

TABLE DES MATIÈRES

1	INTRODUCTION	1
1.1	Contexte	1
1.2	Formulation du problème	1
1.2.1	Formulation lagrangienne	1
1.2.2	Principe de Huygens avec condition d'entropie	1
1.3	Méthodes numériques pour le suivi d'interfaces	2
1.3.1	Description eulérienne	2
1.3.2	Description lagrangienne	2
1.4	Cadre de la thèse	2
1.5	Représentation par les frontières	3
1.6	Contributions	3
1.7	Organisation du manuscrit	3
2	ALGORITHME DE PROPAGATION D'INTERFACES RÉGULIÈRES PAR MORCEAUX	5
2.1	Traitement des différentes entités BRep	5
2.1.1	Traitement des faces	5
2.1.2	Traitement des arêtes	5
2.1.3	Traitement des sommets	5
2.2	Construction de l'enveloppe des sphères	5
2.2.1	Enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre	5
2.2.2	Enveloppe d'une famille de sphères à deux paramètres	6
2.3	Application de la condition d'entropie	6
2.3.1	Reconstitution topologique du modèle BRep	7
3	MÉTHODE D'ORDRE ÉLEVÉ POUR LE SUIVI D'UN CARREAU DE SURFACE	9
3.1	Discrétisation spectrale en espace	9
3.1.1	État de l'art	9
3.1.2	Polynômes de Chebyshev	10
3.2	Intégration temporelle	18
3.3	Instabilités...	18
4	GÉNÉRALISATION AUX SURFACES DE TOPOLOGIE QUELCONQUE	19
4.1	Construction des nouvelles faces	19
4.1.1	Arêtes convexes	19
4.1.2	Sommets convexes	19
4.2	Résolution des intersections entre faces	19
4.2.1	État de l'art	19

4.2.2	Approche retenue	19
4.3	Validation de la méthode	20
4.3.1	Propagation suivant un champ de vitesse continu	20
4.3.2	Propagation à vitesse normale uniforme	20
4.3.3	Propagation à vitesse normale non uniforme?	20
5	DÉFORMATION DE MAILLAGE SURFACIQUE	25
5.1	Méthodes de simulation dans des géométries déformables	25
5.2	Objectifs et enjeux	25
5.2.1	Objectifs	25
5.2.2	Enjeux	26
5.3	Approche naïve/simple	26
5.4	Approche avancée	26
6	APPLICATION À LA SIMULATION DE LA RÉGRESSION DE PROPERGOL SOLIDE	27
	CONCLUSION	29
A	CONSTRUCTION DE VOLUMES ENGLOBANTS	31
A.1	Définition	31
A.2	Base de Chebyshev	31
A.2.1	Boîte englobant une courbe	32
A.2.2	Boîte englobant une surface	32
A.3	Base de Bernstein	33
B	REPARAMÉTRISATION AFFINE	35
	BIBLIOGRAPHIE	37

NOTATIONS

temps	t
intervalle/pas de temps	$\tau/\Delta t$
scalaire	$abcdefghijklmnopqrstuvwxyz\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\iota\lambda\mu\xi\varpi\rho\sigma\tau\varphi\chi\psi\omega$
indice	$ijklmn$
Géométrie	
courbe dans \mathbb{R}^3 (variété)	Γ
courbe dans \mathbb{R}^2 (variété)	Ψ
surface (variété)	Σ
normale unitaire	\mathbf{n}
point de \mathbb{R}^d	$abcdefghijklmnopqrstuvwxyz$
vecteur de \mathbb{R}^d	$abcdefghijklmnopqrstuvwxyz$
Enveloppes de sphères	
vitesse normale	ν
enveloppe de sphères (variété)	Φ
enveloppe de sphères (paramétrisation)	$\phi(u, v)$
rayon des sphères	$\rho(w), \rho(u, v)$
sphère	\mathcal{S}
boule	\mathcal{B}
cercle	\mathcal{C}
plan	\mathcal{P}
Entités BRep	
coquille (<i>shell</i>)	S, ensemble : \mathcal{S}
face	F, ensemble : \mathcal{F}
arête (<i>edge</i>)	E, ensemble : \mathcal{E}
co-arête (<i>half-edge</i>)	H, ensemble : \mathcal{H} , ou $E^{1,2}$
sommet (<i>vertex</i>)	V, ensemble : \mathcal{V}
contour (<i>wire</i>)	W, ensemble : \mathcal{W} ($W^{\text{ext}}, W^{\text{int},i}$)
Éléments de maillage	
triangle	K ou τ
face	F
arête (<i>edge</i>)	$?$
demi-arête (<i>half-edge</i>)	$?$
sommet/nœud	S
Polynômes	
espace des polynômes de degré $\leq N$	\mathcal{P}_N ou $\mathbb{R}_N[X], \mathbb{R}_N[x_1, \dots, x_d]$
polynômes de Chebyshev	T_n
polynômes de Bernstein	B_n^N

Méthode (pseudo-)spectrale

degré	L, M, N, P, Q
somme partielle de Chebyshev	$P_N f$
polynôme d'interpolation	$I_N f$
dérivées du polynôme d'interpolation	$D_N^{(k)} f$
coefficients de $P_N f$	\hat{f}_n
coefficients de $I_N f$	\hat{f}_n
coefficients de $D_N^{(k)} f$	$\tilde{f}_n^{(k)}$
matrice de différentiation	\mathbf{D}_N

Algèbre, calcul différentiel

fonctions continues sur $[a, b]$	$\mathcal{C}[a, b]$
fonctions régulières sur $[a, b]$	$\mathcal{C}^k[a, b], k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$
matrice	ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZΘΛ
matrice identité	\mathbf{I}_d
matrice Jacobienne	$\mathbf{J}_f, \mathbf{J}_\sigma, \mathbf{J}_\gamma$
matrice Hessienne	\mathbf{H}_f

Géométrie différentielle

paramètre de courbe	w
paramètres de surface	u, v
courbe paramétrique dans \mathbb{R}^3	$\gamma(w)$
courbe paramétrique dans \mathbb{R}^2	$\psi(w)$
surface paramétrique	$\sigma(u, v)$
tenseur métrique	$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{1,1} & I_{1,2} \\ I_{1,2} & I_{2,2} \end{pmatrix}$
matrice de la 2nde forme fondamentale	$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} II_{1,1} & II_{1,2} \\ II_{1,2} & II_{2,2} \end{pmatrix}$
courbures principales	$\kappa_{1,2}$
courbure moyenne	$H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$
courbure de Gauss	$K = \kappa_1 \kappa_2$
domaine paramétrique	Ω , i.e. $\Sigma = \sigma(\Omega)$

abcdefghijklmnopqrstuvwxyz	text
<i>abcdefghijklmnopqrstuvwxyz</i>	math
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz	mathrm
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz	mathbf
<i>abcdefghijklmnopqrstuvwxyz</i>	boldsymbol
	mathcal
$\neg \sqcup \sqcap \{ \} \langle \rangle \updownarrow \backslash \sqrt{\prod \nabla \int \sqcup \sqcap \subseteq \supseteq} \S \P \ddagger$	matholdcal
<i>a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z</i>	mathscr
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ	text
<i>ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ</i>	math
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ	mathrm
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ	mathbf
<i>ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ</i>	boldsymbol
<i>A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z</i>	mathcal
<i>A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z</i>	matholdcal
<i>A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z</i>	mathscr
$\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \theta \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi \pi \varpi \rho \varsigma \tau \upsilon \phi \varphi \chi \psi \omega$	
$\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \theta \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi \pi \varpi \rho \varsigma \tau \upsilon \phi \varphi \chi \psi \omega$	
$\Gamma \Delta \Theta \Lambda \Xi \Pi \Sigma \Upsilon \Phi \Psi \Omega$	
$\gamma \quad \delta \quad \theta \quad \lambda \quad \xi \quad \pi \quad \sigma \quad \upsilon \quad \phi \quad \psi \quad \omega$	
$\gamma \quad \delta \quad \theta \quad \lambda \quad \xi \quad \pi \quad \sigma \quad \upsilon \quad \phi \quad \psi \quad \omega$	
$\Gamma \quad \Delta \quad \Theta \quad \Lambda \quad \Xi \quad \Pi \quad \Sigma \quad \Upsilon \quad \Phi \quad \Psi \quad \Omega$	

1.1 CONTEXTE

applications : simulations multi-physiques (flammes, fluide-structure, écoulements multi-phasiques, multimatériaux, croissance de cristaux...) CAO (usinage, planification de trajectoire de robots mobiles), infographie ...

1.2 FORMULATION DU PROBLÈME

Le problème que l'on cherche à résoudre consiste à déterminer l'évolution au cours du temps de la position d'une interface Γ dont la vitesse instantanée de propagation \mathbf{u} est connue.

1.2.1 Formulation lagrangienne

Dans cette thèse, on se concentre sur des problèmes en trois dimensions. Γ représente donc une surface que l'on supposera orientable et fermée. La formulation lagrangienne traditionnelle du problème de propagation d'interface consiste à exprimer l'évolution de la position d'un point $\mathbf{x} \in \Gamma$ comme une équation différentielle

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (1.1)$$

La composante tangentielle du vecteur vitesse n'affecte pas la forme de l'interface. En principe, on peut donc formuler de façon équivalente la propagation de Γ suivant un champ de vitesse normale $\nu : \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \nu(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t), \quad (1.2)$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ désigne le vecteur normal unitaire à Γ en \mathbf{x} à l'instant t . Si \mathbf{u} et ν sont continus, et que Γ reste régulière, la résolution des équations (1.1) et (1.2) produit une solution ... En revanche, lorsque Γ présente des points singuliers où la normale n'est pas définie, cette formulation devient incomplète. De tels points singuliers peuvent être présents sur l'interface initiale ou bien apparaître lors de la propagation d'une interface régulière localement concave (illustration).

1.2.2 Principe de Huygens avec condition d'entropie

→ formulation plus générale (approche "géométrique") : principe de Huygens (propagation de proche en proche), enveloppe de sphères (e.g. ondes, cf. ??) ou de boules (e.g. flamme, cf. ??) (condition d'entropie [1])

résolution analytique impossible → méthodes numériques

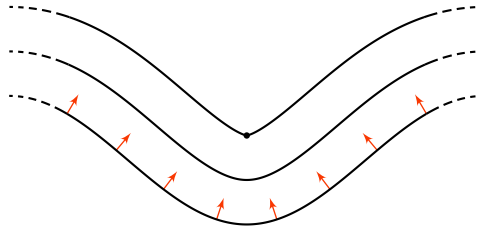


FIGURE 1.1 – formation de points singuliers

FIGURE 1.2 – Méthode level-set.

1.3 MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LE SUIVI D'INTERFACES

2 façons de traiter l'interface

1.3.1 Description eulérienne

point de vue eulérien → représentation implicite

- ex. : *level-set* [1], *Volume-of-fluid* [2], etc.
- + : formulation simple, facilement généralisable à n dimensions, supporte naturellement les changements topologiques de l'interface → bien adapté aux interfaces fluide-fluide ;
- : besoin de reconstruire l'interface, quantités géométriques mal résolues, mauvaise conservation de la masse et besoin de réinitialiser la fonction distance pour *level-set*, besoin d'extrapoler les conditions aux limites ;

1.3.2 Description lagrangienne

point de vue lagrangien → représentation explicite

- ex. : suivi de front (*front-tracking*) [3, 4] (suivi lagrangien de marqueurs surfaciques, en 2d l'interface est interpolée par une spline cubique, en 3d elle est triangulée), *face-offsetting* [5] (les faces du maillage sont transportées et les position des sommets sont reconstruites), etc.
- + : la description lagrangienne permet de résoudre finement les quantités géométriques propres à l'interface. En outre, lorsque celle-ci constitue une frontière, la représentation explicite facilite l'application de conditions aux limites particulières.
- : supporte mal les grandes déformations, besoin de redistribuer les marqueurs (voire de remailler complètement), nécessite traitement explicite des changements topologiques (complexe en 3d);

1.4 CADRE DE LA THÈSE

type de problèmes visés dans cette thèse : interface = frontière solide (déformable) d'un domaine fluide ⇒ déformations modérées, peu de changements de topologie ⇒ on adopte la description lagrangienne

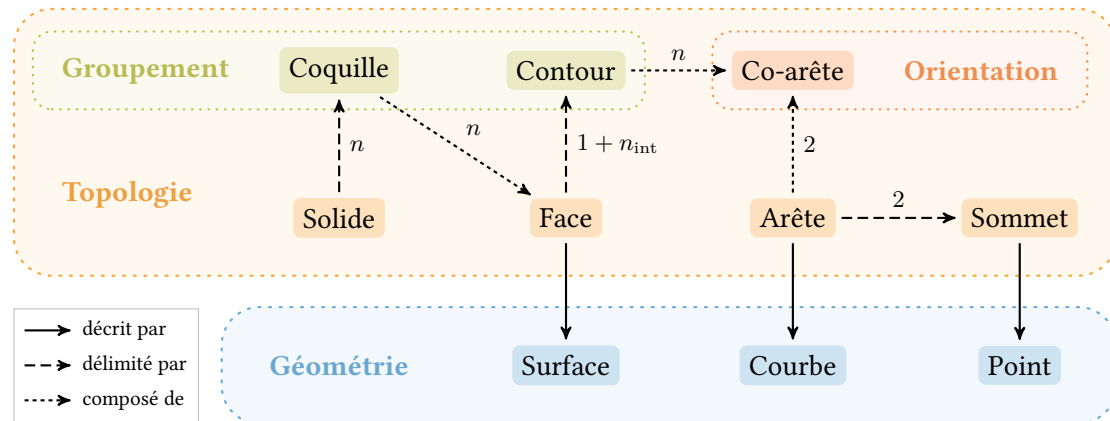


FIGURE 1.3 – Hiérarchie des éléments constituant un modèle BRep.

on s'intéresse en particulier aux cas où l'interface est *piecewise smooth*, ce qui est souvent le cas dans les applications industrielles

méthodes high-order intéressantes lorsque la solution est régulière car précises à bas coût, mais phénomène de Gibbs en présence de singularités [6]

dans les applications visées, la définition de la géométrie initiale passe par une phase de CAO

1.5 REPRÉSENTATION PAR LES FRONTIÈRES

formalisme BRep [7, Section 2.2]

définitions précises, vocabulaire : surface, courbe, point, face, contour/chaîne/cycle (*wire/loop*), arête (vive, douce), sommet (vif, doux)

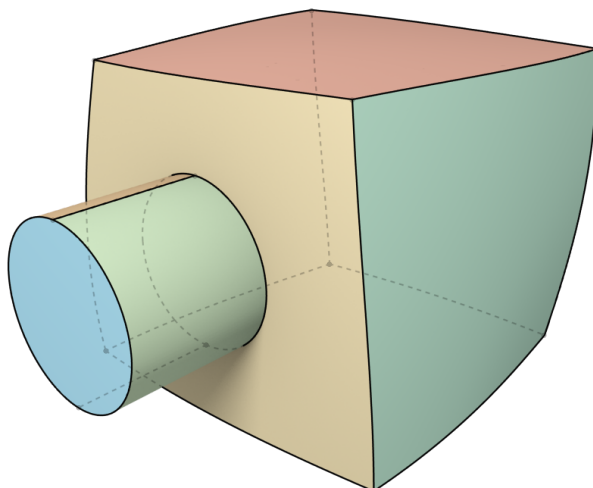
Une face F est délimitée par un contour extérieur W^{ext} et, éventuellement, par un ou plusieurs contours intérieurs $W^{\text{int},i}$.

Un contour est un cycle de co-arêtes.

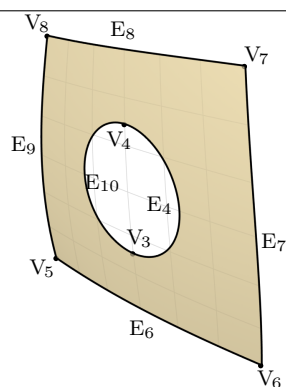
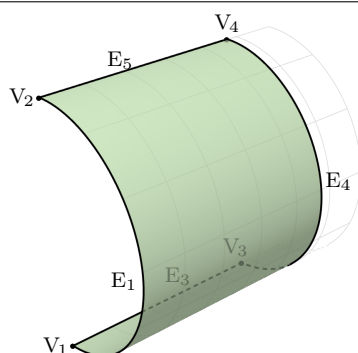
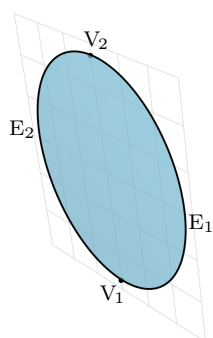
Une arête E est délimitée par deux sommets et est composée de deux co-arêtes jumelles.

1.6 CONTRIBUTIONS

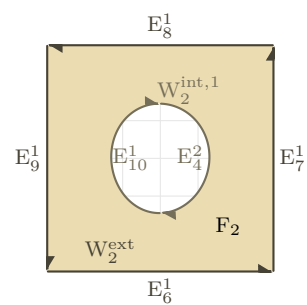
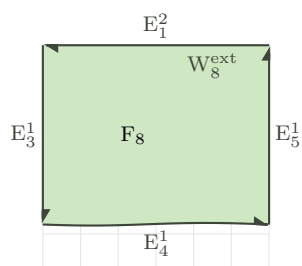
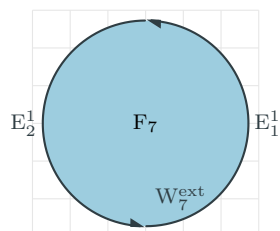
1.7 ORGANISATION DU MANUSCRIT



Espace euclidien



Espace paramétrique



ALGORITHME GÉNÉRAL POUR LA PROPAGATION D'INTERFACES RÉGULIÈRES PAR MORCEAUX

2

L'objet de ce chapitre est de mettre au point un algorithme général basé sur le principe de Huygens (avec condition d'entropie) pour simuler la propagation d'une interface géométriquement régulière par morceaux. On représente l'interface sous la forme d'un modèle BRep. L'algorithme vise alors à construire un nouveau modèle BRep (géométrie et topologie) correspondant à une enveloppe de boules (EdB) centrées sur l'interface courante.

2.1 TRAITEMENT DES DIFFÉRENTES ENTITÉS BREP

on construit d'abord une EdS (partielle), puis on la transforme en Edb pour respecter la condition d'entropie. Chaque entité du modèle BRep est traitée spécifiquement
vitesse normale continue \Rightarrow rayon des sphères évolue continument sur toute l'interface

2.1.1 Traitement des faces

chaque face repose sur une surface orientée de continuité géométrique élevée (d'ordre 1 ou plus) donc chaque point sur une face a exactement 2 vis-à-vis sur l'EdS (un dans le sens de la normale, et un dans le sens opposé) (sous réserve d'une condition, détaillée dans la [Section 2.2.2](#))

2.1.2 Traitement des arêtes

- douce \rightarrow préservée car vitesse continue ;
- (vive) convexe \rightarrow EdS à un paramètre (nouvelle *surface*) ;
- (vive) concave \rightarrow aucune influence sur l'Edb (on ne construit pas son EdS, d'où le "partiel") ;

2.1.3 Traitement des sommets

- smooth \rightarrow préservé car vitesse continue ;
- convexe \rightarrow nouvelle(s) *surface(s)* sphérique(s) ;
- concave \rightarrow aucune influence sur l'Edb.

2.2 CONSTRUCTION DE L'ENVELOPPE DES SPHÈRES

2.2.1 Enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre

canal surfaces [8] (*spine curve* \rightarrow squelette (ou axe médian))



différence avec le simple transport suivant la normale [10]



résolution des intersections (pas encore de détail sur la méthode) → faces trimmées, nouveaux sommets/arêtes

2.3.1 Reconstitution topologique du modèle BRep

Intersections de paires de surfaces (\rightarrow courbes¹), de triplets de surface (ou de paires de courbes) (\rightarrow points¹)

graphe d'adjacence des surfaces, courbes, points [7, Chap. 4]

formation des faces (*wires* \rightarrow chaînes?) [7, Chap. 7], arêtes et sommets [7, Chap. 5]

...

il faut maintenant faire le choix d'une méthode numérique pour appliquer cet algorithme de façon pratique...

¹dans le cas général, non-dégénéré (cf. cours "Topologie et géométrie différentielle")

MÉTHODE D'ORDRE ÉLEVÉ POUR LE SUIVI D'UN CARREAU DE SURFACE

3

on veut mettre au point une méthode numérique (discrétisations spatiale et temporelle) pour le suivi d'un seul patch rectangulaire de surface de continuité géométrique élevée (infinie), qui servira de base pour mettre en œuvre l'algorithme du [Chapitre 2](#)

suivi lagrangien de marqueurs/points de collocation situés sur la surface

3.1 DISCRÉTISATION SPECTRALE EN ESPACE

méthode pseudo-spectrale : solution développée dans une base de fonctions globales et régulières, résidu annulé exactement en un nombre discret de points de collocation, donnant une EDO en temps par point de collocation

Choix des fonctions de base et des marqueurs/points de collocation

3.1.1 État de l'art

Le choix des fonction de base se pose alors. Celles-ci doivent pouvoir représenter n'importe quel type de solution avec une précision arbitraire, offrir une convergence rapide à mesure que le nombre de degrés de liberté augmente et enfin pouvoir être évaluées efficacement. A ces critères s'ajoutent également des contraintes liées à la topologie de la solution (i.e. l'interface en propagation).

Traditionnellement, les méthodes spectrales reposent sur les séries de Fourier lorsque la solution est spatialement périodique. Les polynômes trigonométriques ont ainsi été utilisés comme fonctions de base pour représenter un front de flamme dans une configuration quasi-3D [11] (**reformuler**). Lorsque la solution est une surface fermée de genre zéro (i.e. une sphère topologique), la base des harmoniques sphériques est particulièrement adaptée [12].

Les travaux de Bruno [6] sur une méthode de *continuation* ont permis d'étendre l'usage des polynômes trigonométriques aux surfaces homéomorphes à des disques. Cette approche permet de représenter des surfaces de géométrie complexe et de topologie arbitraire en raccordant des patches locaux à l'aide de partitions de l'unité.

Permet d'éviter Gibbs dans le cas régulier par morceaux

A l'instar de la méthode proposée dans cette thèse, l'idée est alors de représenter des surfaces de géométrie complexe et de topologie arbitraire à l'aide de paramétrisations locales en construisant un atlas. En revanche, cette approche nécessite la résolution de systèmes linéaires mettant en jeu des matrices de grande taille, pleines et généralement mal conditionnées. En outre, cette méthode n'a à ce jour pas été appliquée pour la déformation de surface.

- harmoniques sphériques [12], polynômes trigonométriques [11] → contraintes topologiques (genre 0, sans bord ou périodique) (méthode de continuation [6] pour s'affranchir de cette contrainte, mais complexe (POUs, ...) et jamais utilisé pour des surfaces en mouvement)

- CAO : courbes/surfaces polynomiales (algébriques)/rationnelles (en produit tensoriel) par morceaux (B-splines/NURBS), utilisant la base de Bernstein

$$B_n^N(x) = \binom{N}{n} (1-x)^{N-n} x^n. \quad (3.1)$$

- + coefficients = points de contrôle dans l'espace physique, sens géométrique intuitif
- + partition de l'unité sur $[0, 1] \Rightarrow$ propriété d'enveloppe convexe
- algorithme d'évaluation (de Casteljau) numériquement stable mais coûteux $O(N^2)$
- points de contrôle pas *sur* la courbe/surface \Rightarrow pas exploitables comme marqueurs lagrangiens
- peu pratiques pour réduire/élever le degré des polynômes

on choisit les polynômes de Chebyshev, couramment employés dans les méthodes spectrales dans le cas non-périodique

3.1.2 Polynômes de Chebyshev

Les polynômes de Chebyshev sont très largement utilisés dans de nombreux domaines tels que l'analyse numérique. L'objet des sections suivantes est de rappeler la définition de cette famille de polynômes et d'en présenter brièvement les propriétés remarquables qui seront exploitées dans cette thèse. Nombreux sont les ouvrages consacrés aux polynômes de Chebyshev [13, 14] ainsi qu'à leur usage dans les méthodes spectrales [15, 16], aussi le lecteur est invité à s'y référer pour plus de détails.

3.1.2.1 Définition et propriétés

DÉFINITION 3.1 — Pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme de Chebyshev (de première espèce) T_n est défini par

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta. \quad (3.2)$$

De cette définition et de l'identité trigonométrique $\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2 \cos \theta \cos(n-1)\theta$, on peut déduire la relation de récurrence suivante, pour $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x, \\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \text{ pour } n \geq 2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Le graphe des six premiers polynômes de Chebyshev est tracé sur la [Figure 3.1](#).

T_n est un polynôme de degré n qui atteint ses extrema locaux sur $[-1, 1]$ aux $n+1$ nœuds de Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL)

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad (3.4)$$

pour $0 \leq k \leq n$. Seuls les $n-1$ nœuds intérieurs sont réellement des extrema au sens où la dérivée s'y annule. A noter également que ces nœuds sont rangés en ordre décroissant.

Comme illustré sur la [Figure 3.2](#), ces extrema sont alternativement des maxima puis des minima, tous égaux en valeur absolue

$$T_n(x_k) = (-1)^k. \quad (3.5)$$

Cette propriété d'*équioscillation* a pour conséquence le théorème suivant.

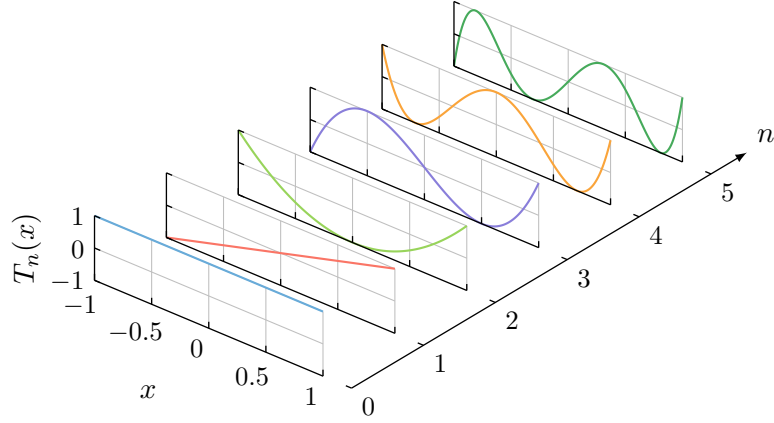
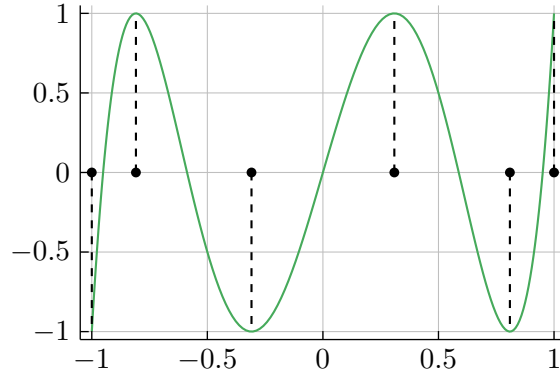


FIGURE 3.1 – Graphe des premiers polynômes de Chebyshev.

FIGURE 3.2 – Nœuds de Chebyshev-Gauss-Lobatto (extrema locaux) du polynôme T_5 .

THÉORÈME 3.1 — Le polynôme de degré $N - 1$ qui donne la meilleure approximation uniforme (i.e. en norme L_∞) du polynôme $q = \sum_{n=0}^N a_n X^n$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ est

$$p_{N-1} = q - 2^{1-N} a_N T_N, \quad (3.6)$$

et, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$|q(x) - p_{N-1}(x)| \leq 2^{1-N} |a_N|, \quad (3.7)$$

l'égalité étant atteinte aux $N + 1$ nœuds CGL de T_N .

Ce théorème trouve une application immédiate dans l'économisation des séries (à développer...).

3.1.2.2 Approximation de fonctions

Notons $L^2[-1, 1]$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $[-1, 1]$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (3.8)$$

La famille des polynômes de Chebyshev est une base orthogonale et maximale de cet espace, et pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\langle T_m, T_n \rangle = \frac{\pi}{2} \alpha_n \delta_{m,n}, \quad (3.9)$$

où $\delta_{\cdot, \cdot}$ représente le symbole de Kronecker, et

$$\alpha_n = 1 + \delta_{0,n}. \quad (3.10)$$

Toute fonction $f \in L^2[-1, 1]$ peut alors être représentée par sa série de Chebyshev

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n T_n, \quad (3.11)$$

dont les coefficients \hat{f}_n sont obtenus en prenant le produit scalaire

$$\begin{aligned} \hat{f}_n &= \frac{\langle f, T_n \rangle}{\langle T_n, T_n \rangle}, \\ &= \frac{2}{\pi \alpha_n} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

La somme partielle

$$P_N f = \sum_{n=0}^N \hat{f}_n T_n \quad (3.13)$$

est le projeté orthogonal de f sur le sous-espace Π_N de $L^2[-1, 1]$ des polynômes de degré au plus N . Il s'agit donc de l'élément de Π_N le plus proche de f , au sens de la norme induite par le produit scalaire (3.8).

La somme partielle $P_N f$ est également proche de la meilleure approximation uniforme de f par un polynôme de degré N . En effet, si f est continue sur $[-1, 1]$, alors

$$\|f - P_N f\|_{\infty} \leq (1 + \lambda_N) \min_{p \in \Pi_N} \|f - p\|_{\infty}, \quad (3.14)$$

où la constante de Lebesgue $\lambda_N = 1.27 \dots + \frac{4}{\pi^2} \log N + O(N^{-1})$ croît lentement avec N ($\lambda_{500} \approx 3.8$).

Dans le contexte particulier de la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles, on s'intéresse à l'approximation de fonctions qui possèdent des dérivées continues. Pour de telles fonctions, les séries de Chebyshev convergent très rapidement. En effet, à l'aide d'une intégration par parties répétée, on peut montrer que la relation (3.12) implique le théorème suivant.

THÉORÈME 3.2 — Si f est $p-1$ fois dérivable presque partout sur $]-1, 1[$ et si $f^{(p-1)}$ est de variation bornée sur $[-1, 1]$, alors

$$\hat{f}_n = O(n^{-p}). \quad (3.15)$$

En particulier, si $f \in C^{\infty}[-1, 1]$ alors la suite des coefficients \hat{f}_n décroît plus rapidement que n'importe quelle puissance négative de n .

En outre, si f admet une extension analytique dans une région du plan complexe contenant le segment $[-1, 1]$, alors il existe $r > 1$ tel que

$$\hat{f}_n = O(r^{-n}). \quad (3.16)$$

Puisque $|T_n| \leq 1$ sur $[-1, 1]$ pour tout entier n , il s'ensuit que l'erreur de troncature est bornée par la somme des valeurs absolues des coefficients négligés

$$\|f - P_N f\|_{\infty} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |\hat{f}_n|. \quad (3.17)$$

Or, si les coefficients \hat{f}_n convergent avec une rapidité algébrique de la forme (3.15), alors

$$\|f - P_N f\|_\infty = O(N^{1-p}) = O(N |\hat{f}_N|). \quad (3.18)$$

Si, en revanche, la convergence est géométrique (i.e. de la forme (3.16)), alors

$$\|f - P_N f\|_\infty = O(r^{-N}) = O(|\hat{f}_N|). \quad (3.19)$$

Les règles empiriques (3.18) et (3.19) permettent d'estimer efficacement l'erreur de troncature qui, en pratique, est inconnue. (*développer...*)

Motivation pour interpolation...

Les polynômes de Chebyshev satisfont une seconde relation d'orthogonalité, dite « discrète », pour $0 \leq n \leq N$ et $m \geq n$,

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{\beta_k} T_m(x_k) T_n(x_k) = \frac{N}{2} \beta_n \delta_{m, \pm n \bmod 2N}, \quad (3.20)$$

où $\{x_k\}_{k=0,\dots,N}$ sont les nœuds CGL de T_N définis par l'équation (3.4) et

$$\beta_n = 1 + \delta_{0,n} + \delta_{N,n}. \quad (3.21)$$

Soit $I_N f$ l'unique polynôme de Π_N qui interpole f aux $N + 1$ nœuds CGL de T_N

$$I_N f(x_k) = f(x_k). \quad (3.22)$$

Ce polynôme peut s'exprimer dans la base de Chebyshev

$$I_N f = \sum_{n=0}^N \tilde{f}_n T_n. \quad (3.23)$$

En utilisant les relations (3.23), (3.22) et (3.20), on peut alors déduire les coefficients \tilde{f}_n à partir des valeurs de f en ces nœuds

$$\tilde{f}_n = \frac{2}{\beta_n N} \sum_{k=0}^N \frac{1}{\beta_k} f(x_k) \cos \frac{nk\pi}{N}. \quad (3.24)$$

L'équation (3.24) définit ainsi une transformation discrète de l'espace « physique » vers l'espace « spectral ». Par ailleurs, des relations (3.22), (3.23) et (3.2), on peut déduire la transformation inverse

$$f(x_k) = \sum_{n=0}^N \tilde{f}_n \cos \frac{nk\pi}{N}. \quad (3.25)$$

Les équations (3.24) et (3.25) décrivent des transformations en cosinus discrètes (DCT), qui peuvent être effectuées efficacement à l'aide d'un algorithme de transformation de Fourier rapide (FFT) pour un coût asymptotique de $O(N \log N)$ opérations.

Les coefficients \tilde{f}_n peuvent être reliés aux coefficients \hat{f}_n par la relation

$$\tilde{f}_n = \hat{f}_n + \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \hat{f}_{2jN+n} & \text{si } n = 0 \text{ ou } N, \\ \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{f}_{2jN-n} + \hat{f}_{2jN+n}) & \text{si } 0 < n < N. \end{cases} \quad (3.26)$$

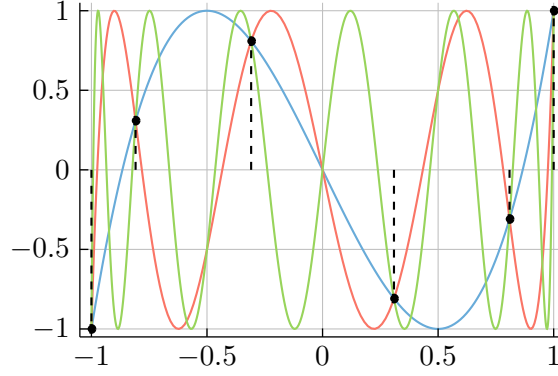


FIGURE 3.3 – Les polynômes T_n (—), T_{2N-n} (—) et T_{2N+n} (—) sont indiscernables aux nœuds CGL de T_N (ici $n = 3$ et $N = 5$).

Cette relation met en évidence le phénomène d'*aliasing*, qui traduit le fait que les polynômes T_n et $T_{\pm n \bmod 2N}$ prennent les mêmes valeurs aux nœuds $\{x_k\}_{k=0,\dots,N}$, comme illustré sur la Figure 3.3. La différence entre le polynôme d'interpolation $I_N f$ et la somme partielle $P_N f$ est l'*erreur d'aliasing*, qui est orthogonale à l'erreur de troncature¹

$$\|f - I_N f\|^2 = \|f - P_N f\|^2 + \|I_N f - P_N f\|^2. \quad (3.27)$$

L'erreur d'approximation due à l'interpolation est donc toujours supérieure à l'erreur liée à la troncature de la série de Chebyshev. Si f est régulière, la suite des coefficients \hat{f}_n converge rapidement vers zéro, si bien que l'erreur d'aliasing reste faible, à condition que le degré de troncature N soit choisi suffisamment grand. En outre, de la relation (3.26) on déduit que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$|f(x) - I_N f(x)| \leq 2 \sum_{n>N} |\hat{f}_n|. \quad (3.28)$$

L'erreur d'approximation due à l'interpolation est donc *au pire* supérieure à l'erreur de troncature par un facteur 2. L'erreur d'aliasing peut cependant devenir problématique lorsqu'elle est amplifiée par les non-linéarités présentes dans les équations que l'on sera amené à résoudre. Nous reviendrons sur ce point dans la Section 3.3 lorsque nous aborderons ...

3.1.2.3 Évaluation

Par la suite, nous serons amenés à évaluer à maintes reprises des sommes de la forme

$$s_N = \sum_{n=0}^N \hat{s}_n T_n \quad (3.29)$$

en des points autres que les nœuds CGL. Plutôt que de réécrire cette somme dans la base canonique de Π_N , il est intéressant de tirer parti de la relation (3.3). En introduisant la suite récurrente

$$b_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > N, \\ \hat{s}_n - b_{n+2}(x) + 2xb_{n+1}(x) & \text{si } 0 \leq n \leq N, \end{cases} \quad (3.30)$$

¹ $\|\cdot\|$ désigne ici la norme induite par le produit scalaire (3.8).

on obtient, pour $-1 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned}
 s_N &= \hat{s}_0 T_0 + \hat{s}_1 T_1 + \dots + \hat{s}_{N-2} T_{N-2} + \hat{s}_{N-1} T_{N-1} + \hat{s}_N T_N, \\
 &= \hat{s}_0 T_0 + \hat{s}_1 T_1 + \dots + (\hat{s}_{N-2} - b_N) T_{N-2} + (\hat{s}_{N-1} - b_{N+1} + 2x b_N) T_{N-1}, \\
 &= \hat{s}_0 T_0 + \hat{s}_1 T_1 + \dots + (\hat{s}_{N-3} - b_{N-1}) T_{N-3} + b_{N-2} T_{N-2}, \\
 &\dots \\
 &= (\hat{s}_0 - b_2) T_0 + b_1 T_1, \\
 &= \hat{s}_0 - b_2 + b_1 x,
 \end{aligned}$$

et enfin

$$s_N(x) = b_0(x) - x b_1(x). \quad (3.31)$$

L'exécution de cet algorithme de sommation — proposé par Clenshaw [17] — requiert seulement $O(N)$ opérations. La sommation de Clenshaw est donc un moyen efficace et numériquement stable pour évaluer des séries de Chebyshev.

3.1.2.4 Dérivation

En posant $x = \cos \theta$, il vient, d'après (3.2),

$$T'_n(x) := \frac{d}{dx} T_n(x) = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta}. \quad (3.32)$$

Ainsi, de l'identité $2 \cos n\theta \sin \theta = \sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta$, on peut déduire la relation

$$2T_n = \frac{T'_{n+1}}{n+1} - \frac{T'_{n-1}}{n-1}, \quad (3.33)$$

pour $n \geq 2$.

Soit $f \in \mathcal{C}^k[-1, 1]$. On approche la dérivée k -ième $f^{(k)}$ de f par la dérivée k -ième du polynôme d'interpolation $I_N f$

$$D_N^{(k)} f := (I_N f)^{(k)}. \quad (3.34)$$

En général, les opérations de dérivation et d'interpolation ne commutent pas, i.e.

$$D_N^{(k)} f \neq I_N(f^{(k)}). \quad (3.35)$$

Les valeurs aux nœuds CGL de cette dérivée peuvent être exprimées comme une combinaison linéaire des valeurs de f en ces mêmes nœuds

$$\begin{pmatrix} D_N^{(k)} f(x_0) \\ \vdots \\ D_N^{(k)} f(x_N) \end{pmatrix} = (\mathbf{D}_N)^k \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

où \mathbf{D}_N est la matrice de différentiation [16]

$$(\mathbf{D}_N)_{i,j} = \begin{cases} \frac{2N^2 + 1}{6} & \text{si } i = j = 0, \\ -\frac{2N^2 + 1}{6} & \text{si } i = j = N, \\ -\frac{x_i}{2 \sin^2 \frac{i\pi}{N}} & \text{si } 0 < i = j < N, \\ -\frac{(-1)^{i+j} \beta_i}{2 \beta_j \sin \frac{(i+j)\pi}{2N} \sin \frac{(i-j)\pi}{2N}} & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (3.37)$$

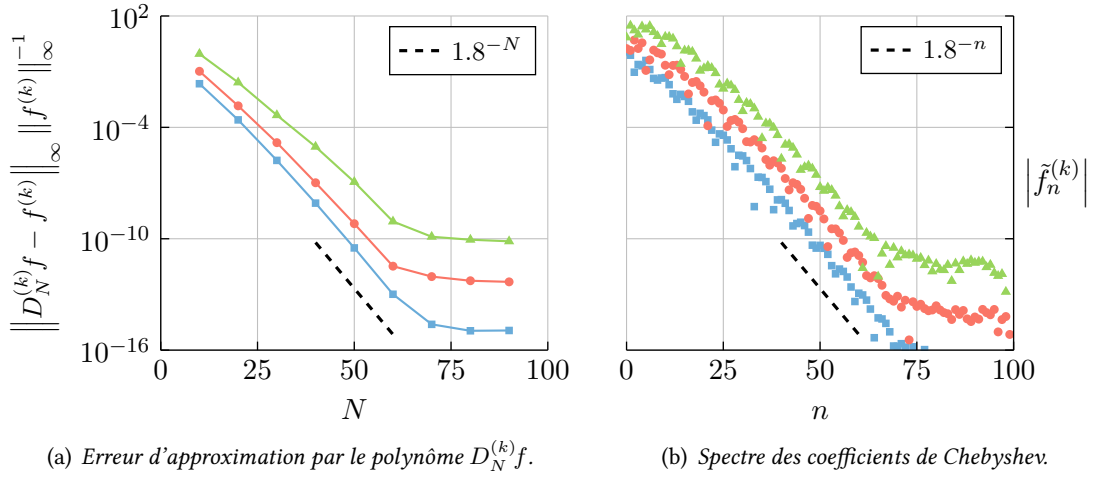


FIGURE 3.4 – Décroissance exponentielle de l'erreur d'approximation et des coefficients de Chebyshev pour la fonction analytique $f : x \mapsto e^{\sin 3x^3}$ et ses dérivées $f^{(k)}$ ($k = 0(\square), 1(\bullet), 2(\blacktriangle)$).

Alternativement, il est intéressant de construire explicitement le polynôme dérivé $D_N^{(k)}f$ comme une somme de la forme

$$D_N^{(k)}f = \sum_{n=0}^{N-k} \tilde{f}_n^{(k)} T_n. \quad (3.38)$$

Développer motivation...

La relation (3.33) implique que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2(n+1)\tilde{f}_{n+1} = \alpha_n \tilde{f}_n^{(1)} - \tilde{f}_{n+2}^{(1)}. \quad (3.39)$$

Les coefficients $\tilde{f}_n^{(1)}$ peuvent ainsi être calculés suivant la relation de récurrence

$$\tilde{f}_n^{(1)} = \frac{1}{\alpha_n} \left(2(n+1)\tilde{f}_{n+1} + \tilde{f}_{n+2}^{(1)} \right). \quad (3.40)$$

Plus généralement, les coefficients de Chebyshev de la dérivée k -ième vérifient

$$\tilde{f}_n^{(k)} = \frac{1}{\alpha_n} \left(2(n+1)\tilde{f}_{n+1}^{(k-1)} + \tilde{f}_{n+2}^{(k)} \right). \quad (3.41)$$

Cette méthode + FFT permet d'évaluer les dérivées aux nœuds CGL pour $O(N + N \log N) = O(N \log N)$, qui est asymptotiquement (au-delà de $N \approx 16$) plus efficace que le produit matrice-vecteur (3.36) ($O(N^2)$).

Toutefois, comme l'ont fait remarquer Wengle et Seinfeld [18], l'algorithme récursif (3.41) peut amplifier les erreurs d'arrondi commises sur les plus petits coefficients $\tilde{f}_n^{(k-1)}$ et ainsi compromettre la précision de tous les coefficients $\tilde{f}_n^{(k)}$. Un moyen simple de remédier à ce problème consiste à mettre à zéro les coefficients $\tilde{f}_n^{(k-1)}$ inférieurs en valeur absolue à un seuil donné, choisi en fonction de la précision machine ϵ_M . (Un seuil égal à $10\epsilon_M$ semble être un bon choix (détailler...)).

3.1.2.5 Intégration

Intégrale indéfinie/Primitive de $I_N f$ qui s'annule en -1

$$D_N^{(-1)}f := x \mapsto \int_{-1}^x I_N f(t) dt \quad (3.42)$$

c'est un polynôme de degré $N + 1$

$$D_N^{(-1)}f = \sum_{n=0}^{N+1} \tilde{f}_n^{(-1)} T_n. \quad (3.43)$$

(3.39) implique

$$\tilde{f}_n^{(-1)} = \frac{\alpha_n \tilde{f}_{n-1} - \tilde{f}_{n+1}}{2n}, \quad (3.44)$$

pour $n \geq 1$ et, puisque $D_N^{(-1)}f(-1) = 0$, on a

$$\tilde{f}_0^{(-1)} = - \sum_{n=1}^{N+1} (-1)^n \tilde{f}_n^{(-1)}. \quad (3.45)$$

$$\int_{-1}^x f(t) dt \approx D_N^{(-1)}f(x). \quad (3.46)$$

En particulier,

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx D_N^{(-1)}f(1) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^N \frac{2\tilde{f}_n}{1-n^2}, \quad (3.47)$$

et

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) dx - D_N^{(-1)}f(1) \right| \approx \left| \frac{2\tilde{f}_N}{1-N^2} \right|. \quad (3.48)$$

Clenshaw-Curtis (quadrature imbriquée/adaptative)?

calcul longueur de courbe/aire de surface (approximation, l'intégrande n'est généralement pas polynomiale)

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(u, v) du dv \approx D_{M,N}^{(-1)}g(1, 1) = \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ pair}}}^M \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^N \frac{4\tilde{g}_{m,n}}{(1-m^2)(1-n^2)}, \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(u, v) du dv - D_{M,N}^{(-1)}g(1, 1) \right| &\approx \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ pair}}}^M \left| \frac{4\tilde{g}_{m,N}}{(1-m^2)(1-N^2)} \right| \\ &+ \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^N \left| \frac{4\tilde{g}_{M,n}}{(1-M^2)(1-n^2)} \right| \\ &+ \left| \frac{4\tilde{g}_{M,N}}{(1-M^2)(1-N^2)} \right|. \end{aligned} \quad (3.50)$$

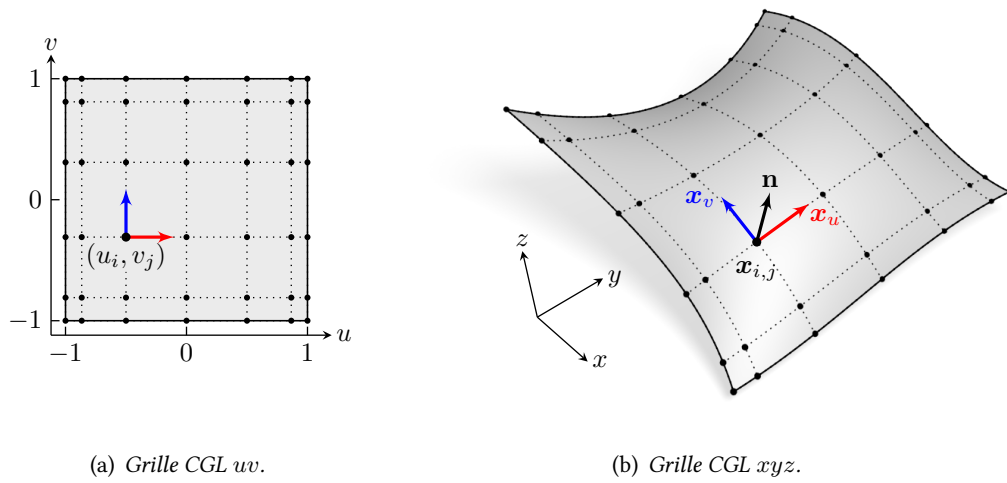


FIGURE 3.5 – Grille CGL.

3.2 INTÉGRATION TEMPORELLE

- champ de vitesse connu : intégration classique, schéma explicite (Euler, RK)
- vitesse normale connue : approximation EdS
 - calcul dérivées par différentiation spectrale
 - calcul normale et composante tangentielle

3.3 INSTABILITÉS...

- non-linéarités \rightarrow aliasing, peut causer instabilité [19], atténuation : sur-échantillonnage, filtrage
- auto-intersections
 - globales (traitées au [Chapitre 4](#))
 - locales [20] (détection, résolution?)

GÉNÉRALISATION AUX SURFACES RÉGULIÈRES PAR MORCEAUX DE TOPOLOGIE QUELCONQUE

4

4.1 CONSTRUCTION DES NOUVELLES FACES

objectif : définir la paramétrisation des nouvelles surfaces (et les limites du domaine paramétrique pour les faces BRep reposant sur celles-ci)

4.1.1 Arêtes convexes

paramétrisation approchée des courbes d'intersection (choix du paramètre : abscisse curviligne, paramètre de Hohmeyer (cf. [Section 4.2.2](#)), *least-square fitting* (ajustement de courbe par la méthode des moindres carrés) d'une série de Chebyshev univariée), portion de *canal surface* approchée

4.1.2 Sommets convexes

deux variantes :

4.1.2.1 Une face polygonale

$(u, v) \equiv$ coordonnées sphériques
+ : 1 seule face, spectre Chebyshev étroit/compact

4.1.2.2 Plusieurs faces rectangulaires

polygone sphérique découpé en quadrilatères [\[21\]](#)
+ : domaine paramétrique non restreint

4.2 RÉOLUTION DES INTERSECTIONS ENTRE FACES

4.2.1 État de l'art

état de l'art méthodes d'intersection de surfaces paramétriques : review complète [\[22\]](#)
subdivision [\[23\]](#), implicitisation approchée [\[24\]](#), suivi (marching) [\[25\]](#), Hohmeyer [\[26\]](#) (critère de détection de boucles sur les enveloppes de normales, paramétrisation monotone et tracé des branches d'intersection)

4.2.2 Approche retenue

adaptation de l'approche de Hohmeyer [\[26\]](#) (full Chebyshev / Chebyshev-Bernstein)

- changement de base [\[27\]](#)

- volumes englobants convexes : oriented bounding box [28] (détail en [Annexe A](#)) / enveloppe convexe (comparer complexité, volumes)
- subdivision : changement de variable (détail en [Annexe B](#)) / algorithme de Casteljau (ref?)
- test de séparation : théorème de séparation des convexes [29] / optimisation linéaire [30]
- traitement des intersections tangentielles

4.3 VALIDATION DE LA MÉTHODE

4.3.1 Propagation suivant un champ de vitesse continu

sphère/cube dans un écoulement tourbillonnaire incompressible analytique de période temporelle $2T$

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \cos(\pi t/T) \begin{pmatrix} \sin^2(\pi x) [\sin(2\pi z) - \sin(2\pi y)] \\ \sin^2(\pi y) [\sin(2\pi x) - \sin(2\pi z)] \\ \sin^2(\pi z) [\sin(2\pi y) - \sin(2\pi x)] \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

paramétrisation : cube projeté sur sphère

calcul de volume avec quadrature de Clenshaw-Curtis (exact, l'intégrande est polynomiale) (étanchéité (continuité G^0 partout) garantie car les marqueurs de bord coïncident tout au long de la déformation)

convergence de l'erreur d'approximation sur la position, l'aire et le volume à $t = 0$ et $t = T$ pour différents niveaux de discrétisations spatiale et temporelle

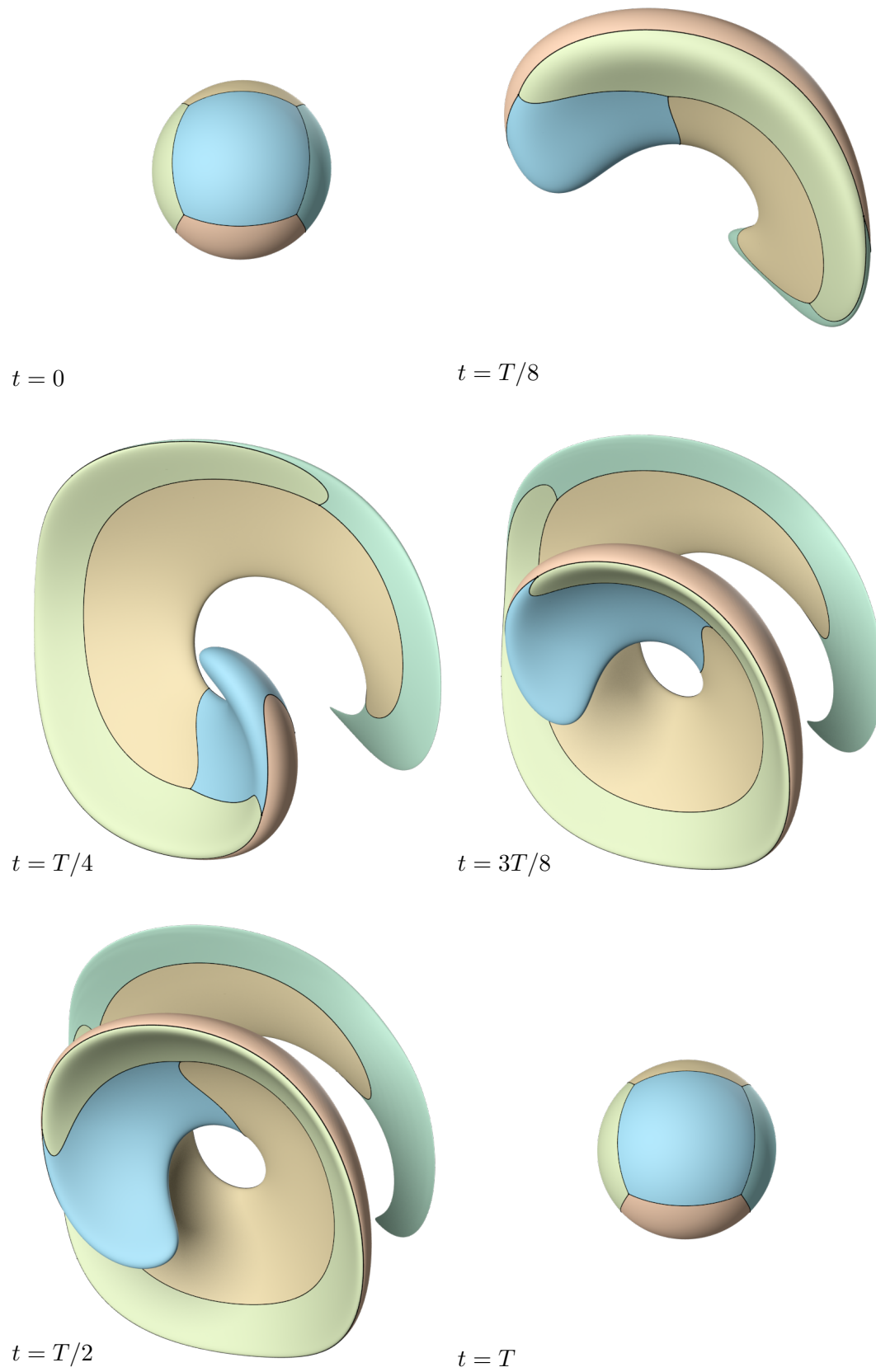
+ convergence de la variation de volume au cours de la déformation

4.3.2 Propagation à vitesse normale uniforme

cube en expansion

4.3.3 Propagation à vitesse normale non uniforme?

?

FIGURE 4.1 – Modèle BRep à différents instants de la déformation ($T = 4$).

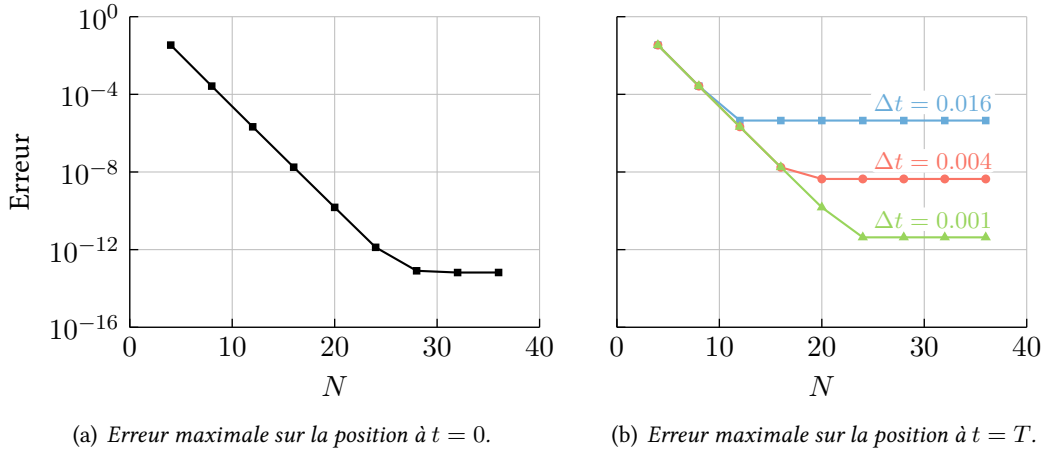


FIGURE 4.2 – Erreur maximale sur la position pour différents niveaux de discrétisations spatiale et temporelle.

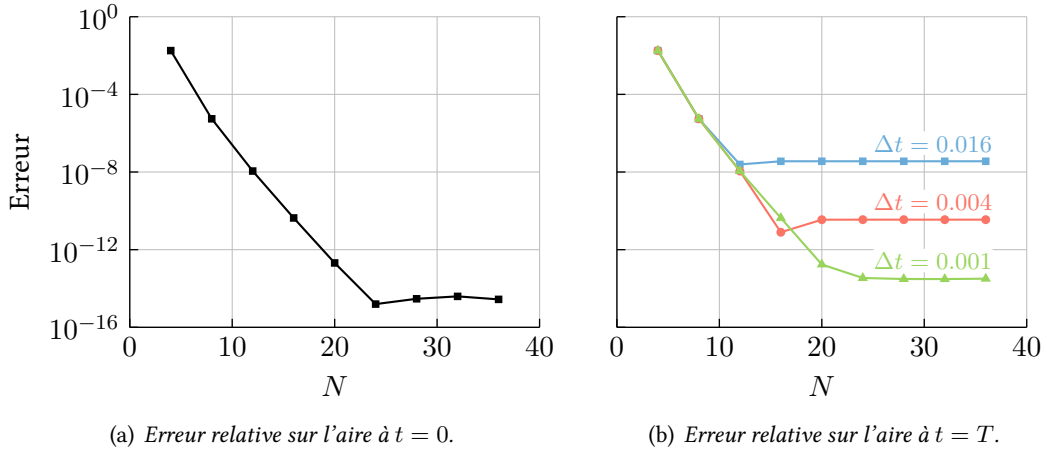


FIGURE 4.3 – Erreur relative sur l'aire pour différents niveaux de discrétisations spatiale et temporelle.

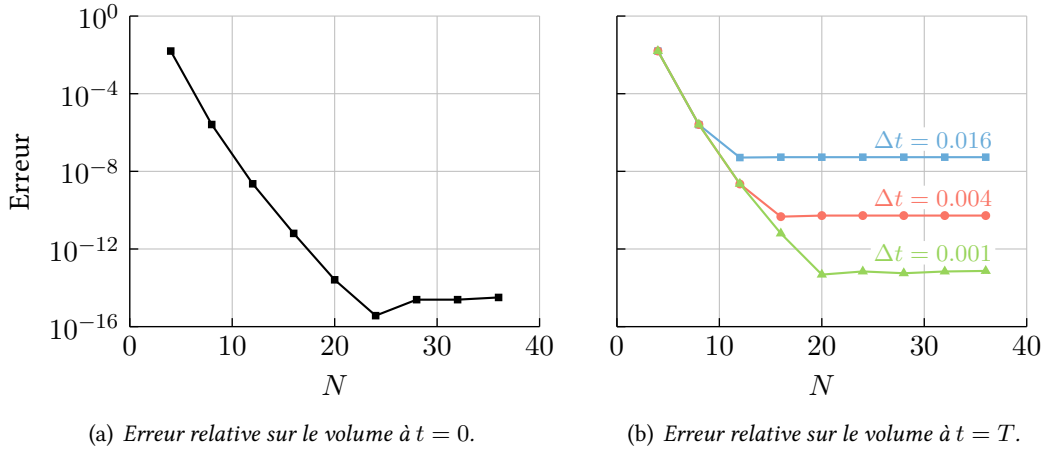


FIGURE 4.4 – Erreur relative sur le volume pour différents niveaux de discrétisations spatiale et temporelle.

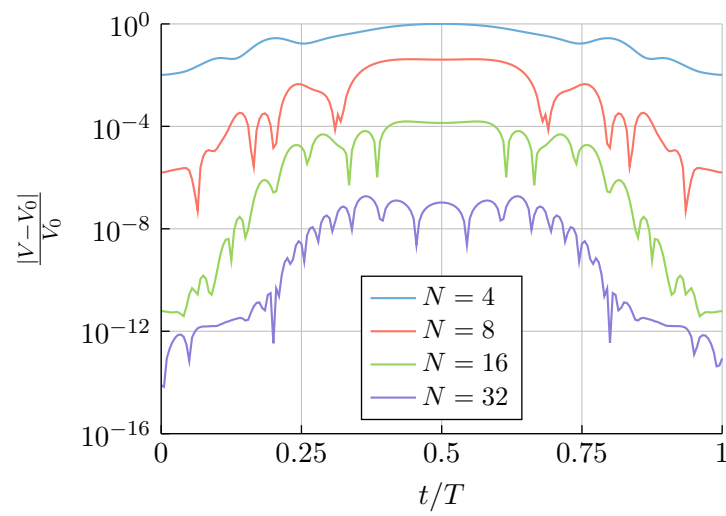


FIGURE 4.5 – Évolution de l'erreur relative en volume au cours du temps, pour différents niveaux de discrétisation spatiale. Le schéma de Runge-Kutta explicite à l'ordre 4 est utilisé pour l'intégration temporelle, avec un pas de temps $\Delta t = 0.001$.

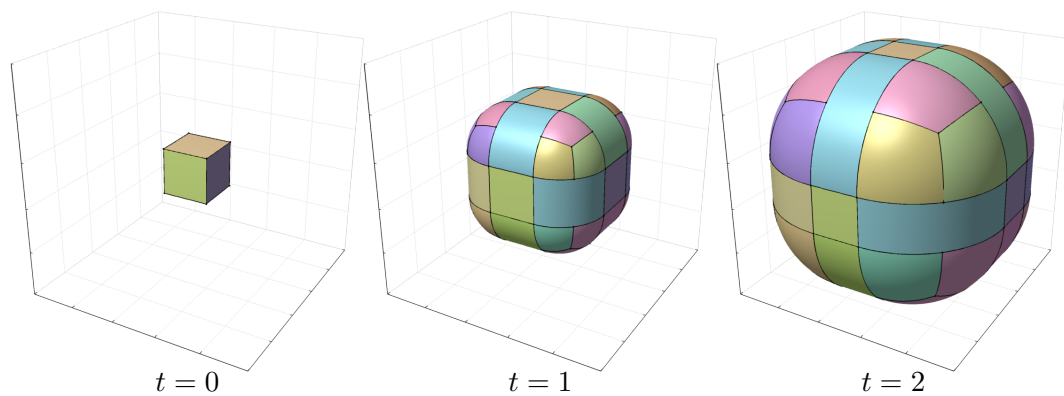


FIGURE 4.6 – ...

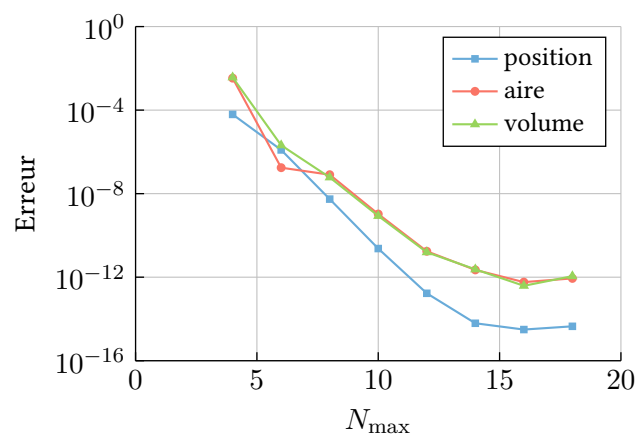


FIGURE 4.7 – ...

on veut mettre au point une méthodologie pour déformer un maillage de la surface en propagation en utilisant le modèle BRep dynamique comme support géométrique, afin de pouvoir réaliser des simulations EF/VF dans des domaines de géométrie déformables.

5.1 MÉTHODES DE SIMULATION DANS DES GÉOMÉTRIES DÉFORMABLES

État de l'art :

1. maillage volumique conforme à l'interface
 - a) un seul maillage *body-fitted* avec formulation ALE : frontière = maillage de l'interface, intérieur déformé de façon arbitraire (nécessite généralement de préserver la connectivité)
 - b) plusieurs maillages *body-fitted* qui se superposent (méthode Chimère [31, 32], FLUSEPA [33])
 - + facilite la génération du maillage en volume lorsque la géométrie est complexe (e.g. hyper-sustentateurs), et évite de déformer un maillage 3d
 - nécessite de traiter les intersections entre les blocs de maillage, limité aux mouvements rigides (?)
2. maillage volumique non conforme à l'interface (*immersed/embedded boundary methods* [34]) : fluide traité de façon eulérienne (maillage fixe), soit explicitement [35, 36], soit implicitement [37]
 - + évite de générer et déformer un maillage 3d autour d'une géométrie complexe
 - application des conditions aux limites

ici, on se concentre sur les applications utilisant la méthodologie 1a, et on ne s'occupe que du maillage de la frontière/interface. On se limite également aux maillages triangulaires, linéaires par morceaux (mais extension aux maillages hybrides, courbes envisageable)

5.2 OBJECTIFS ET ENJEUX

5.2.1 Objectifs

1. préserver la connectivité du maillage autant que faire se peut (\Rightarrow déformation pure)
2. maintenir une bonne qualité de maillage (\Rightarrow métrique à définir, lissage/optimisation par déplacements tangentiels)

3. le maillage doit représenter fidèlement l'interface (\Rightarrow sommets localisés exactement sur la surface BRep) et ses caractéristiques géométriques (arêtes vives, coins, ...) (\Rightarrow contraintes sur les nœuds et arêtes du maillage dans ces régions) (\rightarrow persistance des entités BRep?)

Déformation = mouvement induit par la propagation + lissage/optimisation

5.2.2 Enjeux

- “localiser” les entités du maillage sur le modèle BRep (face BRep et coordonnées uv)
- associer des nœuds/arêtes du maillage aux sommets/arêtes vifs du modèle BRep

5.3 APPROCHE NAÏVE/SIMPLE

Maillage conforme aux frontières des faces BRep [38]

- un maillage par face BRep
 - maillage unique des arêtes BRep pour garantir la conformité globale
- + lissage/optimisation dans l'espace uv 2d, les caractéristiques géométriques sont naturellement représentées par le maillage
- contraintes excessives sur le maillage (détailler ...), persistance des entités BRep pas flexible

5.4 APPROCHE AVANCÉE

Hypergraphe [39]

Projection d'un déplacement xyz sur une surface paramétrique

Projection d'un déplacement xyz sur une surface BRep composite (traversée des arêtes BRep douces, “trajectoire trans-carreaux” [39, Section 5.5])

Régénération des chemins contraints

Pré-déformation

Optimisation, pondération des triangles

APPLICATION À LA SIMULATION DE LA RÉGRESSION DE PROPERGOL SOLIDE | 6

CONCLUSION

L'objet de cette annexe est de proposer des méthodes pour la construction de volumes englobants des courbes et surfaces paramétriques polynomiales exprimées dans les bases de Chebyshev ou Bernstein. On se limite à des boîtes (parallélépipèdes rectangles) dont l'orientation dans l'espace est déterminée à l'aide d'heuristiques simples. Un bon compromis est ainsi trouvé entre l'étroitesse des boîtes et la complexité de leur construction, qui est proportionnelle au degré de la paramétrisation polynomiale.

A.1 DÉFINITION

On définit une boîte orientée de centre \mathbf{c} , de demi-côtés $\{a_i\}_{i=1,\dots,3}$ et d'axes orthonormés $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,\dots,3}$ comme l'ensemble des points $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient, pour $i = 1, 2, 3$,

$$\left| \mathbf{e}_i^\top (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \right| \leq a_i. \quad (\text{A.1})$$

A.2 BASE DE CHEBYSHEV

Les méthodes présentées dans cette section reposent sur une propriété fondamentale des polynômes de Chebyshev : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $-1 \leq x \leq 1$,

$$|T_n(x)| \leq 1. \quad (\text{A.2})$$

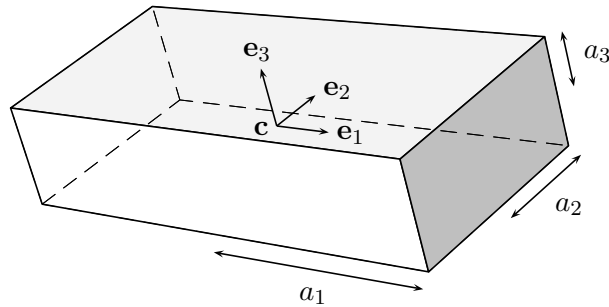


FIGURE A.1 – Boîte orientée.

A.2.1 Boîte englobant une courbe

Soit Γ un segment de courbe décrit par la paramétrisation

$$\begin{aligned} \gamma: [-1, 1] &\longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \sum_{n=0}^N \hat{\gamma}_n T_n(t). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

La série tronquée

$$P_1 \gamma(t) = \sum_{n=0}^1 \hat{\gamma}_n T_n(t) \quad (\text{A.4})$$

définit une bonne approximation linéaire de Γ , à savoir la droite passant par le point $\hat{\gamma}_0$ et dirigée par le vecteur $\hat{\gamma}_1$. On choisit donc $\mathbf{c} = \hat{\gamma}_0$ comme centre de la boîte, et on définit le premier axe comme

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\hat{\gamma}_1}{\|\hat{\gamma}_1\|}. \quad (\text{A.5})$$

On construit ensuite les axes \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 en suivant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Si $\|\hat{\gamma}_1\| \ll 1$, on construit une boîte alignée avec les axes du repère cartésien.

Pour $-1 \leq t \leq 1$ et $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^\top (\gamma(t) - \mathbf{c}) &= \mathbf{e}_i^\top \sum_{n=1}^N \hat{\gamma}_n T_n(t), \\ &= \sum_{n=1}^N \mathbf{e}_i^\top \hat{\gamma}_n T_n(t), \end{aligned}$$

donc

$$\left| \mathbf{e}_i^\top (\gamma(t) - \mathbf{c}) \right| \leq \sum_{n=1}^N \left| \mathbf{e}_i^\top \hat{\gamma}_n \right| |T_n(t)|.$$

Or, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [-1, 1]$, $|T_n(t)| \leq 1$, donc en choisissant

$$a_i = \sum_{n=1}^N \left| \mathbf{e}_i^\top \hat{\gamma}_n \right|, \quad (\text{A.6})$$

la boîte orientée englobe bien Γ .

A.2.2 Boîte englobant une surface

Soit Σ un carreau de surface décrit par la paramétrisation

$$\begin{aligned} \sigma: [-1, 1]^2 &\longrightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \hat{\sigma}_{m,n} T_m(u) T_n(v). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Sans restreindre la généralité, on suppose que $\|\hat{\sigma}_{1,0}\| \geq \|\hat{\sigma}_{0,1}\|$.

Le plan passant par le point $\hat{\sigma}_{0,0}$ et engendré par les vecteurs $\hat{\sigma}_{1,0}$ et $\hat{\sigma}_{0,1}$ est une bonne approximation linéaire de Σ . On choisit donc $\mathbf{c} = \hat{\sigma}_{0,0}$ comme centre de la boîte, et on définit le premier axe comme

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\hat{\sigma}_{1,0}}{\|\hat{\sigma}_{1,0}\|}. \quad (\text{A.8})$$

On définit les troisième et deuxième axes comme

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{1,0} \times \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{0,1}}{\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{1,0} \times \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{0,1}\|}, \quad (\text{A.9})$$

et

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1. \quad (\text{A.10})$$

Si $\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{1,0} \times \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{0,1}\| \ll 1$, on construit une boîte alignée avec les axes du repère cartésien.

Pour $-1 \leq u, v \leq 1$,

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) - \mathbf{c} = \sum_{m=1}^M \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,0} T_m(u) + \sum_{n=1}^N \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{0,n} T_n(v) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n} T_m(u) T_n(v). \quad (\text{A.11})$$

Donc, pour $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{e}_i^\top (\boldsymbol{\sigma}(u, v) - \mathbf{c}) \right| &\leq \sum_{m=1}^M \left| \mathbf{e}_i^\top \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,0} \right| |T_m(u)| + \sum_{n=1}^N \left| \mathbf{e}_i^\top \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{0,n} \right| |T_n(v)| \\ &\quad + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left| \mathbf{e}_i^\top \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n} \right| |T_m(u)| |T_n(v)|, \\ &\leq \sum_{m=1}^M \left| \mathbf{e}_i^\top \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,0} \right| + \sum_{n=1}^N \left| \mathbf{e}_i^\top \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{0,n} \right| + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left| \mathbf{e}_i^\top \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n} \right|. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

En choisissant

$$a_i = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left| \mathbf{e}_i^\top \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n} \right| - \left| \mathbf{e}_i^\top \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{0,0} \right|, \quad (\text{A.13})$$

la boîte orientée englobe bien Σ .

A.3 BASE DE BERNSTEIN

REPARAMÉTRISATION AFFINE

B

Dans cette annexe, on détaille le calcul de la reparamétrisation affine exploitée dans la [Section 4.2.2](#) pour subdiviser des courbes et surfaces paramétriques polynomiales exprimées dans la base de Chebyshev.

Soit p un polynôme de degré au plus N exprimé dans la base de Chebyshev

$$p(x) = \sum_{n=0}^N \hat{p}_n T_n(x).$$

Soient $-1 \leq a, b \leq 1$ et r le changement de variable affine

$$r(x) = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} = \alpha x + \beta.$$

qui transforme le segment $[-1, 1]$ en le segment $[a, b]$.

$q \equiv p \circ r$ est également un polynôme de degré au plus N

$$q(x) = \sum_{n=0}^N \hat{p}_n T_n(\alpha x + \beta) = \sum_{n=0}^N \hat{q}_n T_n(x).$$

La reparamétrisation consiste ainsi à déterminer les coefficients $\{\hat{q}_n\}_{n=0,\dots,N}$.

On pose

$$T_n(\alpha x + \beta) = \sum_{k=0}^n \lambda_{k,n} T_k(x). \quad (\text{B.1})$$

($T_n(\alpha x + \beta)$ est un polynôme de degré au plus n en x , donc pour tout $k > n$, $\lambda_{k,n} = 0$.)

Il vient alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \hat{q}_n T_n(x) &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n \lambda_{k,n} \hat{p}_n T_k(x), \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{n=n}^N \lambda_{k,n} \hat{p}_n T_k(x), \end{aligned}$$

ainsi, par unicité de la décomposition de q dans la base $\{T_n\}_{n=0,\dots,N}$ de Π_N ,

$$\hat{q}_n = \sum_{k=n}^N \lambda_{n,k} \hat{p}_k. \quad (\text{B.2})$$

Il nous reste ainsi à déterminer les coefficients $\{\lambda_{i,j}\}_{0 \leq i,j \leq N}$.

On a d'abord

$$\begin{cases} T_0(\alpha x + \beta) = 1 = T_0(x), \\ T_1(\alpha x + \beta) = \alpha x + \beta = \beta T_0(x) + \alpha T_1(x), \end{cases}$$

soit $\lambda_{0,0} = 1$, $\lambda_{0,1} = \beta$ et $\lambda_{1,1} = \alpha$.

D'après la relation de récurrence (3.3), on a également, pour $n \geq 2$,

$$T_n(\alpha x + \beta) = 2(\alpha x + \beta)T_{n-1}(\alpha x + \beta) - T_{n-2}(\alpha x + \beta). \quad (\text{B.3})$$

Pour tous entiers i et j , $2T_iT_j = T_{i+j} + T_{|i-j|}$. On a donc

$$\begin{aligned} 2\alpha x T_{n-1}(\alpha x + \beta) &= 2\alpha \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,n-1} T_1(x) T_k(x) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,n-1} (T_{k+1}(x) + T_{|k-1|}(x)). \end{aligned}$$

On obtient ainsi, en injectant (B.1) dans (B.3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \lambda_{k,n} T_k(x) &= \alpha \left(\sum_{l=1}^n \lambda_{l,n-1} T_l(x) + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{j,n-1} T_j(x) + \lambda_{0,n-1} T_1(x) \right), \\ &\quad + 2\beta \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,n-1} T_k(x) - \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_{k,n-2} T_k(x). \end{aligned}$$

Soit enfin, pour $n \geq 2$ et $k \leq n$,

$$\lambda_{k,n} = \alpha (\lambda_{k-1,n-1} + \lambda_{k+1,n-1} + \delta_{k,1} \lambda_{0,n-1}) + 2\beta \lambda_{k,n-1} - \lambda_{k,n-2}. \quad (\text{B.4})$$

(On pose $\lambda_{k,n} = 0$ lorsque $k < 0$ et $\delta_{\cdot,\cdot}$ représente le symbole de Kronecker).

La complexité de cette reparamétrisation est comparable à celle de l'algorithme de Casteljau, utilisé pour subdiviser des courbes et surfaces de Bézier.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. A. SETHIAN. *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1999. (cf. pp. [1](#) et [2](#))
- [2] D. GUEYFFIER, J. LI, A. NADIM, R. SCARDOVELLI et S. ZALESKI. Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *Journal of Computational Physics*, **152** (2) : pp. 423–456, 1999. (cf. p. [2](#))
- [3] S. POPINET et S. ZALESKI. A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **30** (6) : pp. 775–793, 1999. (cf. p. [2](#))
- [4] G. TRYGGVASON, B. BUNNER, A. ESMAEELI, D. JURIC, N. AL-RAWAHI, W. TAUBER, J. HAN, S. NAS et Y.-J. JAN. A Front-Tracking Method for the Computations of Multiphase Flow. *Journal of Computational Physics*, **169** (2) : pp. 708 – 759, 2001. (cf. p. [2](#))
- [5] X. JIAO. Face Offsetting: A Unified Approach for Explicit Moving Interfaces. *Journal of Computational Physics*, **220** (2) : pp. 612–625, 2007. (cf. p. [2](#))
- [6] O. P. BRUNO, Y. HAN et M. M. POHLMAN. Accurate, high-order representation of complex three-dimensional surfaces via Fourier continuation analysis. *Journal of Computational Physics*, **227** (2) : pp. 1094 – 1125, 2007. (cf. pp. [3](#) et [9](#))
- [7] M. PENTCHEVA. *Conversion CSG-BRep de scènes définies par des quadriques*. Thèse de Doctorat, Université Nancy II, 2010. (cf. pp. [3](#) et [7](#))
- [8] M. PETERNELL et H. POTTMANN. Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, **23** (2-3) : pp. 255–266, 1997. (cf. p. [5](#))
- [9] S. M. GELSTON et D. DUTTA. Boundary surface recovery from skeleton curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **12** (1) : pp. 27–51, 1995. (cf. p. [6](#))
- [10] X. M. JIAO. *Data transfer and interface propagation in multicomponent simulations*. Thèse de Doctorat, University of Illinois, Urbana-Champaign, 2001. (cf. p. [6](#))
- [11] D. GUEYFFIER, F. ROUX, Y. FABIGNON, G. CHAINERAY, N. LUPOGLAZOFF, F. VUILLOT, J. HIJLKEMA et F. ALAUZET. Accurate Computation of Grain Burning Coupled with Flow Simulation in Rocket Chamber. *Journal of Propulsion and Power*, **31** (6) : pp. 1761 – 1776, 2015. (cf. p. [9](#))
- [12] S. K. VEERAPANENI, A. RAHIMIAN, G. BIROS et D. ZORIN. A Fast Algorithm for Simulating Vesicle Flows in Three Dimensions. *Journal of Computational Physics*, **230** (14) : pp. 5610–5634, 2011. (cf. p. [9](#))
- [13] J. MASON et D. HANDSCOMB. *Chebyshev Polynomials*. CRC Press, 2002. (cf. p. [10](#))

- [14] A. GIL, J. SEGURA et N. M. TEMME. *Numerical Methods for Special Functions*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2007. (cf. p. 10)
- [15] J. P. BOYD. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, Mineola, NY, seconde édition, 2001. (cf. p. 10)
- [16] C. CANUTO, M. Y. HUSSAINI, A. QUARTERONI et T. A. ZANG. *Spectral Methods. Fundamentals in Single Domains*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. (cf. pp. 10 et 15)
- [17] C. CLENSHAW. A note on the summation of Chebyshev series. *Mathematics of Computation*, **9** (51) : pp. 118–120, 1955. (cf. p. 15)
- [18] H. WENGLE et J. H. SEINFELD. Pseudospectral solution of atmospheric diffusion problems. *Journal of computational Physics*, **26** (1) : pp. 87–106, 1978. (cf. p. 16)
- [19] A. RAHIMIAN, S. K. VEERAPANENI, D. ZORIN et G. BIROS. Boundary Integral Method for the Flow of Vesicles with Viscosity Contrast in Three Dimensions. *Journal of Computational Physics*, **298** : pp. 766–786, 2015. (cf. p. 18)
- [20] R. T. FAROUKI. The approximation of non-degenerate offset surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **3** (1) : pp. 15–43, 1986. (cf. p. 18)
- [21] J. HAHN. Filling Polygonal Holes with Rectangular Patches. Dans *Theory and Practice of Geometric Modeling*, pp. 81–91. Springer, 1989. (cf. p. 19)
- [22] N. M. PATRIKALAKIS et T. MAEKAWA. *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*. Springer Science & Business Media, 2009. (cf. p. 19)
- [23] E. G. HOUGHTON, R. F. EMNETT, J. D. FACTOR et C. L. SABHARWAL. Implementation of a divide-and-conquer method for intersection of parametric surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **2** (1-3) : pp. 173–183, 1985. (cf. p. 19)
- [24] T. DOKKEN. Approximate Implicitization. *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, pp. 81–102, 2001. (cf. p. 19)
- [25] R. E. BARNHILL et S. KERSEY. A marching method for parametric surface/surface intersection. *Computer Aided Geometric Design*, **7** (1-4) : pp. 257–280, 1990. (cf. p. 19)
- [26] M. E. HOHMEYER. *Robust and Efficient Surface Intersection for Solid Modeling*. Thèse de Doctorat, EECS Department, University of California, Berkeley, 1992. (cf. p. 19)
- [27] A. RABABAH. Transformation of Chebyshev–Bernstein polynomial basis. *Computational Methods in Applied Mathematics*, **3** (4) : pp. 608–622, 2003. (cf. p. 19)
- [28] A. FOURNIER et J. BUCHANAN. Chebyshev Polynomials for Boxing and Intersections of Parametric Curves and Surfaces. volume 13, pp. 127–142, 1994. (cf. p. 20)
- [29] D. EBERLY. Dynamic Collision Detection using Oriented Bounding Boxes. *Geometric Tools, Inc*, 2002. (cf. p. 20)
- [30] R. SEIDEL. Small-Dimensional Linear Programming and Convex Hulls Made Easy. *Discrete & Computational Geometry*, **6** (3) : pp. 423–434, 1991. (cf. p. 20)

- [31] R. L. MEAKIN et N. E. SUHS. Unsteady aerodynamic simulation of multiple bodies in relative motion. Dans *9th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, p. 1996, 1989. (cf. p. 25)
- [32] Z. J. WANG et V. PARTHASARATHY. A fully automated Chimera methodology for multiple moving body problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **33** (7) : pp. 919–938, 2000. (cf. p. 25)
- [33] P. BRENNER. Three-dimensional aerodynamics with moving bodies applied to solid propellant. Dans *27th Joint Propulsion Conference*, p. 2304, 1991. (cf. p. 25)
- [34] C. S. PESKIN. The immersed boundary method. *Acta numerica*, **11** : pp. 479–517, 2002. (cf. p. 25)
- [35] K. WANG, J. GRÉTARSSON, A. MAIN et C. FARHAT. Computational algorithms for tracking dynamic fluid–structure interfaces in embedded boundary methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **70** (4) : pp. 515–535, 2012. (cf. p. 25)
- [36] J. HOVNANIAN. *Méthode de frontières immergées pour la mécanique des fluides. Application à la simulation de la nage..* Thèse de Doctorat, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2012. (cf. p. 25)
- [37] J. BRUCHON, H. DIGONNET et T. COUPEZ. Using a signed distance function for the simulation of metal forming processes: Formulation of the contact condition and mesh adaptation. From a Lagrangian approach to an Eulerian approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **78** (8) : pp. 980–1008, 2009. (cf. p. 25)
- [38] B. ANDRIEU et D. GUEYFFIER. High-fidelity, dynamic CAD model for propagating surfaces and moving meshes. *Procedia Engineering*, **203** : pp. 115–127, 2017. (cf. p. 26)
- [39] G. FOUCAULT. *Adaptation de Modèles CAO Paramétrés en vue d’une Analyse de Comportement Mécanique par Éléments Finis.* Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2008. (cf. p. 26)
- [40] M. A. LACHANCE. Chebyshev economization for parametric surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **5** (3) : pp. 195–208, 1988. (Pas cité)
- [41] S. CAMPAGNA, P. SLUSALLEK et H.-P. SEIDEL. Ray tracing of spline surfaces: Bézier clipping, Chebyshev boxing, and bounding volume hierarchy – a critical comparison with new results. *The Visual Computer*, **13** (6) : pp. 265–282, 1997. (Pas cité)
- [42] A. J. CHORIN. Flame Advection and Propagation Algorithms. *Journal of Computational Physics*, **35** (1) : pp. 1–11, 1980. (Pas cité)
- [43] J. A. SETHIAN. Numerical algorithms for propagating interfaces: Hamilton-Jacobi equations and conservation laws. *Journal of Differential Geometry*, **31** (1) : pp. 131–161, 1990. (Pas cité)
- [44] R. PEYRET. *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*, volume 148. Springer Science & Business Media, 2013. (Pas cité)
- [45] F. ALAUZET, B. FABRÈGES, M. A. FERNÁNDEZ et M. LANDAJUELA. Nitsche-XFEM for the coupling of an incompressible fluid with immersed thin-walled structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **301** : pp. 300–335, 2016. (Pas cité)

- [46] I. STROUD. *Boundary Representation Modelling Techniques*. Springer Science & Business Media, 2006. (Pas cité)