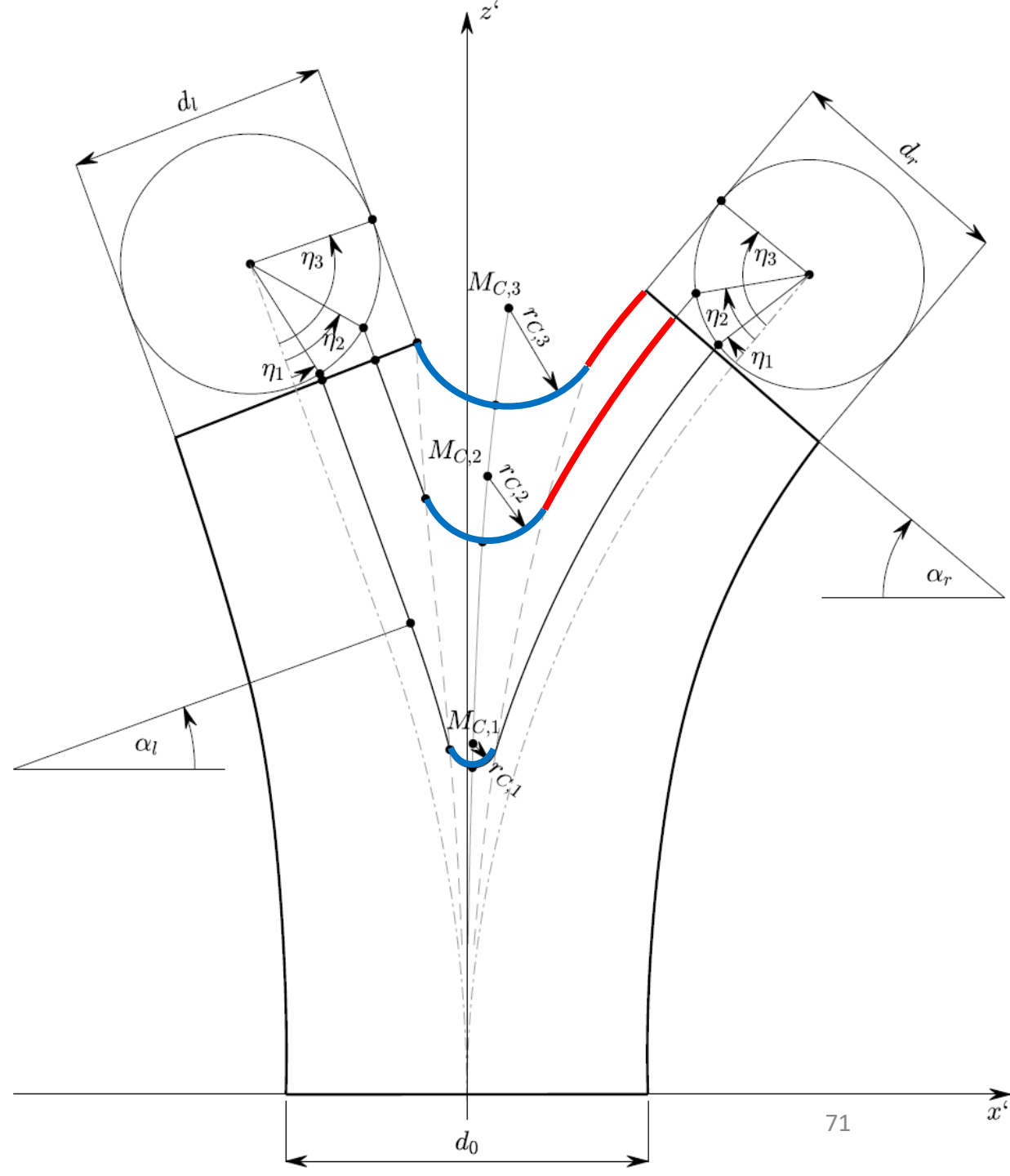
Abschnitt II:
Krümmungsbogen



ZK-Abschnitte

Abschnitt I:
Carinalverrundungsbogen

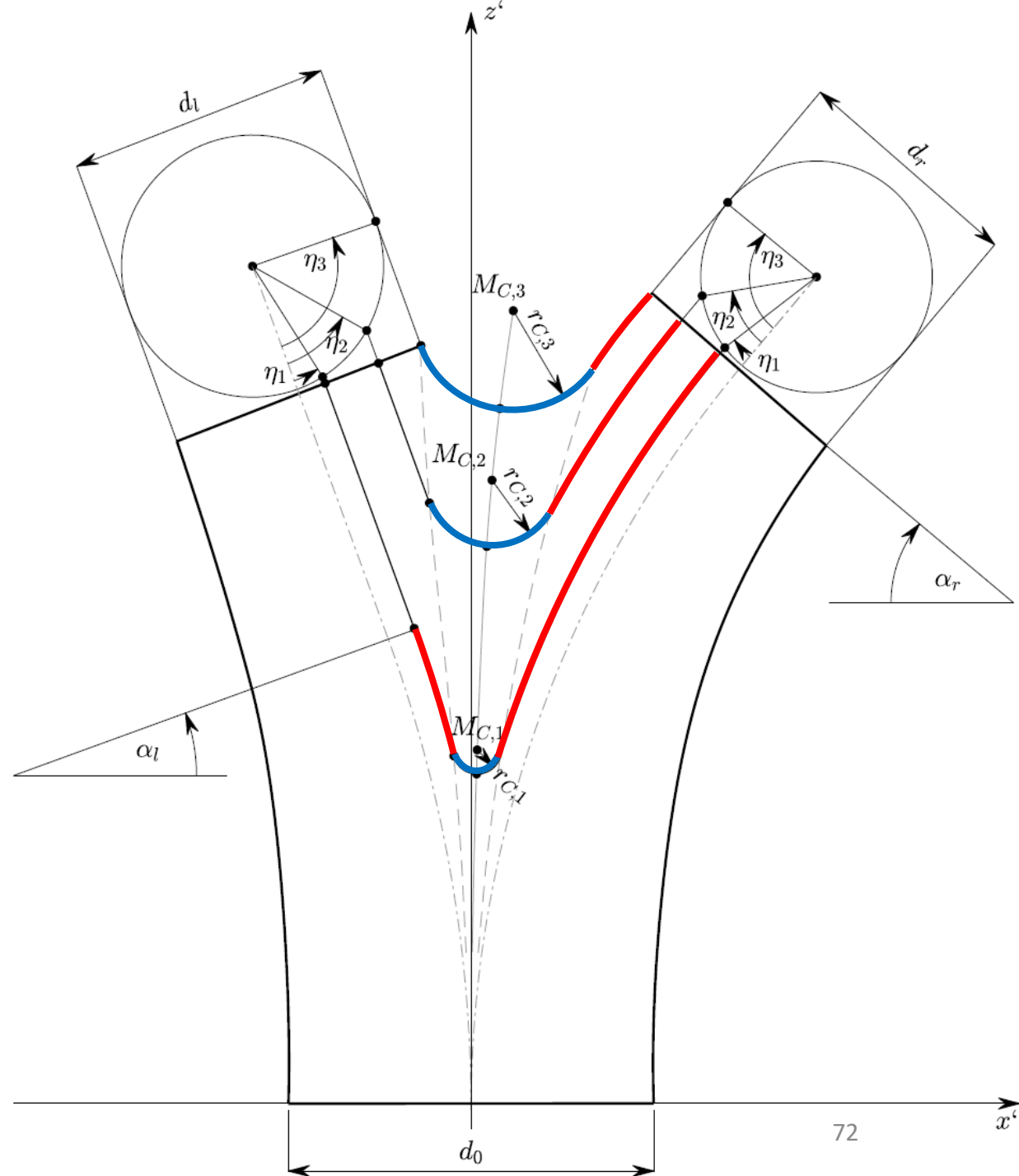
Abschnitt II:
Krümmungsbogen



ZK-Abschnitte

Abschnitt I:
Carinalverrundungsbogen

Abschnitt II:
Krümmungsbogen

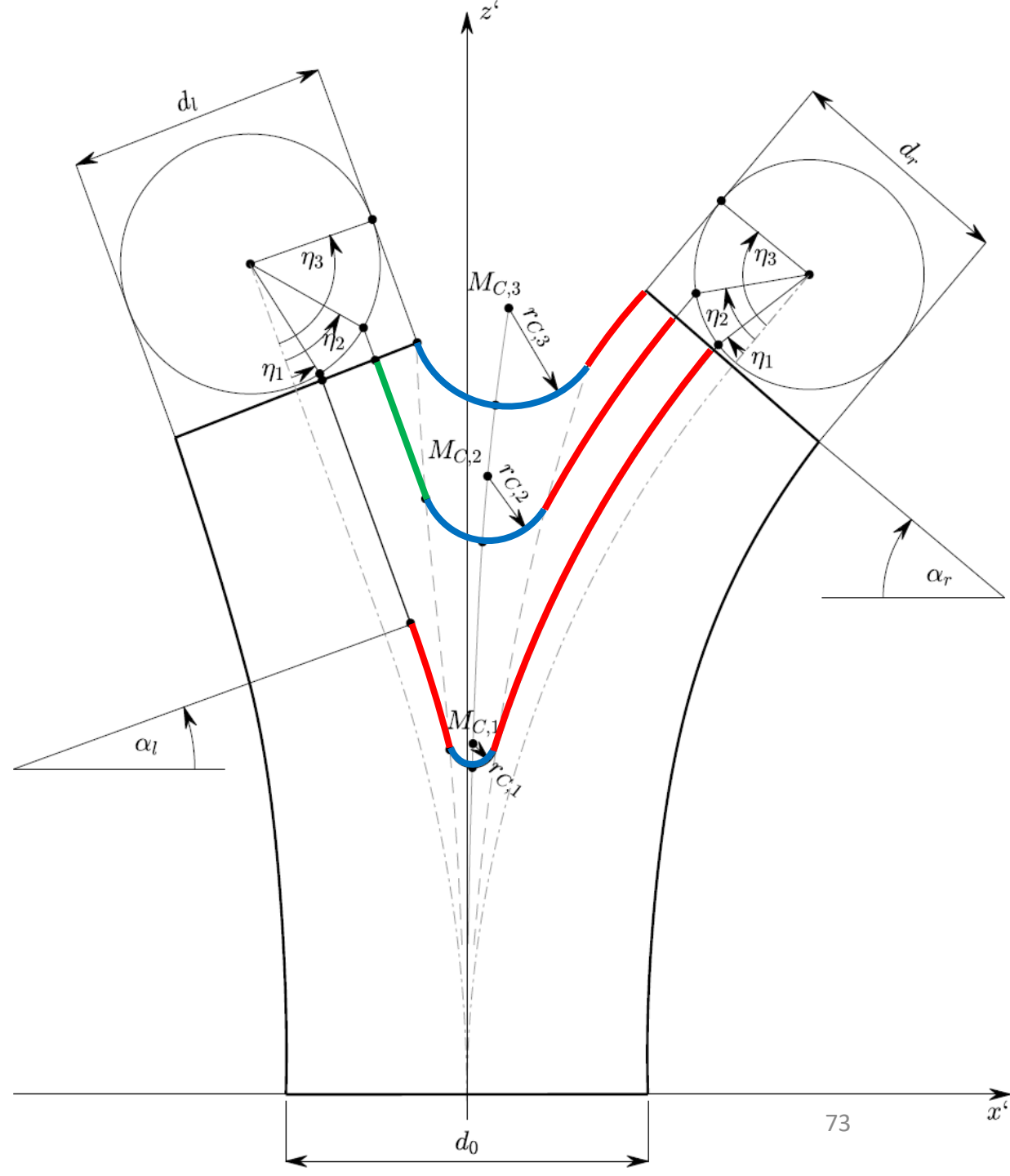


ZK-Abschnitte

Abschnitt I:
Carinalverrundungsbogen

Abschnitt II:
Krümmungsbogen

Abschnitt III:
Verlängerungsabschnitt

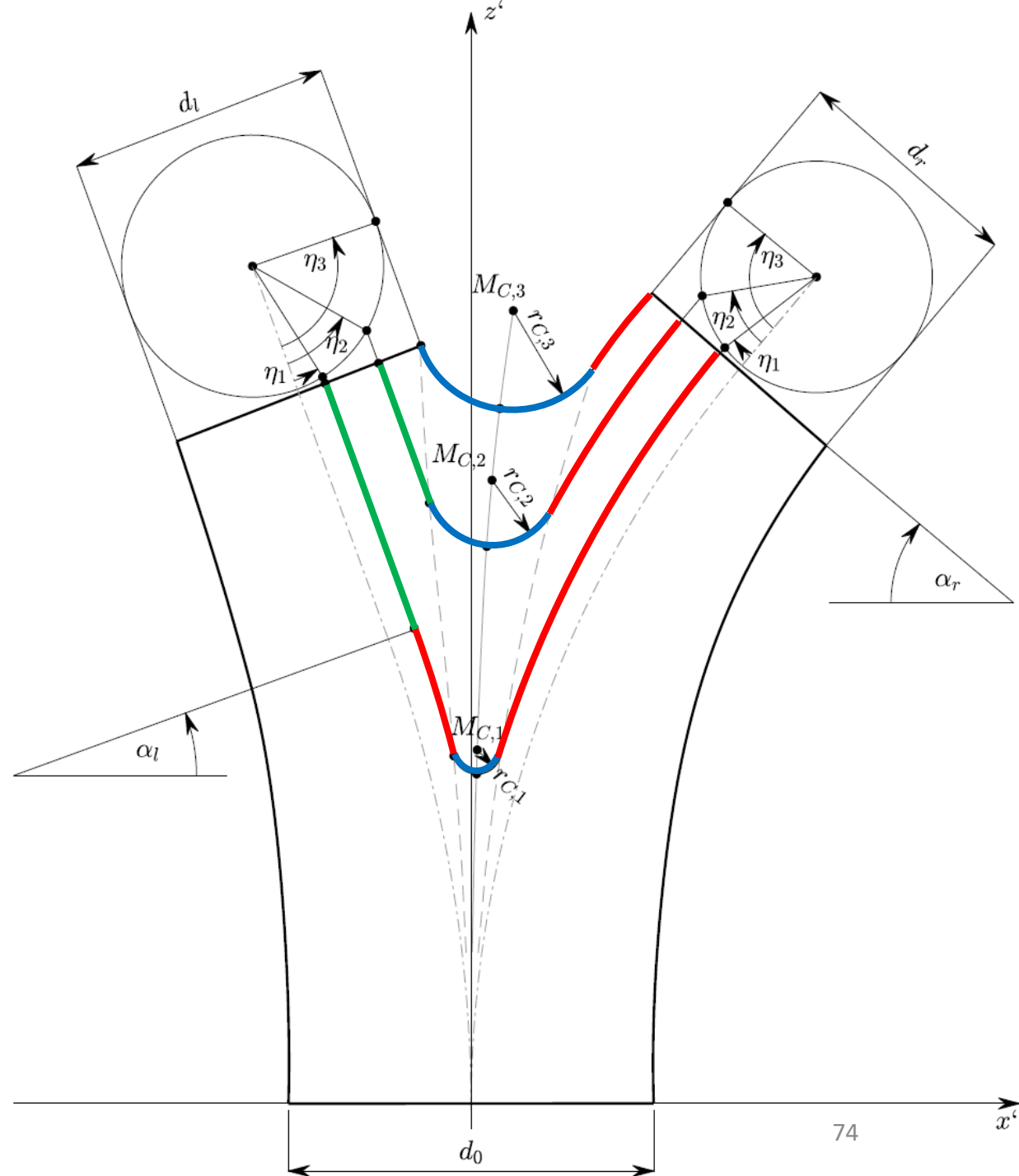


ZK-Abschnitte

Abschnitt I:
Carinalverrundungsbogen

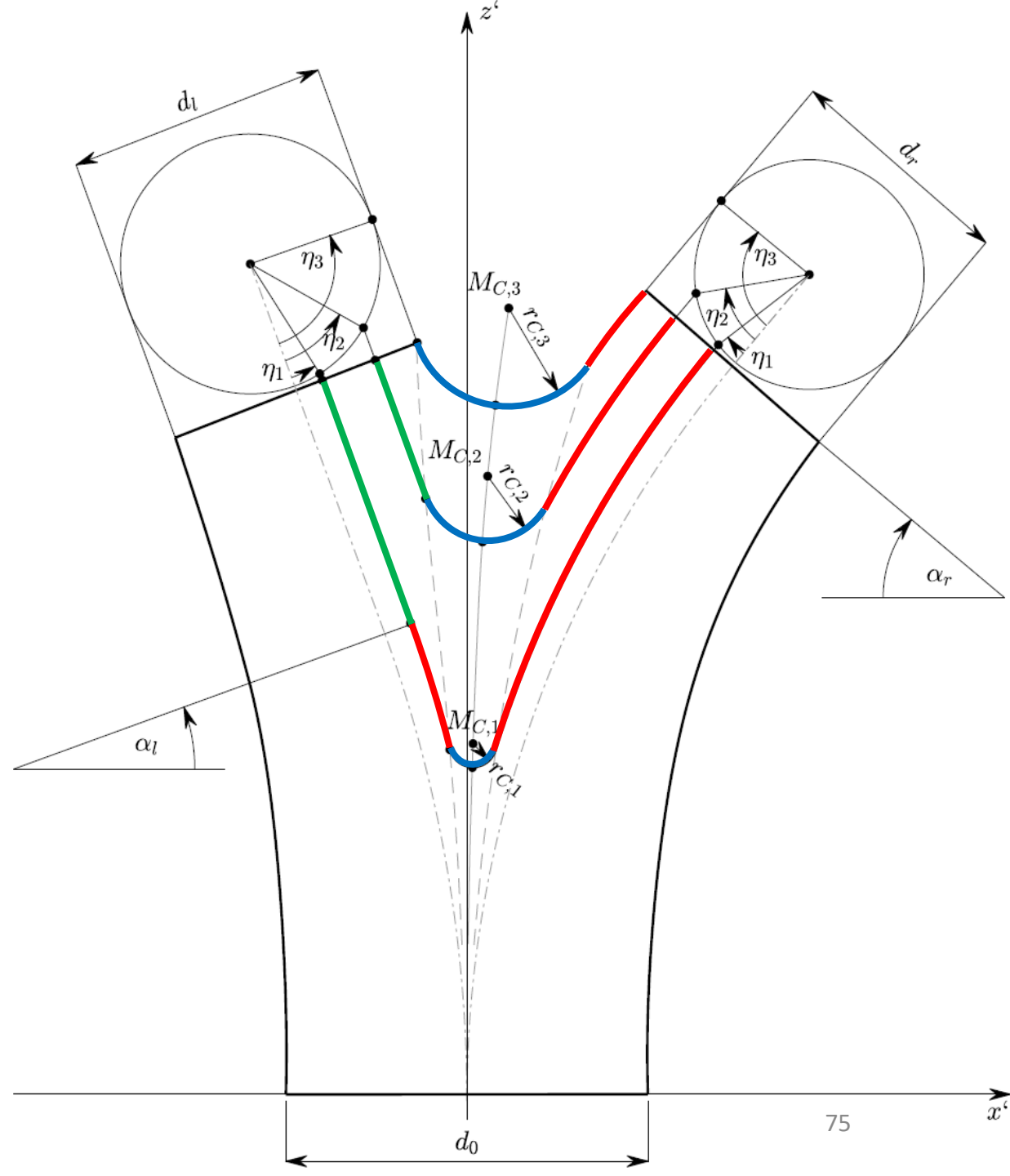
Abschnitt II:
Krümmungsbogen

Abschnitt III:
Verlängerungsabschnitt



ZK-Abschnitte

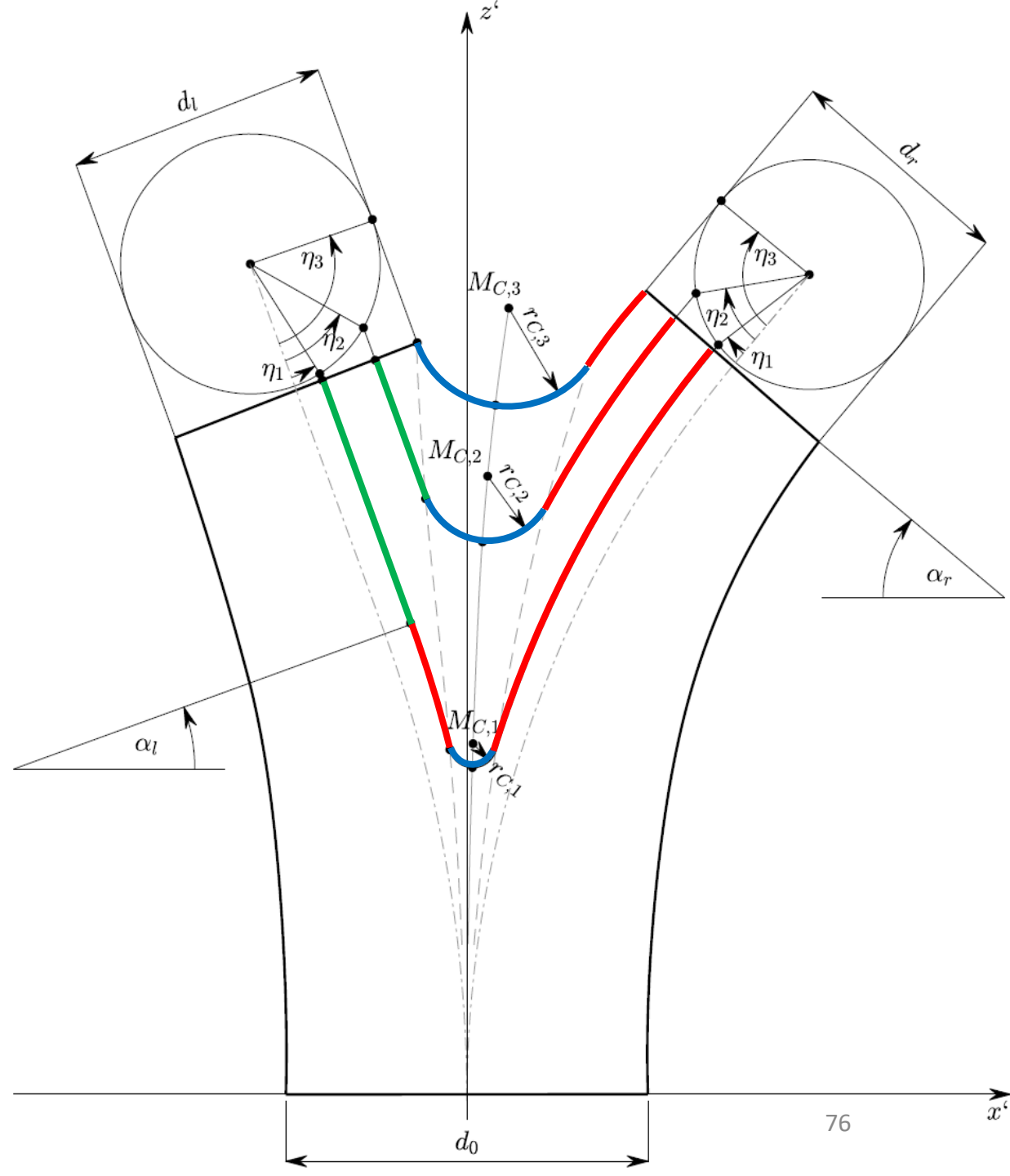
ZK 1: Typ 1



ZK-Abschnitte

ZK 1: Typ 1

ZK 2: Typ 2

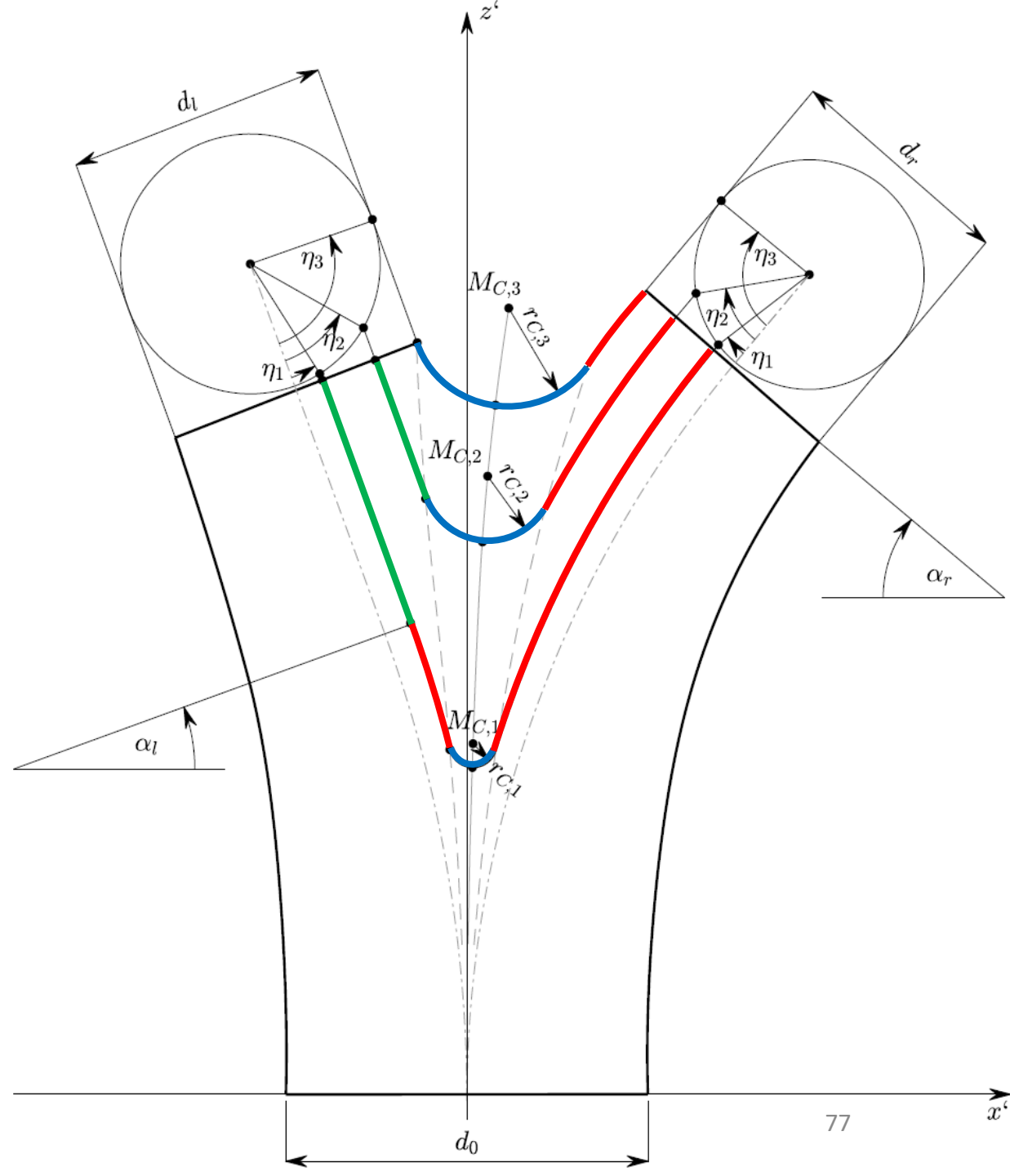


ZK-Abschnitte

ZK 1: Typ 1

ZK 2: Typ 2

ZK 3: Typ 2



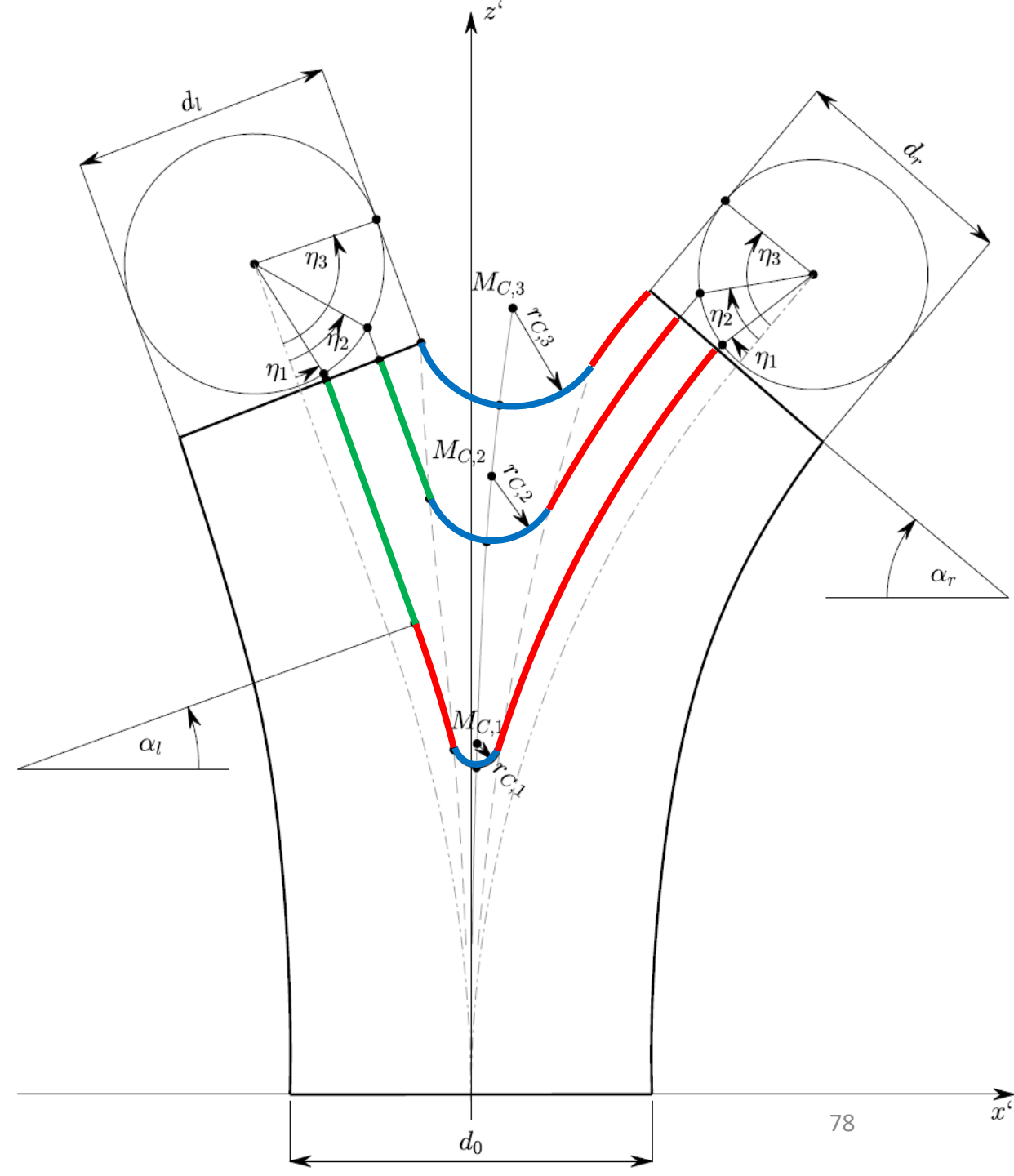
ZK-Abschnitte

ZK 1: Typ 1

ZK 2: Typ 2

ZK 3: Typ 2

\Rightarrow VE-Typ = ZK-Typ (ZK(h^*))
= ZK-Typ (ZK 3)
= Typ 2



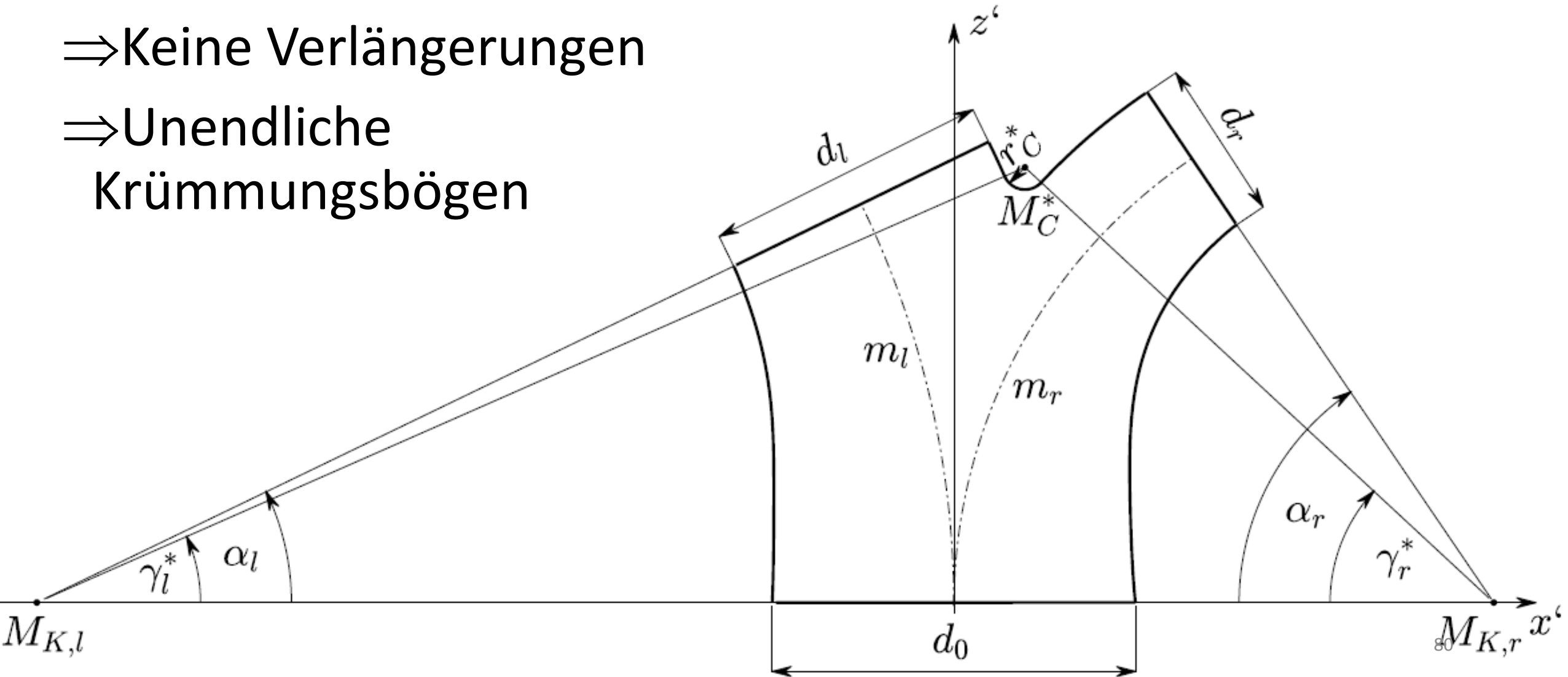
Berechnung der Carinalverrundung

1. Iterationsschritt

Annahme: ZK-Typ 1

⇒ Keine Verlängerungen

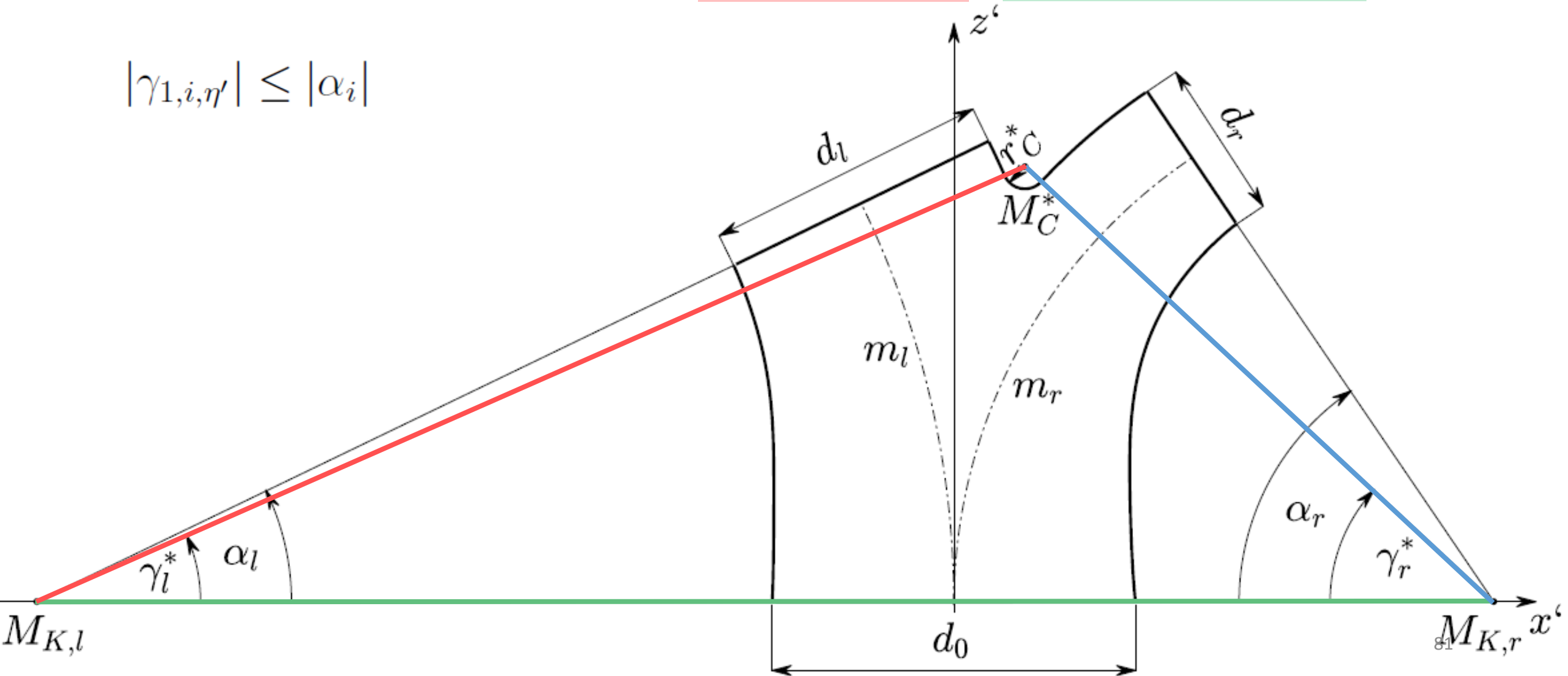
⇒ Unendliche Krümmungsbögen



1. Iterationsschritt: Winkelprüfung

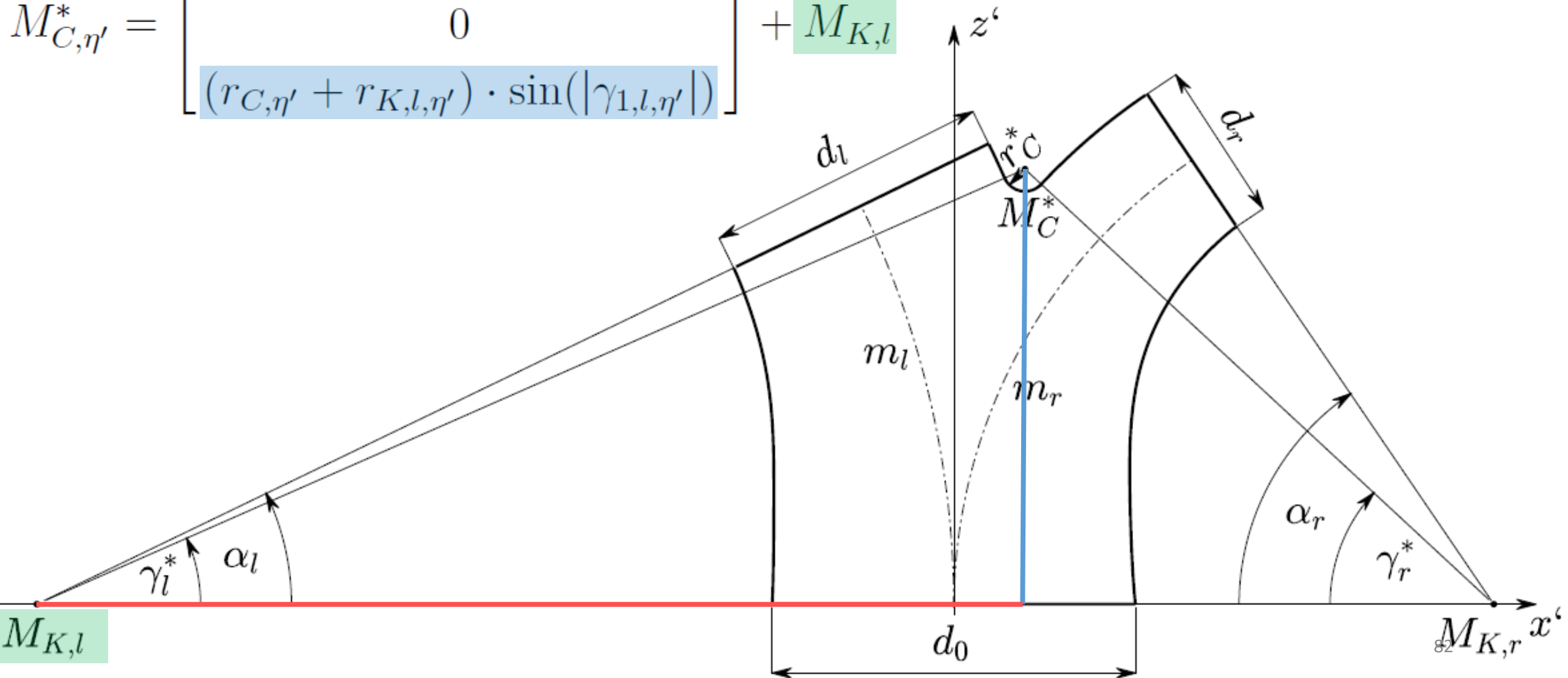
$$\gamma_{1,i,\eta'} = \arccos \left(\frac{(r_{K,i,\eta'} + r_{C,\eta'})^2 + (\|M_{K,i}\| + \|M_{K,j}\|)^2 - (r_{K,j,\eta'} + r_{C,\eta'})^2}{2 \cdot (r_{K,i,\eta'} + r_{C,\eta'}) \cdot (\|M_{K,i}\| + \|M_{K,j}\|)} \right)$$

$$|\gamma_{1,i,\eta'}| \leq |\alpha_i|$$



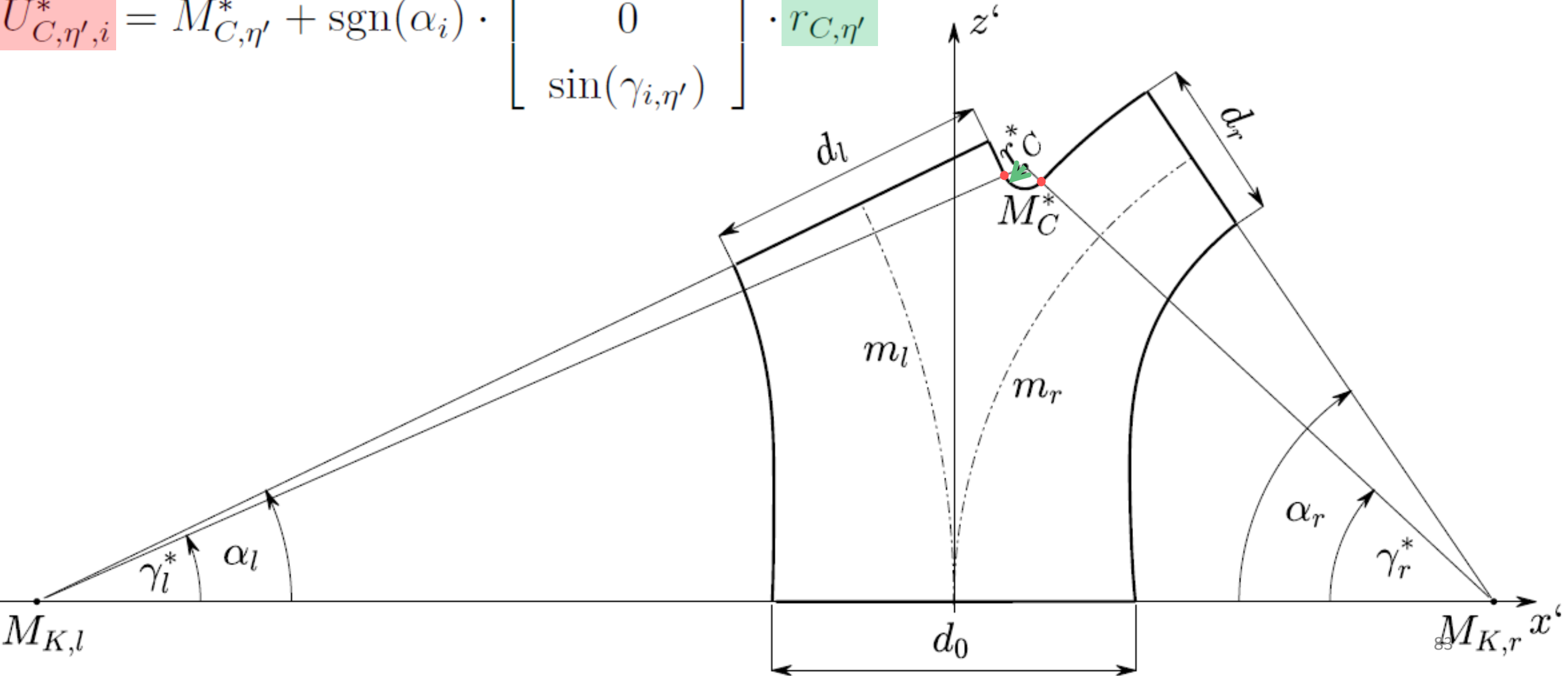
1. Iterationsschritt: Mittelpunkt Carinalverrundung

$$M_{C,\eta'}^* = \begin{bmatrix} -(r_{C,\eta'} + r_{K,l,\eta'}) \cdot \cos(\gamma_{1,l,\eta'}) \\ 0 \\ (r_{C,\eta'} + r_{K,l,\eta'}) \cdot \sin(|\gamma_{1,l,\eta'}|) \end{bmatrix} + M_{K,l}$$



1. Iterationsschritt: Übergangspunkte

$$U_{C,\eta',i}^* = M_{C,\eta'}^* + \operatorname{sgn}(\alpha_i) \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\gamma_{i,\eta'}) \\ 0 \\ \sin(\gamma_{i,\eta'}) \end{bmatrix} \cdot r_{C,\eta'}$$



1. Iterationsschritt: Fälle ausschließen

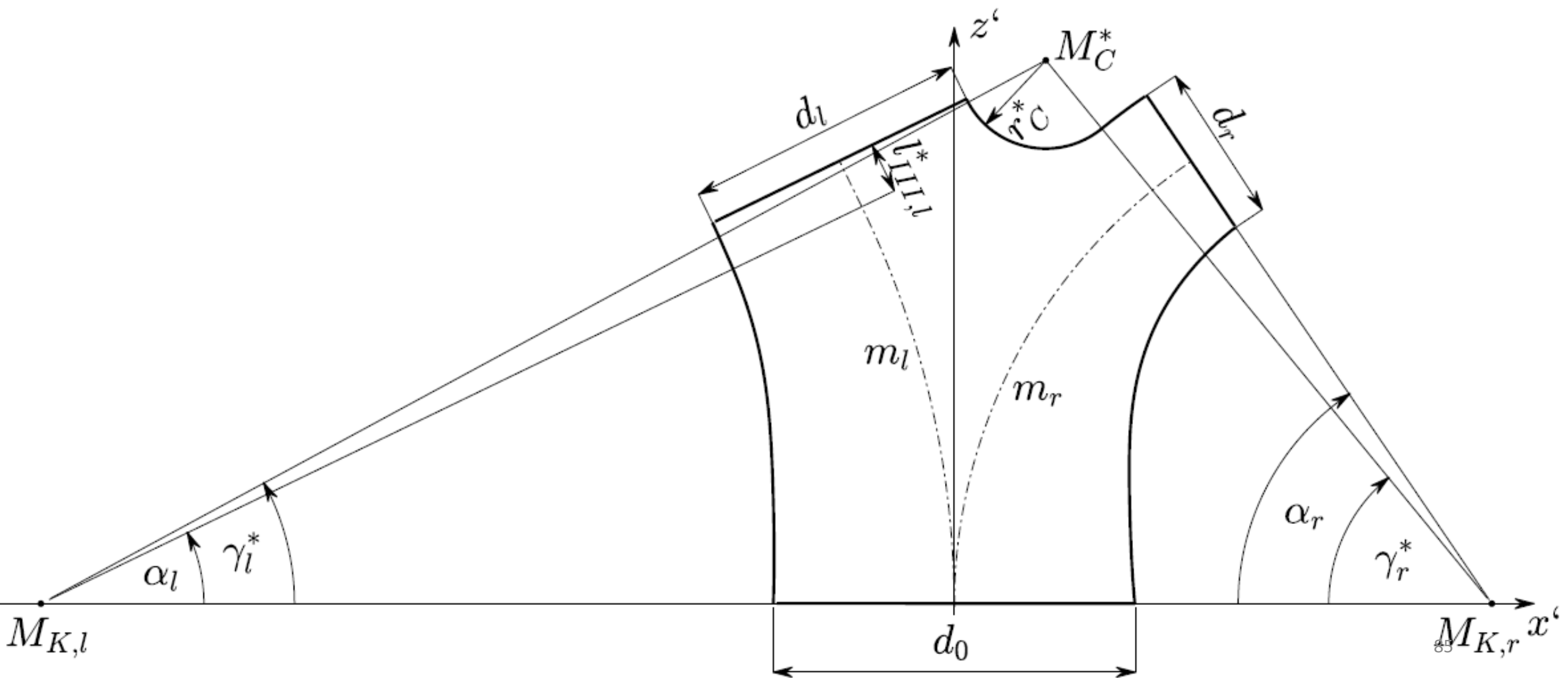
$$\Delta_{1,i,\eta'} = |\alpha_i| - |\gamma_{1,i,\eta'}| \text{ mit } i \in \{r,l\}$$

$\Delta_{1,r,\eta'} \geq 0 \wedge \Delta_{1,l,\eta'} < 0 \Rightarrow$ ZK-Typ 3 kann ausgeschlossen werden.

$\Delta_{1,r,\eta'} < 0 \wedge \Delta_{1,l,\eta'} \geq 0 \Rightarrow$ ZK-Typ 2 kann ausgeschlossen werden.

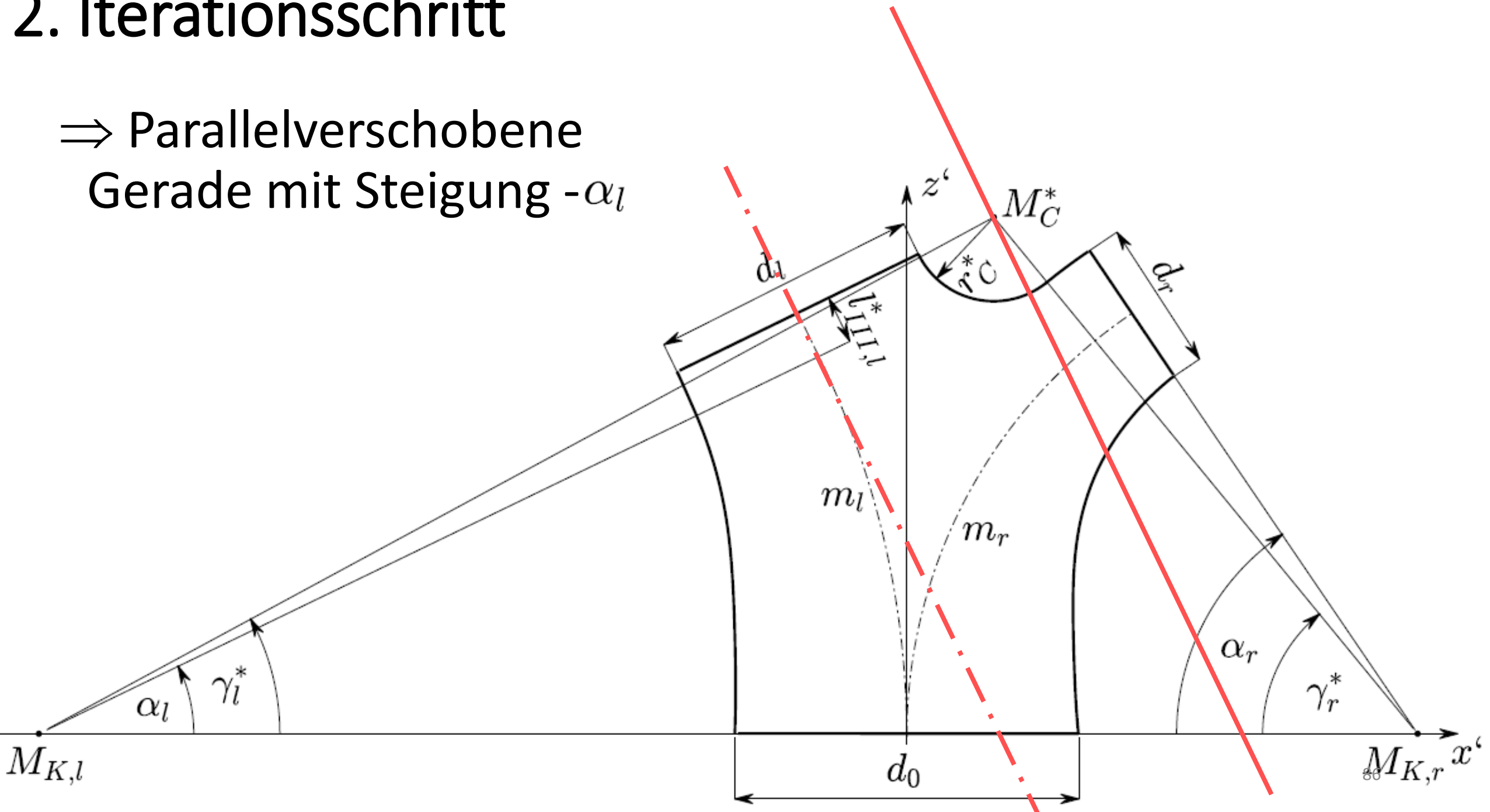
$\Delta_{1,r,\eta'} < 0 \wedge \Delta_{1,l,\eta'} < 0 \Rightarrow$ ZK-Typ 2 und 3 können ausgeschlossen werden.

2. Iterationsschritt



2. Iterationsschritt

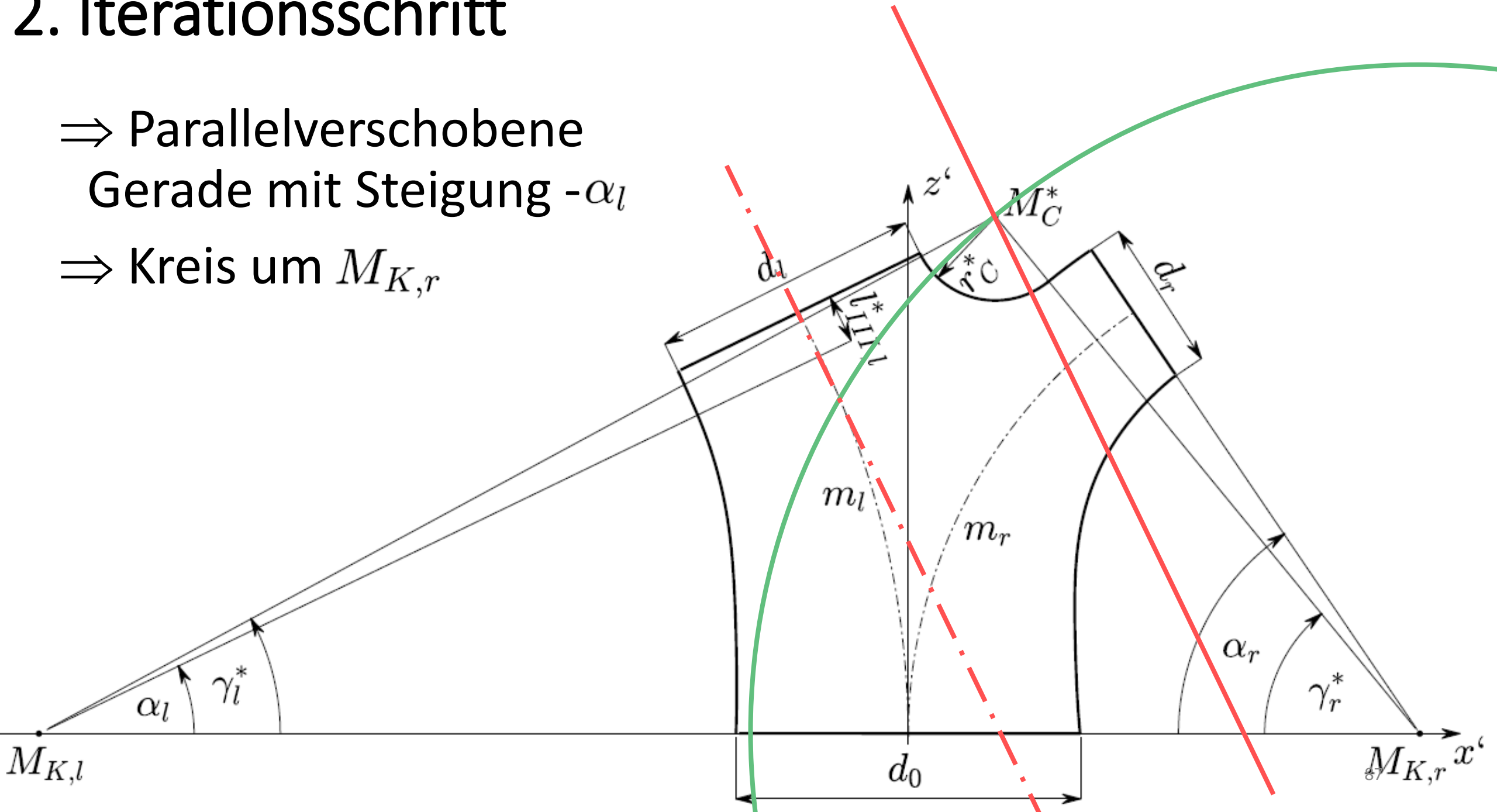
⇒ Parallelverschobene
Gerade mit Steigung $-\alpha_l$



2. Iterationsschritt

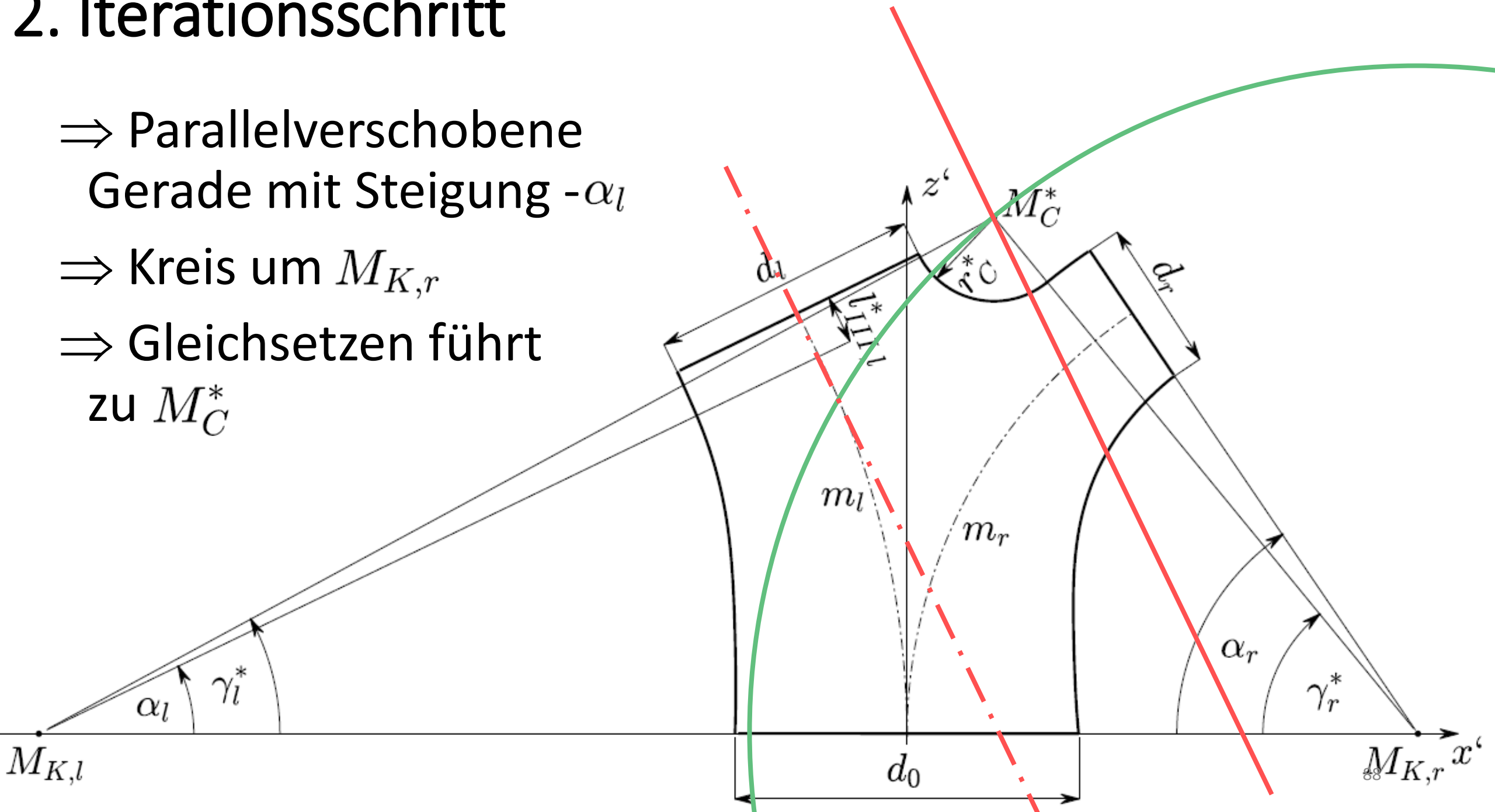
⇒ Parallelverschobene
Gerade mit Steigung $-\alpha_l$

⇒ Kreis um $M_{K,r}$



2. Iterationsschritt

- ⇒ Parallelverschobene Gerade mit Steigung $-\alpha_l$
- ⇒ Kreis um $M_{K,r}$
- ⇒ Gleichsetzen führt zu M_C^*



2. Iterationsschritt

$$M_{C1,\eta'}^* = \begin{bmatrix} \frac{-\varepsilon_3}{2} - \operatorname{sgn}(M_{K,i,x'}) \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_3^2}{4} - \varepsilon_4} \\ 0 \\ \varepsilon_1 \cdot \left(\frac{-\varepsilon_3}{2} - \operatorname{sgn}(M_{K,i,x'}) \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_3^2}{4} - \varepsilon_4} \right) + \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

mit

$$\varepsilon_1 = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_j \right)$$

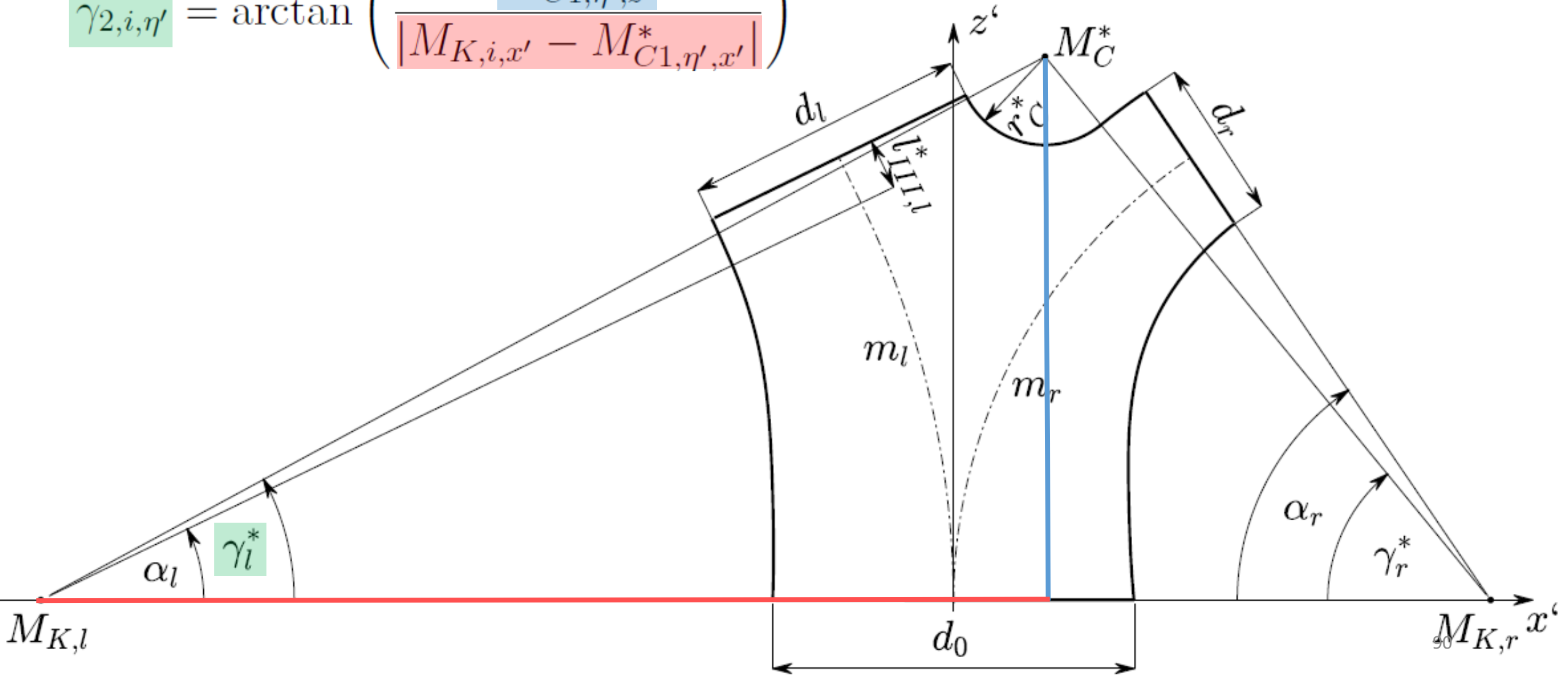
$$\varepsilon_2 = B_{j,\eta',z'} - \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_j \right) \cdot B_{j,\eta',x'} + \frac{r_{C,\eta'}}{\alpha_j}$$

$$\varepsilon_3 = 2 \cdot \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - M_{K,i,x'}}{1 + \varepsilon_1^2}$$

$$\varepsilon_4 = \frac{M_{K,i,x'}^2 + \varepsilon_2^2 - (r_{K,i,\eta'} + r_{C,\eta'})^2}{1 + \varepsilon_1^2}$$

2. Iterationsschritt

$$\gamma_{2,i,\eta'} = \arctan \left(\frac{M_{C1,\eta',z'}^*}{|M_{K,i,x'} - M_{C1,\eta',x'}^*|} \right)$$



2. Iterationsschritt: Fall bestimmen

$$\Delta_{2,i,\eta'} = |\alpha_i| - |\gamma_{2,i,\eta'}|$$
$$i \in \{r, l\}$$

$\Delta_{2,r,\eta'} \geq 0 \wedge \Delta_{2,l,\eta'} < 0 \Rightarrow$ Es liegt ZK-Typ 2 vor.

$\Delta_{2,r,\eta'} < 0 \wedge \Delta_{2,l,\eta'} \geq 0 \Rightarrow$ Es liegt ZK-Typ 3 vor.

$\Delta_{2,r,\eta'} < 0 \wedge \Delta_{2,l,\eta'} < 0 \Rightarrow$ Es liegt ZK-Typ 4 vor.

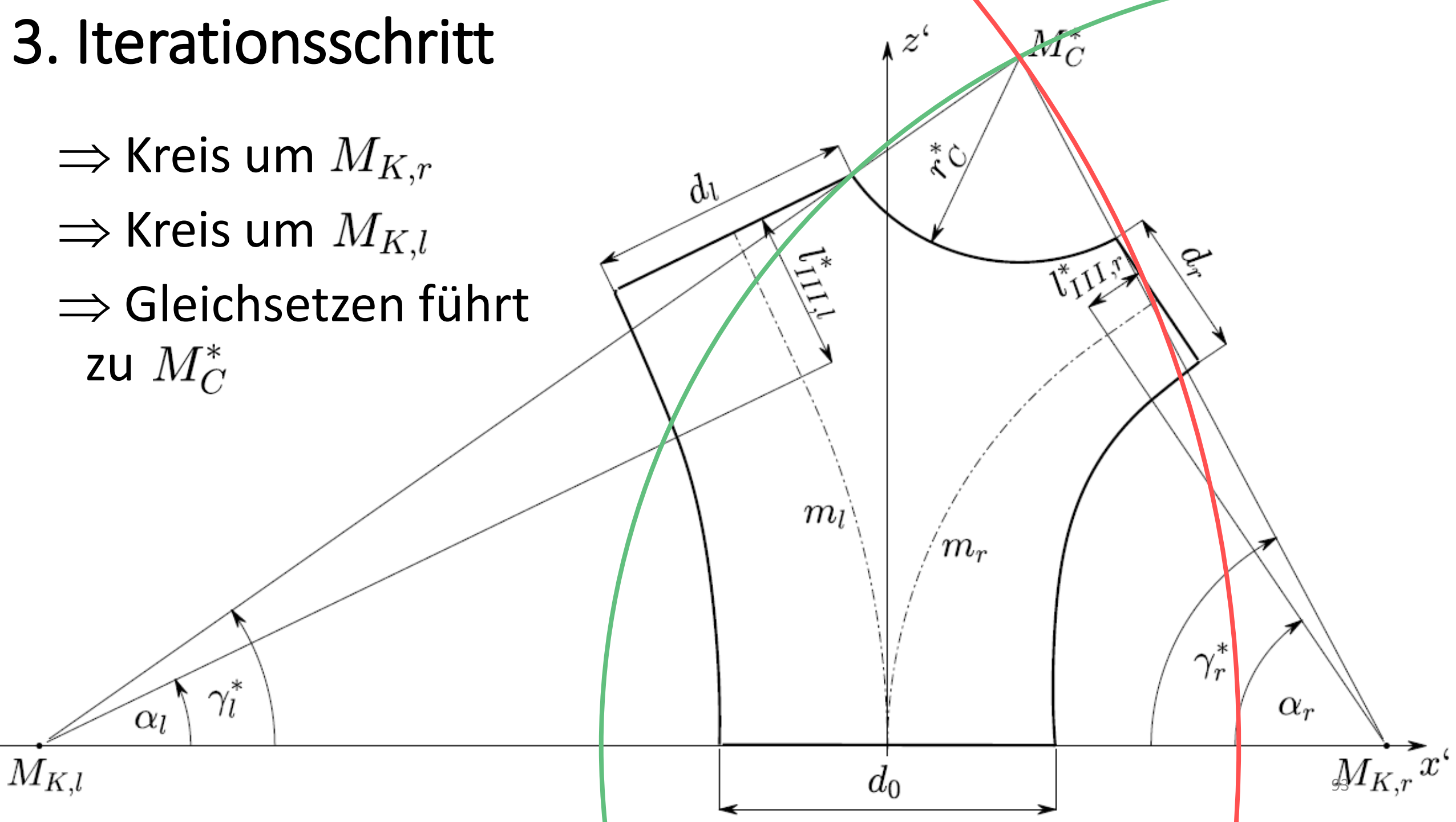
2. Iterationsschritt: Übergangspunkte berechnen

$$U_{C,\eta',i}^* = M_{C,\eta'}^* + \operatorname{sgn}(\alpha_i) \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\gamma_{i,\eta'}) \\ 0 \\ \sin(\gamma_{i,\eta'}) \end{bmatrix} \cdot r_{C,\eta'}$$

$$U_{C,\eta',j}^* = M_{C,\eta'}^* + \operatorname{sgn}(\alpha_j) \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_j) \\ 0 \\ \sin(\alpha_j) \end{bmatrix} \cdot r_{C,\eta'}$$

3. Iterationsschritt

- ⇒ Kreis um $M_{K,r}$
- ⇒ Kreis um $M_{K,l}$
- ⇒ Gleichsetzen führt zu M_C^*



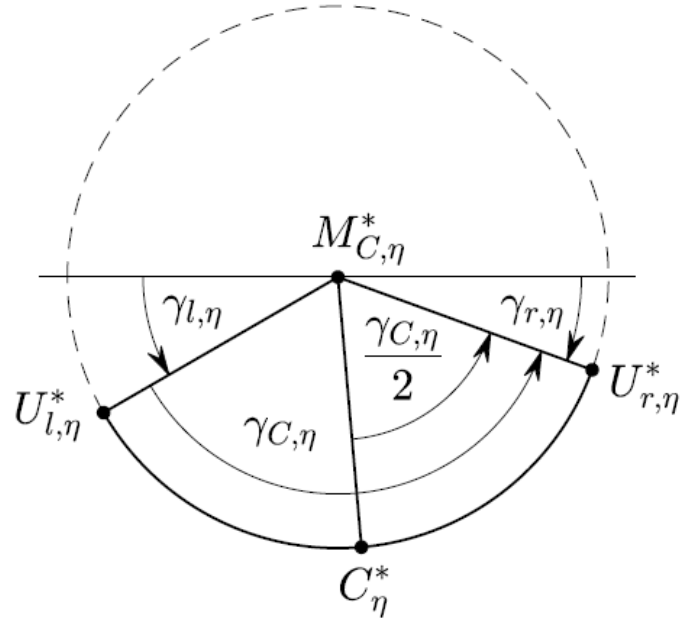
3. Iterationsschritt: Übergangspunkte berechnen

$$\gamma_{i,\eta'} = \operatorname{sgn}(\alpha_i) \cdot \arctan \left(\frac{M_{C,\eta',z'}^*}{|M_{K,i,x'} - M_{C,\eta',x'}^*|} \right)$$

$$U_{C,\eta',i}^* = M_{C,\eta'}^* + \operatorname{sgn}(\alpha_i) \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_i) \\ 0 \\ \sin(\alpha_i) \end{bmatrix} \cdot r_{C,\eta'}$$

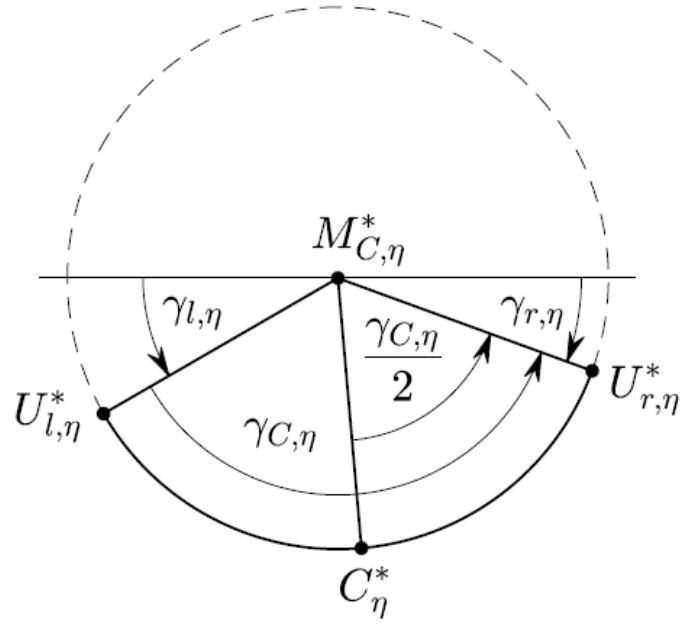
Berechnung der projizierten Zwischenfläche

Carinalkurve

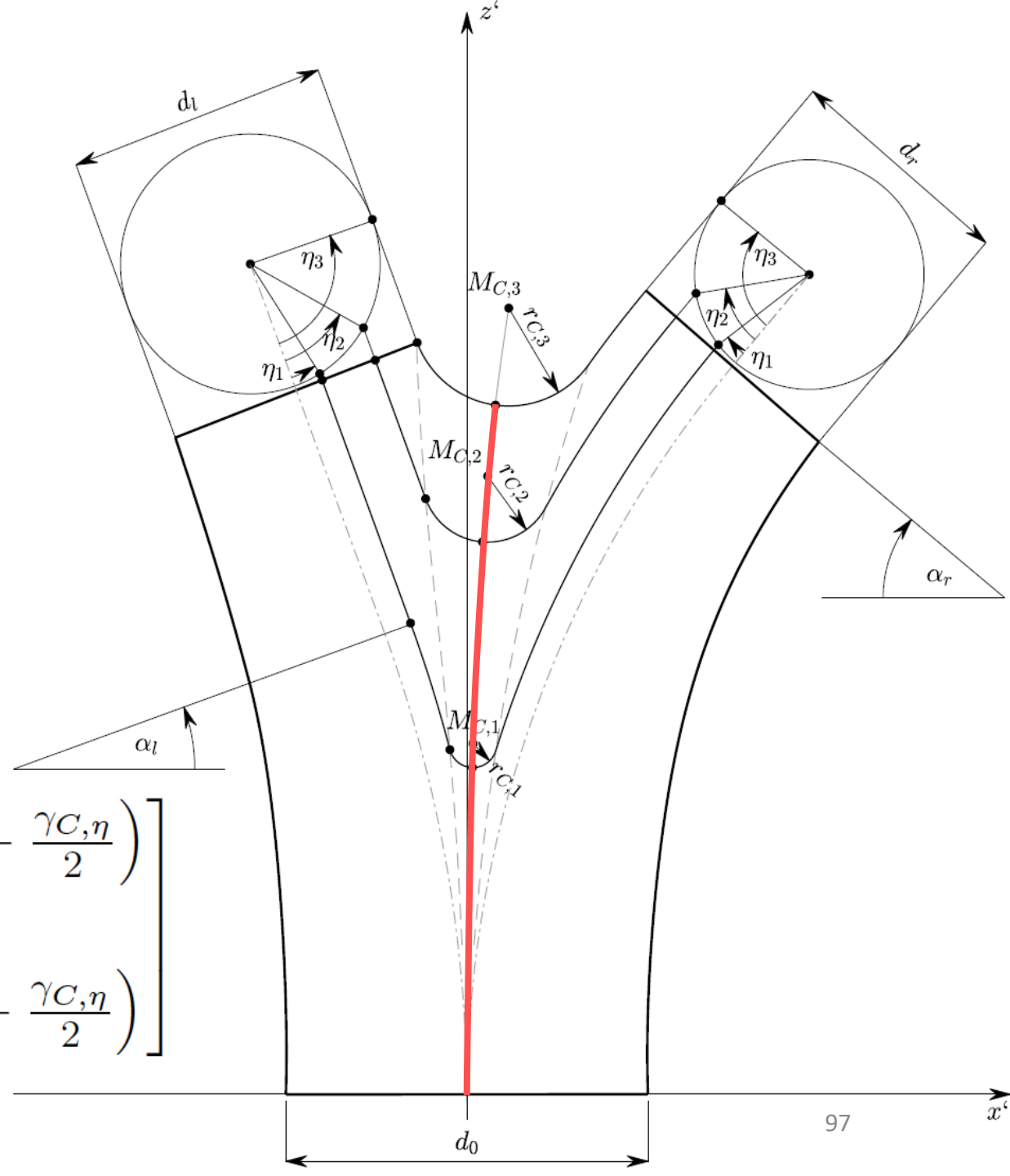


$$c^*(\eta) = M_{C,\eta}^* + r_C(\eta) \cdot \begin{bmatrix} -\cos\left(\min\{\alpha_l, \gamma_{l,\eta}\} + \frac{\gamma_{C,\eta}}{2}\right) \\ 0 \\ -\sin\left(\min\{\alpha_l, \gamma_{l,\eta}\} + \frac{\gamma_{C,\eta}}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Carinalkurve



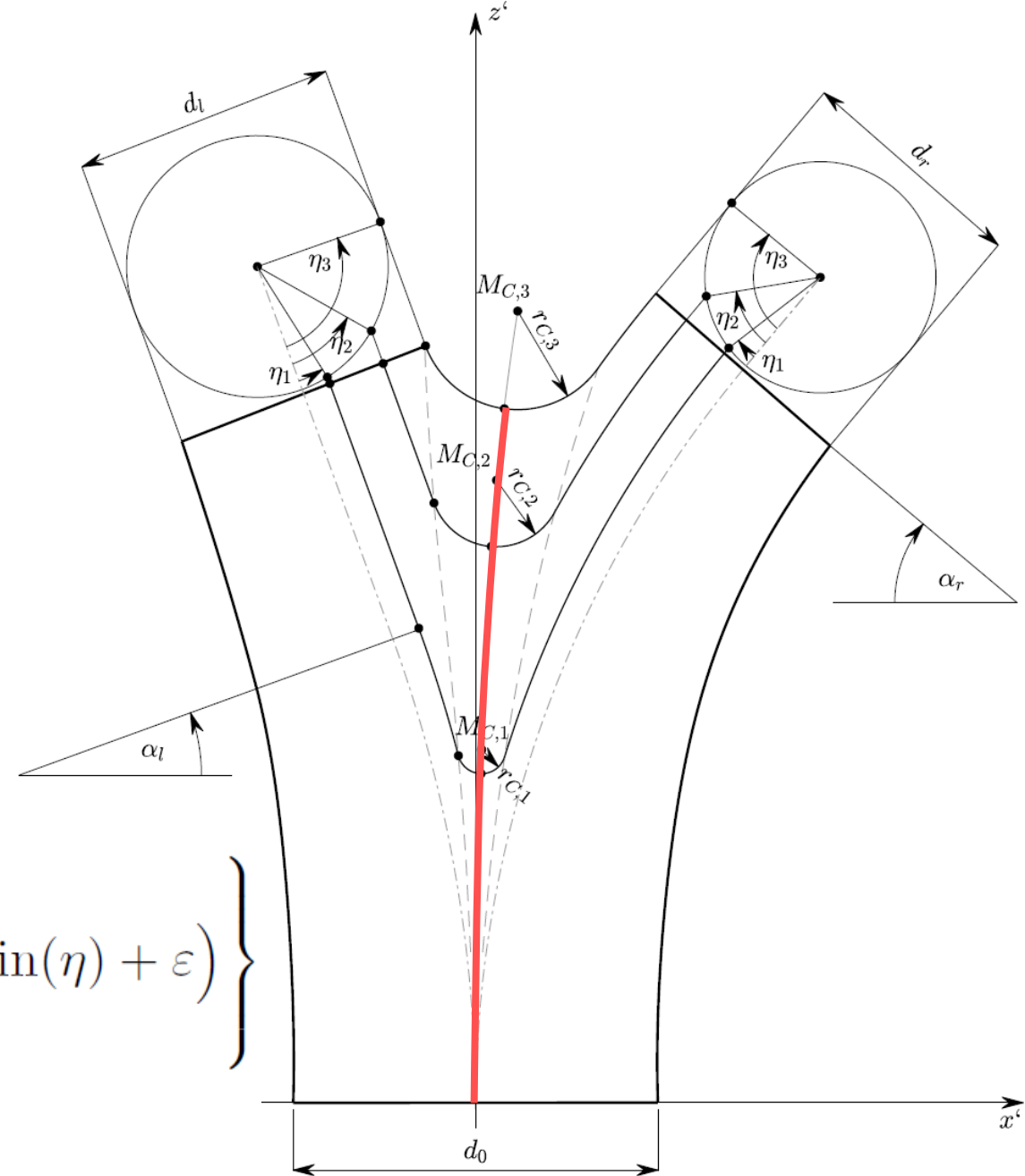
$$c^*(\eta) = M_{C,\eta}^* + r_C(\eta) \cdot \begin{bmatrix} -\cos\left(\min\{\alpha_l, \gamma_{l,\eta}\} + \frac{\gamma_{C,\eta}}{2}\right) \\ 0 \\ -\sin\left(\min\{\alpha_l, \gamma_{l,\eta}\} + \frac{\gamma_{C,\eta}}{2}\right) \end{bmatrix}$$



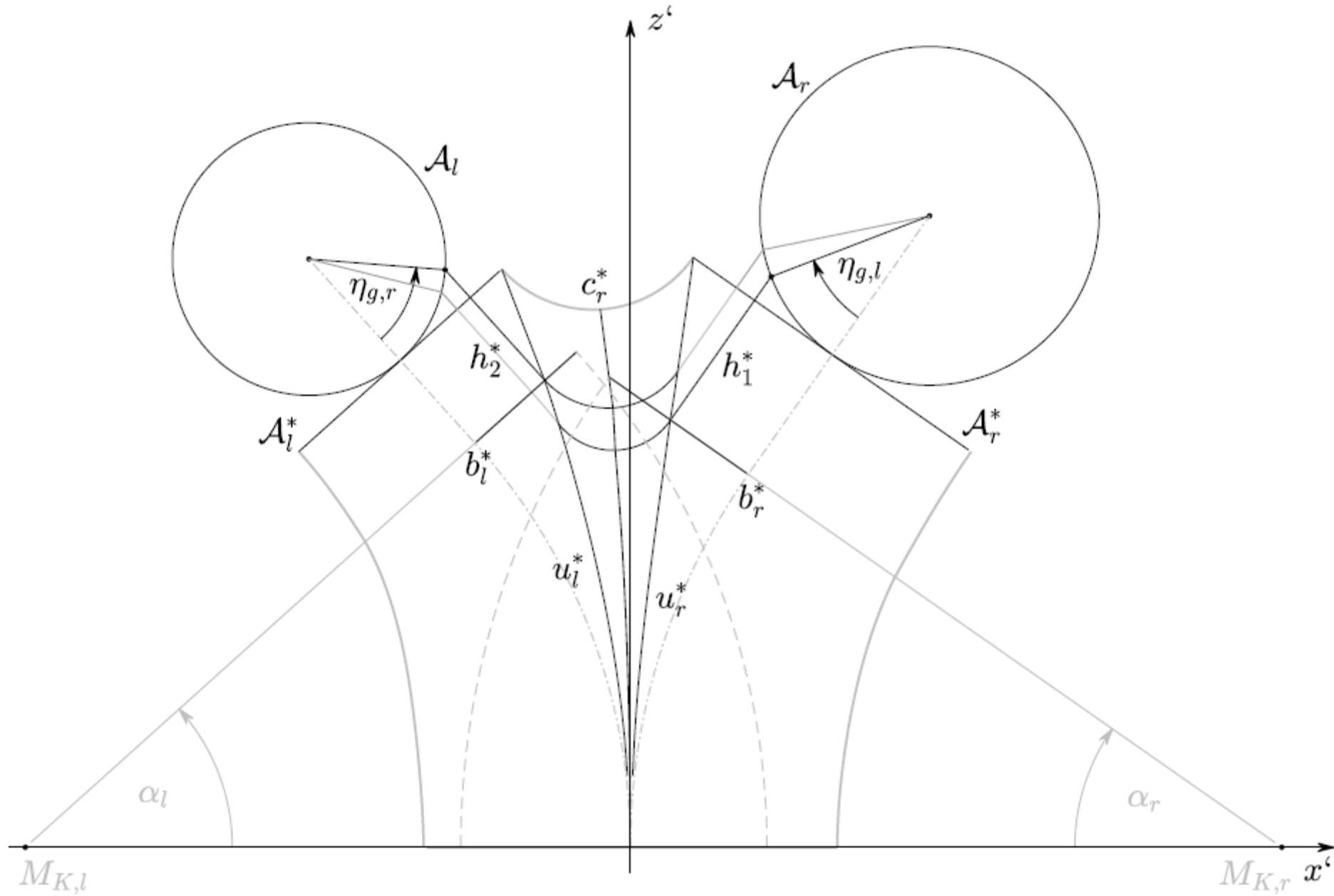
Proj. Anschlusskreise

$$\mathcal{A}_i^* := \left\{ \eta \in \mathcal{H}_{2\pi} : a_i^*(\eta) = M_{C,\eta^*}^* + \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) \\ 0 \\ \sin(\alpha_i) \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{d_i}{2} \cdot \sin(\eta) + \varepsilon \right) \right\}$$

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(\alpha_i) \cdot \left(r_C \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{d_i}{2} \right)$$



Radiale Grenzkonstruktionswinkel



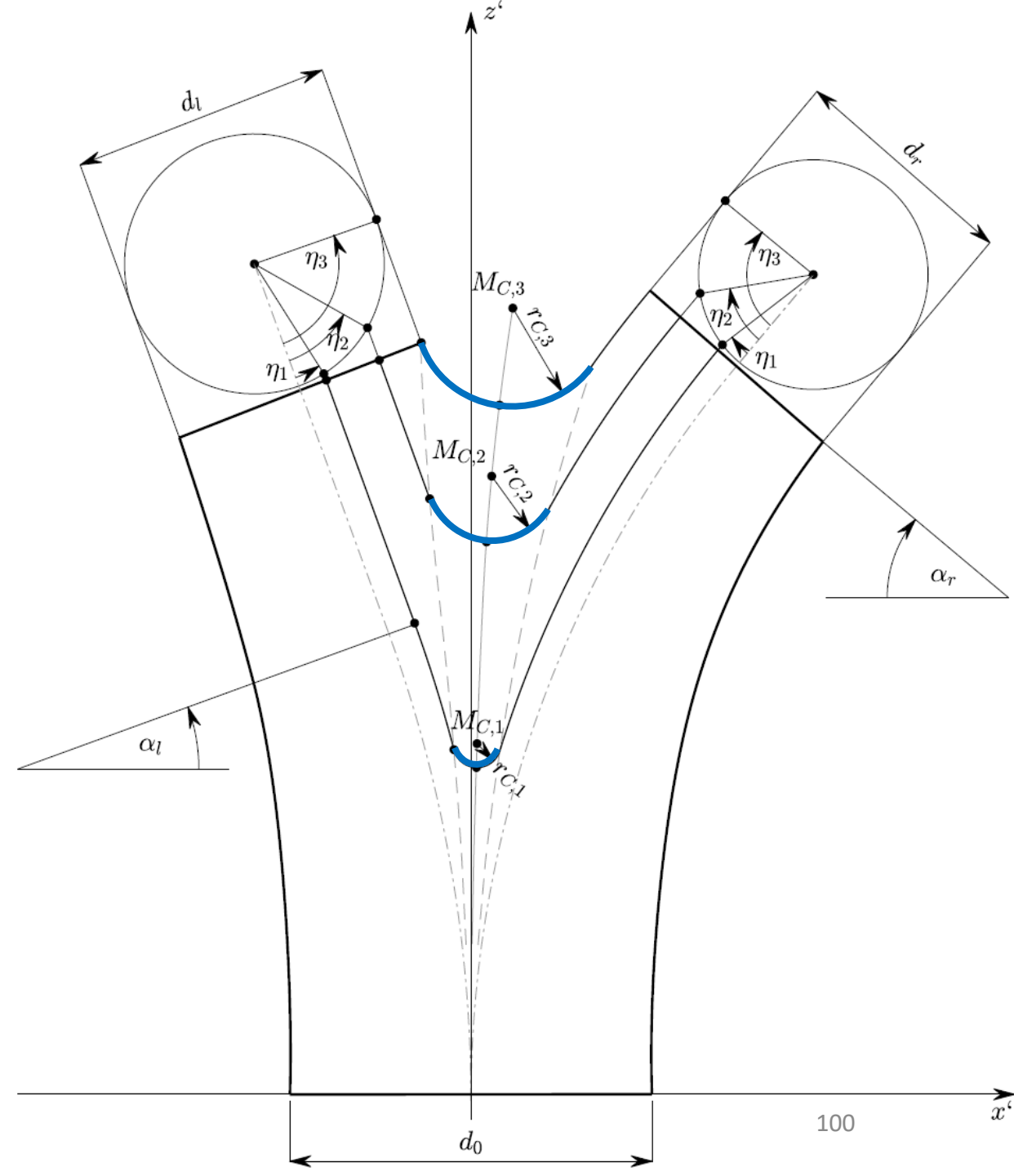
Projizierte Zwischenfläche: Abschnitt I

$$v_{Z,I}^*(\eta, \gamma) = m_C(\eta) + r_C(\eta) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\gamma) \\ 0 \\ -\sin(\gamma) \end{bmatrix}$$

$$\eta \in \mathcal{H}_{Z,I} := \{ \eta \in \mathbb{R} : 0 \leq \eta \leq \pi \}$$

$$\gamma \in \mathcal{G}_\eta := \{ \gamma \in \mathbb{R} : |\gamma_{r,\eta}| \leq \gamma \leq \pi - \gamma_{l,\eta} \}$$

$$\mathcal{V}_{Z,I}^* := \{ v_{Z,I}^*(\eta, \gamma) : \eta \in \mathcal{H}_{Z,I} \wedge \gamma \in \mathcal{G}_\eta \}$$



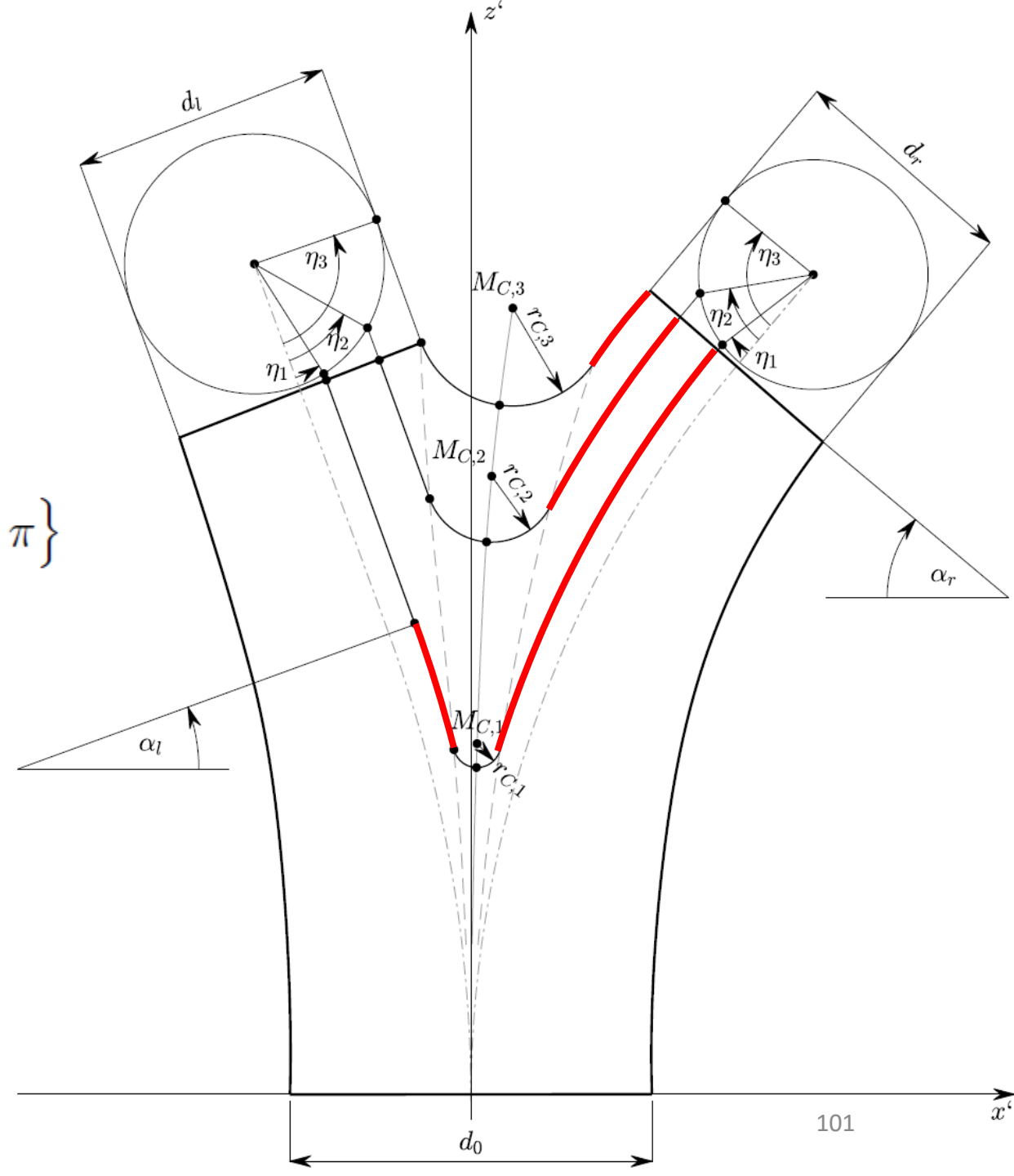
Projizierte Zwischenfläche: Abschnitt I

$$v_{Z,\text{II},i}^*(\eta, \varphi) = M_{K,i} + r_{K,i}(\eta) \cdot \begin{bmatrix} \text{sgn}(\alpha_i) \cdot \cos(\varphi) \\ 0 \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$\eta \in \mathcal{H}_{Z,\text{II},i} := \left\{ \eta \in \mathbb{R} : 0 \leq \eta \leq \eta_{g,i} \vee \pi - \eta_{g,i} \leq \eta \leq \pi \right\}$$

$$\varphi \in \mathcal{P}_{Z,i} := \left\{ \varphi \in \mathbb{R} : |\gamma_{\eta,i}| \leq \varphi \leq |\alpha_i| \right\}$$

$$\mathcal{V}_{Z,\text{II},i}^* := \left\{ v_{Z,\text{II},i}^*(\eta, \varphi) : \eta \in \mathcal{H}_{Z,\text{II},i} \wedge \varphi \in \mathcal{P}_{Z,i} \right\}$$



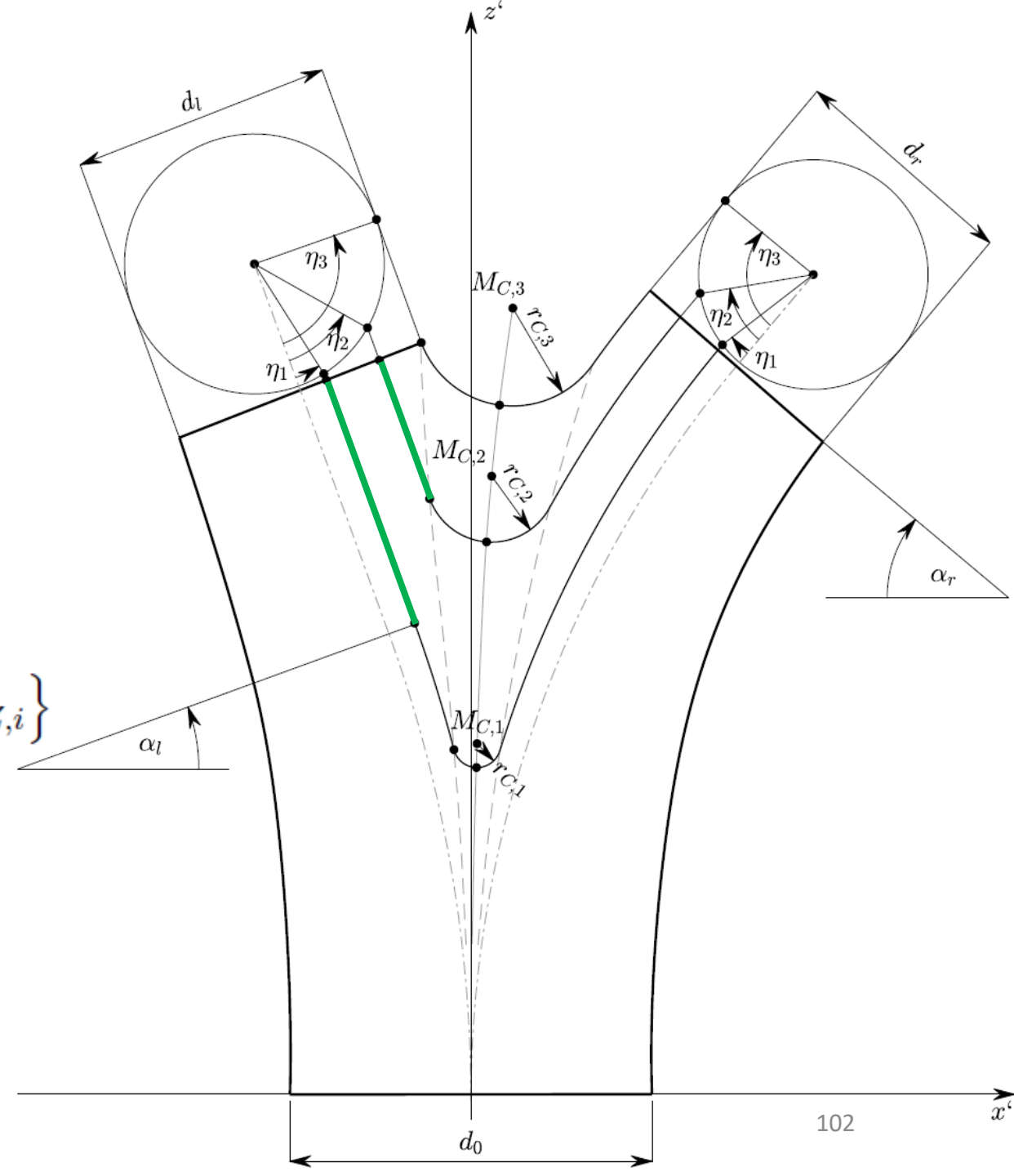
Projizierte Zwischenfläche: Abschnitt I

$$v_{Z,\text{III},i}^*(\eta, \lambda) = b_i^*(\eta) + \begin{bmatrix} -\sin(\alpha_i) \\ 0 \\ \cos(\alpha_i) \end{bmatrix} \cdot \lambda$$

$$\eta \in \mathcal{H}_{Z,\text{III},i} := \left\{ \eta \in \mathbb{R} : \eta_{g,i} \leq \eta \leq \pi - \eta_{g,i} \right\}$$

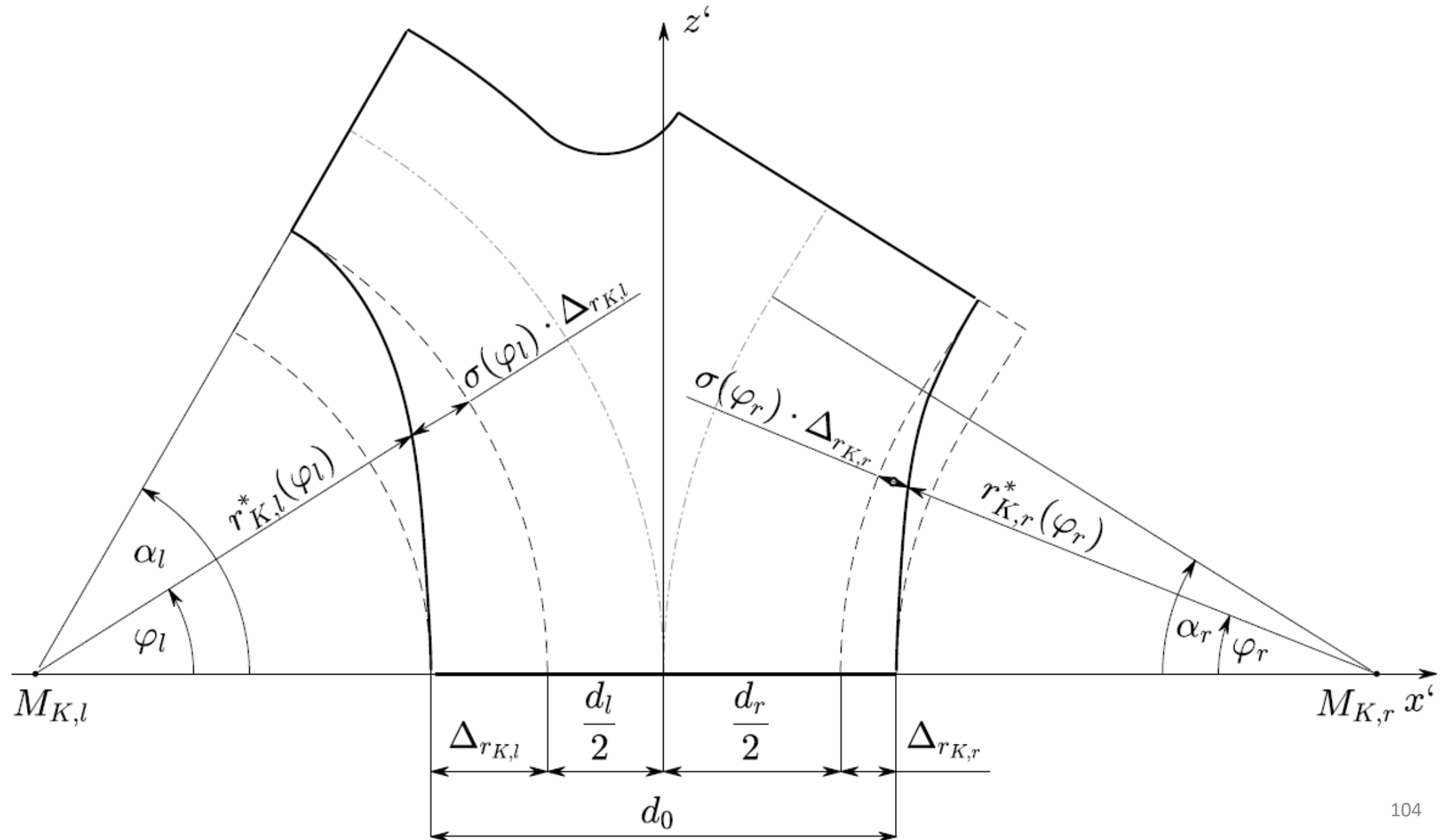
$$\lambda \in \mathcal{L}_{Z,i} := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : 0 \leq \lambda \leq \|a_i^*(\eta) - b_i^*(\eta)\| \right\}$$

$$\mathcal{V}_{Z,\text{III},i}^* := \left\{ v_{Z,\text{III},i}^*(\eta, \lambda) : \eta \in \mathcal{H}_{Z,\text{III},i} \wedge \lambda \in \mathcal{L}_{Z,i} \right\}$$



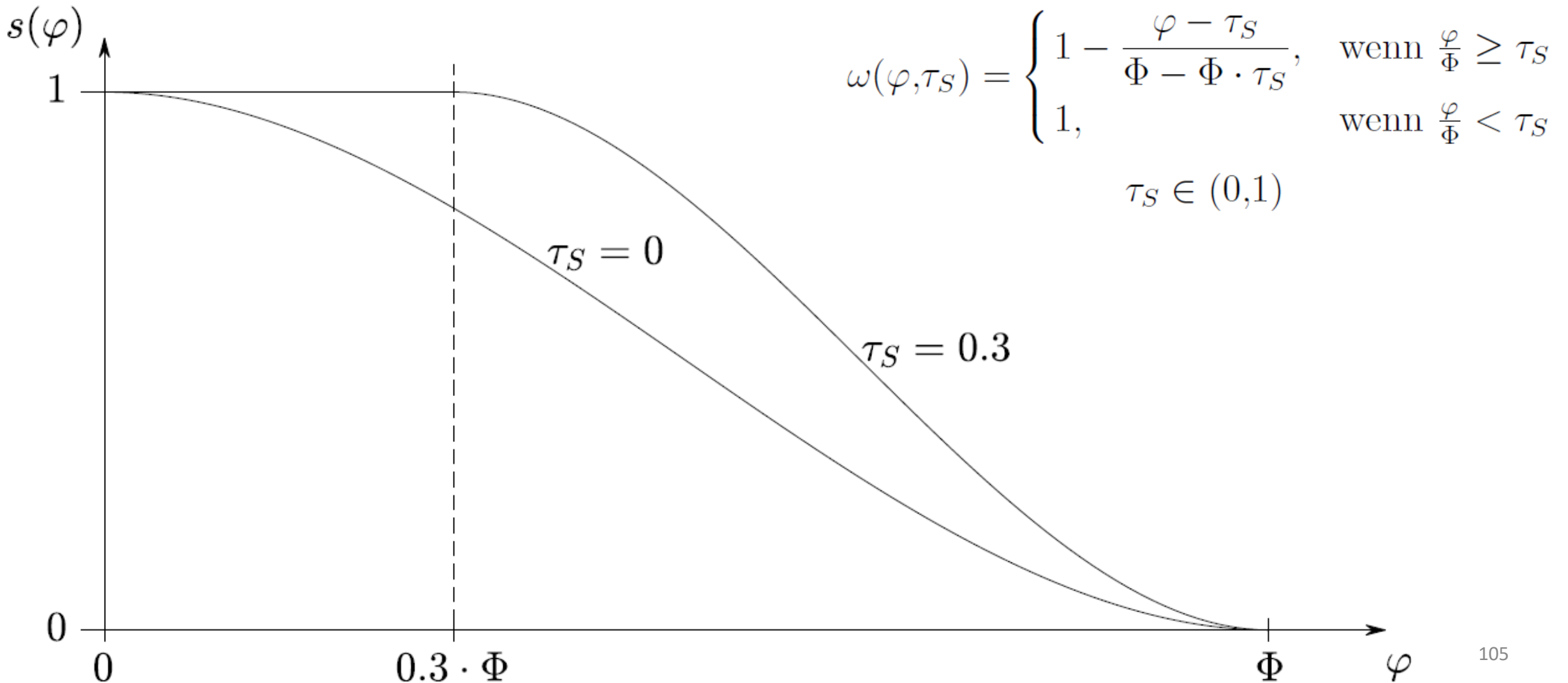
Berechnung der projizierten Außenfläche

Sigmoidfunktion als Übergangsfunktion



Sigmoidfunktion als Übergangsfunktion

$$s(\omega) = -2\omega^3 + 3\omega^2$$

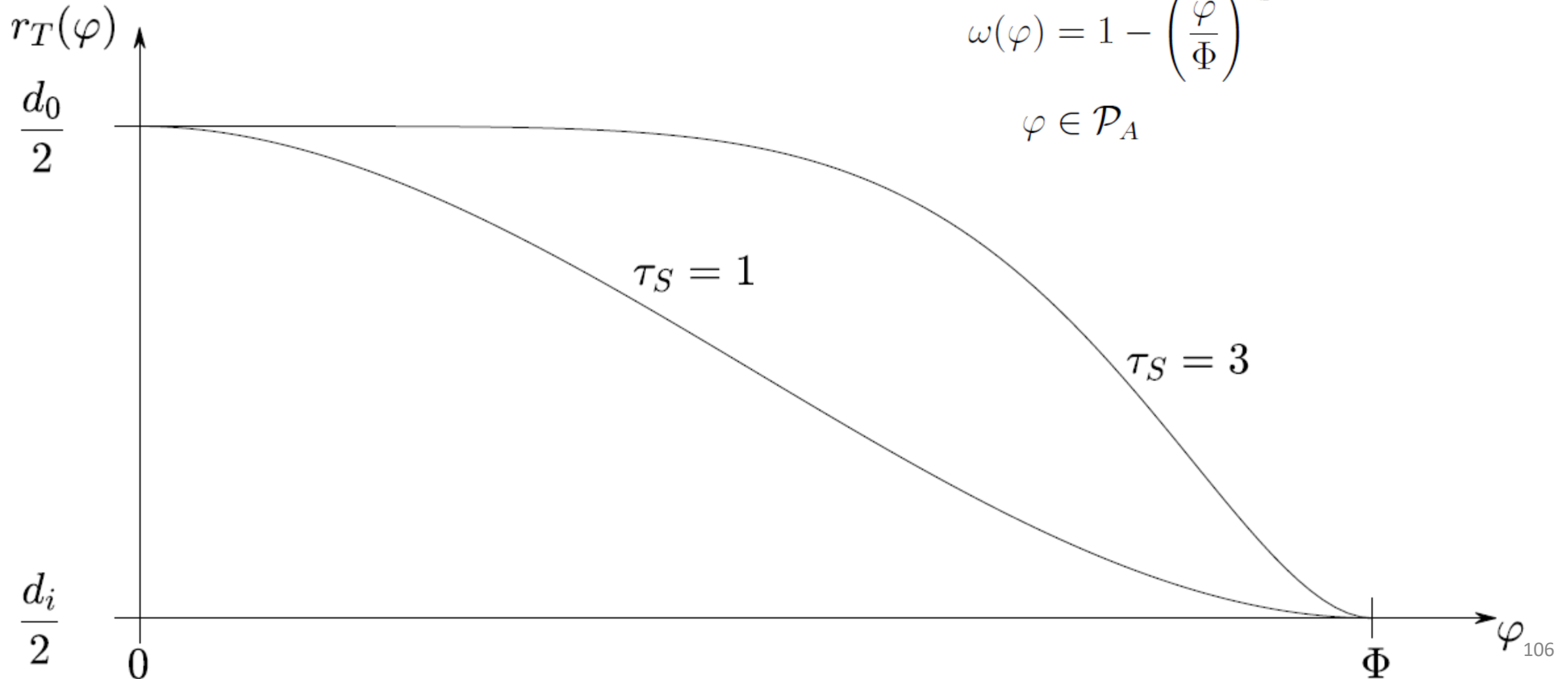


Sigmoidfunktion als Übergangsfunktion

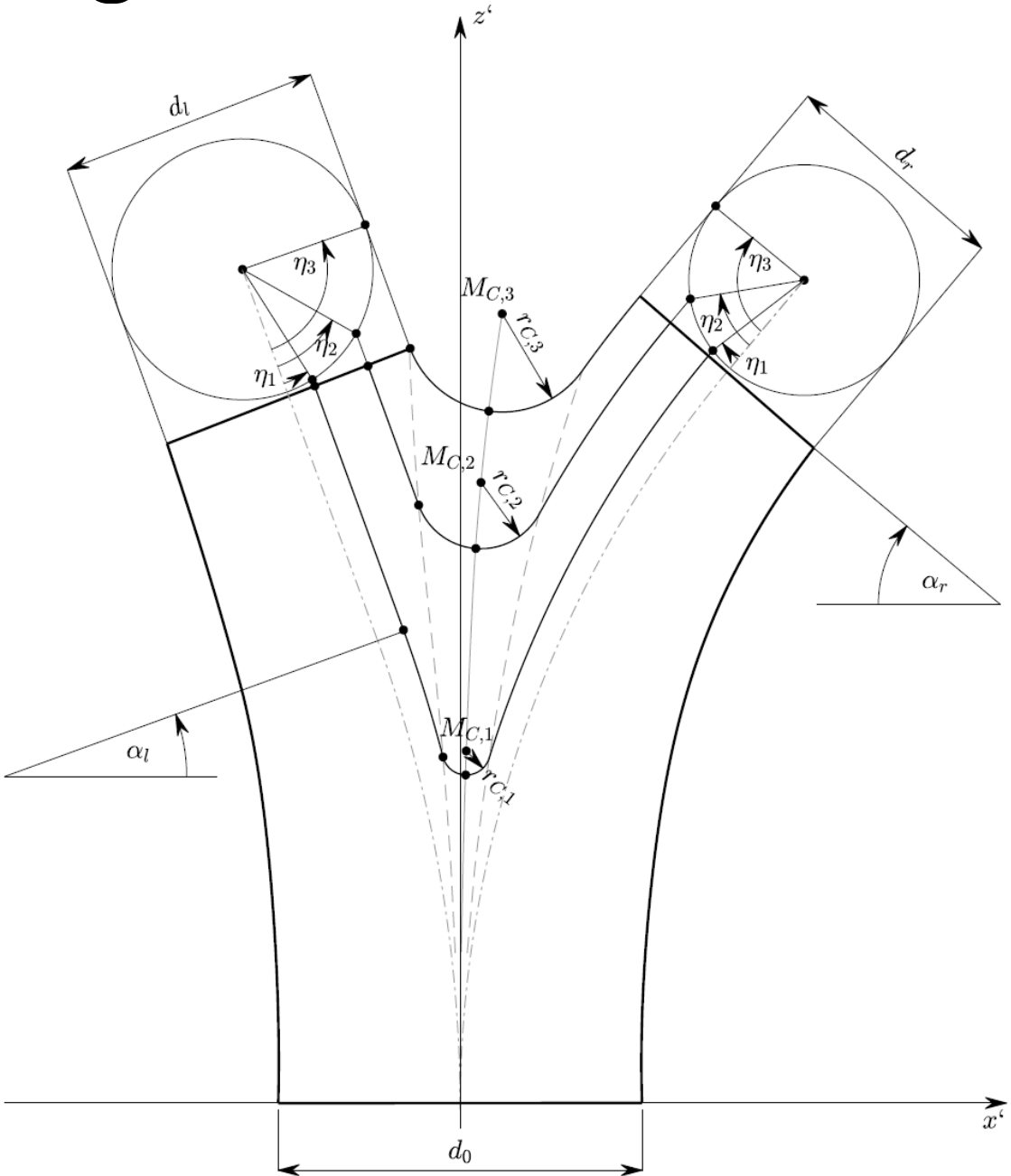
$$r_{T,i}(\varphi) = \frac{d_0 - d_i}{2} \cdot (-2\omega(\varphi)^3 + 3\omega(\varphi)^2) + \frac{d_i}{2}$$

$$\omega(\varphi) = 1 - \left(\frac{\varphi}{\Phi}\right)^{\tau_S}$$

$$\varphi \in \mathcal{P}_A$$



Sigmoidfunktion als Übergangsfunktion



$$r_{T,i}(\varphi) = \frac{d_0 - d_i}{2} \cdot (-2\omega(\varphi)^3 + 3\omega(\varphi)^2) + \frac{d_i}{2}$$

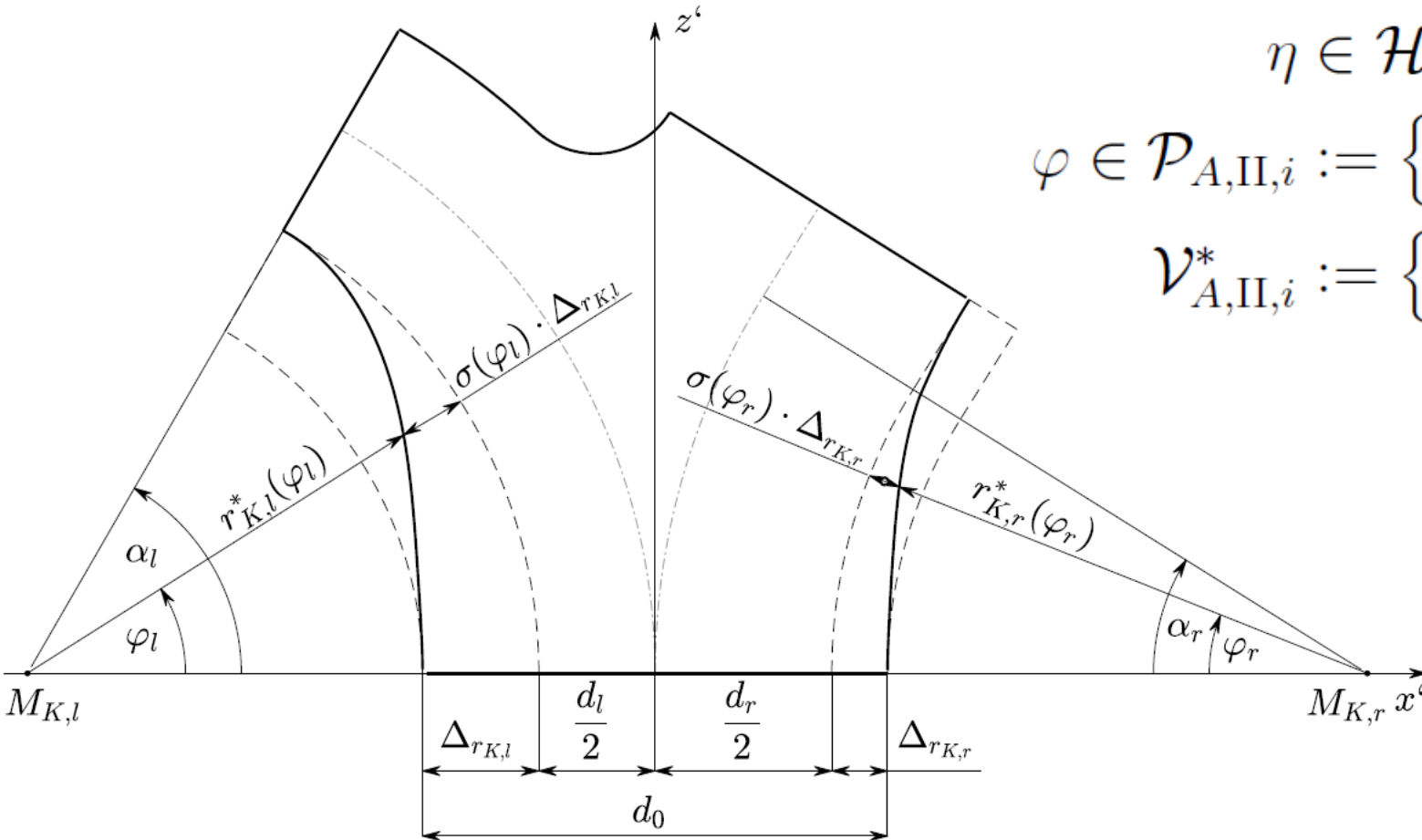
$$\omega(\varphi) = 1 - \left(\frac{\varphi}{\Phi} \right)^{\tau_S}$$

$$\varphi \in \mathcal{P}_A$$

$$\Phi_i = |\alpha_i| + \frac{l_{i,\text{III}}}{|M_{K,i,x'}|}$$

Projizierte Außenfläche: Abschnitt II

$$v_{A,II,i}^*(\eta, \varphi) = M_{K,i} + \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(\alpha_i) \cdot \cos(\varphi) \\ 0 \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix} \cdot (|M_{K,i,x'}| - \sin(\eta) \cdot r_T(\varphi))$$



$$\eta \in \mathcal{H}_\pi$$

$$\varphi \in \mathcal{P}_{A,II,i} := \{ \varphi \in \mathbb{R} : 0 \leq \varphi \leq |\alpha_i| \}$$

$$\mathcal{V}_{A,II,i}^* := \{ v_{A,II,i}^*(\eta, \varphi) : \eta \in \mathcal{H}_\pi \wedge \varphi \in \mathcal{P}_{A,II,i} \}$$

Projizierte Außenfläche: Abschnitt III

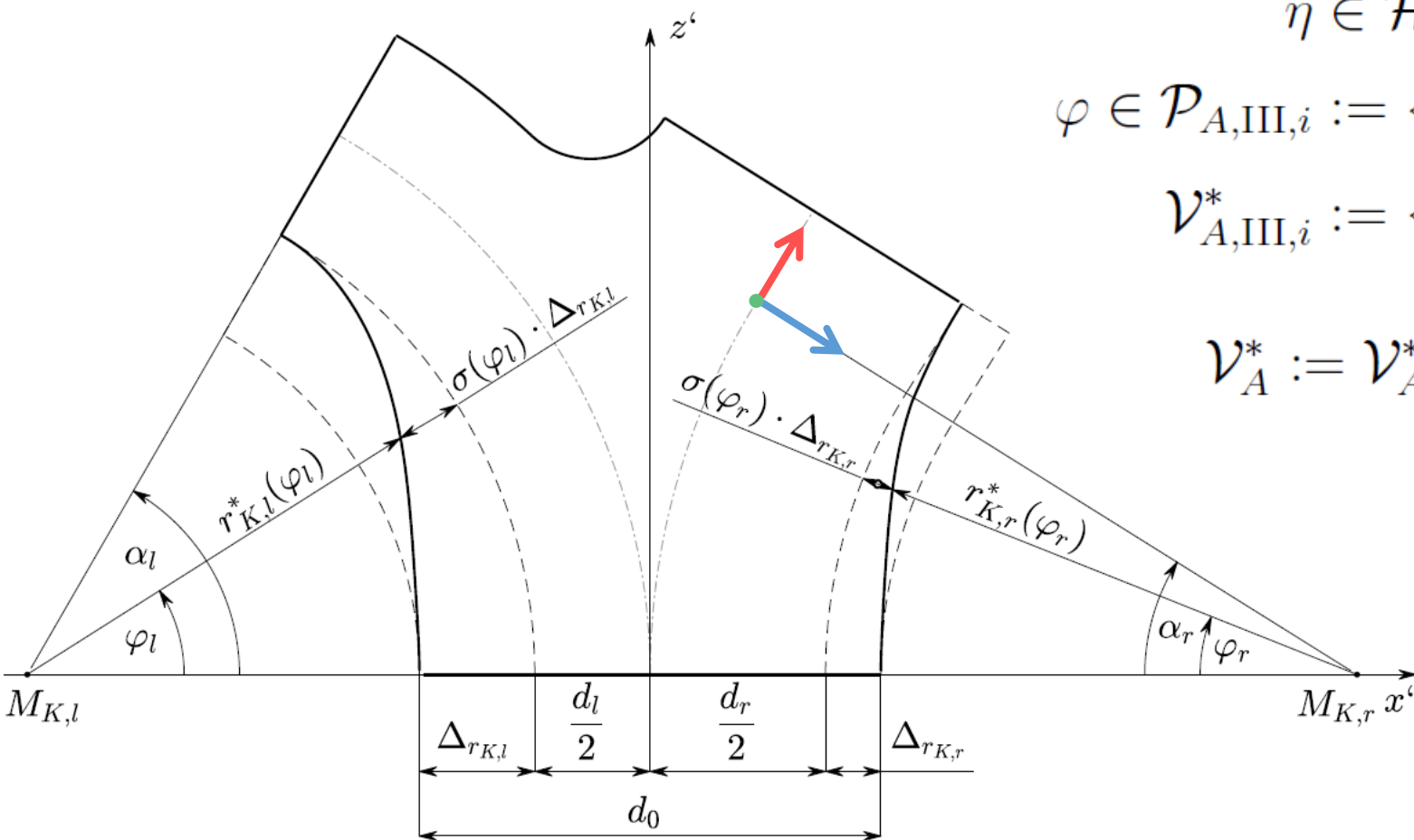
$$v_{A,III,i}^* = b_i^*(0) - \left(\begin{bmatrix} -\cos(\alpha_i) \\ 0 \\ \sin(\alpha_i) \end{bmatrix} \cdot M_{K,i,x'} \cdot (\varphi - |\alpha_i|) + \operatorname{sgn}(\alpha_i) \cdot r_{T,i}(\varphi) \cdot \sin(\eta) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) \\ 0 \\ \sin(\alpha_i) \end{bmatrix} \right)$$

$$\eta \in \mathcal{H}_\pi$$

$$\varphi \in \mathcal{P}_{A,III,i} := \{ \varphi \in \mathbb{R} : |\alpha_i| \leq \varphi \leq \Phi_i \}$$

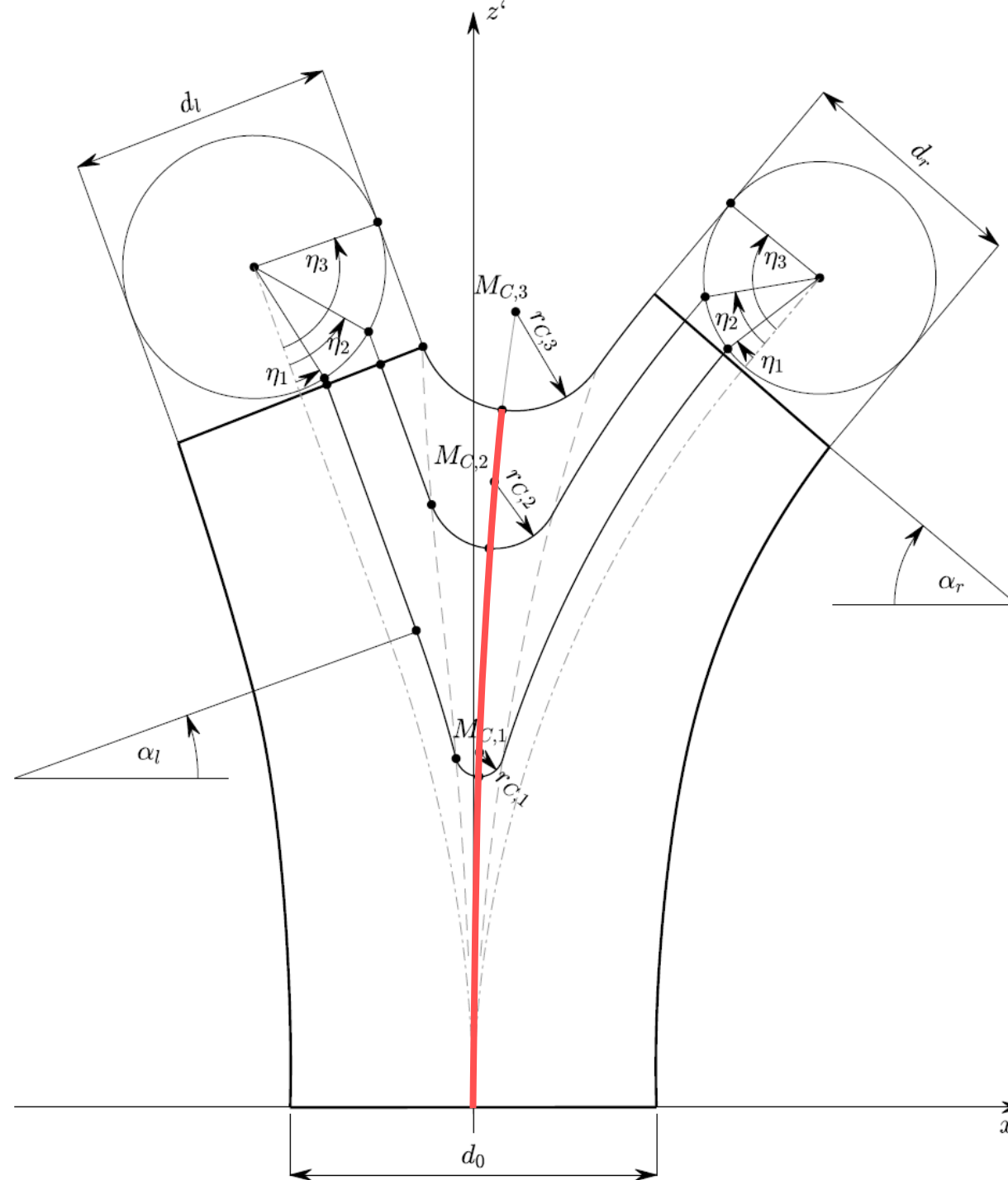
$$\mathcal{V}_{A,III,i}^* := \{ v_{A,III,i}^*(\eta, \varphi) : \eta \in \mathcal{H}_\pi \wedge \varphi \in \mathcal{P}_{A,III,i} \}$$

$$\mathcal{V}_A^* := \mathcal{V}_{A,II,r}^* \cup \mathcal{V}_{A,III,r}^* \cup \mathcal{V}_{A,II,l}^* \cup \mathcal{V}_{A,III,l}^*$$



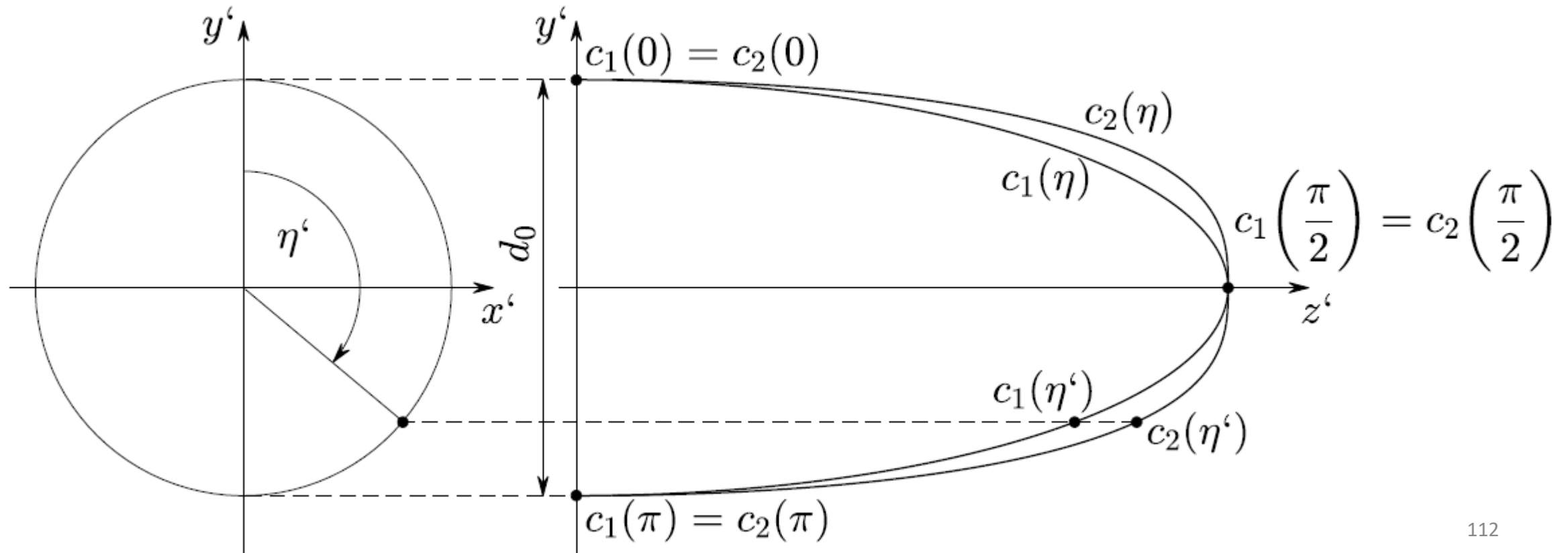
Dreidimensionale Zwischenflächen

Carinalkurve

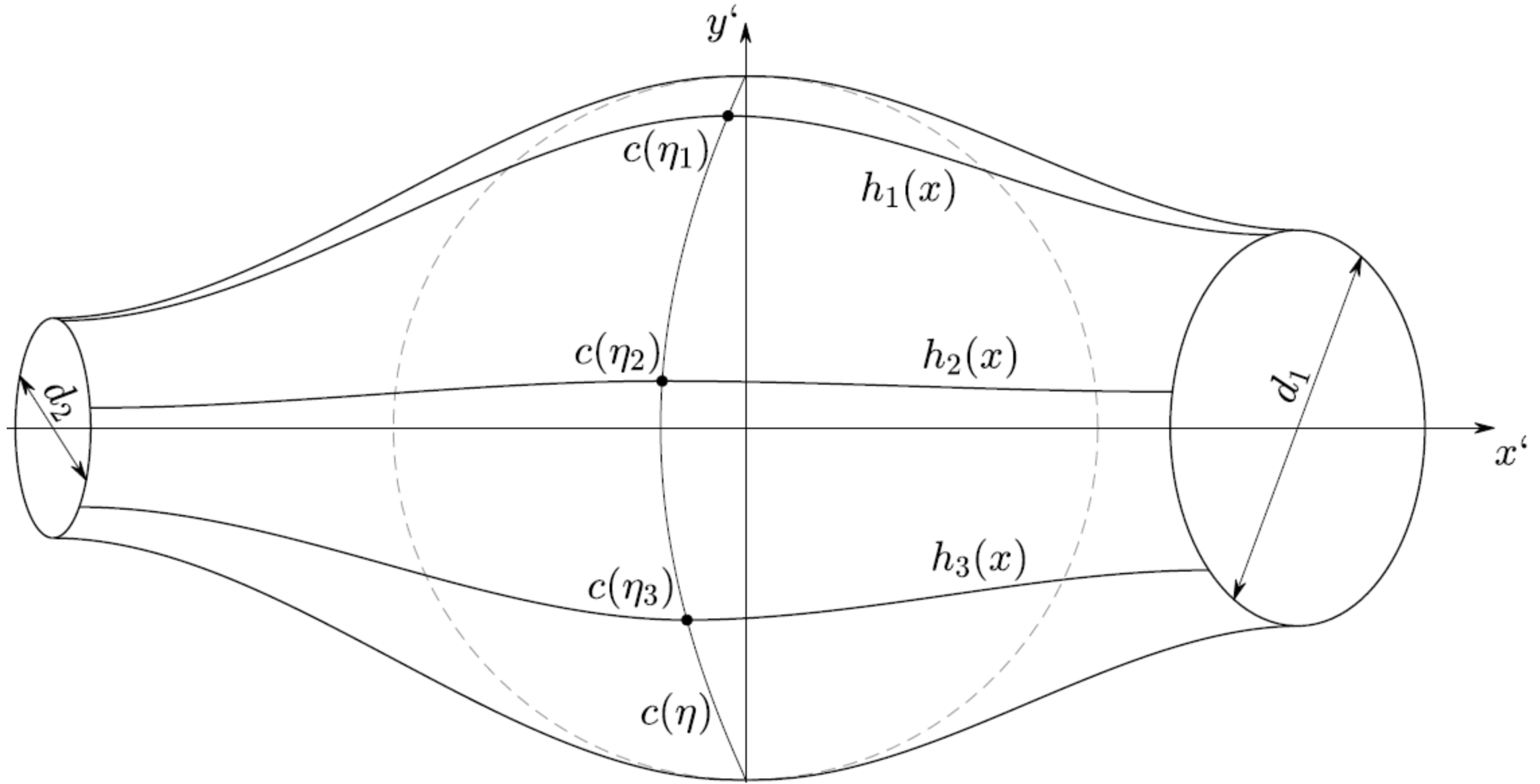


Carinalkurvenfunktion

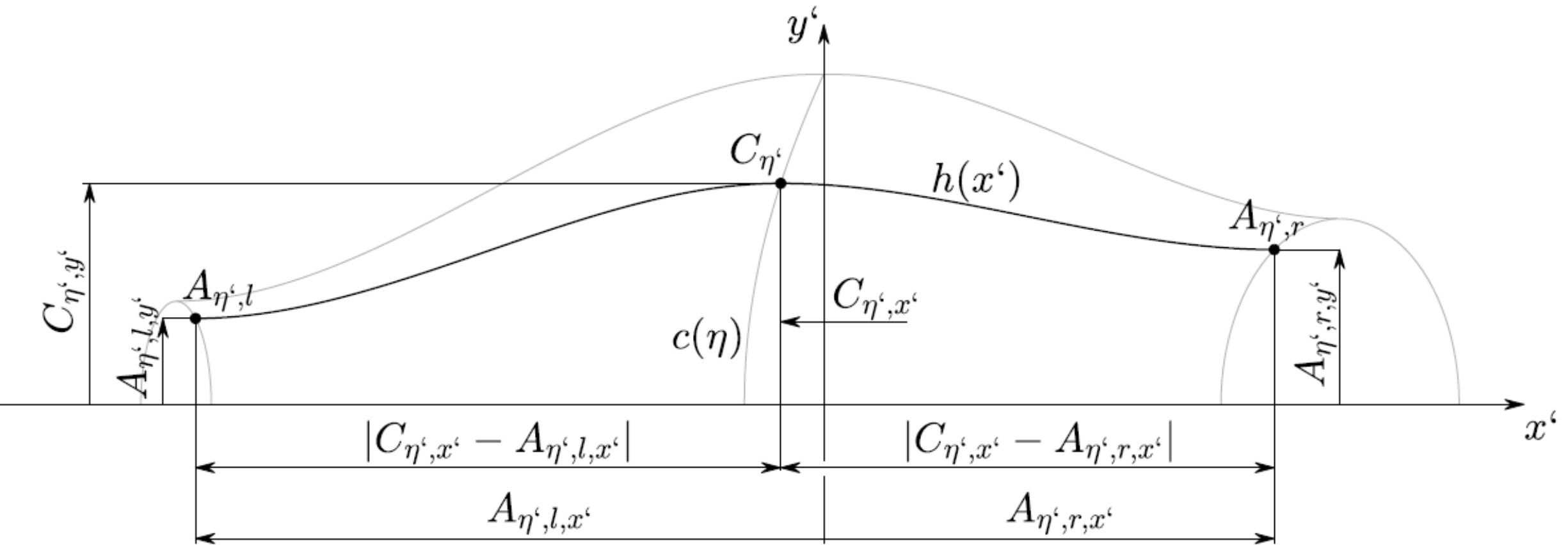
$$c(\eta) = c^*(\eta) + \begin{bmatrix} 0 \\ \left| \left(1 - \frac{2\eta}{\pi} \right)^{\tau_{C,3}} \right| \cdot \operatorname{sgn} \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sqrt{1 - \frac{\|c^*(\eta)\|^2}{\|c^*(\eta^*)\|^2}} \cdot \frac{d_0}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$



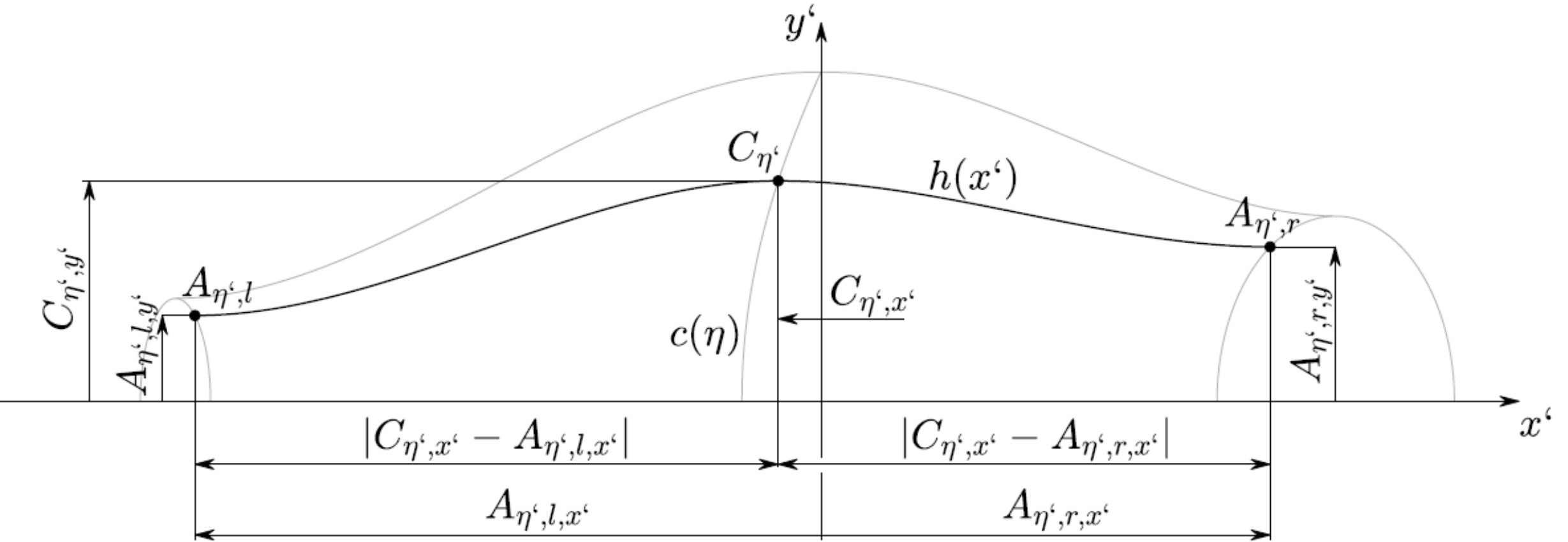
Sigmoidfunktion in der x' - y' -Ebene



Sigmoidfunktion in der x' - y' -Ebene

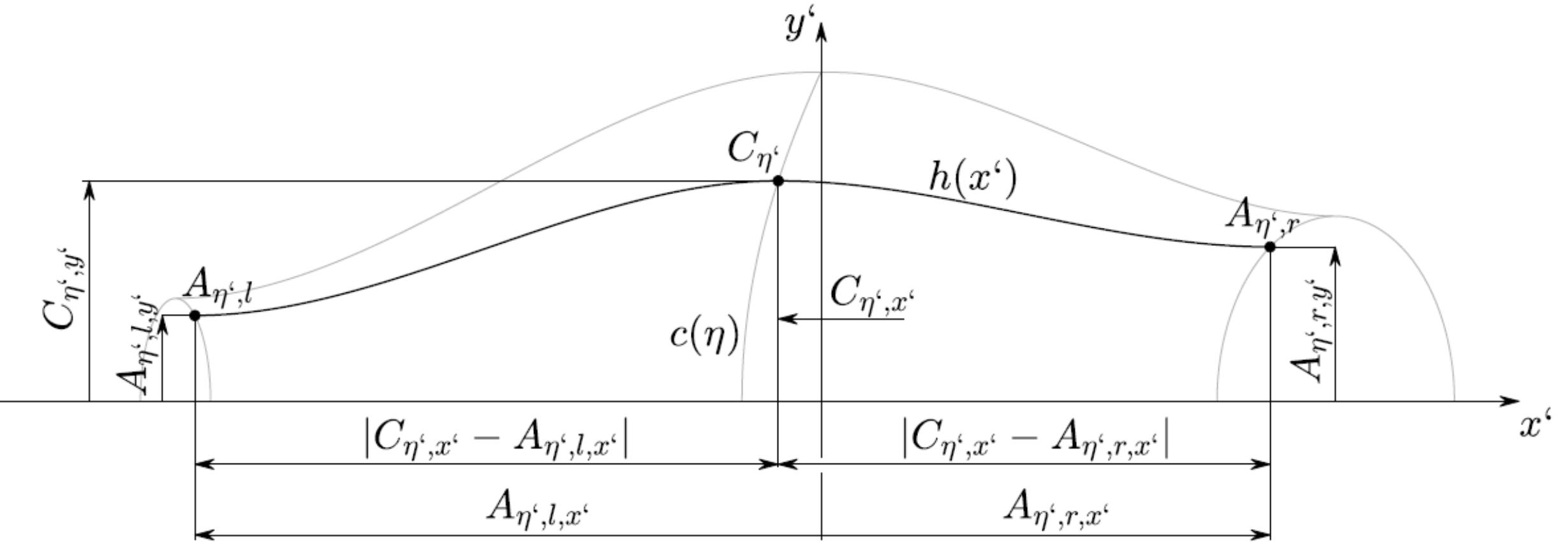


Sigmoidfunktion in der x' - y' -Ebene



$$\mathcal{A}_i := \left\{ \eta \in \mathcal{H}_{2\pi} : a_i(\eta) = a_i \eta^* + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\eta) \cdot \frac{d_i}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Sigmoidfunktion in der x' - y' -Ebene



$$y'_{Z,\eta',i}(x') = |C_{\eta',y'} - A_{\eta',i,y'}| \cdot (-2\omega(x')^3 + 3\omega(x')^2) + A_{\eta',i,y'}$$

$$\omega(x') = 1 - \left(\frac{|x' - C_{\eta',x'}|}{|A_{\eta',i,x'} - C_{\eta',x'}|} \right)^{\tau_S}$$

$$x' \in \mathcal{X}_i := \left\{ x' \in \mathbb{R} : \min\{C_{\eta',x'}, A_{\eta',i,x'}\} \leq x' \leq \max\{C_{\eta',x'}, A_{\eta',i,x'}\} \right\}$$

Berechnung der Zwischenflächen: Abschnitt I

$$v_{Z,I,i}(\eta, x') = v_{Z,I}^*(\eta, \gamma(\eta, x')) + y'_{Z,i}(\eta, x')$$

$$\gamma(\eta, x') = \arccos\left(\frac{x' - m_{C,x'}^*(\eta)}{r_C(\eta)}\right)$$

$$\eta \in \mathcal{H}_\pi$$

$$x' \in \begin{cases} \mathcal{X}_{I,l} := \{x' \in \mathbb{R} : u_{l,x'}^*(\eta) \leq x' \leq c(\eta)\} & \text{wenn } i = l \\ \mathcal{X}_{I,r} := \{x' \in \mathbb{R} : c(\eta) \leq x' \leq u_{r,x'}^*(\eta)\} & \text{wenn } i = r \end{cases}$$

$$\mathcal{V}_{Z,I,i} := \{v_{Z,I,i}(\eta, x') : \eta \in \mathcal{H}_\pi \wedge x' \in \mathcal{X}_{I,i}\}$$

Berechnung der Zwischenflächen: Abschnitt II

$$v_{Z,\text{II},i}(\eta, x') = v_{Z,\text{II}}^*(\eta, \varphi(\eta, x')) + y'_{Z,i}(\eta, x')$$

$$\varphi(\eta, x') = \arccos\left(\frac{x' - M_{K,i,x'}}{r_{K,i}(\eta) + \sin(\eta) \cdot \frac{d_i}{2}}\right)$$

$$\eta \in \mathcal{H}_\pi$$

$$x' \in \begin{cases} \mathcal{X}_{\text{II},l} := \{x' \in \mathbb{R} : b_{l,x'}^*(\eta) \leq x' \leq u_{l,x'}^*(\eta)\} & \text{wenn } i = l \\ \mathcal{X}_{\text{II},r} := \{x' \in \mathbb{R} : u_{r,x'}^*(\eta) \leq x' \leq b_{r,x'}^*(\eta)\} & \text{wenn } i = r \end{cases}$$

$$\mathcal{V}_{Z,\text{II},i} := \{v_{Z,\text{II},i}(\eta, x') : \eta \in \mathcal{H}_\pi \wedge x' \in \mathcal{X}_{\text{II},i}\}$$

Berechnung der Zwischenflächen: Abschnitt II

$$v_{Z,\text{III},i}(\eta, x') = v_{Z,\text{III}}^*(\eta, \lambda(\eta, x')) + y'_{Z,i}(\eta, x')$$

$$\lambda(\eta, x') = \frac{x' - b_{i,x'}^*(\eta)}{\sin(\alpha_i)}$$

$$\eta \in \mathcal{H}_\pi$$

$$x' \in \begin{cases} \mathcal{X}_{\text{III},l} := \left\{ x' \in \mathbb{R} : a_{l,x'}^*(\eta) \leq x' \leq \min\{b_{l,x'}^*(\eta), u_{l,x'}^*(\eta)\} \right\} & \text{wenn } i = l \\ \mathcal{X}_{\text{III},r} := \left\{ x' \in \mathbb{R} : \max\{b_{r,x'}^*(\eta), u_{r,x'}^*(\eta)\} \leq x' \leq a_{r,x'}^*(\eta) \right\} & \text{wenn } i = r \end{cases}$$

$$\mathcal{V}_{Z,\text{III},l} := \left\{ v_{Z,\text{III},i}(\eta, x') : \eta \in \mathcal{H}_\pi \wedge x' \in \mathcal{X}_{\text{III},l} \right\}$$

Dreidimensionale Außenflächen

Problem

- ⇒ Zwischenfläche hängt von x' ab.
- ⇒ projizierte Außenfläche hängt von f ab.
- ⇒ Wie kann eine stetige Übergangsfunktion formuliert werden?

Lösungsansatz

$$v_{y',A,i}(\eta,x') = \cos(\eta) \cdot (\sin(\eta)^2 \cdot f(x') + \cos(\eta)^2 \cdot g(x'))$$

$$\sin(\eta)^2 + \cos(\eta)^2 = 1$$

Übergangsfunktion

$$f(\varphi) = \frac{d_0 - d_i}{2} \cdot (-2\omega_f(\varphi)^3 + 3\omega_f(\varphi)^2) + \frac{d_i}{2}$$

$$\omega_f(\varphi) = 1 - \left(\frac{\varphi}{\Phi_i} \right)^{\tau_S}$$

Übergangsfunktion

$$f(\varphi) = \frac{d_0 - d_i}{2} \cdot (-2\omega_f(\varphi)^3 + 3\omega_f(\varphi)^2) + \frac{d_i}{2}$$

$$\omega_f(\varphi) = 1 - \left(\frac{\varphi}{\Phi_i} \right)^{\tau_S}$$

$$g(\tilde{x}(\eta, \varphi)) = \frac{d_0 - d_i}{2} \cdot (-2\omega_g(\tilde{x}(\eta, \varphi))^3 + 3\omega_g(\tilde{x}(\eta, \varphi))^2) + \frac{d_i}{2}$$

$$\omega_g(\tilde{x}(\eta, \varphi)) = 1 - \left(\frac{\tilde{x}(\eta, \varphi)}{|a_{i,x'}(\eta) - \sin(\eta) \cdot \frac{d_0}{2}|} \right)^{\tau_S}$$

Übergangsfunktion

$$f(\varphi) = \frac{d_0 - d_i}{2} \cdot (-2\omega_f(\varphi)^3 + 3\omega_f(\varphi)^2) + \frac{d_i}{2}$$

$$\omega_f(\varphi) = 1 - \left(\frac{\varphi}{\Phi_i} \right)^{\tau_S}$$

$$g(\tilde{x}(\eta, \varphi)) = \frac{d_0 - d_i}{2} \cdot (-2\omega_g(\tilde{x}(\eta, \varphi))^3 + 3\omega_g(\tilde{x}(\eta, \varphi))^2) + \frac{d_i}{2}$$

$$\omega_g(\tilde{x}(\eta, \varphi)) = 1 - \left(\frac{\tilde{x}(\eta, \varphi)}{|a_{i,x'}(\eta) - \sin(\eta) \cdot \frac{d_0}{2}|} \right)^{\tau_S}$$

$$\tilde{x}(\eta, \varphi) = \begin{cases} M_{K,i,x'} - \cos(\varphi) \cdot (M_{K,i,x'} - r_{T,i}(\varphi) \cdot \sin(\eta)) & \text{wenn } 0 \leq \varphi \leq |\alpha_i| \\ M_{K,i,x'} - \cos(\alpha_i) \cdot (M_{K,i,x'} - r_{T,i}(\alpha_i) \cdot \sin(\eta)) + \varphi \cdot \sin(\alpha_i) & \text{wenn } |\alpha_i| \leq \varphi \leq \Phi_i \end{cases}$$

Berechnung der Außenflächen

$$v_{A,\text{II},i}(\eta,\varphi) = v_{A,\text{II},i}(\eta,\varphi) + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\eta) \cdot \left(\sin(\eta)^2 \cdot f(\varphi) + \cos(\eta)^2 \cdot g(\tilde{x}(\eta,\varphi)) \right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi \in \mathcal{P}_A$$

$$\eta \in \mathcal{H}_\pi$$

$$\mathcal{V}_{A,i} := \left\{ v_{A,\text{II},i}(\eta,\varphi) : \eta \in \mathcal{H}_\pi \wedge \varphi \in \mathcal{P}_A \right\}$$

$$\mathcal{V}_A := \mathcal{V}_{A,l} \cup \mathcal{V}_{A,r}$$