Analyse de Fourier

Ressource : R314

Y. Haddab

yassine.haddab@umontpellier.fr

Analyse de Fourier (R314)

- **Objectif de la ressource :** introduire les outils spectraux pour l'analyse du signal.

- **Contenu :** signaux et utilisation, transformée de Fourier, produit de convolution, décomposition en séries de Fourier de signaux usuels.

- **Organisation du module :** 4+1 cours, 10 TD, 1 TP.

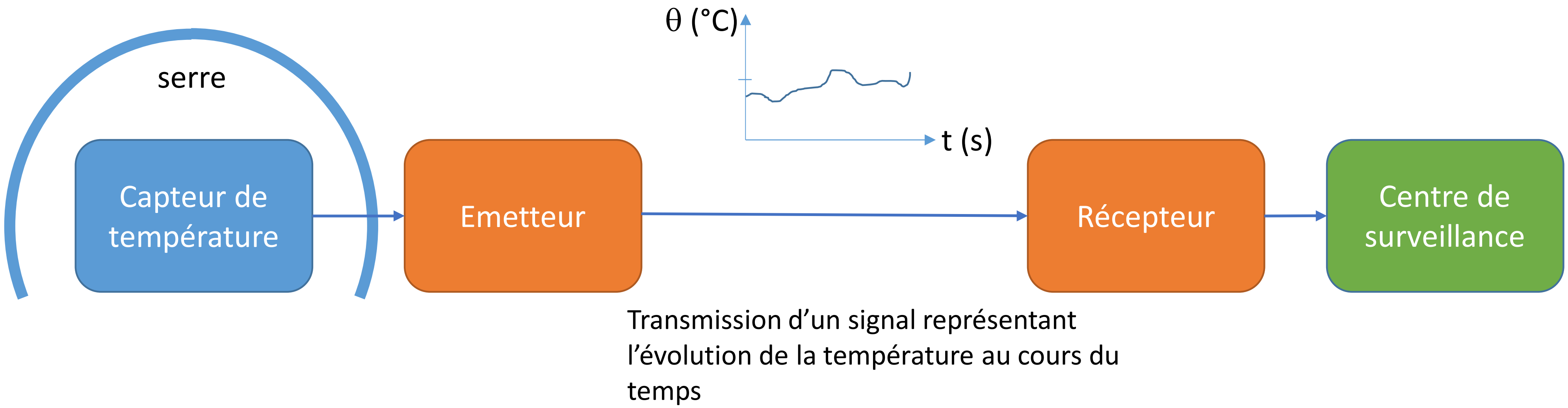
Introduction

- Les signaux sont à la base de nombreuses disciplines scientifiques et techniques (télécommunications, électronique, informatique, internet et réseaux, pilotage de systèmes, etc.)

- Ils sont utilisés de manière intensive dans la vie quotidienne (parole, langage des signes, téléphonie, musique, signalisation routière, etc.)

Introduction

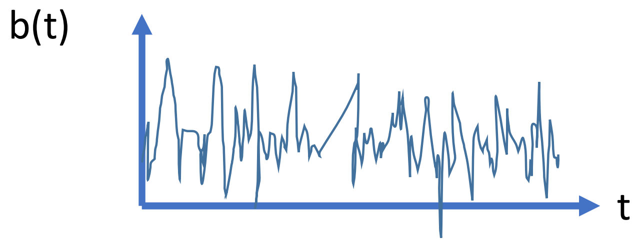
- **Définition :** un signal peut être défini comme une fonction d'une ou plusieurs variables servant de support à la transmission d'une information ou d'une commande.
- **Exemple :**



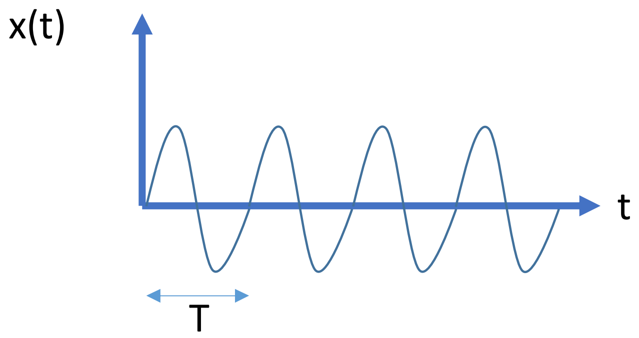
Suivi à distance de l'évolution de la température dans une serre agricole

Types de signaux

- **Signal aléatoire :** signal dont l'évolution dans le temps ne peut pas être prédite. Exemple : bruit.

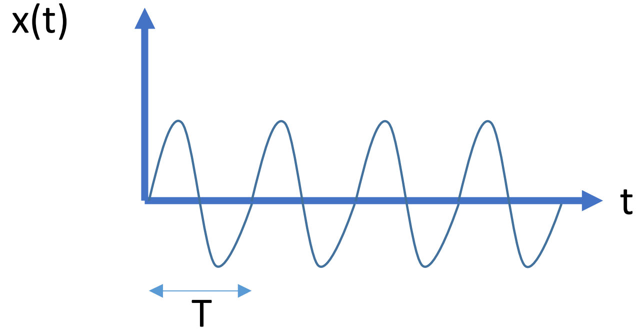


- **Signal déterministe :** signal dont l'évolution dans le temps peut être prédite. Exemple : signal sinusoïdal.

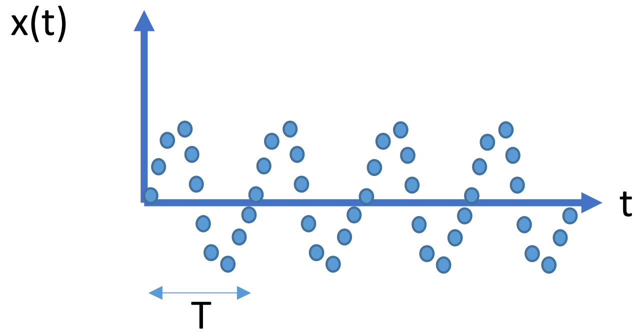


Types de signaux

- **Signal continu :** signal dont la valeur peut être déterminée à tout instant.

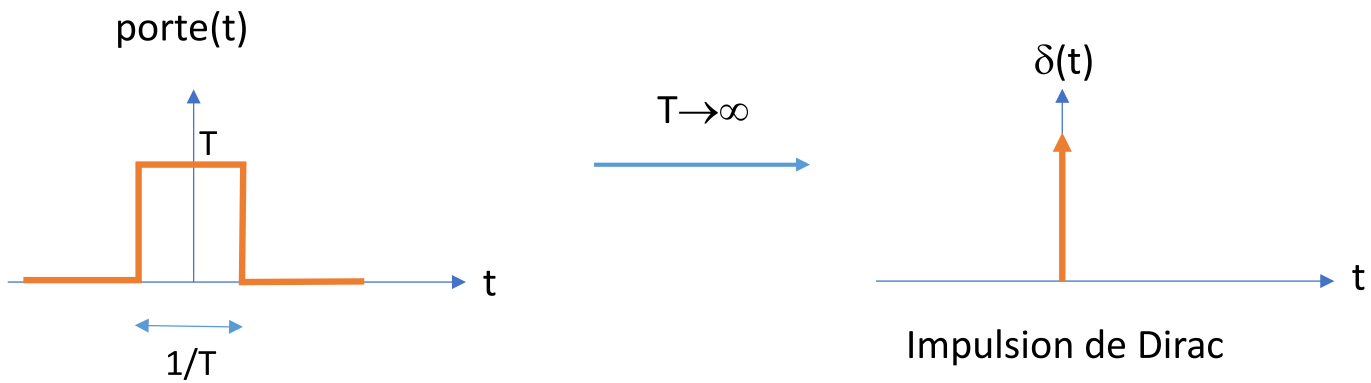


- **Signal discret :** signal dont la valeur n'est connue qu'à des instants privilégiés. Exemple : signal échantillonné.



Quelques signaux typiques

- **Impulsion de Dirac :** signal non réalisable (mais on peut s'en approcher !). Il peut être modélisé par un signal porte dont la largeur tend vers 0 et dont l'amplitude tend vers l'infini. C'est un signal très bref mais à très forte énergie.



Impulsion de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Quelques signaux typiques

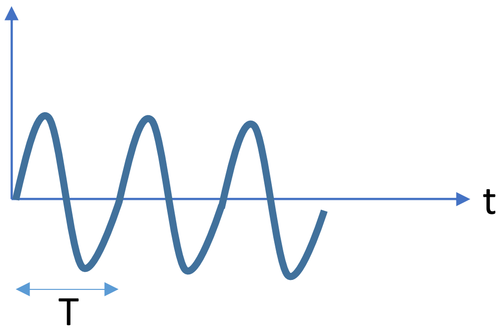
- **Fonction d'Heaviside (ou fonction échelon unitaire):** nul pour les temps négatifs et de valeur 1 pour les temps positifs.

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

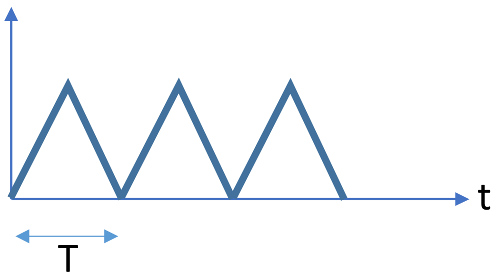
Quelques signaux typiques

- **Signaux périodiques:** signaux répétitifs (à chaque période T).

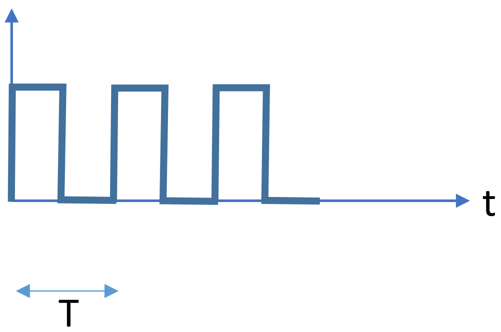
Sinus



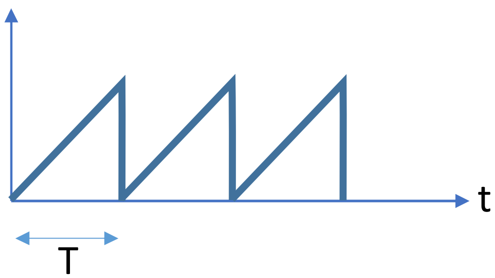
Triangle



rectangle



Dent de scie



Quelques signaux typiques

- **Un signal particulièrement important :** le signal sinusoïdal

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Amplitude maximale

Pulsation

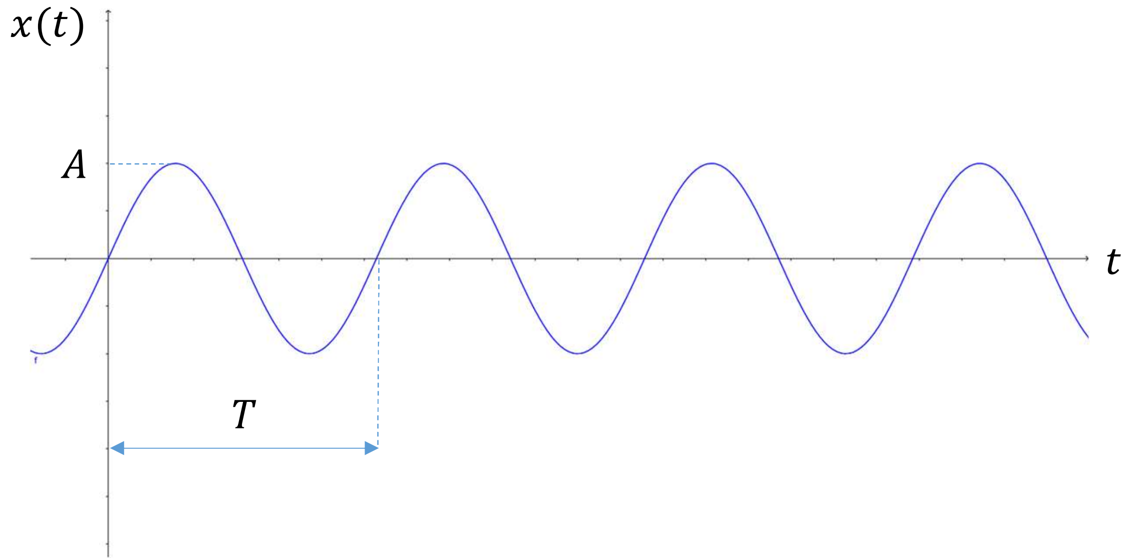
Phase à l'origine

$$\omega = 2\pi f$$

Fréquence

$$f = \frac{1}{T}$$

Période



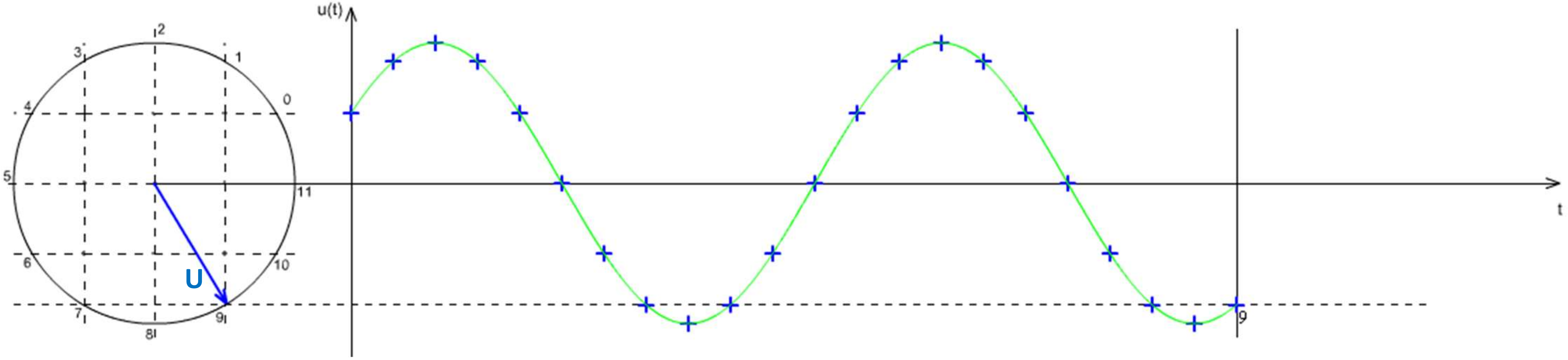
Valeur moyenne $\bar{X} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = 0$

Valeur efficace $X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (x(t))^2 dt} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

Quelques signaux typiques

- **Un signal particulièrement important :** le signal sinusoïdal

Principe de la génération d'un signal sinusoïdal



Pour les différents instants t (0,1, 2,...), on reporte la projection du vecteur U sur l'axe des ordonnées en fonction du temps t (croix bleue).

Représentation d'un signal

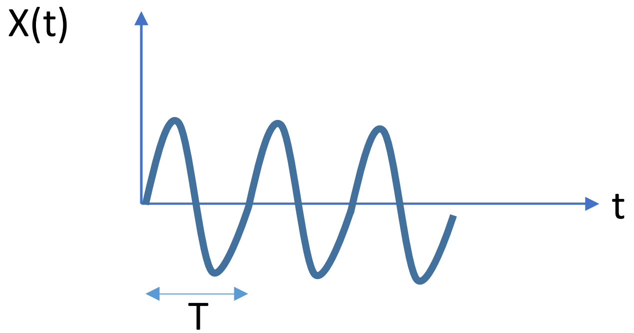
- Un signal quelconque y peut être représenté de deux façons :

  - **représentation temporelle :** il s'agit de la représentation de son évolution en fonction du temps,

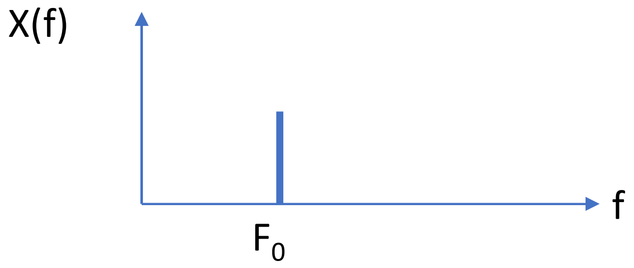
  - **représentation fréquentielle :** il s'agit de son évolution en fonction de la fréquence

Représentation d’un signal

- **Représentation temporelle**



- **Représentation fréquentielle**

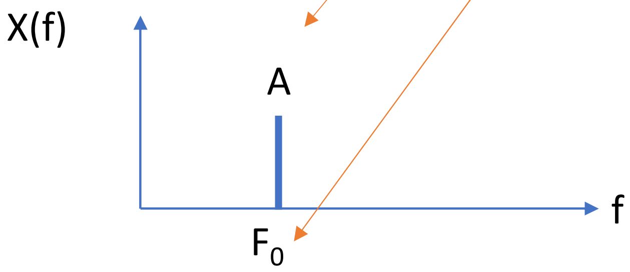


Spectre d’amplitude

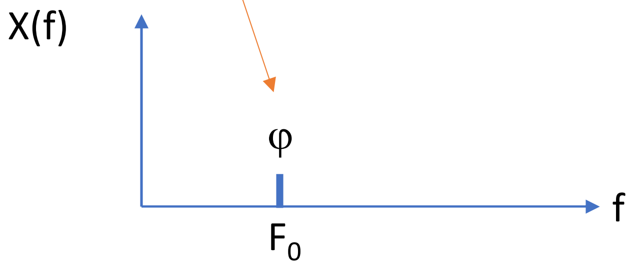
Représentation d'un signal

- **Représentation fréquentielle pour un signal sinusoïdal comportant un déphasage**

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$



Spectre d'amplitude



Spectre de phase

Qu'en est-il pour un signal périodique quelconque ?

Décomposition en série de Fourier

Décomposition en série de Fourier

Introduite par Joseph Fourier en 1822

1768 (Auxerre) - 1830 (Paris)

$x(t)$: Signal périodique de période T, de fréquence $f = \frac{1}{T}$ et intégrable sur l'intervalle T.

On peut toujours remplacer $x(t)$ par son développement en série de Fourier qui s'écrit comme suit :

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\left(2\pi\frac{nt}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi\frac{nt}{T}\right)\right)}$$

a_i et b_i sont les **coefficients de Fourier**.

Décomposition en série de Fourier

$x(t)$: Signal périodique de période T, de fréquence $f = \frac{1}{T}$ et intégrable sur l'intervalle T.

On peut toujours remplacer $x(t)$ par son développement en série de Fourier qui s'écrit comme suit :

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(2\pi \frac{nt}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{nt}{T}\right) \right)}$$

Ce développement est constituée de :

- une composante continue $\boldsymbol{a_0}$ qui constitue la **valeur moyenne du signal** ;
- un ensemble de fonctions **sinus** et **cosinus** aux fréquences $\boldsymbol{f, 2f, 3f, 4f, 5f}$**…**

Décomposition en série de Fourier

En posant $\omega = \frac{2\pi}{T}$ le développement en série de Fourier peut s'écrire comme suit :

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)}$$

Décomposition en série de Fourier

$x(t)$: Signal périodique de période T, de fréquence $f = \frac{1}{T}$ et intégrable sur l'intervalle T.

On peut toujours remplacer $x(t)$ par son développement en série de Fourier qui s'écrit comme suit :

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(2\pi \frac{nt}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{nt}{T}\right)\right)}$$

Développons cette expression :

$$x(t) = \boxed{a_0} + \boxed{a_1 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + b_1 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)} + \boxed{a_2 \cos\left(2\pi \frac{2t}{T}\right) + b_2 \sin\left(2\pi \frac{2t}{T}\right)} + \boxed{a_3 \cos\left(2\pi \frac{3t}{T}\right) + b_3 \sin\left(2\pi \frac{3t}{T}\right)} + \cdots$$

Composante continue	Signal à la fréquence f	Signal à la fréquence $2f$	Signal à la fréquence $3f$
Valeur moyenne	composante fondamentale (ou harmonique 1)	harmonique 2	harmonique 3

Décomposition en série de Fourier

$x(t)$: Signal périodique de période T, de fréquence $f = \frac{1}{T}$ et intégrable sur l'intervalle T.

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\left(2\pi \frac{nt}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{nt}{T}\right)\right)$$

Comment calculer les coefficients de Fourier ?

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$ c'est la valeur moyenne de x(t)

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(\frac{2\pi nt}{T})dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})dt$$

Décomposition en série de Fourier

- **Simplification dans le cas d'une fonctions paire**

Si x(t) est une fonction paire : x(t)=x(-t) alors : les coefficients b_n sont nuls.

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(2\pi \frac{nt}{T}\right)\right)}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$ c'est la valeur moyenne de x(t)

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

Décomposition en série de Fourier

- **Simplification dans le cas d'une fonctions impaire**

Si x(t) est une fonction impaire : -x(t)=x(-t) alors : les coefficients a_n sont nuls.

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(b_n \sin\left(2\pi \frac{nt}{T}\right)\right)}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$ c'est la valeur moyenne de x(t)

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})dt$$

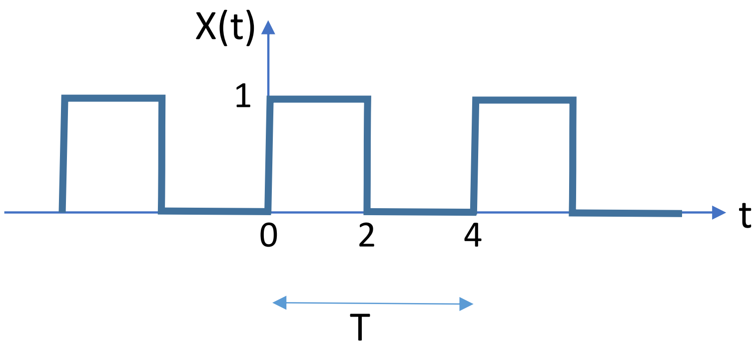
Exemple de calcul d’une série de Fourier

Exemple de calcul d'une série de Fourier

- **Exemple**

Soit la fonction x(t) définie comme suit :

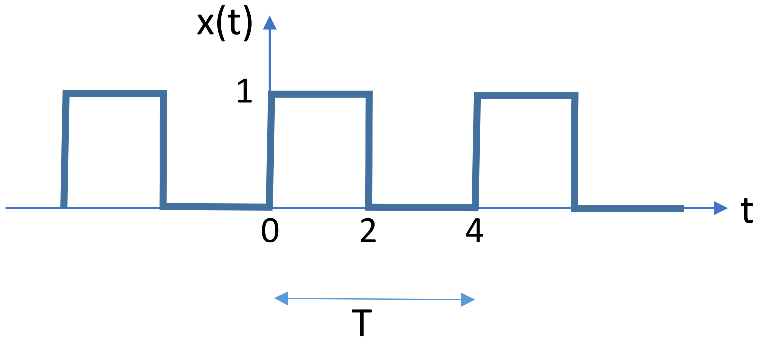
$$x(t) = \begin{cases} 1 \; si \; t \in]0,2] \\ 0 \; si \; t \in]2,4] \\ périodique \end{cases}$$



Exemple de calcul d'une série de Fourier

- **Exemple**

$$x(t) = \begin{cases} 1 \ si \ t \in]0,2] \\ 0 \ si \ t \in]2,4] \\ périodique \end{cases}$$



Cette fonction n'étant ni paire ni impaire, nous devons calculer tous les coefficients a_n et b_n .

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{2}$$ c'est la valeur moyenne de x(t)

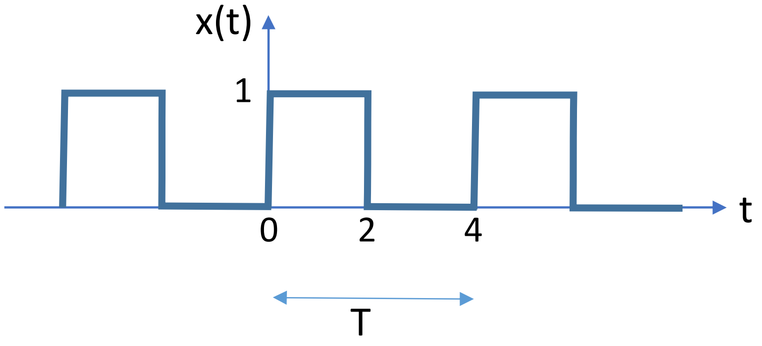
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(\frac{2\pi nt}{T})dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})dt = \frac{1}{n\pi}(1 - \cos(n\pi))$$

Exemple de calcul d'une série de Fourier

- **Exemple**

$$x(t) = \begin{cases} 1 \ si \ t \in]0,2] \\ 0 \ si \ t \in]2,4] \\ périodique \end{cases}$$

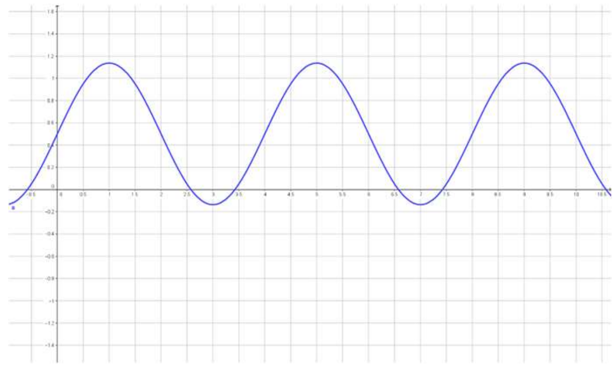


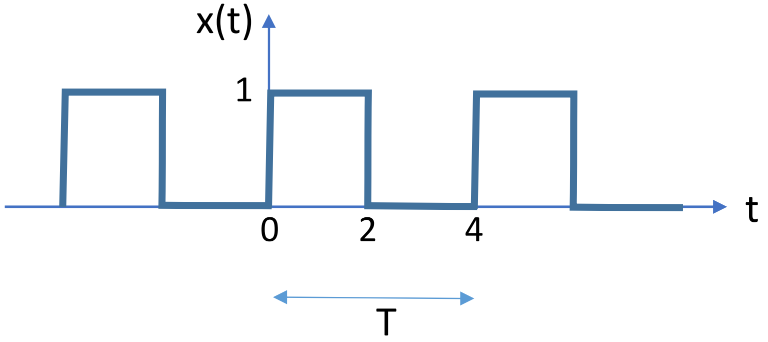
$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \frac{2}{5\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right) + \cdots$$

Exemple de calcul d’une série de Fourier

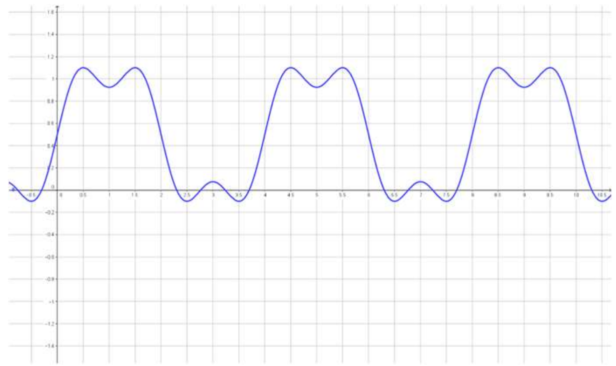
- **Exemple**

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

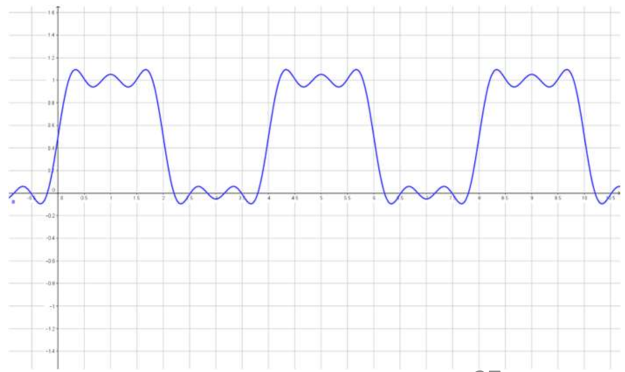




$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$$

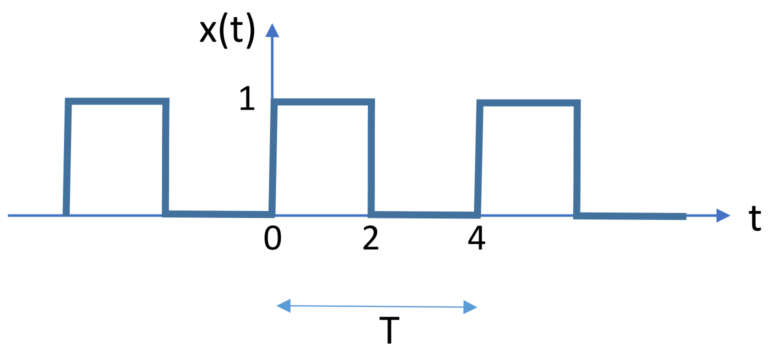


$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \frac{2}{5\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right)$$



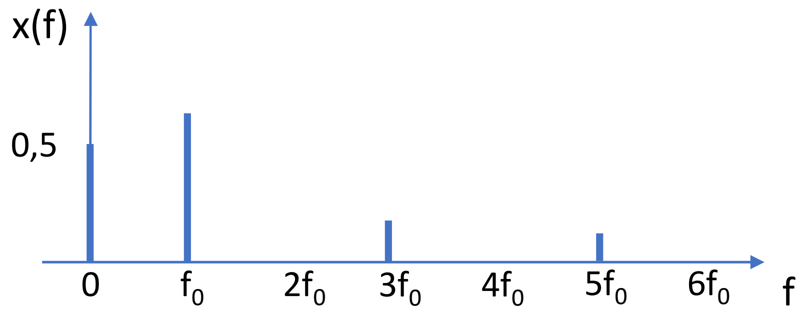
Exemple de calcul d'une série de Fourier

- **Exemple**



$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \frac{2}{5\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right) + \cdots$$

Dans ce cas particulier, les différentes fonctions sinusoïdales ne sont pas déphasées entre elles. Nous pouvons représenter complètement ce signal sur le plan fréquentiel par son **spectre d'amplitude** :



Spectre d'amplitude du signal

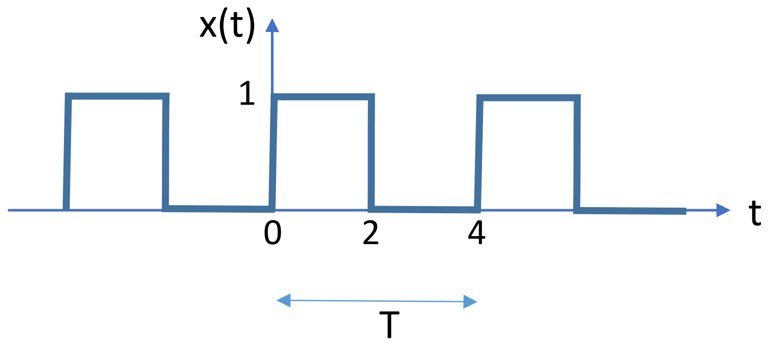
$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} = 2\pi f_0$$

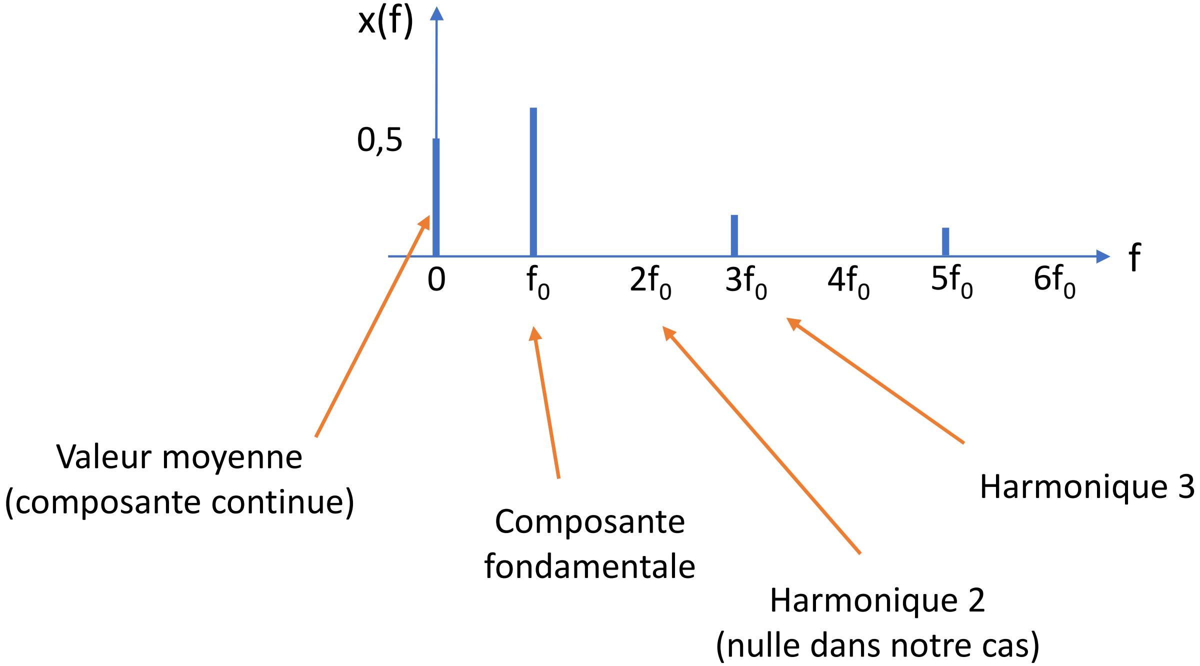
$$f_0 = \frac{1}{4}$$

Remarque : l'axe des abscisses peut également être gradué en pulsation.

Exemple de calcul d'une série de Fourier

- **Exemple**





$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} = 2\pi f_0$$

$$f_0 = \frac{1}{4}$$

Formulation des séries de Fourier pour la représentation des spectres de fréquences

But :

Simplifier l’écriture d’une série de Fourier pour faciliter le tracé des spectres d’amplitude et de phase d’une fonction.

Formulation adaptée d'une série de Fourier pour le tracé des spectres

- **Cas général**

De manière générale, les coefficients de Fourier a_n et b_n ne sont pas nuls.

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(2\pi \frac{nt}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{nt}{T}\right) \right)$$

On constate que pour chaque fréquence (fondamentale ou harmonique) le signal obtenu résulte de la contribution de la fonction sinus et de la fonction cosinus correspondantes.

Par exemple, à la fréquence fondamentale f=1/T (obtenue pour n=1 dans la formule précédente), le signal obtenu peut s'écrire ainsi :

$$\boxed{x_1(t) = a_1 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + b_1 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)}$$

Et à la fréquence de l'harmonique n, f_n=n.f=n/T le signal obtenu peut s'écrire ainsi :

$$\boxed{x_n(t) = a_n \cos\left(2\pi \frac{nt}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{nt}{T}\right)}$$

Formulation adaptée d'une série de Fourier pour le tracé des spectres

Nous pouvons donc exprimer le signal complet de la manière suivante :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n(t) = a_0 + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) + \cdots$$

Chaque composante peut être exprimée par :

$$x_n(t) = a_n \cos\left(2\pi \frac{nt}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{nt}{T}\right)$$

Ou par :

$$x_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$ Car $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Formulation adaptée d'une série de Fourier pour le tracé des spectres

$$\boxed{x_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)}$$

Montrons que nous pouvons exprimer cette composante comme un unique signal sinusoïdal de la forme :

$$\boxed{x_n(t) = A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)}$$

Dans lequel A_n est réel positif et φ_n réel :

$$x_n(t) = A_n \cos(n\omega t - \varphi_n) = A_n[\cos(n\omega t)\cos(\varphi_n) + \sin(\varphi_n)\sin(n\omega t)]$$

$$x_n(t) = A_n \cos(\varphi_n)\cos(n\omega t) + A_n \sin(\varphi_n)\sin(n\omega t)$$

Par identification : $a_n = A_n \cos(\varphi_n)$

$b_n = A_n \sin(\varphi_n)$

D'où : $A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$

$$\cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}} \qquad \sin(\varphi_n) = \frac{b_n}{\sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}}$$

Formulation adaptée d'une série de Fourier pour le tracé des spectres

En résumé :

$$\boxed{x_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)} \Rightarrow \boxed{x_n(t) = A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)}$$

$$A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$$

avec :

$$\cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}} \qquad \sin(\varphi_n) = \frac{b_n}{\sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}}$$

Formulation adaptée d'une série de Fourier pour le tracé des spectres

Exemple pratique :

$$\boxed{x(t) = 2\cos(200\pi t) - 3\sin(200\pi t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = 3{,}6\cos(200\pi t + 0{,}9827)}$$

$$A_n = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$$

$$\left\{ \begin{aligned} \cos(\varphi_n) &= \frac{2}{\sqrt{13}} \approx 0{,}555 \\ \sin(\varphi_n) &= \frac{-3}{\sqrt{13}} \approx -0{,}832 \end{aligned} \right\} \quad \varphi_n \approx -0{,}9827\ (rad)$$

Formulation adaptée d'une série de Fourier pour le tracé des spectres

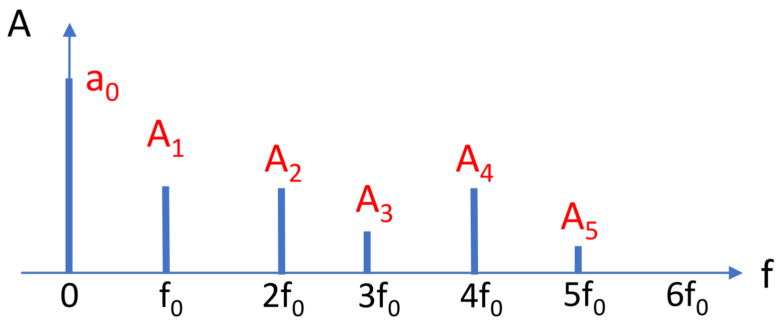
- **Cas général**

La décomposition du signal x(t) en série de Fourier peut finalement être écrite :

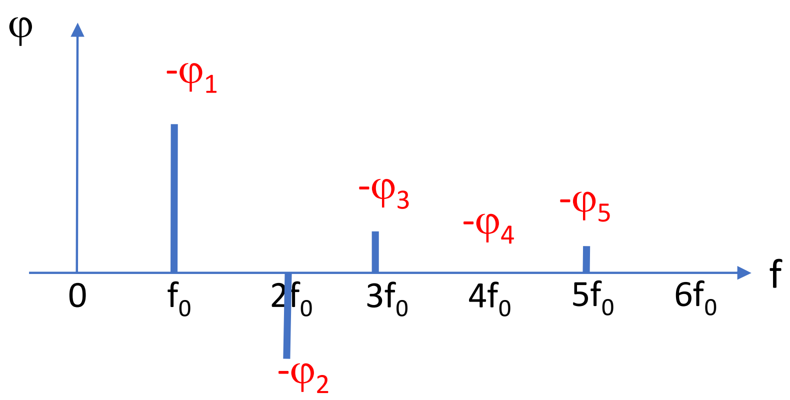
$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n(t) = a_0 + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) + \cdots$$

$$x(t) = a_0 + A_1\, cos(\omega t - \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) + A_3\, cos(3\omega t - \varphi_3) + \cdots$$

x(t) peut alors être représenté par ses spectres d'**amplitude** et de **phase** :



Spectre d'amplitude du signal x(t)

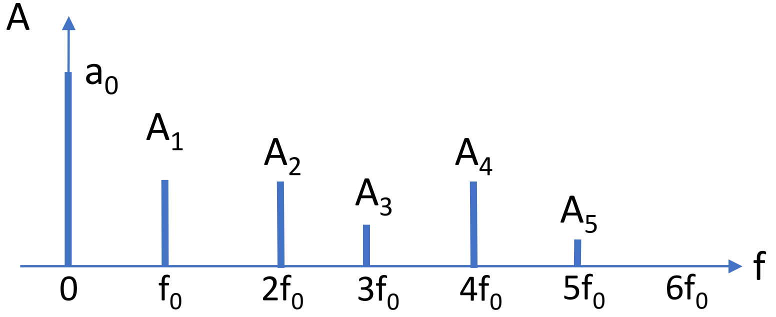


Spectre de phase du signal x(t)

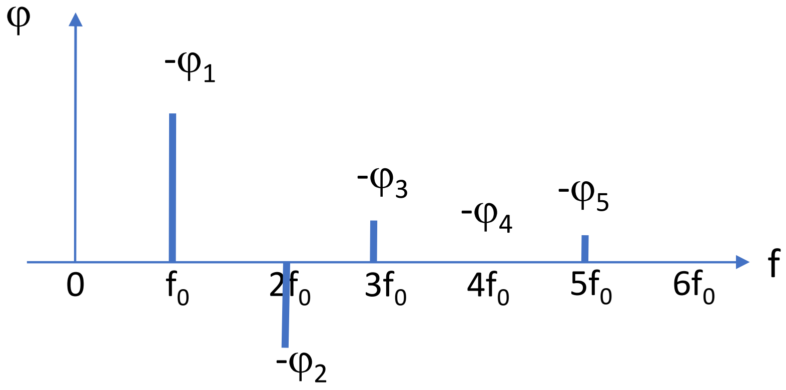
Formulation adaptée d'une série de Fourier pour le tracé des spectres

- **Remarque**

La connaissance du spectre de fréquences d'un signal permet de reconstruire son évolution temporelle.



Spectre d'amplitude du signal x(t)



Spectre de phase du signal x(t)

$$x(t) = a_0 + A_1\, cos(\omega t - \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) + \cdots$$

Puissance moyenne d’un signal périodique

Puissance moyenne d'un signal périodique

- La puissance moyenne est une caractéristique importante d'un signal périodique car elle caractérise l'énergie de ce signal.

- Par exemple, dans les transmissions par ondes électromagnétiques, plus la puissance du signal émis est importante, plus la distance parcourue est grande (et plus il sera facile de recevoir ce signal).

- La puissance moyenne d'un signal périodique de période T peut être évaluée par :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$$

Puissance moyenne d'un signal périodique

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (x(t))^2 dt$$

- La puissance moyenne est le carré de la valeur efficace.

- Pour un signal sinusoïdal : $\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)}$ $\boxed{P = (\frac{A}{\sqrt{2}})^2 = \frac{A^2}{2}}$

- Pour une composante continue : $\boxed{x(t) = a_0}$ $\boxed{P = {a_0}^2}$

Formule de Bessel-Parseval

$$\frac{1}{T}\int_0^T (x(t))^2 dt = {a_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} ({a_n}^2 + {b_n}^2)$$

Puissance moyenne du signal

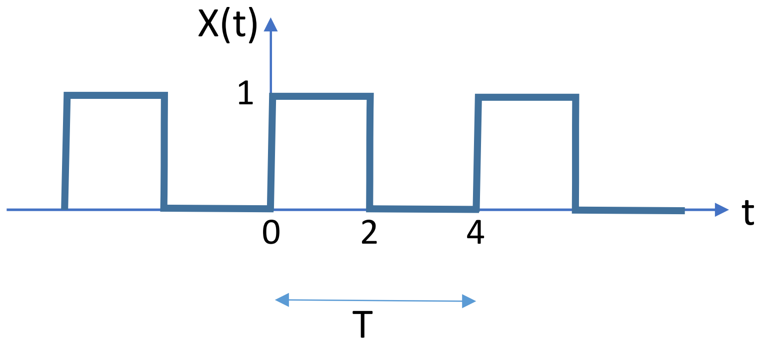
Puissance de la composante continue

Somme des puissances moyennes des harmoniques

Interprétation physique : la puissance moyenne d'un signal périodique est égale à la somme de la puissance de la composante continue et de la puissance moyenne des harmoniques.

Formule de Bessel-Parseval

Exemple pratique :



Puissance moyenne

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (x(t))^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^4 (x(t))^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^2 (1)^2 dt = \frac{1}{2}$$

Décomposition en série de Fourier

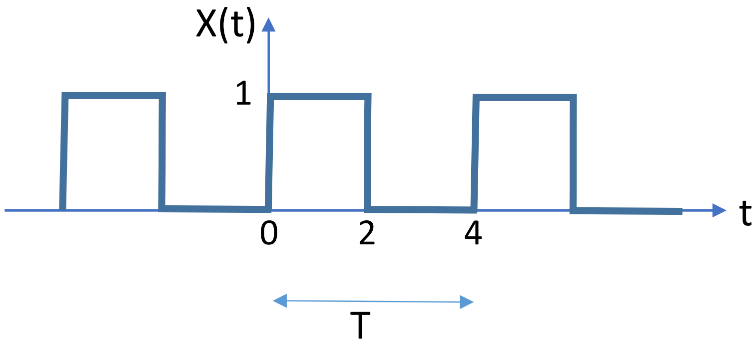
$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \frac{2}{5\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right) + \cdots$$

$$P = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2}\frac{4}{(3\pi)^2} + \frac{1}{2}\frac{4}{(5\pi)^2} + \cdots$$

$$P \approx 0{,}25 + 0{,}203 + 0{,}023 + 0{,}008 + \cdots$$

Formule de Bessel-Parseval

Exemple pratique :



Si on tronque la série de Fourier à l'harmonique 5 :

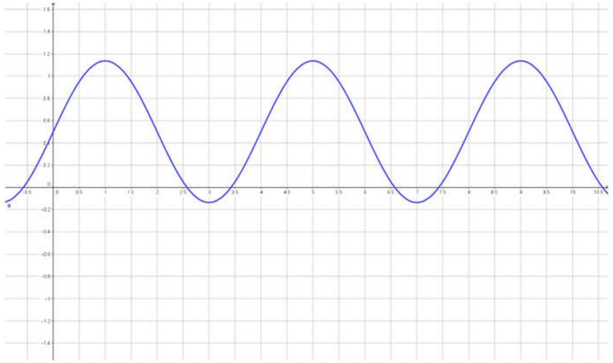
$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \frac{2}{5\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right)$$

On transmets une puissance moyenne donnée par : $P \approx 0{,}25 + 0{,}203 + 0{,}023 + 0{,}008 \approx 0{,}484\ W$

Donc, on transmet $\frac{0{,}484}{0{,}5} = 0{,}97 = 97\%$ de la puissance du signal initial !

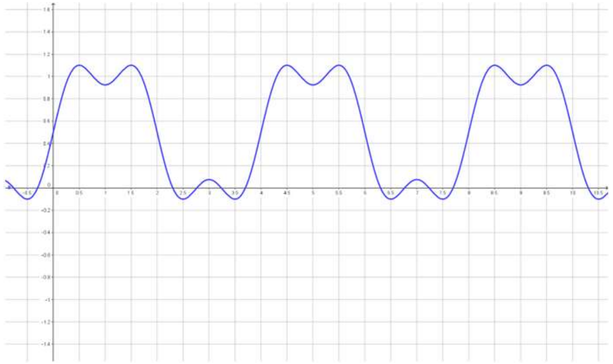
Puissance transmise

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$



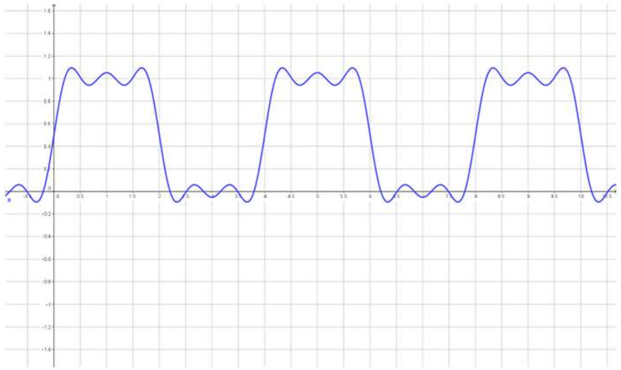
Puissance transmise : 90%

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$$



Puissance transmise : 95%

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{2}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \frac{2}{5\pi}\sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right)$$

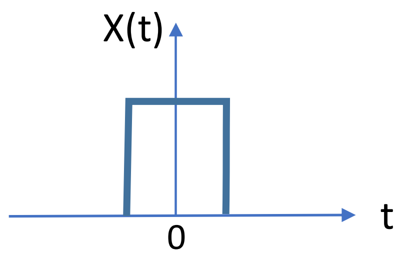


Puissance transmise : 97%

Cas des signaux non périodiques

Analyse des signaux non périodiques

- Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés exclusivement aux signaux périodiques. Nous avons ainsi pu décomposer ces signaux sous la forme d'une série de Fourier.
- En pratique, les signaux utilisés ne sont pas tous périodiques. Exemple : le signal « porte »



- Comment représenter le spectre d'un tel signal ?

Analyse des signaux non périodiques

- Constat : plus la période T d'un signal est grande, plus les raies de sa représentation spectrale sont « serrés ».
- Un signal non périodique peut être assimilé à un signal périodique de période infinie. Dans ce cas, le spectre obtenu est **continu**. Sa valeur pourra donc être définie pour toute fréquence f.

Transformation de Fourier

- Elle permet d'obtenir la représentation fréquentielle d'un signal non périodique.
- La transformée d'une fonction x(t) est donnée par :

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-i2\pi} \quad .dt}$$

- Le graphe $|X(f)|$ représente le spectre d'amplitude.
- Le graphe $\arg(X(f))$ représente le spectre de phase.

Rappel : formule d'Euler : $e^{ix} = \cos(x) + i.\sin(x)$

Transformation de Fourier

- Si x(t) est **paire** (c'est-à-dire : x(t)=x(-t) pour toute valeur de t).

$$\boxed{X(f) = 2\int_{0}^{+\infty} x(t).\cos(2\pi f t).dt}$$

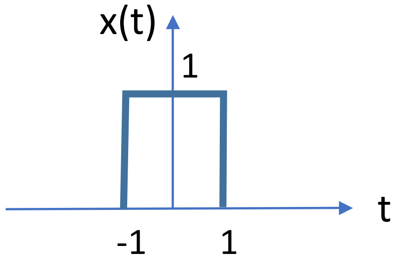
Transformation de Fourier

- Si x(t) est **impaire** (c'est-à-dire : -x(t)=x(-t) pour toute valeur de t).

$$\boxed{X(f) = -2i\int_{0}^{+\infty} x(t).\sin(2\pi f t).dt}$$

Transformation de Fourier

- Exemple de calcul direct : soit à calculer la transformée de Fourier de la fonction porte.



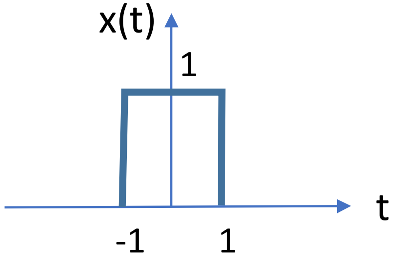
- x(t) est paire. Sa transformée de Fourier s'écrit : $X(f) = 2\int_{0}^{+\infty} x(t).\cos(2\pi f t).dt$

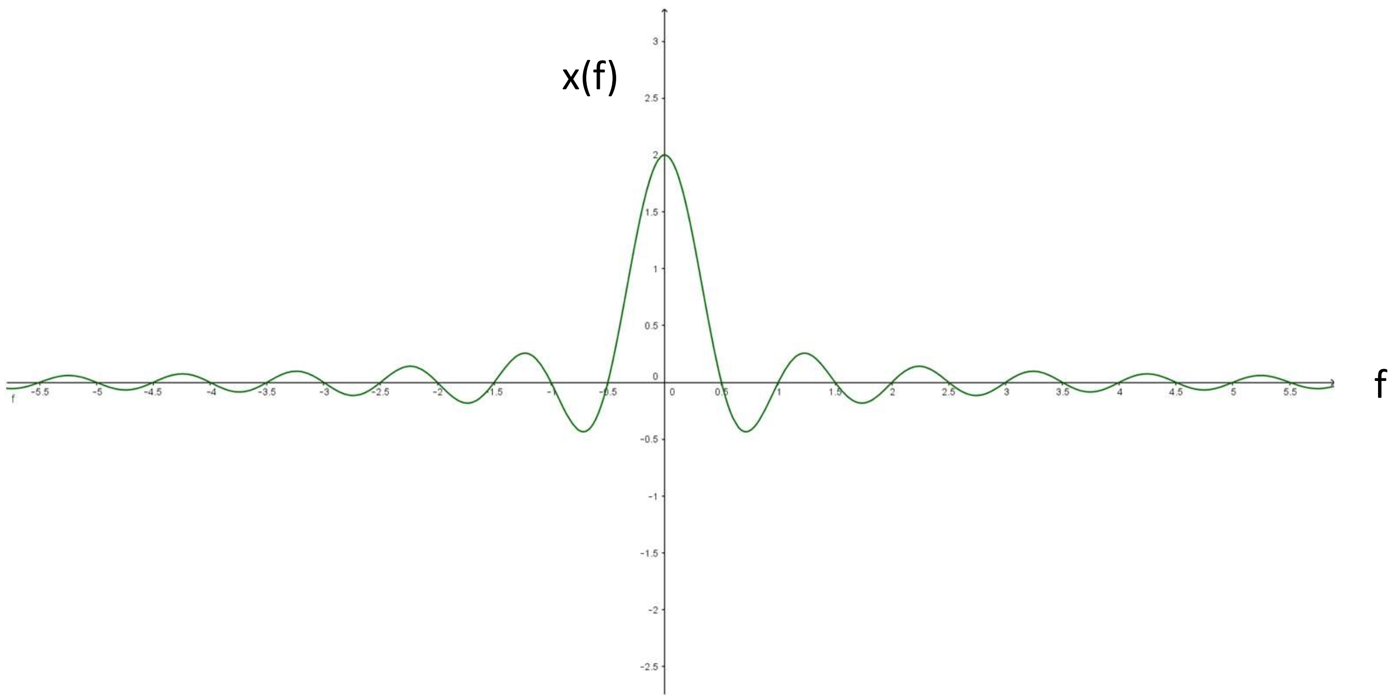
$$X(f) = \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f}$$

  - Cette fonction est appelée : **sinus cardinal**.

Transformation de Fourier

- Représentation graphique de la transformée de Fourier de la fonction porte.





Transformation de Fourier inverse

- Elle permet d'obtenir la fonction temporelle x(t) à partir de la connaissance de son image en fréquence X(f)

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{i2\pi ft}.df}$$

Transformation de Fourier

Transformée de Fourier

Domaine temporel : $x(t)$ Domaine fréquentiel : $X(f)$

Transformée de Fourier inverse

Quelques propriétés de la transformation de Fourier

Propriété de linéarité

La transformation de Fourier est linéaire.

Si : $\boldsymbol{x_1(t)}$ a pour transformée de Fourier $\boldsymbol{X_1(f)}$ et $\boldsymbol{x_2(t)}$ a pour transformée de Fourier $\boldsymbol{X_2(f)}$

Alors : $\boldsymbol{a. x_1(t) + b. x_2(t)}$ a pour transformée de Fourier $\boldsymbol{a. X_1(f) + b. X_2(f)}$.

a et b sont des réels.

Quelques propriétés de la transformation de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier de signaux réels

Si $x(t)$ est un signal réel, alors :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-i2\pi f t}.dt$$

$$X(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{i2\pi f t}.dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-i2\pi} \quad .dt}$$

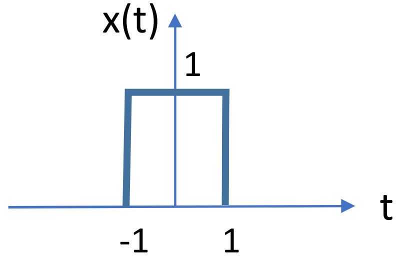
$X(f)$ et $X(-f)$ son conjugués. On en déduit que :

- $X(f)$ et $X(-f)$ ont le même module donc le spectre d'amplitude d'un signal réel est pair.
- $arg\big(X(-f)\big) = -arg\big(X(f)\big)$ donc le spectre de phase d'un signal réel est impair.

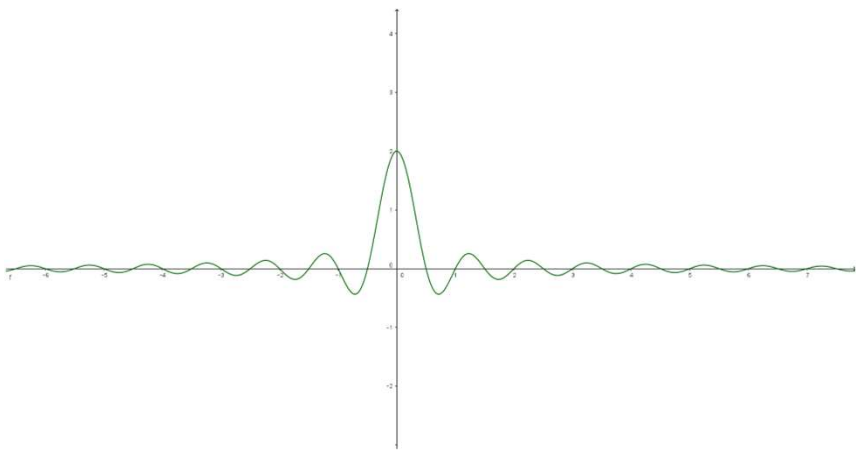
Quelques propriétés de la transformation de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier de signaux réels

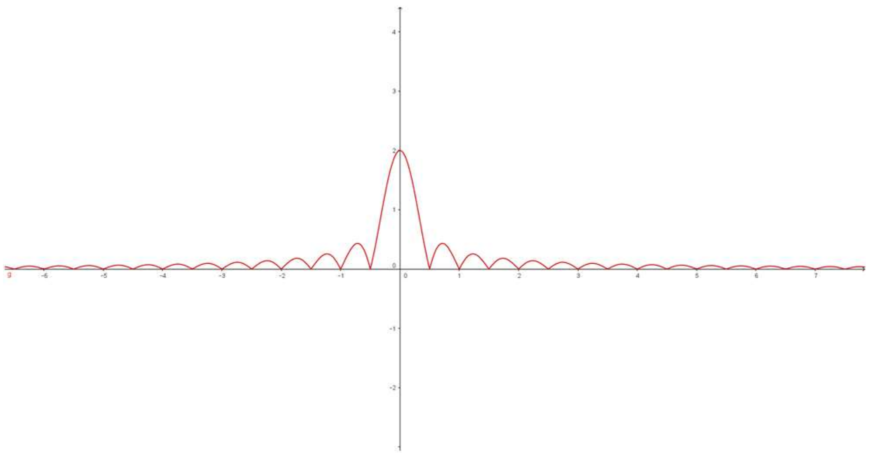
Exemple : fonction porte.



$$X(f) = \frac{\sin(2\pi f)}{\pi f}$$



Spectre d'amplitude $|X(f)|$



Quelques propriétés de la transformation de Fourier

Propriétés de la transformée de Fourier

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(f)$$

$$x(a.t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} X(\frac{f}{a})$$

$$x(t - t_0) \xrightarrow{TF} e^{-i2\pi f t_0}.X(f)$$

$$x'^{(t)} \xrightarrow{TF} i2\pi f.X(f)$$

La convolution

Systèmes linéaires

$$e_1(t) \longrightarrow s_1(t)$$

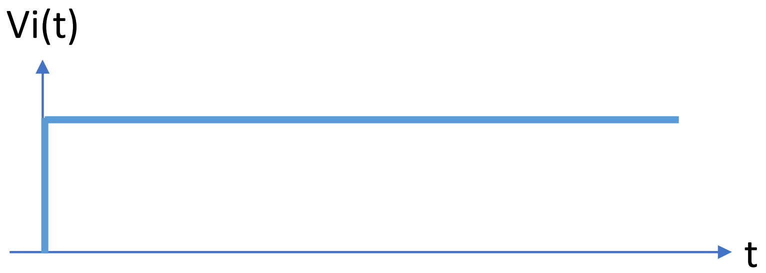
$$e_2(t) \longrightarrow s_2(t)$$

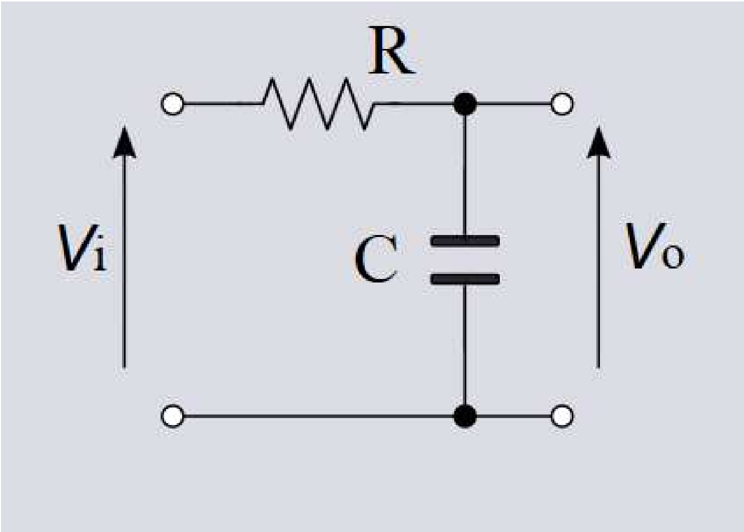
$$a.\,e_1(t) + b.\,e_2(t) \longrightarrow a.\,s_1(t) + b.\,s_2(t)$$

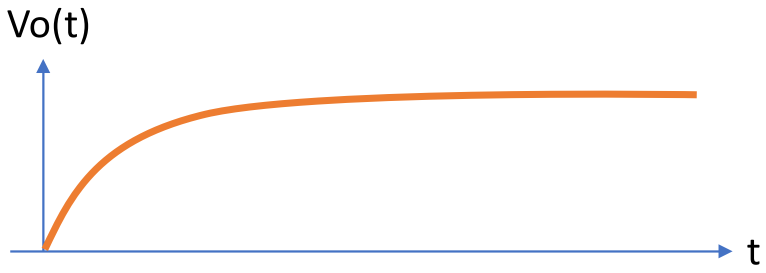
a et b réels.

Systèmes linéaires

Exemple de système linéaire : le circuit RC







On constate que le circuit déforme l'allure du signal d'entrée qui lui est appliqué

La convolution

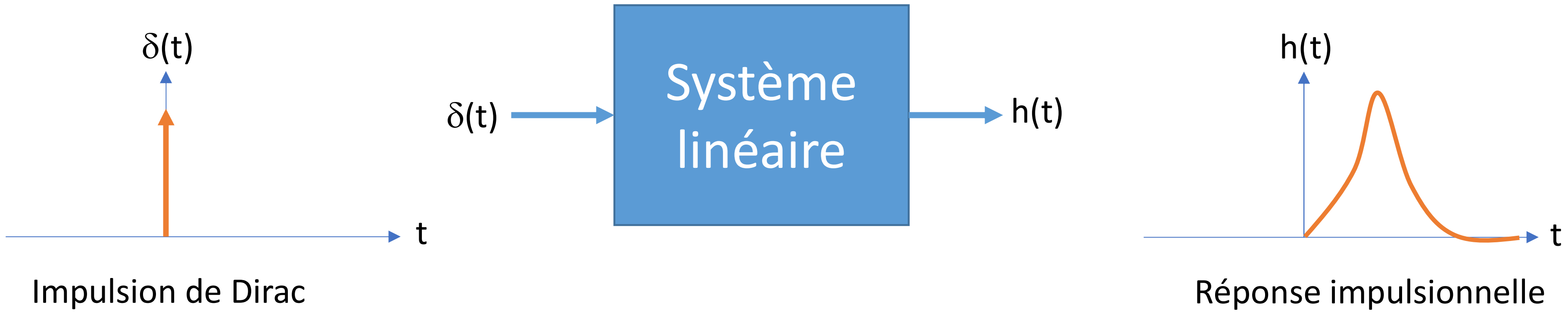
Définition : la **convolution** est une notion qui a pour but de traduire l'effet des systèmes sur l'allure des signaux qui leurs sont appliqués.

But : trouver une manière pour quantifier l'effet d'un système sur tout type de signal d'entrée.

On utilisera pour cela **la réponse impulsionnelle** afin de définir de manière standard l'effet d'un système sur les signaux qui lui sont appliqués.

La convolution

Définition : la **réponse impulsionnelle h(t)** d’un système linéaire est le signal de sortie de ce système lorsqu’on applique à son entrée une impulsion de Dirac.



La convolution

Réponse du système à un signal quelconque

But : déterminer s(t) connaissant e(t).

On utilise le **produit de convolution**

$$\boxed{\mathrm{s(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e(u).h(t-u).du}$$

On note : $\boxed{\mathrm{s(t)} = \mathrm{e(t)} * h(t)}$

La convolution

Théorème de PLANCHEREL : l'opérateur **produit de convolution** et l'opérateur **produit simple** sont reliés l'un à l'autre par la transformation de Fourier.

$$e(t).h(t) \xrightarrow{TF} E(f) * H(f)$$

$$e(t) * h(t) \xrightarrow{TF} E(f).H(f)$$

La convolution

Théorème de PLANCHEREL : l'opérateur **produit de convolution** et l'opérateur **produit simple** sont reliés l'un à l'autre par la transformation de Fourier.

En particulier :

$$s(t) = e(t) * \ h(t)$$

$$\downarrow$$

$$S(f) = E(f).H(f)$$