

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|----------|
| NOTATIONS | 1 |
| INTRODUCTION | 3 |
| I DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE SUIVI DE SURFACE ADAPTÉE AUX GÉOMÉTRIES RÉGULIÈRES PAR MORCEAUX | 5 |
| 1 FORMULATION DU PROBLÈME DE PROPAGATION D'INTERFACES G^1 PAR MORCEAUX | 7 |
| 1.1 Géométrie différentielle des (courbes et) surfaces | 7 |
| 1.2 Description et représentation des surfaces régulières par morceaux | 8 |
| 1.2.1 Représentation par les frontières (BRep) | 8 |
| 1.3 Formulation lagrangienne du problème de propagation d'interface | 12 |
| 1.4 Principe de Huygens avec condition d'entropie | 12 |
| 2 ALGORITHME GÉNÉRAL POUR LA PROPAGATION D'INTERFACES G^1 PAR MORCEAUX | 15 |
| 2.1 Convexité des courbes singulières | 15 |
| 2.2 Observations | 16 |
| 2.3 Construction d'une EdS partielle | 18 |
| 2.3.1 Paramétrisation de l'EdS propre d'une face BRep | 18 |
| 2.3.2 Paramétrisation de la pseudo-EdS d'une arête BRep convexe | 19 |
| 2.3.3 Paramétrisation de la pseudo-EdS d'un sommet BRep convexe | 21 |
| 2.4 Construction d'un modèle BRep de l'EdB | 22 |
| 2.4.1 Construction du graphe des intersections | 22 |
| 2.4.2 Construction des faces, arêtes et sommets BRep | 22 |
| 3 MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE DE L'ALGORITHME DE PROPAGATION | 25 |
| 3.1 Représentation des carreaux de surface | 25 |
| 3.1.1 État de l'art | 25 |
| 3.1.2 Polynômes de Chebyshev univariés | 26 |
| 3.1.3 Polynômes de Chebyshev bivariés | 33 |
| 3.2 Représentation et calcul des courbes d'intersection | 33 |
| 3.3 Intégration temporelle | 34 |
| 3.3.1 Advection dans champ de vecteur vitesse connu | 34 |
| 3.3.2 Propagation suivant une vitesse normale donnée | 34 |
| 3.4 Amélioration de la stabilité numérique | 36 |
| 3.4.1 Réduction de l'erreur d'aliasing | 36 |
| 3.4.2 Prévention des singularités géométriques | 36 |

| | |
|---|-----------|
| 4 VALIDATION DES MÉTHODES NUMÉRIQUES | 37 |
| 4.1 Propagation suivant un champ de vitesse analytique | 37 |
| 4.2 Propagation à vitesse normale uniforme | 40 |
| II INTÉGRATION DE L'OUTIL DE SUIVI DE SURFACE DANS UNE CHAÎNE DE CALCUL MULTI-PHYSIQUE | 43 |
| 5 ADAPTATION D'UN MAILLAGE DE SURFACE DYNAMIQUE | 45 |
| 5.1 Problématique et état de l'art | 45 |
| 5.1.1 Simulation numérique avec une géométrie déformable | 45 |
| 5.1.2 Génération de maillage surfacique basé sur un modèle BRep | 46 |
| 5.1.3 Optimisation de maillage surfacique | 47 |
| 5.2 Lien entre modèle BRep et maillage trans-carreaux | 47 |
| 5.2.1 Construction d'une structure d'hypergraphe | 48 |
| 5.3 Déformation de maillage trans-carreaux basé sur un modèle BRep dynamique | 48 |
| 5.3.1 Correspondance d'hypergraphes | 48 |
| 5.3.2 Régénération du maillage contraint | 48 |
| 5.3.3 <i>Untangling</i> | 48 |
| 5.3.4 Optimisation par bouger de nœud | 48 |
| 5.3.5 Optimisation par reconnections locales | 48 |
| BIBLIOGRAPHIE | 51 |

NOTATIONS

Analyse

Π_N Espace des polynômes à coefficients réels et de degré au plus N

$f^{(k)}$ Dérivée k -ième de la fonction f

f_x Dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$

$f_{x_1 \dots x_p}$ Dérivée partielle $\frac{\partial^p f}{\partial x_1 \dots \partial x_p}$

Topologie

∂E Frontière d'un sous-ensemble E de \mathbb{R}^d

$\text{int } E$ Intérieur de E

\bar{E} Adhérence de E

E^C Complémentaire de E

INTRODUCTION

CONTEXTE

- Combustion/érosion/ablation de solides
- dépôt (e.g. accrétion de givre, fabrication additive)
- interaction fluide-structure (e.g. aéroélasticité)
- décalage (offset) de surface
 - définition de tolérances
 - usinage par machine-outil à commande numérique
- génération de maillage volumique par avancée de front (e.g. couche limite pour écoulements NS à haut Reynolds)

CADRE/PROBLÉMATIQUES DE LA THÈSE

1. Résoudre la propagation d'interfaces 3D géométriquement régulières par morceaux et de genre topologique quelconque
 - on ne s'intéresse pas aux interfaces fluides (e.g. écoulements multi-phasiques, vésicules en suspension, ...) dont la propagation est régie par la tension de surface, un flot de courbure ou de Willmore et qui subissent de grands changements de topologie
2. Réaliser des simulations numériques (de type EF/VF) de phénomènes multi-physiques complexes [mettant en jeu des interfaces en propagation]/[tenant compte des déformations dynamiques de la géométrie résultant de la propagation d'interfaces]

CONTRIBUTIONS

1. Utilisation du *formalisme BRep* pour représenter une interface régulière par morceaux en propagation en 3D (dans des applications de type combustion de solide, interaction fluide-structure, ...).
2. Mise au point d'un algorithme basé sur le *principe de Huygens* (avec condition d'entropie) pour adapter dynamiquement la géométrie et la topologie du modèle BRep de l'interface au cours de la propagation.
3. Mise en œuvre d'une méthode pseudo-spectrale (i.e. d'ordre élevé) (utilisant les polynômes de Chebyshev comme fonctions de base) pour suivre efficacement et avec une grande précision le mouvement de l'interface.

4. Mise en œuvre d'une méthodologie pour adapter un *maillage dynamique géométriquement fidèle au modèle BRep dynamique* de l'interface, dans le but de réaliser des simulations EF/VF.
5. (Intégration de l'outil de suivi de surface dans une chaîne de calcul multi-physique)

ORGANISATION DU MANUSCRIT

2 parties

1. Développement d'un outil de suivi de surface adapté aux géométries régulières par morceaux
 - a) Formulation mathématique du problème de propagation d'interfaces régulières par morceaux en trois dimensions
 - b) Formulation d'un algorithme basé sur le PHCE pour adapter dynamiquement la géométrie et la topologie du modèle BRep de l'interface au cours de la propagation
 - c) Mise en œuvre numérique et validation de l'algorithme
2. Intégration de l'outil de suivi de surface dans une chaîne de calcul multi-physique
 - a) Méthodologie pour adapter un maillage dynamique géométriquement fidèle au modèle BRep dynamique de l'interface
 - b) Couplage de l'outil de suivi de surface avec des solveurs EF/VF – Application à la simulation de la combustion de propergol solide dans les moteurs de fusée

PREMIÈRE PARTIE

DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE SUIVI DE SURFACE ADAPTÉE AUX GÉOMÉTRIES RÉGULIÈRES PAR MORCEAUX

FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME DE PROPAGATION D'INTERFACES RÉGULIÈRES PAR MORCEAUX EN TROIS DIMENSIONS

1

Ce premier chapitre a pour objectif de formaliser le problème central de la thèse : la propagation d'interfaces régulières par morceaux en trois dimensions. Pour cela, on rappelle dans un premier temps les éléments de la géométrie différentielle des courbes et surfaces auxquels on aura recours tout au long du manuscrit. On accorde un intérêt particulier aux surfaces de régularité G^1 par morceaux, ainsi qu'à leur description par décomposition cellulaire via la représentation par les frontières. On donne ensuite la formulation lagrangienne traditionnelle du problème de propagation d'interface et met en évidence ses limites dans le contexte de la thèse. On conclut ce chapitre en introduisant une formulation plus adéquate du problème, basée sur le principe de Huygens.

1.1 GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES (COURBES ET) SURFACES

(annexe?) introduire notions :

1. plan tangent, continuité géométrique G^1
2. *carreau paramétrique* : (\mathcal{U}, σ)
 - $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ est le *domaine paramétrique*
 - $\Sigma = \sigma(\mathcal{U})$ est le *support* du carreau (surface)
 - $\sigma : \mathcal{U} \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est une *paramétrisation* de Σ
 - vecteurs tangents σ_u et σ_v
 - vecteur normal $\mathbf{n} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$
 - tenseur métrique, première forme fondamentale \mathbf{I} , structure Riemannienne
 - seconde forme fondamentale \mathbf{II} , courbures normale, principales, moyenne et gaussienne
3. *arc/courbe paramétrique* : (\mathcal{W}, γ)
 - $\mathcal{W} = [\underline{w}, \bar{w}]$ est l'*intervalle paramétrique*
 - $\Gamma = \gamma(\mathcal{W})$ est le *support* de l'arc (courbe)
 - $\gamma : \mathcal{W} \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^3$ est une *paramétrisation* de Γ
 - vecteur tangent γ'
 - courbure
 - courbe sur un carreau de surface
 - géométrie différentielle de l'intersection de deux carreaux

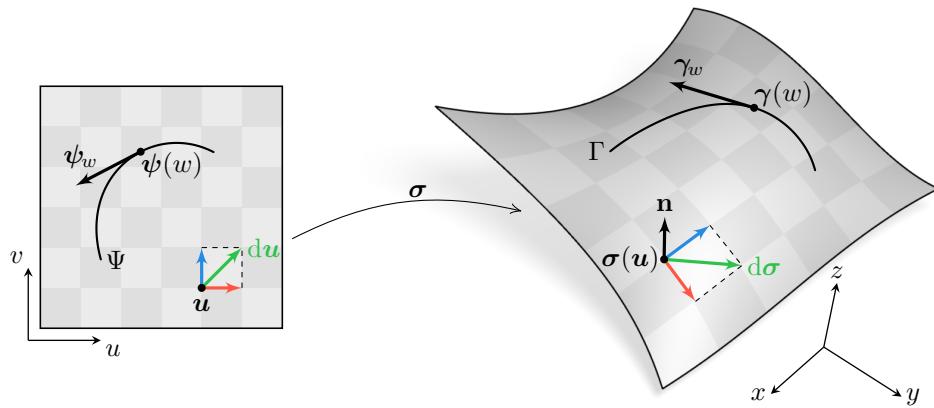


FIGURE 1.1 – Géométrie différentielle d'une courbe sur un carreau paramétrique.

1.2 DESCRIPTION ET PRÉSENTATION DES SURFACES RÉGULIÈRES PAR MORCEAUX

introduire notions [1] :

1. *nappe régulière* : variété de dimension 2, connexe, de continuité G^1 (direction normale continue)
 2. *courbe singulière* : variété de dimension 1, connexe, de continuité G^1 (direction tangente continue)
 3. *point singulier* : point qui n'est à l'intérieur d'aucune nappe régulière ou courbe singulière
- la frontière d'une nappe régulière est composée de courbes et de points singuliers (si elle n'est pas vide)
 - la frontière d'une courbe singulière (ses extrémités) est composée de points singuliers (si elle n'est pas vide)
 - tout point d'une surface G^1 par morceaux est
 - soit situé à l'intérieur d'une nappe régulière ;
 - soit situé à l'intérieur d'une courbe singulière ;
 - soit un point singulier.

1.2.1 PRÉSENTATION PAR LES FRONTIÈRES (BREP)

La *représentation par les frontières* (ou BRep pour *Boundary Representation*) est un formalisme très répandu dans le domaine de la Conception Assistée par Ordinateur (CAO) (*développer ...*). Elle consiste à décrire un solide Ω à l'aide d'une décomposition cellulaire de la surface Σ qui matérialise sa frontière. Cette décomposition — illustrée sur la Figure 1.3 — est constituée de *faces*, d'*arêtes* et de *sommets* dont on donne une définition dans les paragraphes suivants.

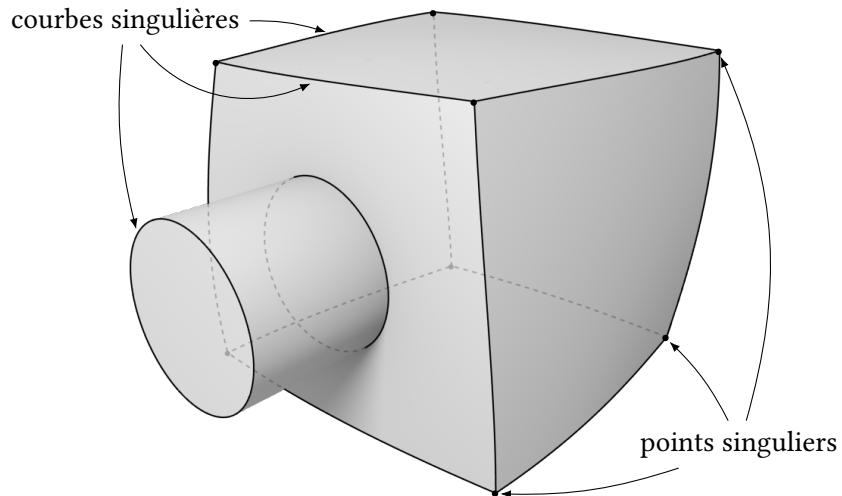


FIGURE 1.2 – Surface régulière par morceaux dont les courbes et points singuliers sont mis en évidence.

1.2.1.1 Faces

Une face du modèle BRep est une variété de dimension 2 connexe délimitée par des arêtes et des sommets. Géométriquement, une face F est décrite par un carreau paramétrique restreint. La topologie des courbes de restriction du domaine paramétrique est décrite à l'aide de *contours* (un par composante connexe du bord de F). Une face possède ainsi un contour extérieur W^{ext} et, éventuellement un ou plusieurs contours intérieurs $W^{\text{int},i}$ si celle-ci comporte des « trous ». Les faces, qui sont quasi-disjointes deux-à-deux (i.e. ne s'intersectent qu'en des arêtes ou des sommets du modèle BRep), sont regroupées en *coquilles*, qui représentent chacune une composante connexe de Σ .

1.2.1.2 Arêtes

Une arête du modèle BRep est une variété de dimension 1 connexe délimitée par des sommets. Puisque Σ est une variété sans bord, chaque arête du modèle BRep est incidente à exactement deux faces F_1 et F_2 . Géométriquement, l'arête E est représentée par une branche de la courbe d'intersection entre les carreaux Σ_1 et Σ_2 qui décrivent respectivement F_1 et F_2 . Cette courbe peut également être représentée par sa trace dans l'espace paramétrique de chaque carreau. On peut donc la représenter à l'aide des trois courbes paramétriques γ , ψ_1 et ψ_2 telles que

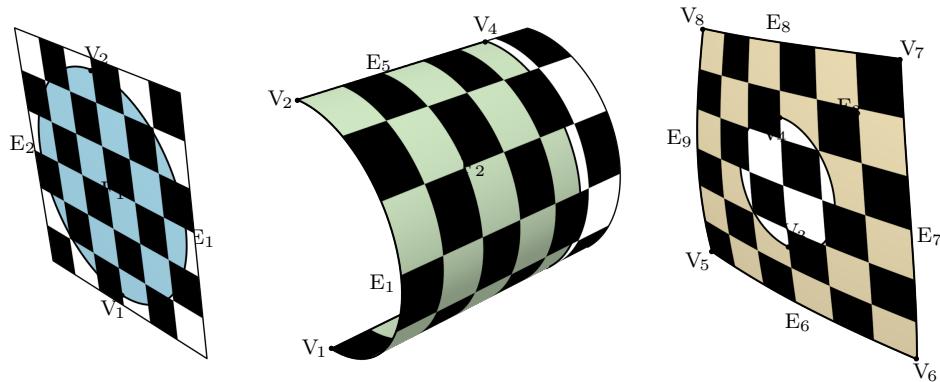
$$\gamma = \sigma_1 \circ \psi_1 = \sigma_2 \circ \psi_2. \quad (1.1)$$

Les arêtes, qui sont quasi-disjointes deux-à-deux (i.e. ne s'intersectent qu'en des sommets du modèle BRep), sont regroupées pour former les contours des faces. Puisque ces derniers sont orientés, chaque arête E est formée de deux *co-arêtes* jumelles E^1 et E^2 , chacune associée à une face incidente à E . Chaque co-arête possède une orientation, conforme à celle du contour qui la contient.

1.2.1.3 Sommets

Un sommet du modèle BRep matérialise l'intersection de deux arêtes et a pour support géométrique un point de \mathbb{R}^3 .

Espace euclidien



Espace paramétrique

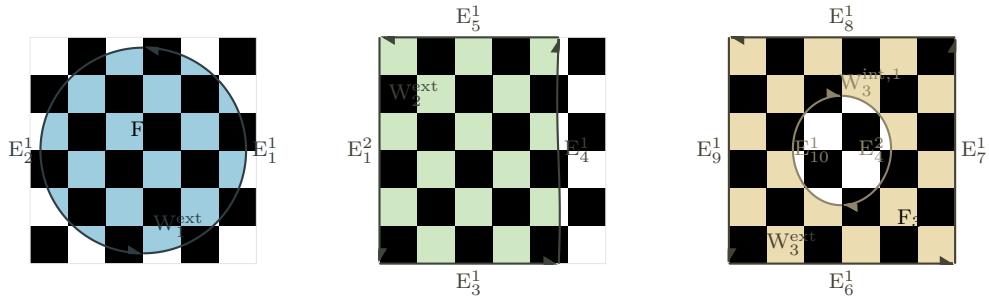


FIGURE 1.3 – Modèle BRep d'une surface régulière par morceaux.

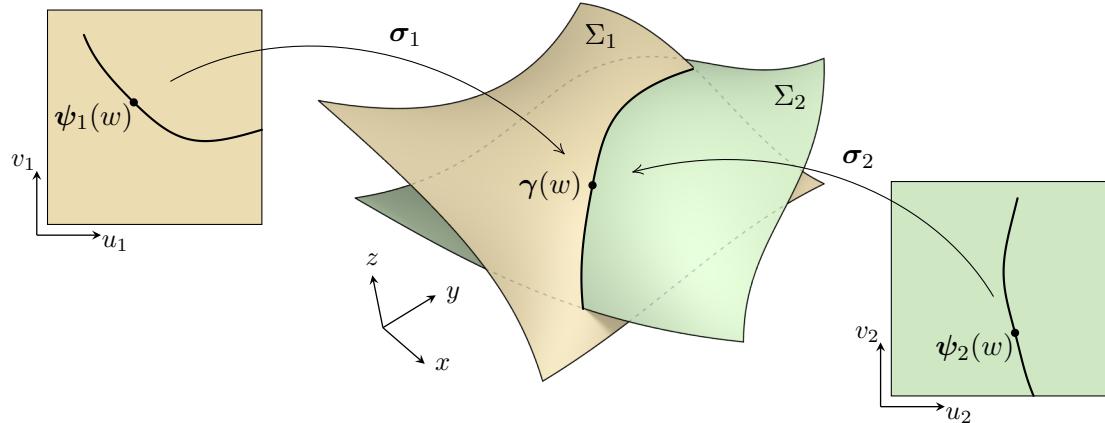


FIGURE 1.4 – Description géométrique d'une arête BRep.

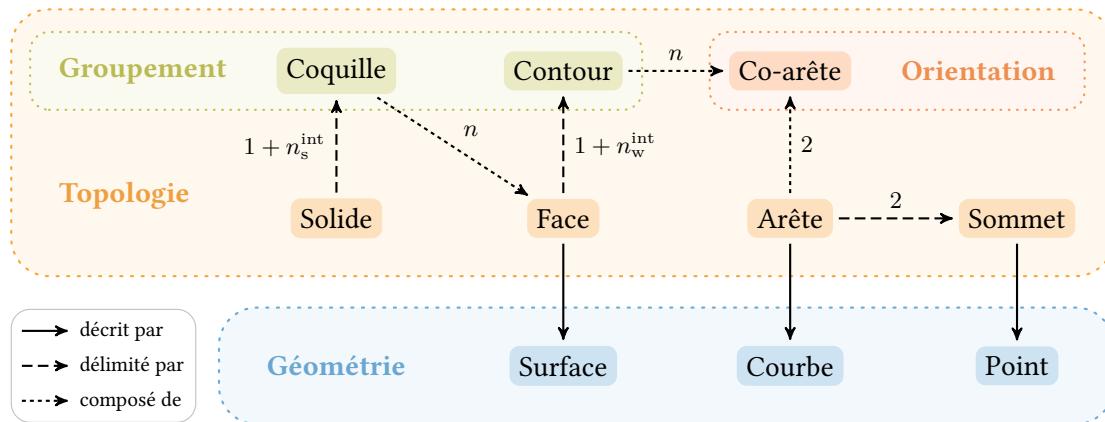


FIGURE 1.5 – Hiérarchie des éléments constituant un modèle BRep.

1.2.1.4 Structure de données

1. séparation entre topologie (structure) / géométrie (forme)
2. connectivité entre les entités capturée à l'aide d'une structure de graphe (homéomorphe à un polyèdre)
3. structure de données adaptée → *Doubly Connected Edge List* (DCEL) (*Halfedges*) (donner réfs.)

La Figure 1.5 présente un diagramme de la hiérarchie des entités qui constituent le modèle BRep.

1.2.1.5 Représentation de surfaces régulières par morceaux

Le formalisme de la représentation par les frontières est particulièrement adapté pour décrire des surfaces régulières par morceaux. En effet,

- l'ensemble des points singuliers de Σ est un sous-ensemble des sommets de son modèle BRep ;
- l'ensemble des courbes singulières de Σ est un sous-ensemble des arêtes de son modèle BRep ;
- les nappes régulières de Σ sont formées par la réunion des faces de son modèle BRep.

1.3 FORMULATION LAGRANGIENNE DU PROBLÈME DE PROPAGATION D'INTERFACE

On considère une interface Σ entre deux milieux distincts (e.g. un solide et un fluide). Dans cette thèse, on se concentre sur des problèmes en trois dimensions. Σ représente donc une surface (i.e. une variété de dimension 2) que l'on supposera orientable et fermée (i.e. sans bord). De cette manière, l'interface sépare un domaine *intérieur* Ω — que l'on supposera ouvert — et un domaine *extérieur* $\Omega^C = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$.

Le problème que l'on cherche à résoudre consiste à déterminer l'évolution au cours du temps de l'interface Σ étant données sa position actuelle ainsi que sa vitesse de propagation. Dans la formulation lagrangienne traditionnelle, ce problème est exprimé sous la forme d'une équation aux dérivées partielles (EDP) pour le vecteur position \mathbf{x} d'un point de l'interface. L'équation décrivant la propagation suivant un champ de vecteur vitesse $\mathbf{u} : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (1.2)$$

On peut également considérer que chaque point de Σ se déplace le long de la direction normale à l'interface suivant un champ de vitesse normale $\nu : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. L'équation décrivant la propagation est alors

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \nu(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t), \quad (1.3)$$

où $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ désigne la direction normale à Σ en \mathbf{x} à l'instant t , pointant vers l'extérieur de Ω .

En principe, les formulations (1.2) et (1.3) sont équivalentes puisque la composante tangentielle du vecteur vitesse n'affecte pas la forme de l'interface.

La formulation lagrangienne ne permet d'obtenir une solution au problème de propagation d'interface que dans le cas où cette dernière est *globalement* régulière et le reste tout au long de sa propagation. En effet, puisque la direction normale \mathbf{n} n'est pas définie au niveau des courbes et points singuliers de Σ , le déplacement de ces points est ambigu. On peut notamment distinguer deux cas [2].

Premièrement, si l'interface subit un mouvement d'advection (comme le transport d'un fluide ou encore la déformation d'un solide sous l'effet de contraintes mécaniques) alors ses singularités géométriques sont préservées au cours de la propagation.

En revanche, si l'interface se propage à la manière d'un front d'onde (comme la progression d'une flamme, d'un dépôt de matière ou encore l'ablation d'un solide) alors les singularités sont soit préservées soit régularisées, suivant la convexité locale de l'interface. C'est essentiellement sur ce deuxième type de propagation que l'on se concentre dans cette thèse.

Puisque l'on s'intéresse ici à la propagation d'interfaces régulières seulement par morceaux, il est nécessaire d'obtenir une meilleure formulation du problème qui s'affranchisse des ambiguïtés ainsi mises en évidence. Plutôt que de poser le problème sous la forme d'une équation différentielle, cette nouvelle formulation se présente comme une construction géométrique.

1.4 PRINCIPE DE HUYGENS AVEC CONDITION D'ENTROPIE

Alors qu'il développait un modèle ondulatoire de la propagation de la lumière, Christiaan Huygens proposa le principe suivant : chaque point de l'espace atteint par une onde lumineuse se comporte comme la source d'une ondelette secondaire émise dans toutes les directions. Si le milieu de propagation est

FIGURE 1.6 – Schéma pour distinguer EdS et EdB (à revoir!).

homogène et isotrope alors les ondelettes sont sphériques. Le front d'onde, qui se propage ainsi de proche en proche, est alors formé par l'*enveloppe* de ces ondelettes, i.e. la surface qui est tangente à chacune d'elles et dont chaque point est un point de tangence avec une ondelette.

Le principe de Huygens permet de décrire de nombreux phénomènes analogues à la propagation d'une onde dans un milieu tels que la progression d'une flamme. (*développer...*)

1. distinguer propagation d'une onde et d'une interface entre deux milieux matériels (l'une peut s'auto-intersecer, l'autre non) → condition d'entropie
2. formaliser la notion d'enveloppe des sphères (EdS) $\mathcal{E}^\rho(H \subseteq \Sigma)$ (surface tangente à toutes les sphères et en tout point tangente à une sphère)
3. formaliser la notion d'enveloppe des boules $\Sigma^\rho := \partial \{\Omega \cup \mathcal{S}(\Sigma, \rho)\}$
4. donner définition implicite de Σ^ρ :

$$\Sigma^\rho = \phi^{-1}(0)$$

avec

$$\phi(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{p} \in \Sigma} \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2 - \rho(\mathbf{p})^2$$

5. après une propagation à vitesse normale ν constante pendant un intervalle de temps τ tel que $\nu\tau = \rho$, la nouvelle interface est Σ^ρ
6. à condition que ρ soit suffisamment régulière (continuité à déterminer), $\Sigma^\rho \subset \mathcal{E}^\rho(\Sigma)$

MISE AU POINT D'UN ALGORITHME GÉNÉRAL POUR LA PROPAGATION D'INTERFACES RÉGULIÈRES PAR MORCEAUX

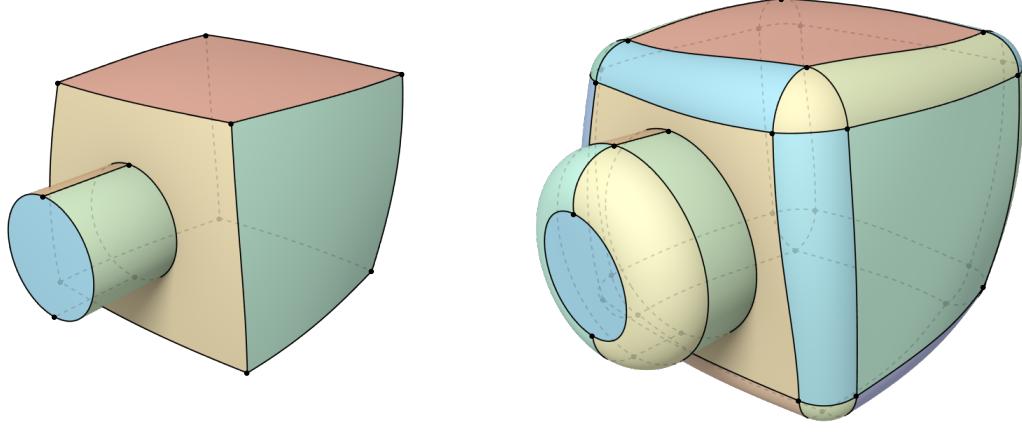
2

Dans ce deuxième chapitre on propose un algorithme basé sur le principe de Huygens avec condition d'entropie pour simuler la propagation d'une interface décrite dans le formalisme de la représentation par les frontières. L'objectif est donc de construire un nouveau modèle BRep décrivant l'enveloppe des boules (EdB) centrées sur l'interface à un instant donné. Pour cela, on tire des observations sur lesquelles on se basera pour construire dans un premier temps un sous-ensemble de l'enveloppe des sphères (EdS), duquel on retirera dans un second temps les régions qui sont exclues de l'EdB.

Dans ce chapitre, on explicite chaque étape de l'algorithme mais les détails de la mise en œuvre numérique font l'objet du chapitre suivant.

2.1 CONVEXITÉ DES COURBES SINGULIÈRES

[Objectif : formaliser la notion de convexité d'une courbe singulière de Σ (qui servira pour simplifier la construction de l'EdB) et démontrer que la convexité est "continue", i.e. que deux segments d'une même courbe singulière, l'un convexe et l'autre concave, sont nécessairement séparés par un point régulier de Σ]



(a) Modèle BRep de l'interface.

(b) Modèle BRep de l'enveloppe des boules centrées sur l'interface.

FIGURE 2.1 – Entrée et sortie de l'algorithme présenté dans le chapitre.

2.2 OBSERVATIONS

[Objectif : justifier en quoi la construction intermédiaire d'une « EdS partielle » (sous-ensemble de l'EdS qui contient l'EdB) permet de simplifier la construction d'un modèle BRep de l'EdB en évitant de construire des éléments de l'EdS qui sont trivialement exclus de l'EdB]

définitions :

- zone d'influence¹ de $H \subseteq \Sigma$ sur l'EdB (lieu des points de tangence entre Σ^ρ et $\mathcal{S}(H, \rho)$)

$$\mathcal{J}^\rho(H) := \Sigma^\rho \cap \mathcal{S}(H, \rho)$$

- EdS propre¹ de $H \subseteq \Sigma$

$$\mathcal{E}_*^\rho(H) := \overline{\mathcal{E}^\rho(H) \setminus \mathcal{E}^\rho(\partial H)}$$

arguments :

1. on sait décrire l'EdB simplement de manière *implicite* (cf. [Section 1.4](#)) mais on cherche à en construire une représentation *explicite*
2. en revanche, on peut décrire explicitement l'EdS de chaque carreau (\rightarrow introduire système définissant l'EdS à 2 paramètres)
3. il est plus commode de voir l'EdS d'un carreau comme (un sous-ensemble de) la réunion de 10 nouveaux carreaux (intérieur $\rightarrow 2$, bords $\rightarrow 4$ et “coins” $\rightarrow 4$)
4. si on procède ainsi pour chaque carreau qui décrit l'interface, on construit beaucoup de nouveaux carreaux qui sont redondants, voire même trivialement exclus de l'EdB
5. La zone d'influence sur l'EdB d'une courbe $\Gamma \subset \Sigma$ adhérentes aux nappes régulières Σ_L et Σ_R est incluse dans le lieu des points de tangence entre $\mathcal{E}^\rho(\Gamma)$, $\mathcal{E}^\rho(\Sigma_L)$ et $\mathcal{E}^\rho(\Sigma_R)$ (on appelle ce lieu *pseudo-EdS*¹ de Γ et on le note $\widehat{\mathcal{E}}^\rho(\Gamma)$).

Preuve. En posant²

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{p}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2 - \rho(\mathbf{p})^2,$$

et, pour $H \subseteq \Sigma$,

$$\varphi_H(\mathbf{x}) := \min_{\mathbf{p} \in H} S(\mathbf{x}, \mathbf{p}),$$

on veut démontrer que

$$\mathcal{J}^\rho(\Gamma) \subseteq \left\{ \mathbf{x} \in \Omega^C \mid \varphi_\Gamma(\mathbf{x}) = \varphi_{\Sigma_L}(\mathbf{x}) = \varphi_{\Sigma_R}(\mathbf{x}) = 0 \right\} \subseteq \widehat{\mathcal{E}}^\rho(\Gamma).$$

Puisque $\Gamma \subseteq (\overline{\Sigma_L} \cap \overline{\Sigma_R})$, on a $\varphi_\Gamma \geq \varphi_{\Sigma_L}$ et $\varphi_\Gamma \geq \varphi_{\Sigma_R}$.

Or, si $\mathbf{x} \in \mathcal{J}^\rho(\Gamma)$ alors³ $\varphi_\Gamma(\mathbf{x}) = 0$ et donc $\varphi_{\Sigma_L}(\mathbf{x}) \leq 0$ et $\varphi_{\Sigma_R}(\mathbf{x}) \leq 0$.

Mais si $\varphi_{\Sigma_L} < 0$ ou $\varphi_{\Sigma_R} < 0$ alors⁴ $\mathbf{x} \notin \Sigma^\rho$ et donc $\mathbf{x} \notin \mathcal{J}^\rho(\Gamma)$.

Donc si $\mathbf{x} \in \mathcal{J}^\rho(\Gamma)$ alors $\varphi_{\Sigma_L}(\mathbf{x}) = 0$ et $\varphi_{\Sigma_R}(\mathbf{x}) = 0$. ■

¹vocabulaire et notation à préciser ...

²introduire ces notations dans la [Section 1.4](#).

³car $\forall \mathbf{x} \in \Sigma^\rho, \varphi_\Gamma(\mathbf{x}) \geq 0$ et $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}(\Gamma, \rho), \varphi_\Gamma(\mathbf{x}) \leq 0$.

⁴car $\forall H \subseteq \Sigma, \forall \mathbf{x} \in \Sigma^\rho, \varphi_H(\mathbf{x}) \geq 0$.

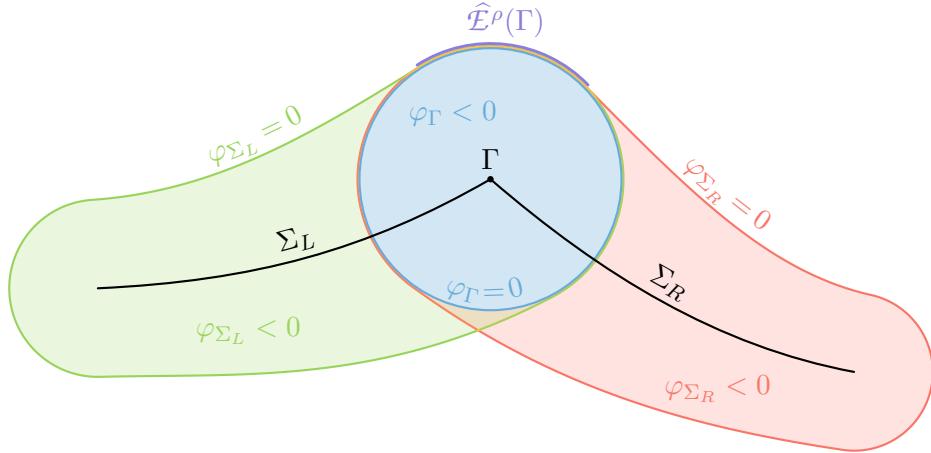


FIGURE 2.2 – Vue en coupe ...

6. Si Γ est une courbe singulière concave de Σ alors sa zone d'influence sur l'EdB est vide (i.e. Γ ne contribue pas à l'EdB et peut donc être ignorée).

Preuve. On veut montrer que $\mathcal{J}^{\rho}(\Gamma) = \emptyset$ (piste : montrer que, pour $x \in \Omega^C$, $\varphi_{\Gamma}(x) = 0 \Rightarrow \varphi_{\Sigma_L}(x) < 0$ ou $\varphi_{\Sigma_R}(x) < 0$) ■

7. si toutes les courbes singulières adhérentes à un point singulier sont concaves alors la zone d'influence sur l'EdB de ce point est vide (preuve?) (i.e. ce point ne contribue pas à l'EdB et peut donc être ignoré)

8. si toutes les courbes singulières adhérentes à un point singulier p ne sont pas concaves (ou bien que p n'est adhérent à aucune courbe singulière, e.g. le sommet d'un cône) on dit que p est convexe et sa zone d'influence sur l'EdB est la portion de $\mathcal{S}(p, \rho(p))$ qui est tangente aux EdS de toutes les courbes singulières adhérentes à p (preuve?), on appelle cette portion *pseudo-EdS*¹ de p et on la note $\widehat{\mathcal{E}}^{\rho}(p)$

9. l'EdB est incluse dans la réunion

- des EdS propres des nappes régulières, qui sont elles-mêmes contenues dans la réunion des EdS propres des faces BRep
- des pseudo-EdS des courbes singulières convexes, qui sont elles-mêmes contenues dans la réunion des pseudo-EdS des arêtes BRep convexes
- des pseudo-EdS des points singuliers convexes, qui sont elles-mêmes contenues dans la réunion des pseudo-EdS des sommets BRep convexes

⇒ on construit d'abord une telle réunion (que l'on appelle *EdS partielle*¹) puis on en élimine les régions qui sont exclues de l'EdB (au passage on constitue les relations topologiques qui assurent la validité du modèle BRep)

2.3 CONSTRUCTION D'UNE EDs PARTIELLE

[Objectif : donner les étapes de la construction d'une EdS partielle sous la forme d'un ensemble de carreaux restreints (paramétrisation + courbes de restriction du domaine paramétrique) avec des relations d'adjacences partielles]

2.3.1 PARAMÉTRISATION DE L'EDS PROPRE D'UNE FACE BREP

1. paramétrisation \mathbf{e} de l'EdS propre d'un carreau non-restreint Σ_0 : $([u, \bar{u}] \times [v, \bar{v}], \boldsymbol{\sigma})$

a) rappeler système définissant une EdS propre à 2 paramètres

$$\begin{cases} S_\rho(\mathbf{e}(u, v), \boldsymbol{\sigma}(u, v)) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial u} S_\rho(\mathbf{e}(u, v), \boldsymbol{\sigma}(u, v)) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} S_\rho(\mathbf{e}(u, v), \boldsymbol{\sigma}(u, v)) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

b) interprétation : intersection de cercles caractéristiques (voir figure Figure 2.3) \rightarrow 2 points (i.e. 2 nouveaux carreaux), on garde celui dans le sens de $+\mathbf{n}$ (i.e. $\mathcal{E}_+^\rho(\Sigma_0)$, l'autre ($\mathcal{E}_-^\rho(\Sigma_0)$) est trivialement exclu de l'edb)

c) paramétrisation à la Gelston [3] :

En considérant ρ comme une fonction des paramètres u et v , on peut réécrire le système (2.1)

$$\begin{cases} \|\mathbf{e} - \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \rho^2 = 0, \\ (\mathbf{e} - \boldsymbol{\sigma})^\top \boldsymbol{\sigma}_u + \rho \rho_u = 0, \\ (\mathbf{e} - \boldsymbol{\sigma})^\top \boldsymbol{\sigma}_v + \rho \rho_v = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

En effet $(\mathbf{e} - \boldsymbol{\sigma})^\top \mathbf{e}_u = (\mathbf{e} - \boldsymbol{\sigma})^\top \mathbf{e}_v = 0$ car le vecteur $\mathbf{e} - \boldsymbol{\sigma}$ est orthogonal à $\mathcal{S}(\boldsymbol{\sigma}, \rho)$ et donc à $\mathcal{E}_*^\rho(\Sigma_0)$. On cherche une paramétrisation de la forme

$$\mathbf{e}(u, v) = \boldsymbol{\sigma}(u, v) + \rho(u, v) \mathbf{n}_E(u, v),$$

où \mathbf{n}_E est la direction normale à $\mathcal{E}_*^\rho(\Sigma_0)$, qui vérifie

$$\begin{cases} \|\mathbf{n}_E\| = 1, \\ \mathbf{n}_E^\top \boldsymbol{\sigma}_u = -\rho_u, \\ \mathbf{n}_E^\top \boldsymbol{\sigma}_v = -\rho_v. \end{cases}$$

On décompose $\mathbf{n}_E = \mathbf{n}_u \boldsymbol{\sigma}_u + \mathbf{n}_v \boldsymbol{\sigma}_v + \mathbf{n}_n \mathbf{n}$, où $\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v}{\|\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v\|}$.

Puisque $\boldsymbol{\sigma}_u^\top \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_v^\top \mathbf{n} = 0$, on a

$$\mathbf{J}_{\boldsymbol{\sigma}}^\top \mathbf{n}_E = \mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma}} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_u \\ \mathbf{n}_v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \rho_u \\ \rho_v \end{pmatrix}.$$

Si on pose $\mathbf{t} = \mathbf{J}_{\boldsymbol{\sigma}} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_u \\ \mathbf{n}_v \end{pmatrix}$ (on a alors $\mathbf{n}_E = \mathbf{t} + \mathbf{n}_n \mathbf{n}$), on a

$$\mathbf{t} = -\mathbf{J}_{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma}})^{-1} \begin{pmatrix} \rho_u \\ \rho_v \end{pmatrix},$$

soit

$$\mathbf{t} = \frac{(\rho_v I_{1,2} - \rho_u I_{2,2}) \boldsymbol{\sigma}_u + (\rho_u I_{1,2} - \rho_v I_{1,1}) \boldsymbol{\sigma}_v}{|\mathbf{I}_{\boldsymbol{\sigma}}|}.$$

Si $\|\mathbf{t}\| \leq 1$ alors on a $\mathbf{n}_E^\pm = \mathbf{t} \pm \sqrt{1 - \|\mathbf{t}\|^2} \mathbf{n}$.

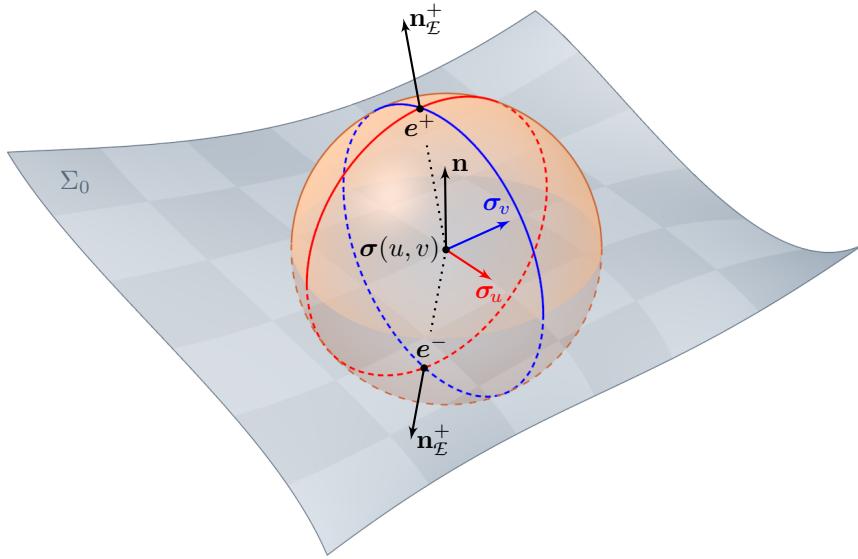


FIGURE 2.3 – Paramétrisation de l'EdS propre d'un carreau paramétrique.

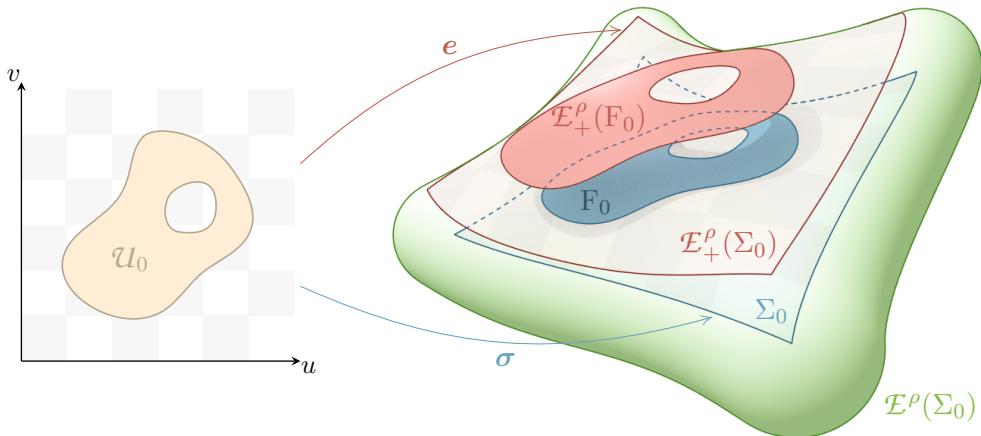


FIGURE 2.4 – EdS propre d'un carreau paramétrique restreint.

- d) différence avec le simple transport suivant la normale → abordé dans la [Section 3.3.2.1](#)
2. conservation du domaine paramétrique (pas de re-paramétrisation) ⇒ coordonnées (x, y, z) des courbes de restriction données directement par la nouvelle paramétrisation (voir [Figure 2.4](#)).

2.3.2 PARAMÉTRISATION DE LA PSEUDO-EDS D'UNE ARÊTE BREP CONVEXE

2.3.2.1 Paramétrisation de l'EdS propre d'un arc paramétrique

Soit $\gamma : [u, \bar{u}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation du support géométrique Γ de l'arête E. Si l'on considère ρ comme une fonction du paramètre u alors $E_*^\rho(\Gamma)$ est le lieu des points $x \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient

$$\begin{cases} \|x - \gamma(u)\|^2 - \rho(u)^2 = 0, \\ (x - \gamma(u))^\top \gamma'(u) + \rho(u) \rho_u(u) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

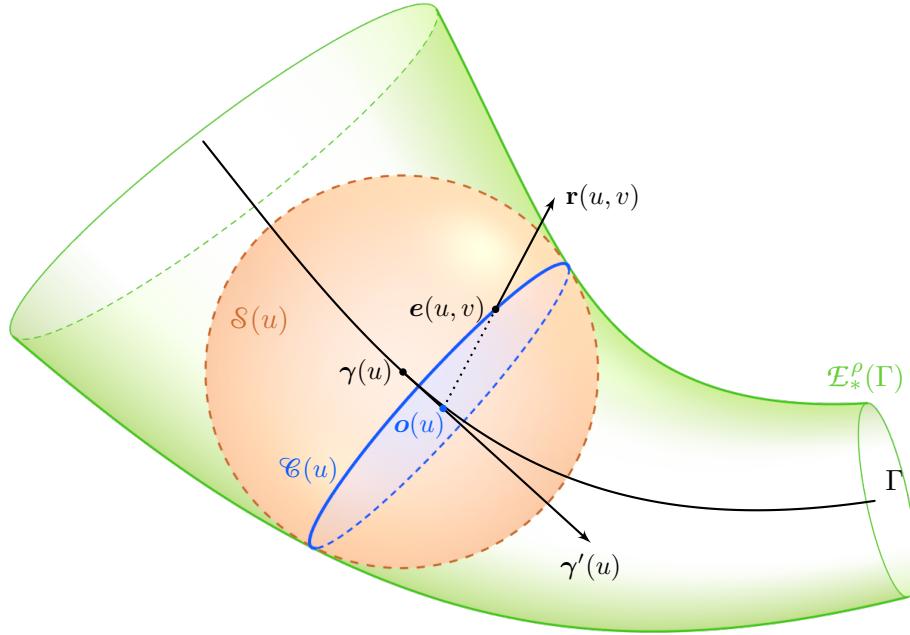


FIGURE 2.5 – Paramétrisation de l'EdS propre d'un arc paramétrique.

A condition que $\rho_u^2 \leq \|\gamma'\|^2$, le système (2.3) définit une famille de *cercles caractéristiques*, dont chacun est le lieu des points de tangence entre $E_*^\rho(\Gamma)$ et une sphère de la famille $S(\Gamma, \rho)$ (voir Figure 2.5).

D'après (2.3), le cercle caractéristique $C(u)$ au point $\gamma(u)$ est l'intersection de la sphère $S(u) = S(\gamma(u), \rho(\gamma(u)))$ et d'un plan orthogonal à la direction tangente à Γ en ce point (donnée par le vecteur $\gamma'(u)$). Ce cercle est centré en

$$\mathbf{o}(u) = \gamma(u) - \frac{\rho(u)\rho_u(u)}{\|\gamma'(u)\|^2}\gamma'(u), \quad (2.4)$$

et a pour rayon

$$r(u) = \rho(u)\sqrt{1 - \frac{\rho_u(u)^2}{\|\gamma'(u)\|^2}}. \quad (2.5)$$

Voir $E_*^\rho(\Gamma)$ comme une famille cercles caractéristiques permet d'en donner la paramétrisation suivante

$$\mathbf{e}(u, v) = \mathbf{o}(u) + r(u)\mathbf{r}(u, v), \quad (2.6)$$

où \mathbf{r} vérifie

$$\begin{cases} \|\mathbf{r}\| = 1, \\ \mathbf{r}^\top \gamma' = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

De cette façon, les courbes iso- u de \mathbf{e} sont les cercles caractéristiques.

2.3.2.2 Paramétrisation de la pseudo-EdS

1. E une arête BRep convexe, γ une paramétrisation de son support géométrique dans \mathbb{R}^3
2. \underline{F} (resp. \bar{F}) la face à gauche⁵ (resp. à droite) de E

⁵relativement à l'orientation donnée par γ , vu de l'extérieur de Ω .

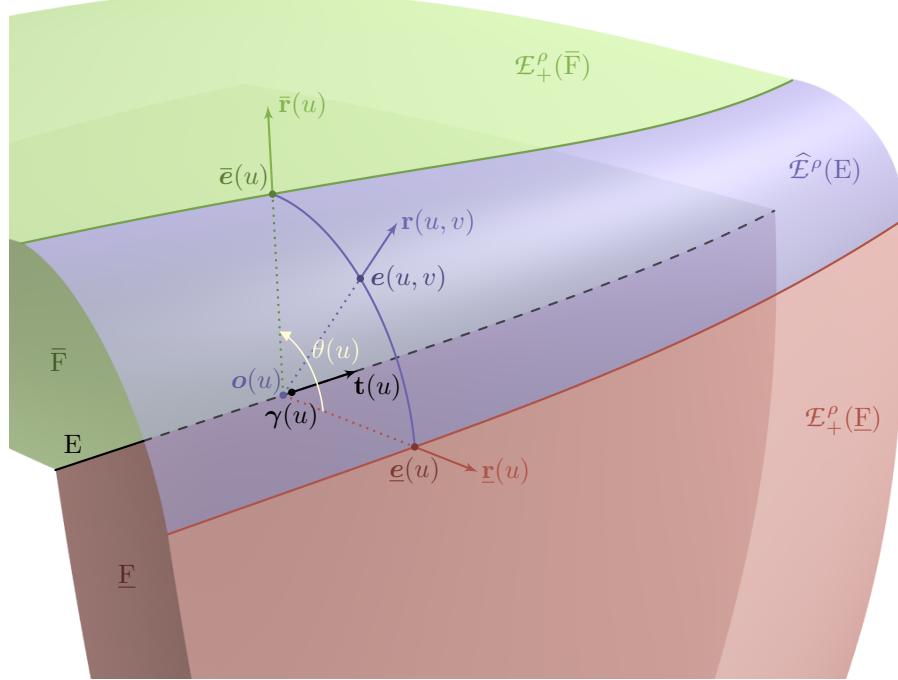


FIGURE 2.6 – Paramétrisation de la pseudo-EdS d'une arête BRep convexe.

3. but : construire une paramétrisation e de la pseudo-EdS de E , i.e. la région $\widehat{E}^\rho(E)$ de $\mathcal{E}^\rho(E)$ qui est tangente à la fois à $\mathcal{E}^\rho(\underline{F})$ et $\mathcal{E}^\rho(\bar{F})$ (voir Figure 2.6)
4. on note $\underline{\sigma}$ (resp. $\bar{\sigma}$) une paramétrisation du carreau supportant \underline{F} (resp. \bar{F}) et $\underline{\psi}$ (resp. $\bar{\psi}$) une paramétrisation de la trace de E dans l'espace paramétrique de \underline{F} (resp. de \bar{F}) telle que

$$\gamma = \underline{\sigma} \circ \underline{\psi} = \bar{\sigma} \circ \bar{\psi}. \quad (2.8)$$

5. on note $\underline{\sigma}^\rho$ (resp. $\bar{\sigma}^\rho$) la paramétrisation de $\mathcal{E}_+^\rho(\underline{F})$ (resp. de $\mathcal{E}_+^\rho(\bar{F})$) obtenue comme décrit dans la Section 2.3.1.

6. enfin, on note

$$\underline{e} = \underline{\sigma}^\rho \circ \underline{\psi} \quad \text{et} \quad \bar{e} = \bar{\sigma}^\rho \circ \bar{\psi}. \quad (2.9)$$

2.3.3 PARAMÉTRISATION DE LA PSEUDO-EDS D'UN SOMMET BREP CONVEXE

2 approches :

2.3.3.1 Polygone sphérique découpé en quadrilatères

avantages/inconvénients :

- valable seulement si la vitesse normale est uniforme
- génère plusieurs nouveaux carreaux de surface
- + les nouveaux carreaux sont rectangulaires (\Rightarrow permet l'utilisation de quadratures simples (cf. Section 3.1.2.5))

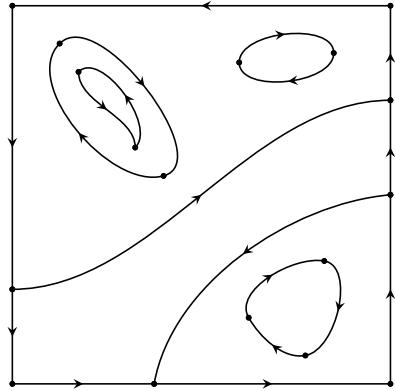


FIGURE 2.7 – Plongement du graphe des intersections dans l'espace paramétrique d'un carreau de surface.

2.3.3.2 Ajustement de carreau sphérique à un nuage de points

avantages/inconvénients :

- le nouveau carreau est restreint
- + valable également si la vitesse normale varie spatialement
- + génère un seul nouveau carreau de surface

Soit V un sommet BRep convexe dont le support géométrique est le point p . On cherche à construire un carreau paramétrique restreint décrivant $\hat{E}^\rho(p)$ i.e. la région de la sphère $S(p, \rho(p))$ délimitée par les arcs de cercles caractéristiques aux extrémités des arêtes BRep incidentes à p . Afin de simplifier cette construction, on considère que p est situé à l'origine et que $\rho(p) = 1$. (On appliquera la transformation adéquate en fin de construction pour se placer à nouveau dans le cas général.)

Le problème consiste alors, étant donné un ensemble de points $S = \{s_i\}_{i=1,\dots,n}$ sur la sphère unité \mathbb{S}^2 , à construire un carreau paramétrique décrivant une portion R de \mathbb{S}^2 contenant S . On cherche également à minimiser l'aire de R ...

2.4 CONSTRUCTION D'UN MODÈLE BREP DE L'EDB

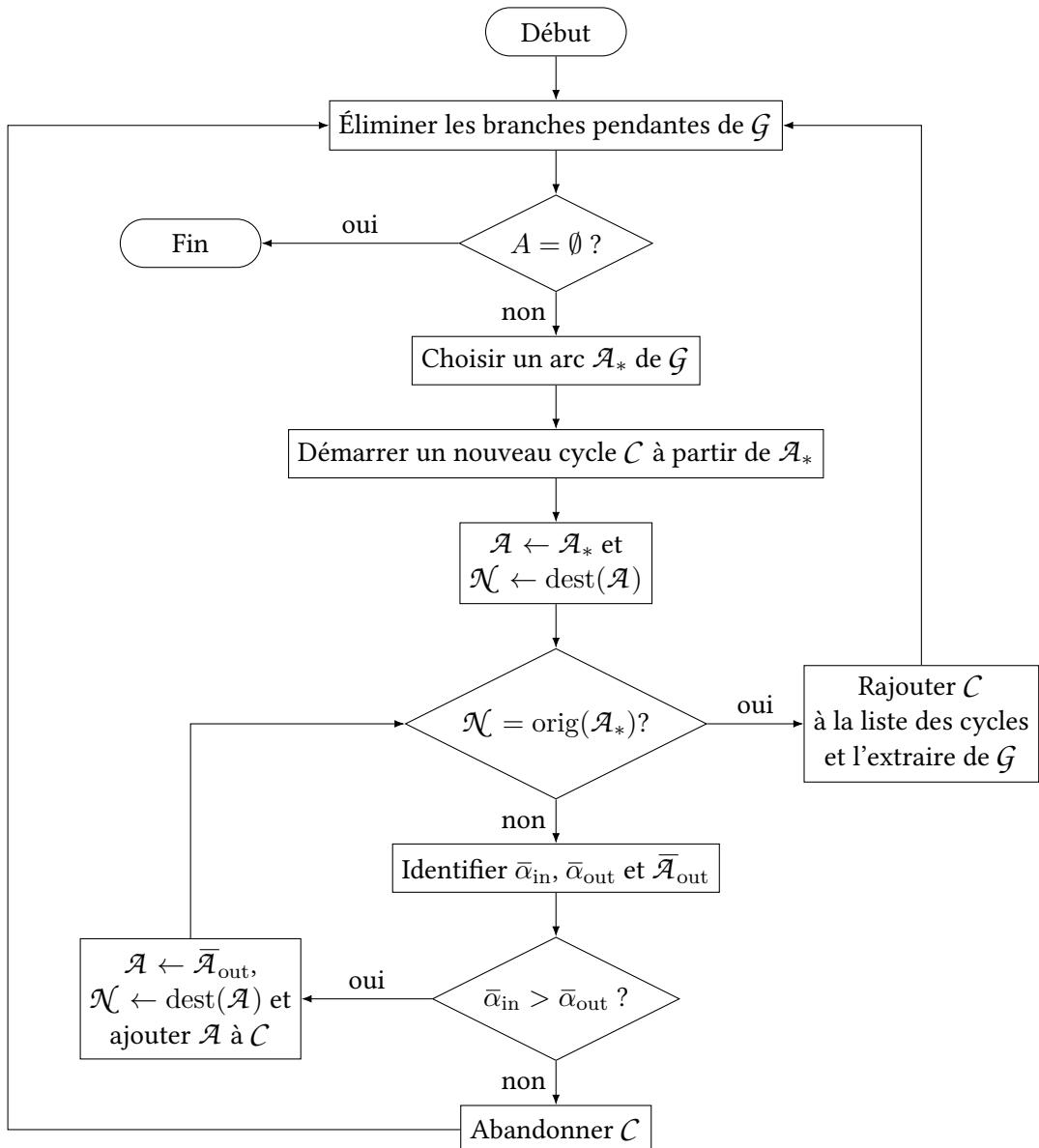
2.4.1 CONSTRUCTION DU GRAPHE DES INTERSECTIONS

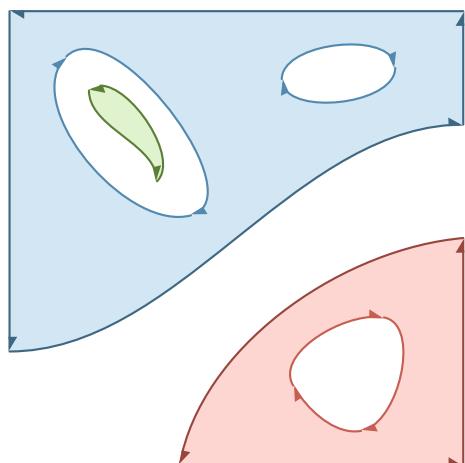
Conservation/création des intersections tangentielles, calcul des intersections transverses entre paire de carreaux non-restrints, segmentation des courbes d'intersection en segments quasi-disjoints (intersection de 3 carreaux non-restrints ou plus), « clipping » par le domaine paramétrique de chaque carreau restreint

pour un carreau de surface, il s'agit d'un graphe planaire orienté dont un plongement dans \mathbb{R}^2 est donné par la trace des courbes d'intersection dans son espace paramétrique

2.4.2 CONSTRUCTION DES FACES, ARÈTES ET SOMMETS BREP

pour chaque carreau : extraction des cycles du graphe d'intersection, caractérisations des contours (extérieurs/intérieurs), détermination des faces → insertion des contours dans la BRep → insertion des (co-)arêtes et sommets

FIGURE 2.8 – Organigramme de l'algorithme d'extraction des cycles d'un graphe orienté plongé dans \mathbb{R}^2 .

FIGURE 2.9 – *Faces du graphe*

MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE DE L'ALGORITHME DE PROPAGATION | 3

Dans ce chapitre, on propose une mise en œuvre numérique de l'algorithme présenté au chapitre précédent.

1. choix de la discréttisation spatiale
 - représentation des carreaux de surface
 - représentation (et calcul) des courbes d'intersection entre carreaux
2. intégration temporelle
 - intégration explicite du champ de vitesse
 - construction géométrique discrète de l'EdB suivant une méthode pseudo-spectrale (exacte aux points de collocation + interpolation)
3. considérations sur la stabilité numérique

3.1 REPRÉSENTATION DES CARREAUX DE SURFACE

3.1.1 ÉTAT DE L'ART

1. harmoniques sphériques [4]
2. polynômes trigonométriques [?]
⇒ limitations géométriques (régularité globale) et topologique (périodicité)
3. modèle BRep permet une plus grande flexibilité
4. polynômes algébriques (en produit tensoriel) adaptés aux carreaux de surface
5. CAO : Bezier, NURBS → base des polynômes de Bernstein
 - $B_n^N(x) = \binom{N}{n} (1-x)^{N-n} x^n$ pour $0 \leq n \leq N$.
 - positivité : pour $0 \leq x \leq 1$, $B_n^N(x) \geq 0$
 - partition de l'unité : $\sum_{n=0}^N B_n^N = 1$
→ propriétés intéressantes pour la conception géométrique
 - coefficients = points de contrôle
 - l'enveloppe convexe des points de contrôle englobe la courbe/surface de Bézier
 - inconvénients :
 - points de contrôle pas *sur* la courbe/surface ⇒ pas exploitables comme marqueurs lagrangiens
 - algorithme d'évaluation (de Casteljau) numériquement stable mais coûteux $O(N^2)$
6. motivation le choix des polynômes de Chebyshev

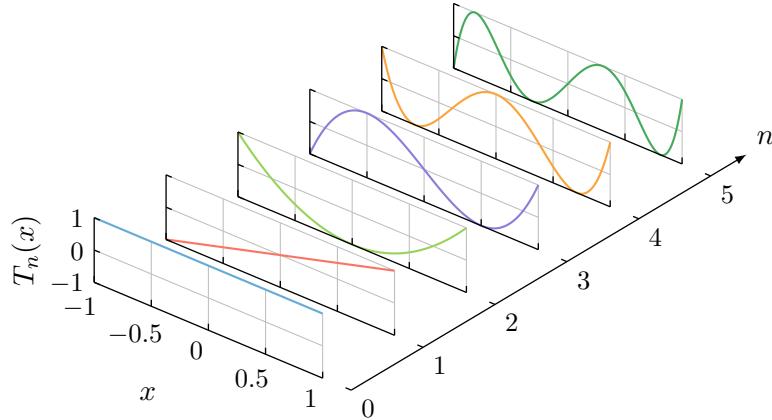


FIGURE 3.1 – Graphe des six premiers polynômes de Chebyshev.

3.1.2 POLYNÔMES DE CHEBYSHEV UNIVARIÉS

Les polynômes de Chebyshev sont très largement utilisés dans de nombreux domaines tels que l’analyse numérique. L’objet des sections suivantes est de rappeler la définition de cette famille de polynômes et d’en présenter brièvement les propriétés remarquables qui seront exploitées dans cette thèse. Nombreux sont les ouvrages consacrés aux polynômes de Chebyshev [5, 6] ainsi qu’à leur usage dans les méthodes spectrales [7, 8], aussi le lecteur est invité à s’y référer pour plus de détails.

3.1.2.1 Définition et principales propriétés

DÉFINITION 3.1 — Pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme de Chebyshev (de première espèce) T_n est défini par

$$T_n(\cos \theta) = n \cos \theta. \quad (3.1)$$

De cette définition et de l’identité trigonométrique $\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2 \cos \theta \cos(n-1)\theta$, on peut déduire la relation de récurrence suivante, pour $-1 \leq x \leq 1$,

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x, \\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \text{ pour } n \geq 2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Le graphe des six premiers polynômes de Chebyshev est tracé sur la Figure 3.1.

T_n est un polynôme de degré n qui atteint ses extrema locaux sur $[-1, 1]$ aux $n + 1$ noeuds de Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL)

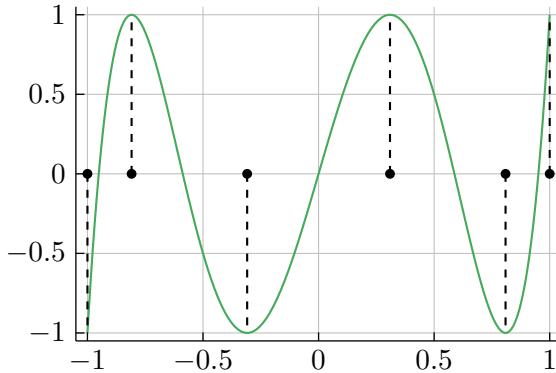
$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad (3.3)$$

pour $0 \leq k \leq n$. Seuls les $n - 1$ noeuds intérieurs sont réellement des extrema au sens où la dérivée s’y annule. À noter également que ces noeuds sont rangés en ordre décroissant.

Comme illustré sur la Figure 3.2, ces extrema sont alternativement des maxima puis des minima, tous égaux en valeur absolue

$$T_n(x_k) = (-1)^k. \quad (3.4)$$

Cette propriété d’*équioscillation* a pour conséquence le théorème suivant.

FIGURE 3.2 – Nœuds de Chebyshev-Gauss-Lobatto (extrema locaux) du polynôme T_5 .

THÉORÈME 3.1 — Le polynôme de degré $N - 1$ qui donne la meilleure approximation uniforme (i.e. en norme L_∞) du polynôme $q = \sum_{n=0}^N a_n X^n$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ est

$$p_{N-1} = q - 2^{1-N} a_N T_N, \quad (3.5)$$

et, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$|q(x) - p_{N-1}(x)| \leq 2^{1-N} |a_N|, \quad (3.6)$$

l'égalité étant atteinte aux $N + 1$ nœuds CGL de T_N .

Ce théorème trouve une application immédiate dans l'économisation des séries (à développer...).

3.1.2.2 Approximation de fonctions

Notons $L^2[-1, 1]$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $[-1, 1]$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (3.7)$$

La famille des polynômes de Chebyshev est une base orthogonale et maximale de cet espace, et pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\langle T_m, T_n \rangle = \frac{\pi}{2} \alpha_n \delta_{m,n}, \quad (3.8)$$

où $\delta_{\cdot,\cdot}$ représente le symbole de Kronecker, et

$$\alpha_n = 1 + \delta_{0,n}. \quad (3.9)$$

Toute fonction $f \in L^2[-1, 1]$ peut alors être représentée par sa série de Chebyshev

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n T_n, \quad (3.10)$$

dont les coefficients \hat{f}_n sont obtenus en prenant le produit scalaire

$$\begin{aligned} \hat{f}_n &= \frac{\langle f, T_n \rangle}{\langle T_n, T_n \rangle}, \\ &= \frac{2}{\pi \alpha_n} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La somme partielle

$$P_N f = \sum_{n=0}^N \hat{f}_n T_n \quad (3.12)$$

est le projeté orthogonal de f sur le sous-espace Π_N de $L^2[-1, 1]$ des polynômes de degré au plus N . Il s'agit donc de l'élément de Π_N le plus proche de f , au sens de la norme induite par le produit scalaire (3.7).

La somme partielle $P_N f$ est également proche de la meilleure approximation uniforme de f par un polynôme de degré N . En effet, si f est continue sur $[-1, 1]$, alors

$$\|f - P_N f\|_\infty \leq (1 + \lambda_N) \min_{p \in \Pi_N} \|f - p\|_\infty, \quad (3.13)$$

où la constante de Lebesgue $\lambda_N = 1.27 \dots + \frac{4}{\pi^2} \log N + O(N^{-1})$ croît lentement avec N ($\lambda_{500} \approx 3.8$).

Dans le contexte particulier de la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles, on s'intéresse à l'approximation de fonctions qui possèdent des dérivées continues. Pour de telles fonctions, les séries de Chebyshev convergent très rapidement. En effet, à l'aide d'une intégration par parties répétée, on peut montrer que la relation (3.11) implique le théorème suivant.

THÉORÈME 3.2 — Si f est $p - 1$ fois dérivable presque partout sur $[-1, 1]$ et si $f^{(p-1)}$ est de variation bornée sur $[-1, 1]$, alors

$$\hat{f}_n = O(n^{-p}). \quad (3.14)$$

En particulier, si $f \in C^\infty[-1, 1]$ alors la suite des coefficients \hat{f}_n décroît plus rapidement que n'importe quelle puissance négative de n .

En outre, si f admet une extension analytique dans une région du plan complexe contenant le segment $[-1, 1]$, alors il existe $r > 1$ tel que

$$\hat{f}_n = O(r^{-n}). \quad (3.15)$$

Puisque $|T_n| \leq 1$ sur $[-1, 1]$ pour tout entier n , il s'ensuit que l'erreur de troncature est bornée par la somme des valeurs absolues des coefficients négligés

$$\|f - P_N f\|_\infty \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |\hat{f}_n|. \quad (3.16)$$

Or, si les coefficients \hat{f}_n convergent avec une rapidité algébrique de la forme (3.14), alors

$$\|f - P_N f\|_\infty = O(N^{1-p}) = O(N |\hat{f}_N|). \quad (3.17)$$

Si, en revanche, la convergence est géométrique (i.e. de la forme (3.15)), alors

$$\|f - P_N f\|_\infty = O(r^{-N}) = O(|\hat{f}_N|). \quad (3.18)$$

Les règles empiriques (3.17) et (3.18) permettent d'estimer efficacement l'erreur de troncature qui, en pratique, est inconnue. (développer...)

Motivation pour interpolation...

Les polynômes de Chebyshev satisfont une seconde relation d'orthogonalité, dite « discrète », pour $0 \leq n \leq N$ et $m \geq n$,

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{\beta_k} T_m(x_k) T_n(x_k) = \frac{N}{2} \beta_n \delta_{m, \pm n \bmod 2N}, \quad (3.19)$$

où $\{x_k\}_{k=0,\dots,N}$ sont les nœuds CGL de T_N définis par l'équation (3.3) et

$$\beta_n = 1 + \delta_{0,n} + \delta_{N,n}. \quad (3.20)$$

Soit $I_N f$ l'unique polynôme de Π_N qui interpole f aux $N + 1$ nœuds CGL de T_N

$$I_N f(x_k) = f(x_k). \quad (3.21)$$

Ce polynôme peut s'exprimer dans la base de Chebyshev

$$I_N f = \sum_{n=0}^N \tilde{f}_n T_n. \quad (3.22)$$

En utilisant les relations (3.22), (3.21) et (3.19), on peut alors déduire les coefficients \tilde{f}_n à partir des valeurs de f en ces nœuds

$$\tilde{f}_n = \frac{2}{\beta_n N} \sum_{k=0}^N \frac{1}{\beta_k} f(x_k) \cos \frac{nk\pi}{N}. \quad (3.23)$$

L'équation (3.23) définit ainsi une transformation discrète [de l'espace « physique » vers l'espace « spectral »]¹. Par ailleurs, des relations (3.21), (3.22) et (3.1), on peut déduire la transformation inverse

$$f(x_k) = \sum_{n=0}^N \tilde{f}_n \cos \frac{nk\pi}{N}. \quad (3.24)$$

Les équations (3.23) et (3.24) décrivent des transformations en cosinus discrètes (DCT), qui peuvent être effectuées efficacement à l'aide d'un algorithme de transformation de Fourier rapide (FFT) pour un coût asymptotique de $O(N \log N)$ opérations.

Les coefficients \tilde{f}_n peuvent être reliés aux coefficients \hat{f}_n par la relation

$$\tilde{f}_n = \hat{f}_n + \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \hat{f}_{2jN+n} & \text{si } n = 0 \text{ ou } N, \\ \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{f}_{2jN-n} + \hat{f}_{2jN+n}) & \text{si } 0 < n < N. \end{cases} \quad (3.25)$$

Cette relation met en évidence le phénomène d'*aliasing*, qui traduit le fait que les polynômes T_n et $T_{\pm n \bmod 2N}$ prennent les mêmes valeurs aux nœuds $\{x_k\}_{k=0,\dots,N}$, comme illustré sur la Figure 3.3. La différence entre le polynôme d'interpolation $I_N f$ et la somme partielle $P_N f$ est l'*erreur d'aliasing*, qui est orthogonale à l'erreur de troncature²

$$\|f - I_N f\|^2 = \|f - P_N f\|^2 + \|I_N f - P_N f\|^2. \quad (3.26)$$

L'erreur d'approximation due à l'interpolation est donc toujours supérieure à l'erreur liée à la troncature de la série de Chebyshev. Si f est régulière, la suite des coefficients \hat{f}_n converge rapidement vers zéro, si bien que l'erreur d'aliasing reste faible, à condition que le degré de troncature N soit choisi suffisamment grand. En outre, de la relation (3.25) on déduit que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$|f(x) - I_N f(x)| \leq 2 \sum_{n>N} |\hat{f}_n|. \quad (3.27)$$

L'erreur d'approximation due à l'interpolation est donc *au pire* supérieure à l'erreur de troncature par un facteur 2. L'erreur d'aliasing peut cependant devenir problématique lorsqu'elle est amplifiée par les non-linéarités présentes dans les équations que l'on sera amené à résoudre. Nous reviendrons sur ce point dans la ?? lorsque nous aborderons ...

¹reformuler!

² $\|\cdot\|$ désigne ici la norme induite par le produit scalaire (3.7).

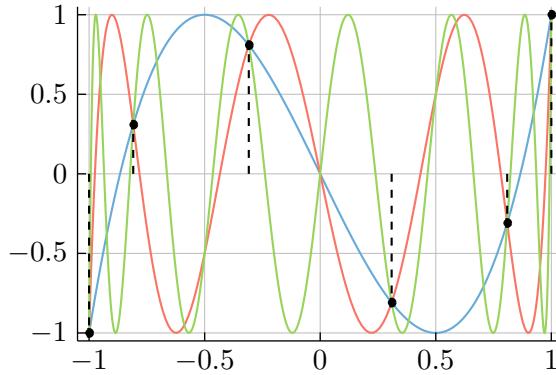


FIGURE 3.3 – Les polynômes T_n (—), T_{2N-n} (—) et T_{2N+n} (—) sont indiscernables aux nœuds CGL de T_N (ici, $n = 3$ et $N = 5$).

3.1.2.3 Évaluation d'une somme partielle

Par la suite, nous serons amenés à évaluer à maintes reprises des sommes de la forme

$$s_N = \sum_{n=0}^N \hat{s}_n T_n \quad (3.28)$$

en des points autres que les nœuds CGL. Plutôt que de réécrire cette somme dans la base canonique de Π_N , il est intéressant de tirer parti de la relation (3.2). En introduisant la suite récurrente

$$b_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > N, \\ \hat{s}_n - b_{n+2}(x) + 2xb_{n+1}(x) & \text{si } 0 \leq n \leq N, \end{cases} \quad (3.29)$$

on obtient, pour $-1 \leq x \leq 1$,

$$\begin{aligned} s_N &= \hat{s}_0 T_0 + \hat{s}_1 T_1 + \dots + \hat{s}_{N-2} T_{N-2} + \hat{s}_{N-1} T_{N-1} + \hat{s}_N T_N, \\ &= \hat{s}_0 T_0 + \hat{s}_1 T_1 + \dots + (\hat{s}_{N-2} - b_N) T_{N-2} + (\hat{s}_{N-1} - b_{N+1} + 2xb_N) T_{N-1}, \\ &= \hat{s}_0 T_0 + \hat{s}_1 T_1 + \dots + (\hat{s}_{N-3} - b_{N-1}) T_{N-3} + b_{N-2} T_{N-2}, \\ &\dots \\ &= (\hat{s}_0 - b_2) T_0 + b_1 T_1, \\ &= \hat{s}_0 - b_2 + b_1 x, \end{aligned}$$

et enfin

$$s_N(x) = b_0(x) - xb_1(x). \quad (3.30)$$

L'exécution de cet algorithme de sommation – proposé par Clenshaw [9] – requiert seulement $O(N)$ opérations. La sommation de Clenshaw est donc un moyen efficace et numériquement stable pour évaluer des séries de Chebyshev.

3.1.2.4 Déivation

(versions matricielle (espace physique) et récursive (espace spectral)
quadrature de Clenshaw-Curtis)

En posant $x = \cos \theta$, il vient, d'après (3.1),

$$T'_n(x) := \frac{d}{dx} T_n(x) = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta}. \quad (3.31)$$

Ainsi, de l'identité $2 \cos n\theta \sin \theta = \sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta$, on peut déduire la relation

$$2T_n = \frac{T'_{n+1}}{n+1} - \frac{T'_{n-1}}{n-1}, \quad (3.32)$$

pour $n \geq 2$.

Soit $f \in C^k [-1, 1]$. On approche la dérivée k -ième $f^{(k)}$ de f par la dérivée k -ième du polynôme d'interpolation $I_N f$

$$D_N^{(k)} f := (I_N f)^{(k)}. \quad (3.33)$$

En général, les opérations de dérivation et d'interpolation ne commutent pas, i.e.

$$D_N^{(k)} f \neq I_N(f^{(k)}). \quad (3.34)$$

Les valeurs aux noeuds CGL de cette dérivée peuvent être exprimées comme une combinaison linéaire des valeurs de f en ces mêmes noeuds

$$\begin{pmatrix} D_N^{(k)} f(x_0) \\ \vdots \\ D_N^{(k)} f(x_N) \end{pmatrix} = (\mathbf{D}_N)^k \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

où \mathbf{D}_N est la matrice de différentiation [8]

$$(\mathbf{D}_N)_{i,j} = \begin{cases} \frac{2N^2 + 1}{6} & \text{si } i = j = 0, \\ -\frac{2N^2 + 1}{6} & \text{si } i = j = N, \\ -\frac{x_i}{2 \sin^2 \frac{i\pi}{N}} & \text{si } 0 < i = j < N, \\ -\frac{(-1)^{i+j} \beta_i}{2\beta_j \sin \frac{(i+j)\pi}{2N} \sin \frac{(i-j)\pi}{2N}} & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (3.36)$$

Alternativement, il est intéressant de construire explicitement le polynôme dérivé $D_N^{(k)} f$ comme une somme de la forme

$$D_N^{(k)} f = \sum_{n=0}^{N-k} \tilde{f}_n^{(k)} T_n. \quad (3.37)$$

Développer motivation...

La relation (3.32) implique que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2(n+1) \tilde{f}_{n+1} = \alpha_n \tilde{f}_n^{(1)} - \tilde{f}_{n+2}^{(1)}. \quad (3.38)$$

Les coefficients $\tilde{f}_n^{(1)}$ peuvent ainsi être calculés suivant la relation de récurrence

$$\tilde{f}_n^{(1)} = \frac{1}{\alpha_n} (2(n+1) \tilde{f}_{n+1} + \tilde{f}_{n+2}^{(1)}). \quad (3.39)$$

Plus généralement, les coefficients de Chebyshev de la dérivée k -ième vérifient

$$\tilde{f}_n^{(k)} = \frac{1}{\alpha_n} (2(n+1) \tilde{f}_{n+1}^{(k-1)} + \tilde{f}_{n+2}^{(k)}). \quad (3.40)$$

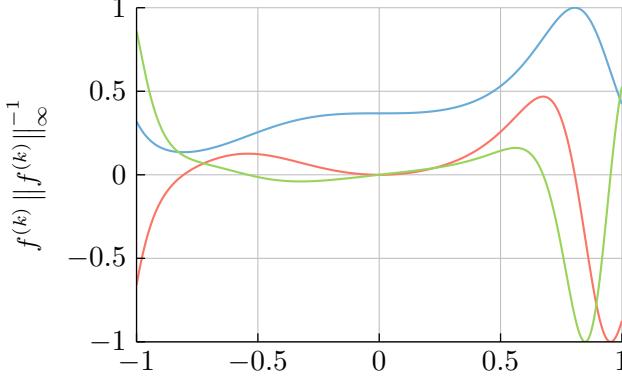


FIGURE 3.4 – Graphes de la fonction $f : x \mapsto e^{\sin 3x^3}$ et ses dérivées $f^{(k)}$ ($k = 0$ (—), 1 (—), 2 (—)).

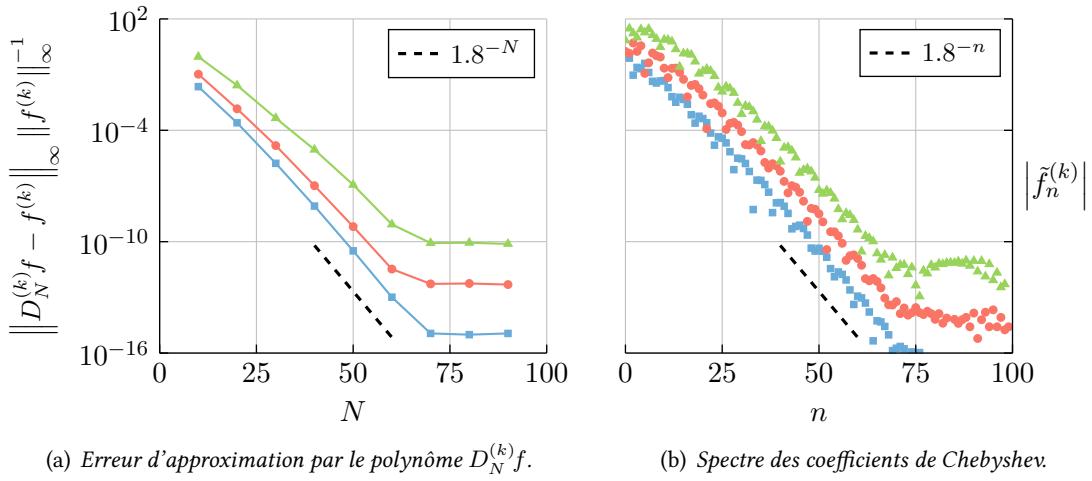


FIGURE 3.5 – Décroissance exponentielle de l'erreur d'approximation et des coefficients de Chebyshev pour la fonction analytique $f : x \mapsto e^{\sin 3x^3}$ et ses dérivées $f^{(k)}$ ($k = 0$ (■), 1 (●), 2 (▲)).

Cette méthode + FFT permet d'évaluer les dérivées aux nœuds CGL pour $O(N + N \log N) = O(N \log N)$, qui est asymptotiquement (au-delà de $N \approx 16$) plus efficace que le produit matrice-vecteur (3.35) ($O(N^2)$).

Toutefois, comme l'ont fait remarquer Wengle et Seinfeld [10], l'algorithme récursif (3.40) peut amplifier les erreurs d'arrondi commises sur les plus petits coefficients $\hat{f}_n^{(k-1)}$ et ainsi compromettre la précision de *tous* les coefficients $\hat{f}_n^{(k)}$. Un moyen simple de remédier à ce problème consiste à mettre à zéro les coefficients $\hat{f}_n^{(k-1)}$ inférieurs en valeur absolue à un seuil donné, choisi en fonction de la précision machine ϵ_M . (Un seuil égal à $10\epsilon_M$ semble être un bon choix (*détailler...*)).

[Illustration de la qualité de l'approximation d'une fonction analytique (et ses dérivées) par le polynôme d'interpolation (et ses dérivées) (voir Figure 3.4 et Figure 3.5)]

3.1.2.5 Intégration

La primitive de $I_N f$ qui s'annule en -1

$$D_N^{(-1)} f := x \mapsto \int_{-1}^x I_N f(t) dt \quad (3.41)$$

est un polynôme de degré $N + 1$

$$D_N^{(-1)} f = \sum_{n=0}^{N+1} \tilde{f}_n^{(-1)} T_n. \quad (3.42)$$

(3.38) implique

$$\tilde{f}_n^{(-1)} = \frac{\alpha_n \tilde{f}_{n-1} - \tilde{f}_{n+1}}{2n}, \quad (3.43)$$

pour $n \geq 1$ et, puisque $D_N^{(-1)} f(-1) = 0$, on a

$$\tilde{f}_0^{(-1)} = - \sum_{n=1}^{N+1} (-1)^n \tilde{f}_n^{(-1)}. \quad (3.44)$$

$$\int_{-1}^x f(t) dt \approx D_N^{(-1)} f(x). \quad (3.45)$$

En particulier,

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx D_N^{(-1)} f(1) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^N \frac{2\tilde{f}_n}{1-n^2}, \quad (3.46)$$

et

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) dx - D_N^{(-1)} f(1) \right| \approx \left| \frac{2\tilde{f}_N}{1-N^2} \right|. \quad (3.47)$$

[→ quadrature de Clenshaw-Curtis]

3.1.3 POLYNÔMES DE CHEBYSHEV BIVARIÉS

- Fonctions de base : polynômes de Chebyshev en produit tensoriel

$$I_{M,N} f(u, v) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \tilde{f}_{m,n} T_m(u) T_n(v).$$

- généralisation des propriétés des polynômes univariés
- paramétrisation d'un carreau de surface

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n} T_m(u) T_n(v). \quad (3.48)$$

(les coefficients $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{m,n}$ sont des vecteurs de \mathbb{R}^3)

3.2 REPRÉSENTATION ET CALCUL DES COURBES D'INTERSECTION

pas de paramétrisation explicite (définition procédurale), méthode de Hohmeyer revisitée

1. Subdivision : découper chaque surface en surfaces plus simples (e.g. triangles)

2.

Subdivision

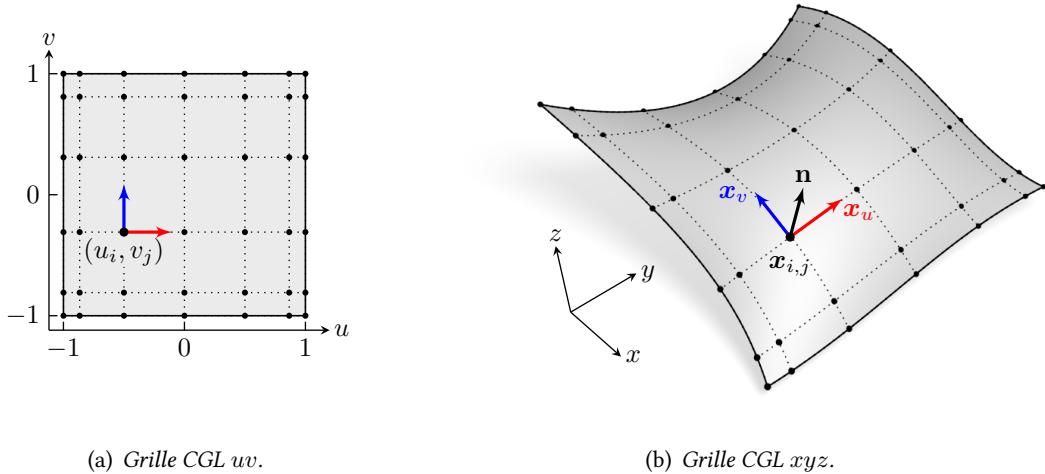


FIGURE 3.6 – Grille CGL.

3.3 INTÉGRATION TEMPORELLE

Suivi lagrangien de marqueurs (points de collocation, nœuds de la grille CGL)

3.3.1 ADVECTION DANS CHAMP DE VECTEUR VITESSE CONNU

1. Intégration explicite du vecteur vitesse des marqueurs lagrangiens (typiquement Runge-Kutta à l'ordre 4)
2. Pas vraiment le cas dans les applications visées, mais on peut imaginer des situations de ce type (e.g. déformation d'un solide sous l'effet d'efforts aérodynamiques → vitesse donnée par des solveurs de mécanique des structures/fluides)

3.3.2 PROPAGATION SUIVANT UNE VITESSE NORMALE DONNÉE

3.3.2.1 Discréétisation de l'EdS propre d'un carreau paramétrique

Entrée : vecteur position $\mathbf{x}_{i,j}$ et vitesse normale $\nu_{i,j}$ de chaque marqueur lagrangien , pas de temps Δt (i.e. $\rho = \nu \Delta t$)

1. transformation directe (de l'espace physique vers l'espace spectral) pour construire les polynômes d'interpolation du vecteur position et de la vitesse normale
2. construction des polynômes dérivés
3. transformation inverse pour évaluer les dérivées $\boldsymbol{\sigma}_u$ et $\boldsymbol{\sigma}_v$ aux nœuds CGL (u_i, v_j)
4. calcul de la normale aux nœuds CGL

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v}{\|\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v\|} \quad (3.49)$$

5. calcul de la composante tangentielle du déplacement vers l'EdS propre aux nœuds CGL

$$\mathbf{t} = \frac{(\nu_v I_{1,2} - \nu_u I_{2,2}) \boldsymbol{\sigma}_u + (\nu_u I_{1,2} - \nu_v I_{1,1}) \boldsymbol{\sigma}_v}{I_{1,1} I_{2,2} - I_{1,2}^2}. \quad (3.50)$$

6. on pose $\tau = \min \left\{ \Delta t, \frac{\lambda}{\max_{i,j} \|\mathbf{t}_{i,j}^{(k)}\|} \right\}$ ($\lambda \leq 1$) et on avance dans le temps d'un pas τ

$$\mathbf{x}_{i,j}^{(k+1)} = \mathbf{x}_{i,j}^{(k)} + \tau \nu_{i,j}^{(k)} \left(\tau \mathbf{t}_{i,j}^{(k)} + \sqrt{1 - \tau^2 \|\mathbf{t}_{i,j}^{(k)}\|^2} \mathbf{n}_{i,j}^{(k)} \right) \quad (3.51)$$

7. Différence avec le simple transport suivant la normale

- on se bouge suivant la normale à l'EdS propre au lieu de la normale à l'interface

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \tau \nu^{(k)} \mathbf{n}^{(k+1)}$$

\sim schéma semi-implicite en temps?

$$\sqrt{1 - y} = 1 + O(y),$$

donc

$$(\mathbf{e} - \boldsymbol{\sigma}) - \tau \nu \mathbf{n} = \tau^2 \nu \mathbf{t} + O(\tau^3)$$

et donc la différence est d'ordre 2 en temps

- si ν est uniforme (i.e. $\nu_u = \nu_v = 0$) alors construire l'EdS propre revient à propager suivant la normale à l'interface courante. En outre, la direction de \mathbf{n} reste constante en chaque point. En revanche, le signe de \mathbf{n} peut s'inverser lorsque $\nu \tau$ dépasse le plus petit rayon de courbure local (\rightarrow offset dégénéré ...).

3.3.2.2 Discrétisation de la pseudo-EdS d'une arête BRep convexe

1. cf. ??
2. paramétrisation polynomiale
 - \Rightarrow approximation (remarque sur les paramétrisations rationnelles exactes [11])
 - \Rightarrow degré à choisir
3. décrire l'échantillonnage de la courbe s'intersection ($\underline{\psi}$, $\bar{\psi}$ et γ) aux nœuds CGL pour le paramètre de Hohmeyer $w = \mathbf{p}^T \boldsymbol{\gamma}$
 - a) méthode procédurale : on s'appuie sur une polyligne et on affine par la méthode de Newton (expliciter l'itération)
 - b) calcul de la direction tangente $\mathbf{t} = \frac{\gamma_w}{\|\gamma_w\|}$ (cf. géométrie différentielle des courbes d'intersection transverses, s'assurer de la positivité du produit scalaire avec le vecteur de paramétrisation de Hohmeyer \mathbf{p})
4. évaluation des courbes « limites » \underline{e} et \bar{e}
5. échantillonnage des arc caractéristiques aux nœuds CGL en $v \in [-1, 1]$

3.3.2.3 Discrétisation de la pseudo-EdS d'un sommet BRep convexe

1. polygone sphérique découpé en quadrilatères (cf. [Section 2.3.3.1](#))
 - construction d'un carreau bilinéaire (échantillonnage aux noeuds de la grille CGL)
 - projection sur la sphère
 - spectre de Chebyshev plus étalé (degré plus élevé pour une précision donnée)
2. ajustement de carreau sphérique à un nuage de points
 - échantillonnage aux noeuds de la grille CGL du carreau obtenu par la méthode décrite dans la [Section 2.3.3.2](#)
 - + spectre de Chebyshev plus compact

3.4 AMÉLIORATION DE LA STABILITÉ NUMÉRIQUE

3.4.1 RÉDUCTION DE L'ERREUR D'ALIASING

méthode proposée par [4] difficile à appliquer dans notre cas car

1. les carreaux de surface ont un bord,
2. l'espacement non-uniforme des marqueurs lagrangiens (images des noeuds CGL) impose une forte contrainte CFL sur leurs déplacements

3.4.2 PRÉVENTION DES SINGULARITÉS GÉOMÉTRIQUES

Notre approche permet naturellement de supporter les singularités géométriques de l'interface, à condition qu'elles soient localisées à l'intersection d'au moins deux carreaux de surface (et donc sur leur bord). En revanche, les singularités qui se forment au sein d'un même carreau provoquent de sérieux problèmes de stabilité numérique. On distingue 2 types de singularités ([12, p.320]) :

- points irréguliers (auto-intersection locale) (normale et plan tangent non définis, $|\mathbf{I}| = 0$) \Rightarrow oscillations de Gibbs
- auto-intersections globales (non-injectivité de la paramétrisation) : ne pose pas de problème de stabilité numérique mais viole la définition de variété
- [13] (en 2D, i.e. l'interface est une courbe) :
- [14] donne les conditions pour qu'une interface (représentée par une mosaïque de carreaux paramétriques) propagée à vitesse normale uniforme devienne localement singulière

pistes de résolution envisageables

1. approximation non dégénérée [14]
2. tracé des courbes iso-courbure critique [12, chap.8] pour redéfinir les carreaux de surfaces concernés

bilan : pas de solution simple, reste un gros point faible de l'approche choisie...

VALIDATION DES MÉTHODES NUMÉRIQUES

4

On s'intéresse d'abord à des cas de référence dans lesquels tous les carreaux ont un domaine paramétrique égal à $[-1, 1] \times [-1, 1]$, ce qui permet d'effectuer des mesures de précisions à la fois locales (position de l'interface) et globales (aire et volume délimité, par quadrature). Pour cela, on choisit des géométries simples et sans arête concave. (On pourrait étendre les formules de quadrature aux carreaux restreints, voir IGA.)

4.1 PROPAGATION SUIVANT UN CHAMP DE VITESSE ANALYTIQUE

sphère dans un écoulement tourbillonnaire incompressible analytique de période temporelle $2T$

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \cos(\pi t/T) \begin{pmatrix} \sin^2(\pi x) [\sin(2\pi z) - \sin(2\pi y)] \\ \sin^2(\pi y) [\sin(2\pi x) - \sin(2\pi z)] \\ \sin^2(\pi z) [\sin(2\pi y) - \sin(2\pi x)] \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

1. paramétrisation initiale : grille CGL des faces d'un cube projetées sur la sphère
2. calcul de l'aire : intégration (approchée) par quadrature de Clenshaw-Curtis de l'élément d'aire $\sqrt{|\mathbf{I}|}$
3. calcul de volume : formule de Green avec quadrature exacte car l'intégrande est polynomiale
4. critère d'erreur sur la position : distance à la sphère exacte
5. convergence de l'erreur d'approximation sur la position ([Figure 4.2](#)), l'aire ([Figure 4.3](#)) et le volume ([Figure 4.4](#)) à $t = 0$ et $t = T$ pour différents niveaux de discrétisations spatiale et temporelle
 - l'approximation de la sphère initiale converge rapidement avec le degré du polynôme d'interpolation(i.e. le nombre de degrés de liberté)
 - si la résolution spatiale est suffisamment fine, l'erreur d'approximation est essentiellement due à la discrétisation temporelle
6. convergence de la variation de volume au cours de la déformation (censée être nulle car $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) ([Figure 4.5](#))
 - on retrouve une convergence rapide : le pic à $t = T/2$ décroît exponentiellement avec N

Nuancer la pertinence de ce cas test :

- pour d'autres cas test analogues (e.g. cas test de Enright), un mouvement tangentiel (reparamétrisation) des marqueurs lagrangiens est nécessaire pour garantir la stabilité numérique
- mais ce type de déformation extrême n'est pas celui que l'on vise dans nos applications, ce pourquoi on n'a pas plus considéré la reparamétrisation

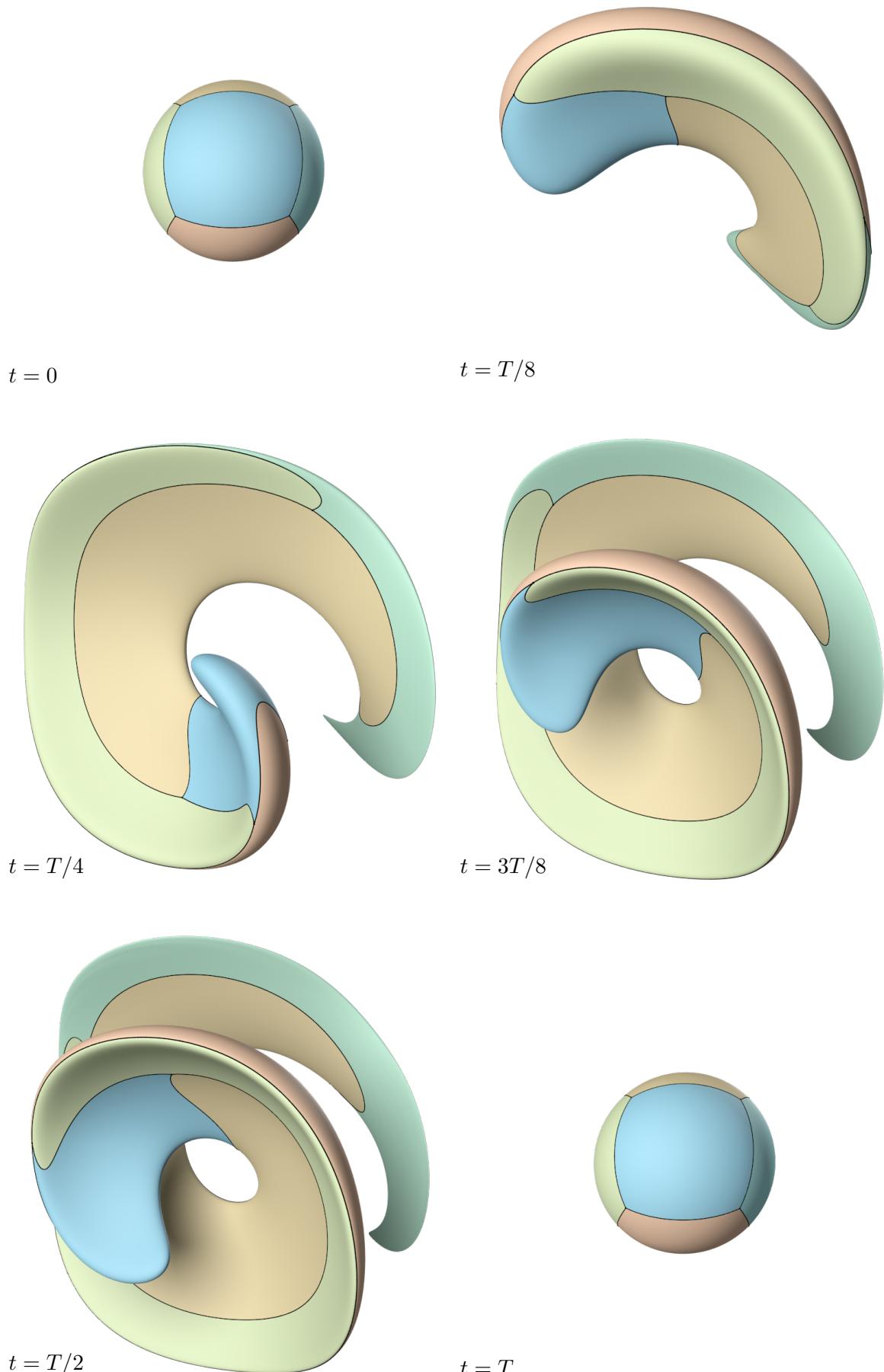


FIGURE 4.1 – Aperçu du modèle BRep de la sphère dans un écoulement tourbillonnaire à différents instants de la propagation ($T = 4$).

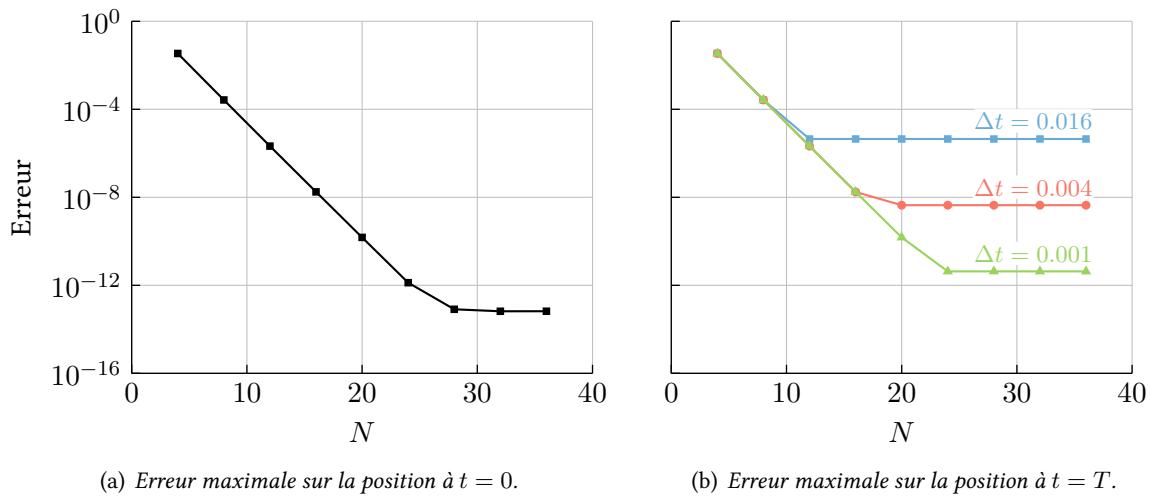


FIGURE 4.2 – Erreur maximale sur la position pour différents niveaux de discrétisations spatiale et temporelle.

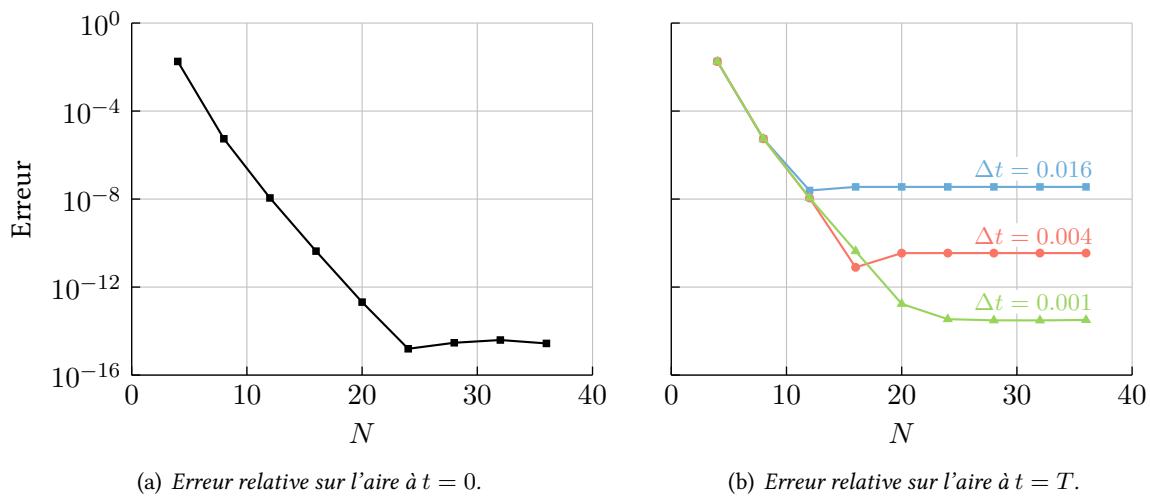


FIGURE 4.3 – Erreur relative sur l'aire pour différents niveaux de discrétisations spatiale et temporelle.

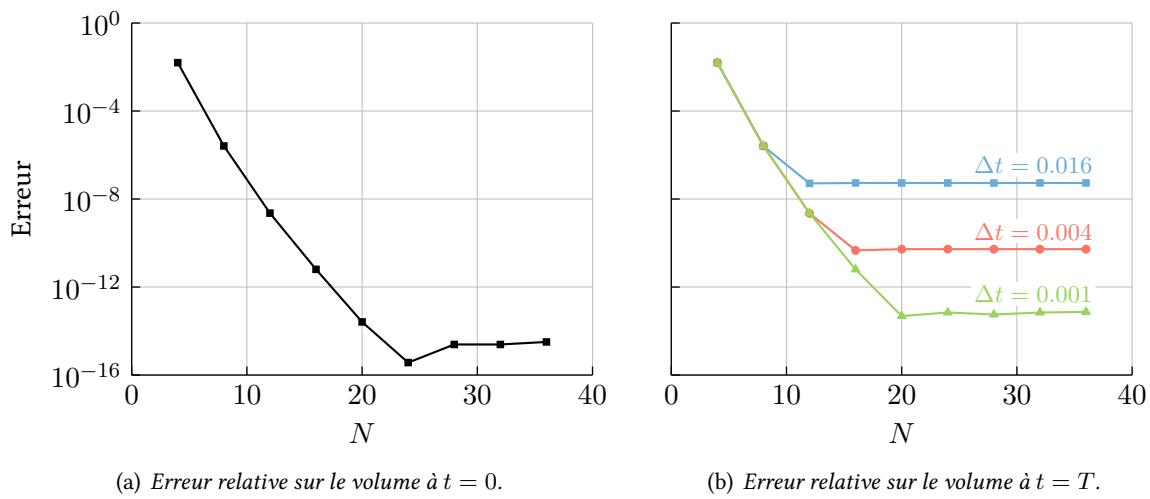


FIGURE 4.4 – Erreur relative sur le volume pour différents niveaux de discrétisations spatiale et temporelle.

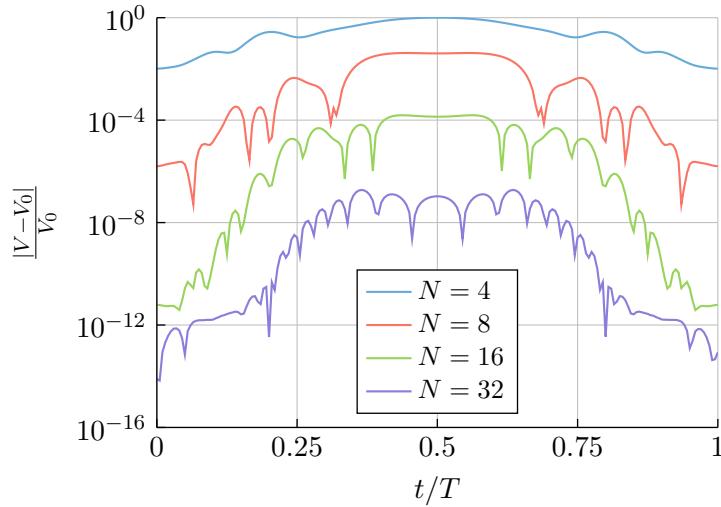


FIGURE 4.5 – Évolution au cours du temps de l'erreur relative en volume pour différents niveaux de discréétisation spatiale. Le schéma de Runge-Kutta explicite à l'ordre 4 est utilisé pour l'intégration temporelle, avec un pas de temps $\Delta t = 0.001$.

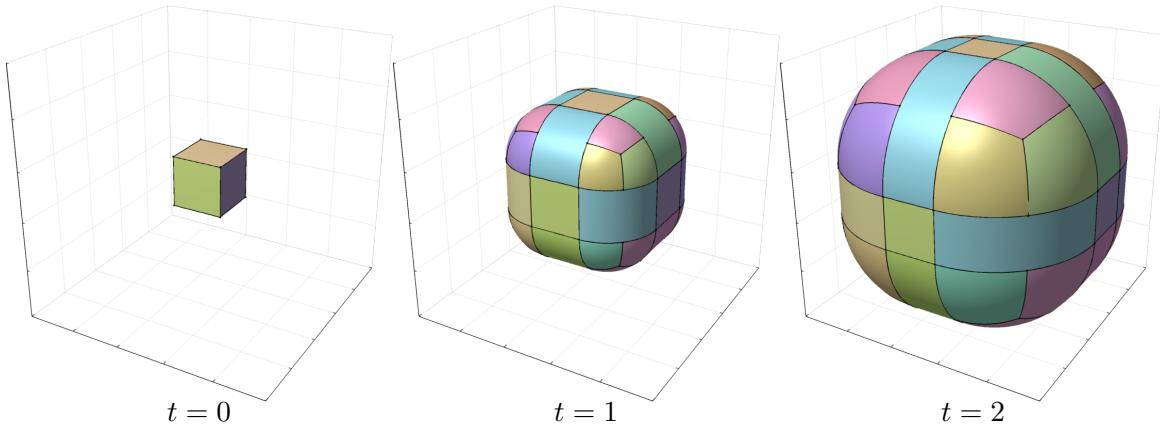


FIGURE 4.6 – Aperçu du modèle BRep du cube en expansion à différents instants de la propagation.

- permet toutefois d'évaluer le pouvoir de résolution des polynômes de Chebyshev et vérifier la convergence rapide de l'erreur d'approximation

4.2 PROPAGATION À VITESSE NORMALE UNIFORME

cube en expansion à vitesse normale uniforme $\nu = 1$

1. stratégie pour la pseudo-EdS des sommets : polygone découpé en quads (cf. [Section 2.3.3.1](#)) pour évaluer simplement l'aire et le volume par quadrature (possible car ν est uniforme)
2. critère d'erreur sur la position : erreur relative sur la distance au cube (car la solution exacte est une iso-surface de la fonction distance)
3. convergence de l'erreur d'approximation sur la position, l'aire et le volume à $t = 2$ pour différents niveaux de discréétisations spatiale et temporelle (voir [Figure 4.7](#))

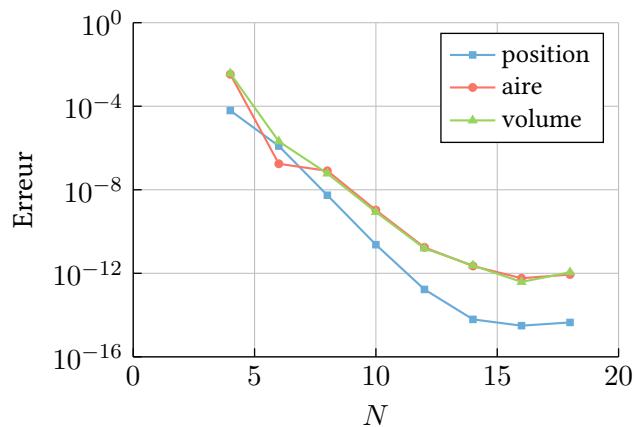


FIGURE 4.7 – Erreurs sur la position l'aire et le volume pour différents niveaux de discrétisations spatiale et temporelle, à $t = 2$.

Intérêts de ce cas test :

- valider l'approximation du vecteur normal unitaire
- valider la construction des pseudo-EdS des arêtes et sommets BRep convexes

SECONDE PARTIE

INTÉGRATION DE L'OUTIL DE SUIVI DE SURFACE DANS UNE CHAÎNE DE CALCUL MULTI-PHYSIQUE

ADAPTATION D'UN MAILLAGE DE SURFACE DYNAMIQUE

5

Objectif du chapitre: on veut mettre au point une méthodologie pour déformer un maillage de l'interface en propagation en utilisant le modèle BRep dynamique comme support géométrique, afin de pouvoir réaliser des simulations EF/VF dans des domaines de géométrie déformable.

Motivation

1. la précision et la vitesse de convergence du calcul dépendent fortement de la qualité (forme et taille) des éléments du maillage

5.1 PROBLÉMATIQUE ET ÉTAT DE L'ART

5.1.1 SIMULATION NUMÉRIQUE AVEC UNE GÉOMÉTRIE DÉFORMABLE

1. maillage volumique (fluide) conforme à l'interface

- a) 1 seul maillage *body-fitted* avec formulation ALE (*ref*)

- principe : frontière = maillage de l'interface, intérieur déformé de façon arbitraire
- intérêt/avantages : ...
- contraintes/inconvénients :
 - la qualité du maillage volumique dépend fortement de celle du maillage surfacique, surtout dans les régions proches de l'interface, où ont généralement lieu les phénomènes physiques les plus pertinents
 - la connectivité du maillage doit rester fixe (*à vérifier*)

- b) plusieurs maillages *body-fitted* qui se superposent

- méthode Chimère [15, 16], FLUSEPA [17]
- intérêt/avantages :
 - facilite la génération du maillage volumique lorsque la géométrie est complexe (e.g. hyper-sustentateurs)
 - évite de déformer un maillage 3d
- contraintes/inconvénients :
 - nécessite de traiter les intersections entre les blocs de maillage
 - limité aux mouvements rigides (*à vérifier*)

2. maillage volumique non conforme à l'interface

- méthode des frontières immergées [18, 19, 20] : interface représentée explicitement, volume (fluide) traité de façon eulérienne (i.e. maillage fixe)
- intérêt/avantages : évite de générer et déformer un maillage 3d autour d'une géométrie complexe

- contraintes/inconvénients : application indirecte des conditions aux limites

Dans cette thèse,

1. on ne traite que le maillage (surfique) de l'interface
2. on se concentre sur des maillages triangulaires linéaires par morceaux, mais une extension aux maillages hybrides et courbes (high-order) est envisageable

5.1.2 GÉNÉRATION DE MAILLAGE SURFACIQUE BASÉ SUR UN MODÈLE BREP

Essentiellement extension de méthodes standard (i.e. quadtree, Delaunay, avancée de front) 2d plan à des surfaces immergées/plongées dans \mathbb{R}^3

1. méthodes indirectes (Riemanniennes) : on travaille dans l'espace paramétrique en tenant compte de la métrique (anisotrope, Riemannienne) induite par la paramétrisation de façon à ce que le plongement du maillage dans \mathbb{R}^3 respecte les critères prescrits
 - a) conforme à la topologie BRep : on exploite directement les paramétrisations locales (carreaux de surface) du modèle BRep [21] (on maille d'abord les sommets, puis les arêtes et enfin les faces afin de garantir la conformité du maillage)
 - intérêt/avantages : utilisation de méthodes 2d plan robustes et efficaces
 - contraintes/inconvénients : les arêtes BRep douces introduisent des contraintes supplémentaires sur le maillage, sans avoir de signification du point de vue du calcul EF/VF
⇒ éléments de mauvaise qualité
 - b) trans-carreaux par (re-)paramétrisation globale :
 - i. [22] :
 - A. on construit d'abord un maillage de référence conforme à la topologie BRep d'un ensemble de faces regroupées
 - B. on bouche artificiellement les éventuels « trous » afin qu'il n'y ait qu'un seul bord
 - C. on plonge ce maillage dans un espace paramétrique global :
 - afin d'obtenir les coordonnées paramétriques globales des noeuds intérieurs, on résout un système d'équations elliptique (opérateur Laplacien combinatoire) avec une condition de Dirichlet pour fixer les noeuds du bord sur un cercle
 - on modifie les coordonnées paramétriques globales des noeuds du bord afin d'améliorer la forme des éléments incidents
 - (on répète le processus jusqu'à ce que la qualité des éléments dans l'espace paramétrique global soit convenable)
 - D. on élimine les éventuels éléments fictifs créés à l'étape 1(b)iB
 - E. on génère un maillage dans l'espace paramétrique global par avancée de front en utilisant le maillage de référence comme approximation géométrique dans l'espace physique
 - F. on retrouve les coordonnées paramétriques locales des noeuds du nouveau maillage
 - ii. [23] :
 - A. le domaine paramétrique de chaque face BRep est décomposé en cellules triangulaires s'appuyant sur les contours
 - B. chaque cellule (courbe) est en bijection avec un triangle (linéaire) dans l'espace paramétrique global

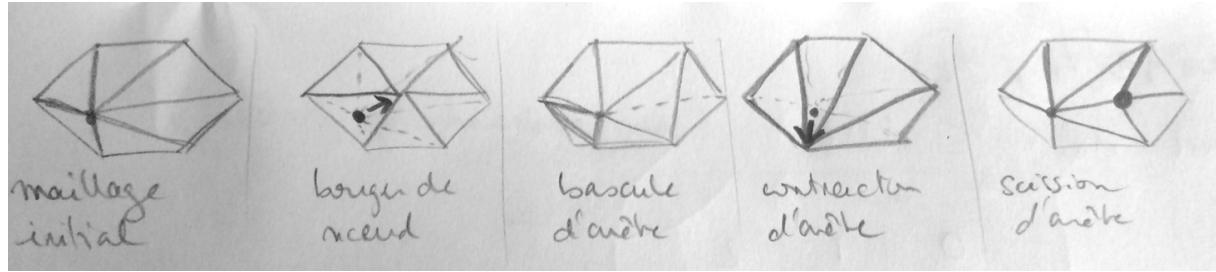


FIGURE 5.1 - ...

- C. un maillage du domaine paramétrique global est généré (quadtree-Delaunay)
 iii. [24] : ?

- intérêt/avantages : lève les contraintes topologiques du modèle BRep qui ne sont pas pertinentes pour le calcul EF/VF
- contraintes/inconvénients :
 - topologie : limité aux variétés avec un ou plusieurs bords \Rightarrow nécessite un découpage (généralement manuel) de l'interface
 - géométrie : limité aux surfaces quasi-planes et régulières
 - (méthodes pas suffisamment automatisées)

2.

5.1.3 OPTIMISATION DE MAILLAGE SURFACIQUE

1. bouger de noeud (direct, i.e. xyz ou indirect, i.e. uv)
 - a) méthodes heuristiques (lissage laplacien, analogies physiques [25], interpolation (IDW, RBF, ...) ...)
 - b) lissage basé sur l'optimisation d'une métrique de qualité [26, 27, 28] [29] \rightarrow maillage supporté sur un carreau de surface paramétrique
2. changements locaux de connectivité
 - a) bascule d'arête
 - b) contraction d'arête
 - c) scission d'arête

le maillage doit être une approximation géométrique fidèle de l'interface (dont la géométrie « exacte » est définie par le modèle BRep)

\rightarrow solution la plus simple : le maillage interpole la surface BRep aux noeuds (qui sont alors localisés sur des entités BRep et donc sur un ou plusieurs carreaux de surface) \Rightarrow l'écart de corde doit être contrôlé (taille d'élément dicté par le rayon de courbure local, maillage explicite des caractéristiques/singularités géométriques (arêtes vives, coins, ...))

5.2 LIEN ENTRE MODÈLE BREP ET MAILLAGE TRANS-CARREAUX

Objectifs :

1. représenter fidèlement la surface (courbe) à l'aide d'un maillage (linéaire) (i.e. limiter/contrôler l'écart de corde)
2. s'affranchir au maximum des contraintes sur le maillage inutilement imposées par la topologie du modèle BRep (arêtes douces)

5.2.1 CONSTRUCTION D'UNE STRUCTURE D'HYPERRAPHE

5.3 DÉFORMATION DE MAILLAGE TRANS-CARREAUX BASÉ SUR UN MODÈLE BREP DYNAMIQUE

Objectifs :

1. préserver autant que faire se peut la connectivité du maillage (éviter de générer un nouveau maillage à chaque pas de temps)

5.3.1 CORRESPONDANCE D'HYPERRAPHES

5.3.2 RÉGÉNÉRATION DU MAILLAGE CONTRAINT

5.3.3 UNTANGLEMENT

5.3.4 OPTIMISATION PAR BOUGER DE NŒUD

Décrire la procédure de projection d'un déplacement sur la surface BRep (sur une hyper-face ou une hyper-arête) → trajectoire trans-carreaux [30, Section 5.5]), [31], [32, p.42 et Section 4.4.1]

5.3.5 OPTIMISATION PAR RECONNEXIONS LOCALES

5.3.5.1 Bascule d'arête

Les arêtes contenues dans les chaînes ne peuvent pas être basculées.

5.3.5.2 Contraction d'arête

Soit e l'arête entre les noeuds p_1 et p_2 . Sans restreindre la généralité, on supposera que $\text{dd}\ell(p_1) \leq \text{dd}\ell(p_2)$. Ici, $\text{dd}\ell(p)$ représente le nombre de degrés de liberté du noeud n , i.e.

- $\text{dd}\ell(p) = 0$ si n est contraint sur un sommet BRep ;
- $\text{dd}\ell(p) = 1$ si n est contraint sur une hyper-arête (chaîne) ;
- $\text{dd}\ell(p) = 2$ si n n'est pas contraint (ou plutôt est contraint sur une hyper-face).

Si $\text{dd}\ell(p_1) = \text{dd}\ell(p_2) = 1$, la contraction n'est possible que si e fait partie d'une chaîne, i.e. les noeuds p_1 et p_2 sont contraints sur la même hyper-arête (voir Figure 5.2).

Si $\text{dd}\ell(p_1) < \text{dd}\ell(p_2)$ on contracte e vers le noeud p_1 . Si $\text{dd}\ell(p_1) = \text{dd}\ell(p_2)$ on contracte e vers son milieu. Afin de localiser précisément ce milieu sur la surface BRep (i.e. connaître l'entité BRep qui le supporte, ainsi que ses coordonnées paramétriques dans les carreaux de surface concernés), on calcule la projection sur la surface BRep du noeud p_1 translaté d'un vecteur $\frac{p_2-p_1}{2}$ (voir Figure 5.3), en suivant la procédure décrite dans la Section 5.3.4.

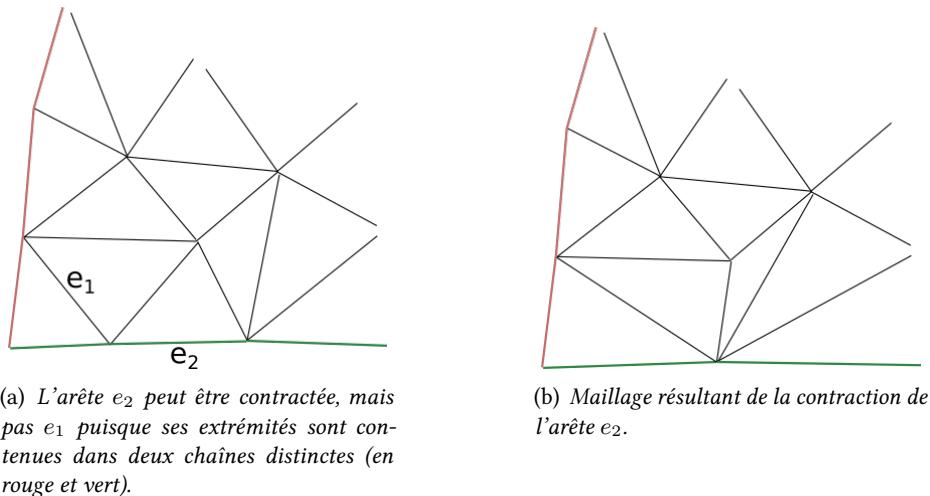
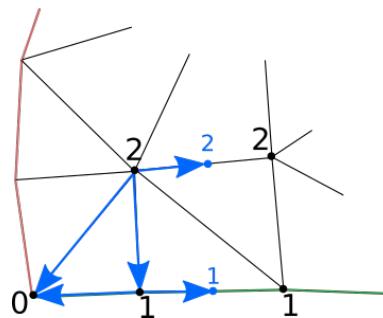


FIGURE 5.2 – Deux cas possibles pour une arête dont les deux sommets ont un seul degré de liberté.

FIGURE 5.3 – Placement du nœud résultant de la contraction d'une arête. Le dd ℓ de chaque nœud concerné est indiqué à côté de celui-ci. Les flèches représentent les vecteurs déplacement à projeter pour chaque arête contractée.

5.3.5.3 Scission d'arête

On insère un nœud au milieu d'une arête. Comme pour la contraction d'arête, les coordonnées de ce milieu sont une nouvelle fois obtenue par la procédure de projection décrite dans la [Section 5.3.4](#). Cette fois, la projection du déplacement se fait en partant du sommet de l'arête ayant le plus grand nombre de degrés de liberté, comme illustré sur la [Figure 5.4](#).

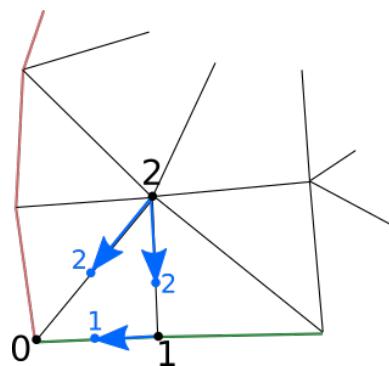


FIGURE 5.4 – Placement du nouveau nœud résultant d'une scission d'arête. Le dd ℓ de chaque nœud concerné est indiqué à côté de celui-ci. Les flèches représentent les vecteurs déplacement à projeter pour chaque arête scindée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. R. ROSSIGNAC. *Blending and Offsetting Solid Models*. Thèse de Doctorat, University of Rochester, 1985. (cf. p. 8)
- [2] X. JIAO. Face Offsetting: A Unified Approach for Explicit Moving Interfaces. *Journal of Computational Physics*, 220 (2) : pp. 612–625, 2007. (cf. p. 12)
- [3] S. M. GELSTON et D. DUTTA. Boundary surface recovery from skeleton curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 12 (1) : pp. 27–51, 1995. (cf. p. 18)
- [4] A. RAHIMIAN, S. K. VEERAPANENI, D. ZORIN et G. BIROS. Boundary Integral Method for the Flow of Vesicles with Viscosity Contrast in Three Dimensions. *Journal of Computational Physics*, 298 : pp. 766–786, 2015. (cf. pp. 25 et 36)
- [5] J. MASON et D. HANDSCOMB. *Chebyshev Polynomials*. CRC Press, 2002. (cf. p. 26)
- [6] A. GIL, J. SEGURA et N. M. TEMME. *Numerical Methods for Special Functions*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2007. (cf. p. 26)
- [7] J. P. BOYD. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, Mineola, NY, seconde édition, 2001. (cf. p. 26)
- [8] C. CANUTO, M. Y. HUSSAINI, A. QUARTERONI et T. A. ZANG. *Spectral Methods. Fundamentals in Single Domains*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. (cf. pp. 26 et 31)
- [9] C. CLENSHAW. A note on the summation of Chebyshev series. *Mathematics of Computation*, 9 (51) : pp. 118–120, 1955. (cf. p. 30)
- [10] H. WENGLE et J. H. SEINFELD. Pseudospectral solution of atmospheric diffusion problems. *Journal of computational Physics*, 26 (1) : pp. 87–106, 1978. (cf. p. 32)
- [11] M. PETERNELL et H. POTTMANN. Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, 23 (2-3) : pp. 255–266, 1997. (cf. p. 35)
- [12] N. M. PATRIKALAKIS et T. MAEKAWA. *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*. Springer Science & Business Media, 2009. (cf. p. 36)
- [13] X. M. JIAO. *Data transfer and interface propagation in multicomponent simulations*. Thèse de Doctorat, University of Illinois, Urbana-Champaign, 2001. (cf. p. 36)
- [14] R. T. FAROUKI. The approximation of non-degenerate offset surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 3 (1) : pp. 15–43, 1986. (cf. p. 36)
- [15] R. L. MEAKIN et N. E. SUHS. Unsteady aerodynamic simulation of multiple bodies in relative motion. Dans *9th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, p. 1996, 1989. (cf. p. 45)

- [16] Z. J. WANG et V. PARTHASARATHY. A fully automated Chimera methodology for multiple moving body problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **33** (7) : pp. 919–938, 2000. (cf. p. 45)
- [17] P. BRENNER. Three-dimensional aerodynamics with moving bodies applied to solid propellant. Dans *27th Joint Propulsion Conference*, p. 2304, 1991. (cf. p. 45)
- [18] C. S. PESKIN. The immersed boundary method. *Acta numerica*, **11** : pp. 479–517, 2002. (cf. p. 45)
- [19] J. HOVNANIAN. *Méthode de frontières immergées pour la mécanique des fluides. Application à la simulation de la nage..* Thèse de Doctorat, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2012. (cf. p. 45)
- [20] K. WANG, J. GRÉTARSSON, A. MAIN et C. FARHAT. Computational algorithms for tracking dynamic fluid–structure interfaces in embedded boundary methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **70** (4) : pp. 515–535, 2012. (cf. p. 45)
- [21] H. BOROUCHAKI, P. LAUG et P.-L. GEORGE. Parametric surface meshing using a combined advancing-front generalized Delaunay approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **49** (1-2) : pp. 233–259, 2000. (cf. p. 46)
- [22] D. L. MARCUM et J. A. GAITHER. Unstructured Surface Grid Generation Using Global Mapping and Physical Space Approximation. Dans *Proceedings of the 8th International Meshing Roundtable*, pp. 397–406, 1999. (cf. p. 46)
- [23] F. NOËL. Global parameterization of a topological surface defined as a collection of trimmed bi-parametric patches: Application to automatic mesh construction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **54** (7) : pp. 965–986, 2002. (cf. p. 46)
- [24] W. JONES. Toward a global parameterization for quilted CAD entities. Dans *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, p. 611, 2004. (cf. p. 47)
- [25] C. FARHAT, C. DEGAND, B. KOOBUS et M. LESOINNE. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **163** (1-4) : pp. 231–245, 1998. (cf. p. 47)
- [26] L. A. FREITAG, M. JONES et P. PLASSMANN. An efficient parallel algorithm for mesh smoothing. Dans *Proceedings of the 4th International Meshing Roundtable*, pp. 47–58, 1995. (cf. p. 47)
- [27] S. A. CANANN, J. R. TRISTANO, M. L. STATE et al. An Approach to Combined Laplacian and Optimization-Based Smoothing for Triangular, Quadrilateral, and Quad-Dominant Meshes. Dans *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 85–102, 1998. (cf. p. 47)
- [28] X. JIAO, D. WANG et H. ZHA. Simple and Effective Variational Optimization of Surface and Volume Triangulations. Dans *Proceedings of the 17th International Meshing Roundtable*, pp. 315–332, 2008. (cf. p. 47)
- [29] A. GARGALLO-PEIRÓ, X. ROCA et J. SARRATE. A surface mesh smoothing and untangling method independent of the CAD parameterization. *Computational Mechanics*, **53** (4) : pp. 587–609, 2014. (cf. p. 47)
- [30] G. FOUCault, J.-C. CUILLIÈRE, V. FRANÇOIS, J.-C. LÉON et R. MARANZANA. Adaptation of CAD model topology for finite element analysis. *Computer-Aided Design*, **40** (2) : pp. 176–196, 2008. (cf. p. 48)

- [31] T. V. THOMPSON, II et E. COHEN. Direct haptic rendering of complex trimmed NURBS models. Dans *ACM SIGGRAPH 2005 Courses*, SIGGRAPH '05. ACM, New York, NY, USA, 2005. (cf. p. 48)
- [32] S. CROZET. *Efficient contact determination between solids with boundary representations (B-Rep)*. Thèse de Doctorat, Communauté Université Grenoble Alpes, 2017. (cf. p. 48)
- [33] M. A. LACHANCE. Chebyshev economization for parametric surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 5 (3) : pp. 195–208, 1988. (Pas cité)
- [34] S. CAMPAGNA, P. SLUSALLEK et H.-P. SEIDEL. Ray tracing of spline surfaces: Bézier clipping, Chebyshev boxing, and bounding volume hierarchy – a critical comparison with new results. *The Visual Computer*, 13 (6) : pp. 265–282, 1997. (Pas cité)
- [35] A. RABABAH. Transformation of Chebyshev–Bernstein polynomial basis. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 3 (4) : pp. 608–622, 2003. (Pas cité)
- [36] O. P. BRUNO, Y. HAN et M. M. POHLMAN. Accurate, high-order representation of complex three-dimensional surfaces via Fourier continuation analysis. *Journal of Computational Physics*, 227 (2) : pp. 1094 – 1125, 2007. (Pas cité)
- [37] R. PEYRET. *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*, volume 148. Springer Science & Business Media, 2013. (Pas cité)
- [38] A. BOWYER. Computing dirichlet tessellations. *The Computer Journal*, 24 (2) : pp. 162–166, 1981. (Pas cité)
- [39] D. F. WATSON. Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes. *The Computer Journal*, 24 (2) : pp. 167–172, 1981. (Pas cité)
- [40] W. CHO, N. M. PATRIKALAKIS et J. PERAIRE. Approximate development of trimmed patches for surface tessellation. *Computer-Aided Design*, 30 (14) : pp. 1077–1087, 1998. (Pas cité)
- [41] G. FOUCault, J.-C. CUILLIÈRE, V. FRANÇOIS, J.-C. LÉON et R. MARANZANA. Generalizing the advancing front method to composite surfaces in the context of meshing constraints topology. *Computer-Aided Design*, 45 (11) : pp. 1408–1425, 2013. (Pas cité)
- [42] P. J. FREY et H. BOROUCHAKI. Geometric surface mesh optimization. *Computing and Visualization in Science*, 1 (3) : pp. 113–121, 1998. (Pas cité)
- [43] X. JIAO, A. COLOMBI, X. NI et J. HART. Anisotropic mesh adaptation for evolving triangulated surfaces. *Engineering with Computers*, 26 (4) : pp. 363–376, 2010. (Pas cité)
- [44] F. ALAUZET, B. FABRÈGES, M. A. FERNÁNDEZ et M. LANDAJUELA. Nitsche-XFEM for the coupling of an incompressible fluid with immersed thin-walled structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 301 : pp. 300–335, 2016. (Pas cité)
- [45] H. FREEMAN et R. SHAPIRA. Determining the Minimum-Area Encasing Rectangle for an Arbitrary Closed Curve. *Communications of the ACM*, 18 (7) : pp. 409–413, 1975. (Pas cité)
- [46] G. MONGE et J. LIOUVILLE. *Application de l'analyse à la géométrie*. Bachelier, 1850. (Pas cité)
- [47] J. R. ROSSIGNAC et A. A. REQUICHA. Offsetting operations in solid modelling. *Computer Aided Geometric Design*, 3 (2) : pp. 129–148, 1986. (Pas cité)