Table des matières

Introduction **1**

1 Algorithme pour la propagation d’une surface régulière par morceaux **3**
- 1.1 Construction géométrique de l’enveloppe des sphères . . . 3
  - 1.1.1 Enveloppe d’une famille de sphères à un paramètre . . . 3
  - 1.1.2 Enveloppe d’une famille de sphères à deux paramètres . . . 3
- 1.2 Application de la condition d’entropie . . . 3
- 1.3 Reconstitution topologique du modèle BREP . . . 4

2 Méthode d’ordre élevé pour le suivi d’un patch rectangulaire de surface **5**
- 2.1 Discrétisation spatiale . . . 5
  - 2.1.1 État de l’art . . . 5
  - 2.1.2 Polynômes de Chebyshev . . . 6
- 2.2 Discrétisation temporelle . . . 7

3 Généralisation aux surfaces régulières par morceaux de topologie quelconque **9**
- 3.1 Construction des nouvelles faces . . . 9
  - 3.1.1 Arêtes convexes . . . 9
  - 3.1.2 Sommets convexes . . . 9
- 3.2 Résolution des intersections entre faces . . . 9
  - 3.2.1 État de l’art . . . 9
  - 3.2.2 Approche retenue . . . 10
- 3.3 Validation de la méthode . . . 10
  - 3.3.1 Propagation suivant un champ de vitesse continu . . . 10
  - 3.3.2 Propagation à vitesse normale uniforme . . . 10
  - 3.3.3 Propagation à vitesse normale non uniforme . . . 10

4 Déformation de maillage surfacique **11**

5 Application à la simulation de la régression de propergol solide **13**

Conclusion **15**

Bibliographie **17**

Introduction

Contexte

Formulation du problème

formulation lagrangienne traditionnelle (approche EDP) : vecteur vitesse ou vitesse normale
problème de définition de la normale dans le cas piecewise-smooth
$\rightarrow$ formulation plus générale (approche “géométrique”) : principe de Huygens (propagation de proche en proche), enveloppe de sphères (e.g. ondes) ou de boules (e.g. flamme) (condition d’entropie [1]).

État de l’art

résolution analytique impossible $\rightarrow$ méthodes numériques

Méthodes numériques pour le suivi d’interfaces

2 façons de traiter l’interface

- point de vue eulérien $\rightarrow$ représentation implicite
  - ex. : *level-set* [1], *Volume-of-fluid* [2], etc.
  - \+ : formulation simple, facilement généralisable à n dimensions, supporte naturellement les changements topologiques de l’interface $\rightarrow$ bien adapté aux interfaces fluide-fluide ;
  - \- : besoin de reconstruire l’interface, quantités géométriques mal résolues, mauvaise conservation de la masse et besoin de réinitialiser la fonction distance pour *level-set*, besoin d’extrapoler les conditions aux limites ;
- point de vue lagrangien $\rightarrow$ représentation explicite
  - ex. : *front-tracking* [3, 4], *face-offsetting* [5], etc.
  - \+ : fine résolution des quantités géométriques, application directe et précise des conditions aux limites ;
  - \- : supporte mal les grandes déformations, besoin de redistribuer les marqueurs (voire de remailler complètement), nécessite traitement explicite des changements topologiques (complexe en 3d) ;

type de problèmes visés dans cette thèse : interface = frontière solide (déformable) d'un domaine fluide $\Rightarrow$ déformations modérées, peu de changements de topologie $\Rightarrow$ on adopte la description lagrangienne on s'intéresse en particulier aux cas où l'interface est *piecewise smooth*, ce qui est souvent le cas dans les applications industrielles

méthodes high-order intéressantes lorsque la solution est régulière car précises à bas coût, mais phénomène de Gibbs en présence de singularités [6]

dans les applications visées, la définition de la géométrie initiale passe par une phase de CAO

Représentation par les frontières

formalisme BREP

Contributions

Organisation du manuscrit

1 Algorithme pour la propagation d'une surface régulière par morceaux

on veut mettre en place un algorithme basé sur le principe de Huygens (avec condition d'entropie) pour simuler la propagation d'une surface représentée suivant le formalisme BREP, i.e. pour construire un nouveau modèle BREP (géométrie et topologie) correspondant à une enveloppe de boules (EdB) centrées sur la surface courante.

1.1 Construction géométrique de l'enveloppe des sphères

traitement séparé de chaque entité BREP :

- faces $\rightarrow$ EdS à deux paramètres ;
- arêtes
  - smooth $\rightarrow$ préservée car vitesse continue ;
  - convexe $\rightarrow$ EdS à un paramètre (nouvelle(s) face(s)) ;
  - concave $\rightarrow$ aucune influence sur l'EdB ;
- sommets
  - smooth $\rightarrow$ préservé car vitesse continue ;
  - convexe $\rightarrow$ nouvelle(s) face(s) sphérique(s) ;
  - concave $\rightarrow$ aucune influence sur l'EdB.

1.1.1 Enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre

canal surfaces [7] (*spine curve* $\rightarrow$ « squelette » (ou axe médian))

1.1.2 Enveloppe d'une famille de sphères à deux paramètres

extension *canal surfaces* [8]
différence avec le simple transport suivant la normale [9]

1.2 Application de la condition d'entropie

résolution des intersections (pas encore de détail sur la méthode) $\rightarrow$ faces trimmées, nouveaux sommets/arêtes

1.3 Reconstitution topologique du modèle BREP

[7] …

il faut maintenant faire le choix d'une méthode numérique pour appliquer cet algorithme de façon pratique…

2 Méthode d'ordre élevé pour le suivi d'un patch rectangulaire de surface

(méthode pseudo-spectrale : solution développée dans une base de fonctions globales et régulières, résidu annulé exactement en un nombre discret de points de collocation, donnant une EDO en temps par point de collocation)

suivi lagrangien de marqueurs/points de collocation situés sur la surface
[7]

2.1 Discrétisation spatiale

Choix des fonctions de base et des marqueurs/points de collocation

2.1.1 État de l'art

— harmoniques sphériques [10], polynômes trigonométriques [11] $\rightarrow$ contraintes topologiques (genre 0, sans bord ou périodique) (méthode de continuation [6] pour s'affranchir de cette contrainte, mais complexe (POUs, …) et jamais utilisé pour des surfaces en mouvement)

— CAO : courbes/surfaces polynomiales (algébriques)/rationnelles (en produit tensoriel) par morceaux (B-splines/NURBS), utilisant la base de Bernstein

$$B_n^N(x) = \binom{N}{n} (1-x)^{N-n}\, x^n. \tag{2.1}$$

+ coefficients = points de contrôle dans l'espace physique
+ partition de l'unité $\Rightarrow$ propriété d'enveloppe convexe
- algorithme d'évaluation (de Casteljau) numériquement stable mais couteux $O(N^2)$
- points de contrôle pas *sur* la courbe/surface $\Rightarrow$ pas exploitables comme marqueurs lagrangiens
- peu pratiques pour réduire/élever le degré des polynômes

on choisit les polynômes de Chebyshev, couramment employés dans les méthodes spectrales dans le cas non-périodique

2.1.2 Polynômes de Chebyshev

[7]

2.1.2.1 Définition

— cos, récurrence, pour $x \in [-1, 1]$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

et pour $n \geq 2$,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x). \tag{2.2}$$

— extrema (CGL) (minimise phénomène de Runge pour l'interpolation)

2.1.2.2 Développement en série de Chebyshev, approximation de fonctions

fonctions d'une variable

— orthogonalité ⇒ aspect multirésolution, élévation/réduction de degré directe et quasi-optimale (d'ailleurs utilisé en CAO [12])
— série tronquée $P_N f$, erreur de troncature
— interpolant $I_N f$, erreur d'aliasing
— CGL → DCT, transformation rapide

généralisation à plusieurs variables (produit-tensoriel)

Représentation de courbes et de surfaces. courbe $\boldsymbol{\gamma} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$

$$P_N \boldsymbol{\gamma}(t) = \sum_{n=0}^{N} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_n T_n(t). \tag{2.3}$$

surface $\boldsymbol{\sigma} : [-1, 1]^2 \to \mathbb{R}^3$

$$P_{MN} \boldsymbol{\sigma}(u, v) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{mn} T_m(u) T_n(v). \tag{2.4}$$

2.1.2.3 Évaluation

algorithme de sommation de Clenshaw exploitant la relation de récurrence (2.2)) [13], numériquement stable et efficace ($O(N)$)

2.1.2.4 Dérivation

— matrice de dérivation (espace physique)
— formule de récurrence (espace spectral), remarque de [14, Section 2.3, p .94]

2.1.2.5 Quadrature

Clenshaw-Curtis

calcul (approché) longueur de courbe/aire de surface

2.1.2.6 Précision spectrale

Si $f \in C^p([-1,1])$, alors $\max_{[-1,1]} |P_N f - f| = O(N^{1-p})$ lorsque $N \to \infty$ [15, Théorème 5.14].
illustration convergence exponentielle pour f analytique et décroissance exponentielle des $\hat{f}_n$

2.2 Discrétisation temporelle

[7]

- champ de vitesse connu : intégration classique, schéma explicite (Euler, RK)
- vitesse normale connue : approximation EdS
  - calcul dérivées par différentiation spectrale
  - calcul normale et composante tangentielle
  - non-linéarités $\to$ aliasing, peut causer instabilité [16]
- auto-intersections
  - globales (traitées au chapitre 3)
  - locales [17]

3 Généralisation aux surfaces régulières par morceaux de topologie quelconque

3.1 Construction des nouvelles faces

[7]
paramétrisation et limites du domaine paramétrique

3.1.1 Arêtes convexes

paramétrisation approchée des courbes d'intersection (choix du paramètre, fitting LS série de Chebyshev univariée), portion de *canal surface* approchée

3.1.2 Sommets convexes

deux variantes :

3.1.2.1 Une face trimmée

$(u, v) \equiv$ coordonnées sphériques
+ : 1 seule face, spectre Chebyshev étroit

3.1.2.2 Plusieurs faces non trimmées

polygone sphérique découpé en quads [18]
+ : domaine paramétrique non trimmé

3.2 Résolution des intersections entre faces

3.2.1 État de l'art

état de l'art méthodes d'intersection de surfaces paramétriques : review complète [19]
subdivision [20], implicitisation approchée [21], suivi (marching) [22], Hohmeyer

[23] (critère de détection de boucles sur les enveloppes de normales, paramétrisation monotone et tracé des branches d'intersection)

3.2.2 Approche retenue

[7] adaptation de l'approche de Hohmeyer [23] (full Chebyshev / Chebyshev-Bernstein)

- changement de base [24]
- subdivision : changement de variable (détail en annexe) / algorithme de Casteljau (ref ?) (remarques complexité et conditionnement)
- volumes englobants convexes : oriented bounding box [25] (détail en annexe) / enveloppe convexe (comparer volumes)
- test de séparation : théorème de séparation des convexes [26] / optimisation linéaire [27]
- traitement des intersections tangentielles

3.3 Validation de la méthode

3.3.1 Propagation suivant un champ de vitesse continu

sphère/cube dans un écoulement tourbillonnaire incompressible analytique de période temporelle $2T$
calcul (exact) de volume avec quadrature de Clenshaw-Curtis (étanchéité (continuité G^0 partout) garantie car les marqueurs de bord coïncident tout au long de la déformation)
convergence de l'erreur d'approximation sur la position, l'aire et le volume à $t = 0$ et $t = T$ pour différents niveaux de discrétisations spatiale et temporelle
+ convergence de la variation de volume au cours de la déformation

3.3.2 Propagation à vitesse normale uniforme

cube en expansion

3.3.3 Propagation à vitesse normale non uniforme

?

4 Déformation de maillage surfacique

5 Application à la simulation de la régression de propergol solide

Conclusion

Bibliographie

[1] J. A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1999. (cf. p. 1)

[2] D. Gueyffier, J. Li, A. Nadim, R. Scardovelli et S. Zaleski. Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *Journal of Computational Physics*, **152** (2) : pp. 423–456, 1999. (cf. p. 1)

[3] S. Popinet et S. Zaleski. A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **30** (6) : pp. 775–793, 1999. (cf. p. 1)

[4] G. Tryggvason, B. Bunner, A. Esmaeeli, D. Juric, N. Al-Rawahi, W. Tauber, J. Han, S. Nas et Y.-J. Jan. A Front-Tracking Method for the Computations of Multiphase Flow. *Journal of Computational Physics*, **169** (2) : pp. 708 – 759, 2001. (cf. p. 1)

[5] X. Jiao. Face Offsetting : A Unified Approach for Explicit Moving Interfaces. *Journal of Computational Physics*, **220** (2) : pp. 612–625, 2007. (cf. p. 1)

[6] O. P. Bruno, Y. Han et M. M. Pohlman. Accurate, high-order representation of complex three-dimensional surfaces via Fourier continuation analysis. *Journal of Computational Physics*, **227** (2) : pp. 1094 – 1125, 2007. (cf. pp. 2 et 5)

[7] M. Peternell et H. Pottmann. Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, **23** (2-3) : pp. 255–266, 1997. (cf. pp. 3, 4, 5, 6, 7, 9 et 10)

[8] S. M. Gelston et D. Dutta. Boundary surface recovery from skeleton curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **12** (1) : pp. 27–51, 1995. (cf. p. 3)

[9] X. M. Jiao. *Data transfer and interface propagation in multicomponent simulations*. Thèse de Doctorat, University of Illinois, Urbana-Champaign, 2001. (cf. p. 3)

[10] S. K. Veerapaneni, A. Rahimian, G. Biros et D. Zorin. A Fast Algorithm for Simulating Vesicle Flows in Three Dimensions. *Journal of Computational Physics*, **230** (14) : pp. 5610–5634, 2011. (cf. p. 5)

[11] D. Gueyffier, F. Roux, Y. Fabignon, G. Chaineray, N. Lupoglazoff, F. Vuillot, J. Hijlkema et F. Alauzet. Accurate Computation of Grain Burning Coupled with Flow Simulation in Rocket Chamber. *Journal of Propulsion and Power*, **31** (6) : pp. 1761 – 1776, 2015. (cf. p. 5)

[12] M. A. Lachance. Chebyshev economization for parametric surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **5** (3) : pp. 195–208, 1988. (cf. p. 6)

[13] C. Clenshaw. A note on the summation of Chebyshev series. *Mathematics of Computation*, **9** (51) : pp. 118–120, 1955. (cf. p. 6)

[14] H. Wengle et J. H. Seinfeld. Pseudospectral solution of atmospheric diffusion problems. *Journal of computational Physics*, **26** (1) : pp. 87–106, 1978. (cf. p. 6)

[15] J. Mason et D. Handscomb. *Chebyshev Polynomials*. CRC Press, 2002. (cf. p. 7)

[16] A. Rahimian, S. K. Veerapaneni, D. Zorin et G. Biros. Boundary Integral Method for the Flow of Vesicles with Viscosity Contrast in Three Dimensions. *Journal of Computational Physics*, **298** : pp. 766–786, 2015. (cf. p. 7)

[17] R. T. Farouki. The approximation of non-degenerate offset surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **3** (1) : pp. 15–43, 1986. (cf. p. 7)

[18] J. Hahn. Filling Polygonal Holes with Rectangular Patches. Dans *Theory and Practice of Geometric Modeling*, pp. 81–91. Springer, 1989. (cf. p. 9)

[19] N. M. Patrikalakis et T. Maekawa. *Shape interrogation for computer aided design and manufacturing*. Springer Science & Business Media, 2009. (cf. p. 9)

[20] E. G. Houghton, R. F. Emnett, J. D. Factor et C. L. Sabharwal. Implementation of a divide-and-conquer method for intersection of parametric surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **2** (1-3) : pp. 173–183, 1985. (cf. p. 9)

[21] T. Dokken. Approximate Implicitization. *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, pp. 81–102, 2001. (cf. p. 9)

[22] R. E. Barnhill et S. Kersey. A marching method for parametric surface/surface intersection. *Computer Aided Geometric Design*, **7** (1-4) : pp. 257–280, 1990. (cf. p. 9)

[23] M. E. Hohmeyer. *Robust and Efficient Surface Intersection for Solid Modeling*. Thèse de Doctorat, EECS Department, University of California, Berkeley, 1992. (cf. p. 10)

[24] A. Rababah. Transformation of Chebyshev–Bernstein polynomial basis. *Computational Methods in Applied Mathematics*, **3** (4) : pp. 608–622, 2003. (cf. p. 10)

[25] A. Fournier et J. Buchanan. Chebyshev Polynomials for Boxing and Intersections of Parametric Curves and Surfaces. volume 13, pp. 127–142, 1994. (cf. p. 10)

[26] D. Eberly. Dynamic Collision Detection using Oriented Bounding Boxes. *Geometric Tools, Inc*, 2002. (cf. p. 10)

[27] R. Seidel. Small-Dimensional Linear Programming and Convex Hulls Made Easy. *Discrete & Computational Geometry*, **6** (3) : pp. 423–434, 1991. (cf. p. 10)

[28] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni et T. A. Zang. *Spectral Methods. Fundamentals in Single Domains*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. (Pas cité)

[29] A. Gil, J. Segura et N. M. Temme. *Numerical Methods for Special Functions*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2007. (Pas cité)

[30] S. Campagna, P. Slusallek et H.-P. Seidel. Ray tracing of spline surfaces : Bézier clipping, Chebyshev boxing, and bounding volume hierarchy – a critical comparison with new results. *The Visual Computer*, **13** (6) : pp. 265–282, 1997. (Pas cité)

[31] A. J. Chorin. Flame Advection and Propagation Algorithms. *Journal of Computational Physics*, **35** (1) : pp. 1–11, 1980. (Pas cité)

[32] J. A. Sethian. Numerical algorithms for propagating interfaces : Hamilton-Jacobi equations and conservation laws. *Journal of Differential Geometry*, **31** (1) : pp. 131–161, 1990. (Pas cité)

[33] R. Peyret. *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*, volume 148. Springer Science & Business Media, 2013. (Pas cité)