

# TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS	5
INTRODUCTION	7
<b>I DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE SUIVI DE SURFACE ADAPTÉE AUX GÉOMÉTRIES RÉGULIÈRES PAR MORCEAUX</b>	<b>9</b>
<b>1 FORMULATION DU PROBLÈME DE PROPAGATION D'INTERFACES <math>G^1</math> PAR MORCEAUX</b>	<b>11</b>
1.1 Géométrie différentielle des (courbes et) surfaces	11
1.2 Description et représentation des surfaces régulières par morceaux	12
1.2.1 Représentation par les frontières (BRep)	12
1.2.1.1 Faces	12
1.2.1.2 Arêtes	13
1.2.1.3 Sommets	13
1.2.1.4 Structure de données	13
1.2.1.5 Représentation de surfaces régulières par morceaux	15
1.3 Formulation lagrangienne du problème de propagation d'interface	16
1.4 Principe de Huygens avec condition d'entropie	16
<b>2 ALGORITHME GÉNÉRAL POUR LA PROPAGATION D'INTERFACES <math>G^1</math> PAR MORCEAUX</b>	<b>19</b>
2.1 Convexité des courbes singulières	19
2.2 Observations	20
2.3 Construction de l'EdS partielle	20
2.3.1 Représentation de l'EdS propre d'une face BRep	21
2.3.1.1 Paramétrisation de l'EdS propre d'un carreau paramétrique	21
2.3.1.2 Courbes de restriction ...	22
2.3.2 Représentation de la pseudo-EdS d'une arête BRep convexe	23
2.3.2.1 Paramétrisation de l'EdS propre d'un arc paramétrique	23
2.3.2.2 Ajustement d'un carreau paramétrique (non-restréint)	24
2.3.3 Représentation de la pseudo-EdS d'un sommet BRep non-concave	26
2.3.3.1 Ajustement de plusieurs carreaux non-restréints	27
2.3.3.2 Ajustement d'un seul carreau restreint	28
2.4 Construction d'un modèle BRep de l'EdB	30
2.4.1 Construction du graphe des intersections	32
2.4.2 Construction des faces, arêtes et sommets BRep	33
<b>3 MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE DE L'ALGORITHME DE PROPAGATION</b>	<b>37</b>

3.1	Représentation des carreaux de surface	37
3.1.1	État de l'art	37
3.1.2	Polynômes de Chebyshev univariés	38
3.1.2.1	Définition et principales propriétés	38
3.1.2.2	Approximation de fonctions	39
3.1.2.3	Évaluation d'une somme partielle	42
3.1.2.4	Dérivation	42
3.1.2.5	Intégration	44
3.1.3	Polynômes de Chebyshev bivariés	45
3.2	Représentation et calcul des courbes d'intersection	45
3.2.1	Enjeux, État de l'art	45
3.2.2	Présentation/Vue d'ensemble/Caractéristiques de la méthode retenue	48
3.3	Intégration temporelle	50
3.3.1	Advection dans champ de vecteur vitesse connu	50
3.3.2	Propagation suivant une vitesse normale donnée	50
3.3.2.1	Discrétisation de l'EdS propre d'un carreau paramétrique	50
3.3.2.2	Discrétisation de la pseudo-EdS d'une arête BRep convexe	51
3.3.2.3	Discrétisation de la pseudo-EdS d'un sommet BRep non-concave	52
3.4	Amélioration de la stabilité numérique	52
3.4.1	Réduction de l'erreur d'aliasing	52
3.4.2	Prévention des singularités géométriques	53
4	<b>VALIDATION DES MÉTHODES NUMÉRIQUES</b>	55
4.1	Propagation suivant un champ de vitesse analytique	55
4.2	Propagation à vitesse normale uniforme	58
<b>II</b>	<b>INTÉGRATION DE L'OUTIL DE SUIVI DE SURFACE DANS UNE CHAÎNE DE CALCUL MULTI-PHYSIQUE</b>	<b>61</b>
5	<b>ADAPTATION D'UN MAILLAGE DE SURFACE DYNAMIQUE</b>	<b>63</b>
5.1	Problématiques et état de l'art	63
5.1.1	Simulation numérique dans un domaine à géométrie déformable	63
5.1.2	Génération de maillage surfacique basé sur un modèle BRep	64
5.1.3	Optimisation de maillage surfacique	66
5.2	Maillage trans-carreaux reposant sur un modèle BRep dynamique	66
5.2.1	Modèle maximal	67
5.2.1.1	Assemblage des faces en nappes maximales	67
5.2.1.2	Identification des pics	67
5.2.1.3	Assemblage des arêtes vives en crêtes maximales	68
5.2.1.4	Liens entre maillage et modèle maximale	68
5.2.2	Cohérence/Persistance du modèle maximale	68
5.3	Optimisation de maillage trans-carreaux	69
5.3.1	Bouger de nœud	69
5.3.1.1	Projection sur une crête	69
5.3.1.2	Projection sur une nappe	69
5.3.2	Reconnections locales	69

5.3.2.1	Bascule d'arête	69
5.3.2.2	Contraction d'arête	69
5.3.2.3	Scission d'arête	70
<b>6</b>	<b>APPLICATION À LA SIMULATION DE LA RÉGRESSION DE PROPERGOL SOLIDE</b>	<b>73</b>
6.1	Contexte	73
6.1.1	Principe d'un propulseur à propergol solide	73
6.1.2	État de l'art des méthodes de simulation	73
6.2	Cas d'application	73
6.2.1	Plateforme de simulation multi-physique CEDRE	73
6.2.2	Configuration du cas d'application	73
6.2.3	Méthodologie de couplage/chaînage	73
6.2.4	Résultats de la simulation	73
	<b>CONCLUSION</b>	<b>75</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>77</b>



# NOTIONS ET VOCABULAIRE

## CARREAU PARAMÉTRIQUE

Carreau  $\Sigma = (\bar{\mathcal{U}} = [\underline{u}, \bar{u}] \times [\underline{v}, \bar{v}], \sigma)$

- Arc/courbe iso-paramétrique du bord de  $\Sigma$  ( $u = \underline{u}$  ou  $u = \bar{u}$  ou  $v = \underline{v}$  ou  $v = \bar{v}$ ) :
  - côté de  $\Sigma$
- intersection de deux côtés de  $\Sigma$  ( $(u, v) = (\underline{u}, \underline{v})$  ou  $(u, v) = (\bar{u}, \underline{v})$  ou  $(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$  ou  $(u, v) = (\underline{u}, \bar{v})$ ) :
  - coin de  $\Sigma$

## ARC PARAMÉTRIQUE

Arc

- dans  $\mathbb{R}^3$  :  $\Gamma = (\bar{\mathcal{W}} = [\underline{w}, \bar{w}], \gamma)$
- dans  $\mathbb{R}^2$  :  $\Psi = (\bar{\mathcal{W}}, \psi)$
- Points  $\gamma(\underline{w})$  et  $\gamma(\bar{w})$  (resp.  $\psi(\underline{w})$  et  $\psi(\bar{w})$ ) :
  - extrémités de  $\Gamma$  (resp.  $\Psi$ )

## DESCRIPTION ET PRÉSENTATION DES SURFACES RÉGULIÈRES PAR MORCEAUX

Surface (variété de dimension 2)  $\mathcal{S}$ ,  $G^1$  par morceaux

- sous-variété de dimension 2 de  $\mathcal{S}$ , connexe, de continuité  $G^1$  :
  - nappe (régulière/ $G^1$ ) (de  $\mathcal{S}$ ), notée  $\mathcal{N}$
  - + *maximale* si n'est contenue dans aucune autre ( $\Rightarrow$  quasi-disjoints avec toutes les autres)
- sous-variété de dimension 1 de  $\mathcal{S}$ , connexe, de continuité  $G^1$ , formée exclusivement de points irréguliers de  $\mathcal{S}$  :
  - crête (de  $\mathcal{S}$ ), notée  $\mathcal{C}$
  - courbe singulière (de  $\mathcal{S}$ )
  - + *maximale* si ne peut être contenue dans aucune autre ( $\Rightarrow$  quasi-disjoints avec toutes les autres)

- point irrégulier de  $\mathcal{S}$  qui n'est à l'intérieur d'aucune nappe ou crête
  - pic (de  $\mathcal{S}$ )
  - coin (de  $\mathcal{S}$ )
  - point singulier (de  $\mathcal{S}$ )
  - pointe (de  $\mathcal{S}$ )
- (unique) décomposition de  $\mathcal{S}$  en nappes maximales, crêtes maximales et coins :
  - modèle maximal de  $\mathcal{S}$  (MM)
  - décomposition maximale de  $\mathcal{S}$  (DM)
  - représentation maximale de  $\mathcal{S}$  (MRep?)

## PROPAGATION D'INTERFACE

- interface  $\mathcal{S} = \partial\Omega$
- domaine intérieur ( $\sim$  solide)  $\Omega$  (ouvert)
- domaine extérieur (complémentaire)  $\Omega^C$

## PRINCIPE DE HUYGENS

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$$

- sphère centrée en  $\mathbf{p}$  et de rayon  $r$  notée  $\mathcal{S}(\mathbf{p}, r)$
- $\bigcup_{\mathbf{p} \in \mathcal{R}} \mathcal{S}(\mathbf{p}, \rho(\mathbf{p})) : ?$ , noté  $\mathcal{S}(\mathcal{R}, \rho)$
- boule ouverte centrée en  $\mathbf{p}$  et de rayon  $r$  notée  $\mathcal{B}(\mathbf{p}, r)$
- $\bigcup_{\mathbf{p} \in \mathcal{R}} \mathcal{B}(\mathbf{p}, \rho(\mathbf{p})) : ?$ , noté  $\mathcal{B}(\mathcal{R}, \rho)$
- $\partial\mathcal{B}(\mathcal{R}, \rho) :$  enveloppe des boules (EdB), notée  $\mathcal{R}^\rho$
- surface tangente à toutes les sphères de  $\mathcal{S}(\mathcal{R}, \rho)$  et en tout point tangente à une sphère de  $\mathcal{S}(\mathcal{R}, \rho)$  : enveloppe des sphères (EdS), notée  $\mathcal{E}^\rho(\mathcal{R})$
- $\overline{\mathcal{E}^\rho(\mathcal{R}) \setminus \mathcal{E}^\rho(\partial\mathcal{R})} :$  EdS propre de  $\mathcal{R}$ , notée  $\mathcal{E}_*^\rho(\mathcal{R})$
- $\mathcal{S}^\rho \cap \mathcal{S}(\mathcal{R}, \rho) :$  zone d'influence sur l'EdB, notée  $\mathcal{J}^\rho(\mathcal{R})$
- $\{\mathcal{Q} \subseteq \Sigma \mid \mathcal{R} \in \partial\mathcal{Q}\} : ?$ , noté  $\mathcal{H}(\mathcal{R})$
- $\mathcal{E}^\rho(\mathcal{R}) \cap_{\mathcal{Q} \in \mathcal{H}(\mathcal{R})} \mathcal{E}^\rho(\mathcal{Q})$  (i.e. lieu des points de tangence entre l'EdS de  $\mathcal{R}$  et les EdS des entités de dimension  $> \dim \mathcal{R}$  adhérentes à  $\mathcal{R}$ ) : pseudo-EdS de  $\mathcal{R}$ , notée  $\widehat{\mathcal{E}}^\rho(\mathcal{R})$

**BREP**

1. modèle BRep, noté B
2. sommet vif/régulier, noté V
3. arête vive/régulière, notée E
4. (co-)arête, notée  $E^i$ , ( $i = 1, 2$ )
5. face, notée F
6. contour, noté W

**MAILLAGE**

- noeud, noté  $v$
- arête, notée e
- triangle, noté t
- suite de noeuds connectés par des arêtes : chaîne, notée C

**MAILLAGE BASÉ SUR UN MODÈLE BREP**

- maillage carreau-par-carreau
- maillage trans-carreaux (indépendant des frontières des carreaux du modèle BRep)



# NOTATIONS

## Analyse

$\Pi_N$  Espace des polynômes à coefficients réels et de degré au plus  $N$

$f^{(k)}$  Dérivée  $k$ -ième de la fonction  $f$

$f_x$  Dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}$

$f_{x_1 \dots x_p}$  Dérivée partielle  $\frac{\partial^p f}{\partial x_1 \dots \partial x_p}$

## Topologie

$\partial E$  Frontière d'un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^d$

$\text{int } E$  Intérieur de  $E$

$\bar{E}$  Adhérence de  $E$

$E^C$  Complémentaire de  $E$



# INTRODUCTION

## CONTEXTE

- Combustion/érosion/ablation de solides
- dépôt (e.g. accrétion de givre, fabrication additive)
- interaction fluide-structure (e.g. aéroélasticité)
- décalage (offset) de surface
  - définition de tolérances
  - usinage par machine-outil à commande numérique
- génération de maillage volumique par avancée de front (e.g. couche limite pour écoulements NS à haut Reynolds)

## CADRE/PROBLÉMATIQUES DE LA THÈSE

1. Résoudre la propagation d'interfaces 3D géométriquement régulières par morceaux et de genre topologique quelconque
  - on ne s'intéresse pas aux interfaces fluides (e.g. écoulements multi-phasiques, vésicules en suspension, ...) dont la propagation est régie par la tension de surface, un flot de courbure ou de Willmore et qui subissent de grands changements de topologie
2. Réaliser des simulations numériques (de type EF/VF) de phénomènes multi-physiques complexes [mettant en jeu des interfaces en propagation]/[tenant compte des déformations dynamiques de la géométrie résultant de la propagation d'interfaces]

## CONTRIBUTIONS

1. Utilisation du *formalisme BRep* pour représenter une interface régulière par morceaux en propagation en 3D (dans des applications de type combustion de solide, interaction fluide-structure, ...).  
(Évoquer IGA ...)
2. Mise au point d'un algorithme basé sur le *principe de Huygens* (avec condition d'entropie) pour adapter dynamiquement la géométrie et la topologie du modèle BRep de l'interface au cours de la propagation.  
(L'opération de décalage (offset) est très courante en CAO (calcul de trajectoire d'une machine outil, ...). L'approche traditionnelle repose sur une représentation duale CSG/BRep, ...? Ici, on

n'utilise qu'un modèle BRep. En outre, on se limite souvent à une distance de décalage constante, ce qui n'est qu'un cas particulier de propagation suivant le principe de Huygens. Enfin, cette opération est rarement(?, propergol...) effectuée pour décrire la propagation d'une interface).

3. Mise en œuvre d'une méthode pseudo-spectrale (d'ordre élevé) (utilisant les polynômes de Chebyshev comme fonctions de base) pour suivre *efficacement et avec une grande précision* le mouvement de(s carreaux qui décrivent) l'interface.  
(Évoquer IGA ...)
4. Mise en œuvre d'une méthodologie pour adapter un *maillage dynamique trans-carreaux géométriquement fidèle au modèle BRep dynamique* de l'interface, dans le but de réaliser des simulations EF/VF. (Des méthodes de *génération/adaptation* de maillage *trans-carreaux* à partir de modèles BRep *statiques* [1, 2] ainsi que des méthodes de *déformation(/adaptation)* de maillage *carreau-par-carreau* à partir de modèles BRep *dynamiques* [3] ont déjà fait l'objet de plusieurs travaux. Certains travaux [4] ont également considéré l'approche inverse, à savoir la reconstitution d'un modèle BRep à partir d'un maillage déformé (à l'issue d'un calcul EF). Ici aussi, le maillage est conforme aux carreaux et la topologie BRep ne change pas car la déformation est dictée par un champ vectoriel de déplacement continu. En revanche, (à ma connaissance), aucun travail concernant l'adaptation de maillage trans-carreaux à partir de modèles BRep dynamiques n'a été publié à ce jour. )
5. (Intégration de l'outil de suivi de surface dans une chaîne de calcul multi-physique)

## ORGANISATION DU MANUSCRIT

2 parties

1. Développement d'un outil de suivi de surface adapté aux géométries régulières par morceaux
  - a) Formulation mathématique du problème de propagation d'interfaces régulières par morceaux en trois dimensions
  - b) Formulation d'un algorithme basé sur le PHCE pour adapter dynamiquement la géométrie et la topologie du modèle BRep de l'interface au cours de la propagation
  - c) Mise en œuvre numérique et validation de l'algorithme
2. Intégration de l'outil de suivi de surface dans une chaîne de calcul multi-physique
  - a) Méthodologie pour adapter un maillage dynamique géométriquement fidèle au modèle BRep dynamique de l'interface
  - b) Couplage de l'outil de suivi de surface avec des solveurs EF/VF – Application à la simulation de la combustion de propergol solide dans les moteurs de fusée

## **PREMIÈRE PARTIE**

---

# **DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DE SUIVI DE SURFACE ADAPTÉE AUX GÉOMÉTRIES RÉGULIÈRES PAR MORCEAUX**



# FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME DE PROPAGATION D'INTERFACES RÉGULIÈRES PAR MORCEAUX EN TROIS DIMENSIONS

1

Ce premier chapitre a pour objectif de formaliser le problème central de la thèse : la propagation d'interfaces régulières par morceaux en trois dimensions. Pour cela, on rappelle dans un premier temps les éléments de la géométrie différentielle des courbes et surfaces auxquels on aura recours tout au long du manuscrit. On accorde un intérêt particulier aux surfaces de régularité  $G^1$  par morceaux, ainsi qu'à leur description par décomposition cellulaire via la représentation par les frontières. On donne ensuite la formulation lagrangienne traditionnelle du problème de propagation d'interface et met en évidence ses limites dans le contexte de la thèse. On conclut ce chapitre en introduisant une formulation plus adéquate du problème, basée sur le principe de Huygens.

## 1.1 GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES (COURBES ET) SURFACES

(annexe?) introduire notions :

1. plan tangent, continuité géométrique  $G^1$
2. *carreau paramétrique* :  $(\mathcal{U}, \sigma)$ 
  - $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$  est le *domaine paramétrique*
  - $\Sigma = \sigma(\mathcal{U})$  est le *support* du carreau (surface)
  - $\sigma : \mathcal{U} \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$  est une *paramétrisation* de  $\Sigma$
  - vecteurs tangents  $\sigma_u$  et  $\sigma_v$
  - vecteur normal  $\mathbf{n} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$
  - tenseur métrique, première forme fondamentale  $\mathbf{I}$ , structure Riemannienne
  - seconde forme fondamentale  $\mathbf{II}$ , courbures normale, principales, moyenne et gaussienne
3. *arc/courbe paramétrique* :  $(\mathcal{W}, \gamma)$ 
  - $\mathcal{W} = [\underline{w}, \bar{w}]$  est l'*intervalle paramétrique*
  - $\Gamma = \gamma(\mathcal{W})$  est le *support* de l'arc (courbe)
  - $\gamma : \mathcal{W} \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^3$  est une *paramétrisation* de  $\Gamma$
  - vecteur tangent  $\gamma'$
  - courbure
  - courbe sur un carreau de surface
    - géométrie différentielle de l'intersection de deux carreaux

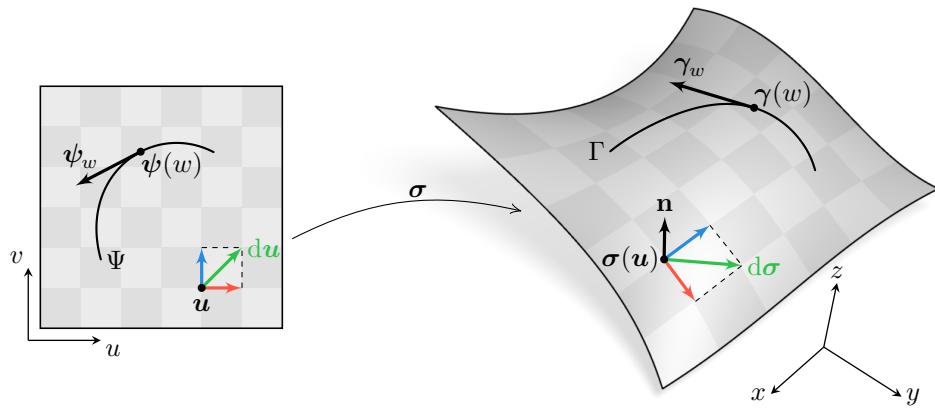


FIGURE 1.1 – Géométrie différentielle d'une courbe sur un carreau paramétrique.

## 1.2 DESCRIPTION ET PRÉSENTATION DES SURFACES RÉGULIÈRES PAR MORCEAUX

introduire notions [5] :

**DÉFINITION 1.1** (NAPPE RÉGULIÈRE) — *On appelle nappe régulière (ou plus simplement nappe) de  $S$  toute variété  $\mathcal{N} \subseteq S$  de dimension 2, connexe, de continuité globale  $G^1$  (i.e. dont la direction normale est continue partout).*

**DÉFINITION 1.2** (CRÊTE) — *On appelle crête de  $S$  toute variété  $\mathcal{C} \subset S$  de dimension 1, connexe, de continuité globale  $G^1$  (i.e. dont la direction tangente est continue partout) et qui n'est constituée que de points irréguliers de  $S$ .*

**DÉFINITION 1.3** (COIN) — *On appelle coin de  $S$  tout point irrégulier de  $S$  qui n'est à l'intérieur d'aucune crête.*

Avec ces définitions, tout point d'une surface régulière par morceaux est soit un coin, soit contenu à l'intérieur d'une nappe ou d'une crête.

### 1.2.1 PRÉSENTATION PAR LES FRONTIÈRES (BREP)

La *représentation par les frontières* (ou BRep pour *Boundary Representation*) est un formalisme très répandu dans le domaine de la Conception Assistée par Ordinateur (CAO) (*développer...*). Elle consiste à décrire un solide  $\Omega$  à l'aide d'une décomposition cellulaire de la surface  $S = \partial\Omega$  qui matérialise sa frontière. Cette décomposition — illustrée sur la Figure 1.3 — est constituée de *faces*, d'*arêtes* et de *sommets* dont on donne une définition dans les paragraphes suivants.

#### 1.2.1.1 Faces

Une face du modèle BRep est une variété de dimension 2 connexe délimitée par des arêtes et des sommets. Géométriquement, une face  $F$  est décrite par un carreau paramétrique restreint. La topologie des courbes de restriction du domaine paramétrique est décrite à l'aide de *contours* (un par composante connexe du bord de  $F$ ). Une face possède ainsi un contour extérieur  $W^{\text{ext}}$  et, éventuellement un ou plusieurs contours intérieurs  $W^{\text{int},i}$  si celle-ci comporte des « trous ». Les faces, qui sont quasi-disjointes deux-à-deux (i.e. ne s'intersectent qu'en des arêtes ou des sommets du modèle BRep), sont regroupées en *coquilles*, qui représentent chacune une composante connexe de  $S$ .

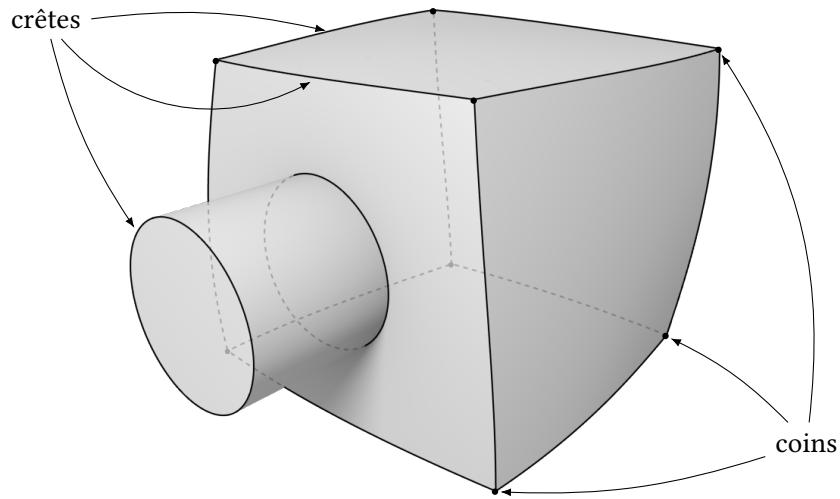


FIGURE 1.2 – Surface régulière par morceaux dont les crêtes et coins sont mis en évidence.

### 1.2.1.2 Arêtes

Une arête du modèle BRep est une variété de dimension 1 connexe délimitée par deux sommets. Puisque  $\mathcal{S}$  est une variété sans bord, chaque arête du modèle BRep est incidente à exactement deux faces  $F_1$  et  $F_2$ . Géométriquement, l’arête  $E$  est représentée par une branche de la courbe d’intersection entre les carreaux  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  qui décrivent respectivement  $F_1$  et  $F_2$ . Cette courbe peut également être représentée par sa trace dans l’espace paramétrique de chaque carreau. On peut donc la représenter à l’aide des trois courbes paramétriques  $\gamma$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  telles que

$$\gamma = \sigma_1 \circ \psi_1 = \sigma_2 \circ \psi_2. \quad (1.1)$$

Les arêtes, qui sont quasi-disjointes deux-à-deux (i.e. ne s’intersectent qu’en des sommets du modèle BRep), sont regroupées pour former les contours des faces. Ici, on impose qu’un contour soit composé d’au moins deux (co-)arêtes distinctes. Cela implique notamment que les deux sommets aux extrémités d’une même arête soient également distincts. Puisque ces derniers sont orientés, chaque arête  $E$  est formée de deux *co-arêtes* jumelles  $E^1$  et  $E^2$ , chacune associée à une face incidente à  $E$ . Chaque co-arête possède une orientation, conforme à celle du contour qui la contient.

Dans la suite, on distinguera les arêtes *vives* (*singulières*) — dont les faces incidentes s’y intersectent de façon transverse, i.e. avec des directions normales non-parallèles (e.g. les arêtes  $E_1$  et  $E_4$  dans la Figure 1.3) — des arêtes *régulières* — dont les faces incidentes s’y intersectent de façon tangentielle (e.g. les arêtes  $E_3$  et  $E_5$  dans la Figure 1.3).

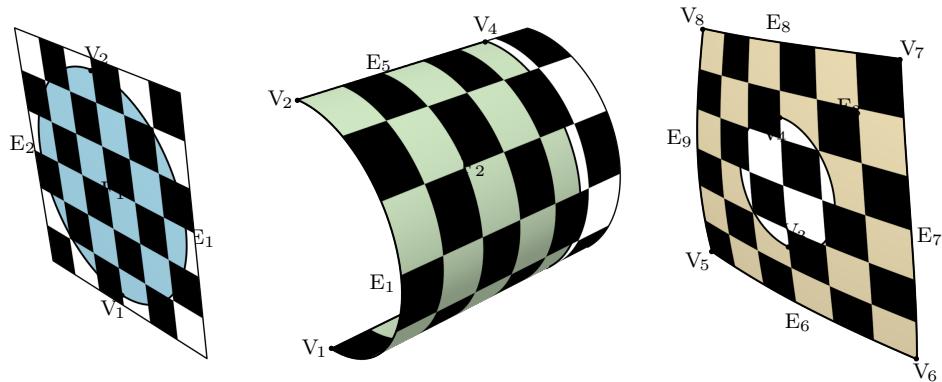
### 1.2.1.3 Sommets

Un sommet du modèle BRep matérialise l’intersection de deux arêtes et a pour support géométrique un point de  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.2.1.4 Structure de données

1. séparation entre topologie (structure) / géométrie (forme)

Espace euclidien



Espace paramétrique

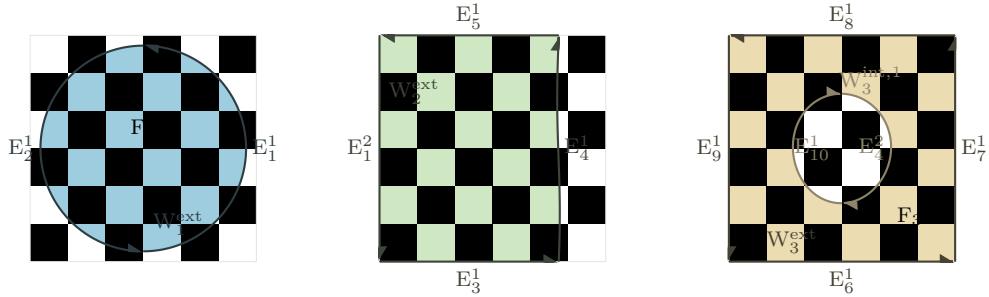


FIGURE 1.3 – Modèle BRep d'une surface régulière par morceaux.

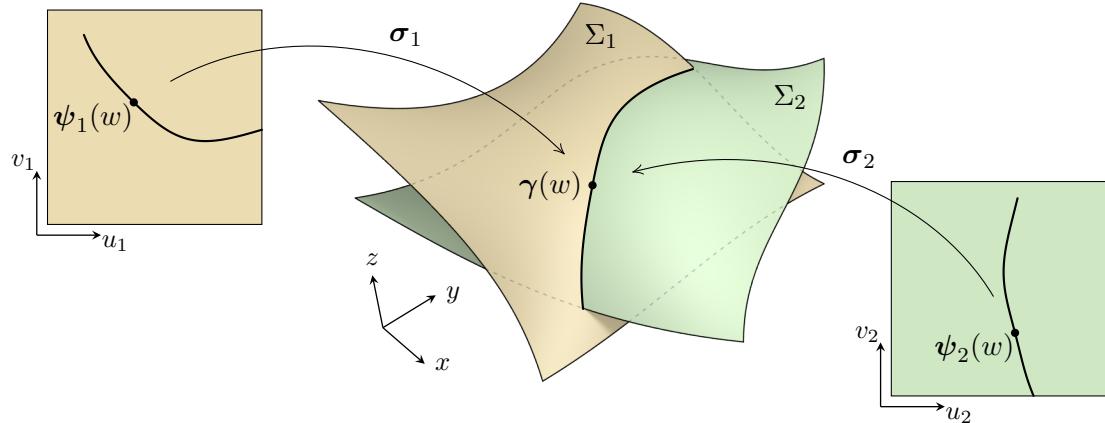


FIGURE 1.4 – Description géométrique d'une arête BRep.

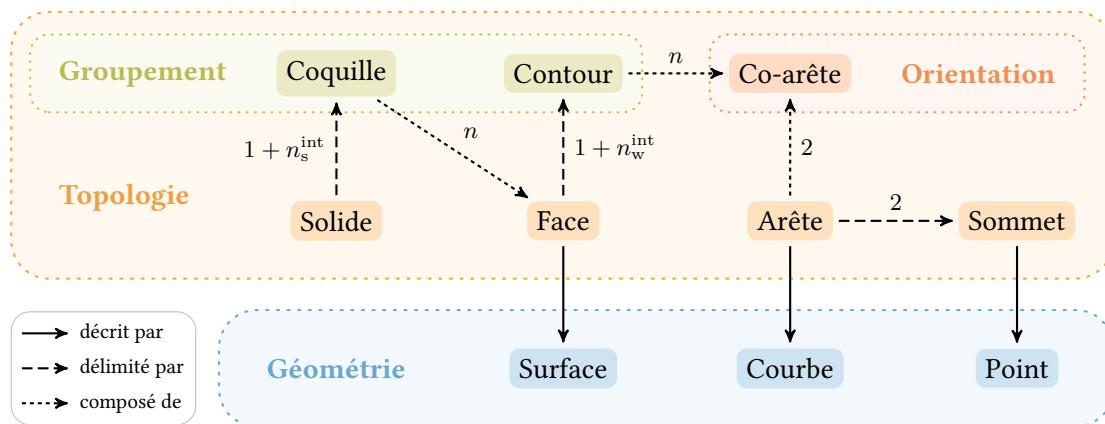


FIGURE 1.5 – Hiérarchie des éléments constituant un modèle BRep.

2. connectivité entre les entités capturée à l'aide d'une structure de graphe (homéomorphe à un polyèdre) (notion de *carte combinatoire*)
3. structure de données adaptée → *Doubly Connected Edge List* (DCEL) (*Halfedges*) (donner réfs.)

La Figure 1.5 présente un diagramme de la hiérarchie des entités qui constituent le modèle BRep.

### 1.2.1.5 Représentation de surfaces régulières par morceaux

Le formalisme de la représentation par les frontières est particulièrement adapté pour décrire des surfaces régulières par morceaux. En effet,

- chaque face du modèle BRep est une nappe de  $\mathcal{S}$
- chaque arête vive est une crête de  $\mathcal{S}$
- chaque coin de  $\mathcal{S}$  est un sommet BRep

### 1.3 FORMULATION LAGRANGIENNE DU PROBLÈME DE PROPAGATION D'INTERFACE

On considère une interface  $\mathcal{S}$  entre deux milieux distincts (e.g. un solide et un fluide). Dans cette thèse, on se concentre sur des problèmes en trois dimensions.  $\mathcal{S}$  représente donc une surface (i.e. une variété de dimension 2) que l'on supposera orientable et fermée (i.e. sans bord). De cette manière, l'interface sépare un domaine *intérieur*  $\Omega$  — que l'on supposera ouvert — et un domaine *extérieur*  $\Omega^C = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$  (voir [Figure 1.6](#)).  $\mathcal{S}$  est alors la frontière commune de ces domaines

$$\mathcal{S} = \partial\Omega = \partial(\Omega^C). \quad (1.2)$$

Le problème que l'on cherche à résoudre consiste à déterminer l'évolution au cours du temps de l'interface  $\mathcal{S}$  étant données sa position actuelle ainsi que sa vitesse de propagation. Dans la formulation lagrangienne traditionnelle, ce problème est exprimé sous la forme d'une équation aux dérivées partielles (EDP) pour le vecteur position  $\mathbf{x}$  d'un point de l'interface. L'équation décrivant la propagation suivant un champ de vecteur vitesse  $\mathbf{u} : \mathcal{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (1.3)$$

On peut également considérer que chaque point de  $\mathcal{S}$  se déplace le long de la direction normale à l'interface suivant un champ de vitesse normale  $\nu : \mathcal{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . L'équation décrivant la propagation est alors

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \nu(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t), \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$  désigne la direction normale à  $\mathcal{S}$  en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$ , pointant vers l'extérieur de  $\Omega$ .

En principe, les formulations (1.3) et (1.4) sont équivalentes puisque la composante tangentielle du vecteur vitesse n'affecte pas la forme de l'interface.

La formulation lagrangienne ne permet d'obtenir une solution au problème de propagation d'interface que dans le cas où cette dernière est *globalement* régulière et le reste tout au long de sa propagation. En effet, puisque la direction normale  $\mathbf{n}$  n'est pas définie au niveau des crêtes et coins de  $\mathcal{S}$ , le déplacement de ces points est ambigu. On peut notamment distinguer deux cas [6].

Premièrement, si l'interface subit un mouvement d'advection (comme le transport d'un fluide ou encore la déformation d'un solide sous l'effet de contraintes mécaniques) alors ses singularités géométriques sont préservées au cours de la propagation.

En revanche, si l'interface se propage à la manière d'un front d'onde (comme la progression d'une flamme, d'un dépôt de matière ou encore l'ablation d'un solide) alors les singularités sont soit préservées soit régularisées, suivant la convexité locale de l'interface. C'est essentiellement sur ce deuxième type de propagation que l'on se concentre dans cette thèse.

Puisque l'on s'intéresse ici à la propagation d'interfaces régulières seulement par morceaux, il est nécessaire d'obtenir une meilleure formulation du problème qui s'affranchisse des ambiguïtés ainsi mises en évidence. Plutôt que de poser le problème sous la forme d'une équation différentielle, cette nouvelle formulation se présente comme une construction géométrique.

### 1.4 PRINCIPE DE HUYGENS AVEC CONDITION D'ENTROPIE

Alors qu'il développait un modèle ondulatoire de la propagation de la lumière, Christiaan Huygens proposa le principe suivant : chaque point de l'espace atteint par une onde lumineuse se comporte comme

la source d'une ondelette secondaire émise dans toutes les directions. Si le milieu de propagation est homogène et isotrope alors les ondelettes sont sphériques. Le front d'onde, qui se propage ainsi de proche en proche, est formé par l'*enveloppe* de ces ondelettes, i.e. la surface qui est tangente à chacune d'elles et dont chaque point est un point de tangence avec une ondelette.

Le principe de Huygens permet de décrire de nombreux phénomènes analogues à la propagation d'une onde dans un milieu tels que la progression d'une flamme. (*développer...*)

1. distinguer propagation d'une onde et d'une interface entre deux milieux matériels (l'une peut s'auto-intersecer, l'autre non) → condition d'entropie
2. formaliser la notion d'enveloppe des sphères (EdS)  $\mathcal{E}^\rho(H \subseteq \mathcal{S})$  (surface tangente à toutes les sphères et en tout point tangente à une sphère)
3. formaliser la notion d'enveloppe des boules (EdB)  $H \subseteq \mathcal{S}^\rho := \partial(\mathcal{B}(H, \rho))$
4. si  $H \subseteq \mathcal{S}$  est une variété sans bord alors  $H^\rho = H_+^\rho \cup H_-^\rho$  où  $H_+^\rho \subset \Omega^C$  et  $H_-^\rho \subset \Omega$  (car  $\rho > 0$ )  
*(illustrer)*  
⇒ en particulier,  $\mathcal{S}^\rho = \mathcal{S}_+^\rho \cup \mathcal{S}_-^\rho$
5. donner définition implicite de l'EdB :

on pose

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{p}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2 - \rho(\mathbf{p})^2,$$

et, pour  $H \subseteq \mathcal{S}$ ,

$$\varphi_H(\mathbf{x}) := \min_{\mathbf{p} \in H} S(\mathbf{x}, \mathbf{p}).$$

Alors,

$$H^\rho = \varphi_H^{-1}(0) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \forall \mathbf{p} \in H, S(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \geq 0 \text{ et } \exists \mathbf{q} \in H \mid S(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0 \right\}.$$

6. après une propagation à vitesse normale  $\nu$  constante pendant un intervalle de temps  $\tau$  tel que  $\nu\tau = \rho$ , la nouvelle interface est  $\mathcal{S}_+^\rho$
7. à condition que  $\rho$  soit suffisamment régulière (continuité à déterminer),  $\mathcal{S}^\rho \subseteq \mathcal{E}^\rho(\mathcal{S})$
8. si  $\mathcal{E}^\rho(\mathcal{S})$  ne présente pas d'auto-intersections alors  $\mathcal{S}^\rho = \mathcal{E}^\rho(\mathcal{S})$

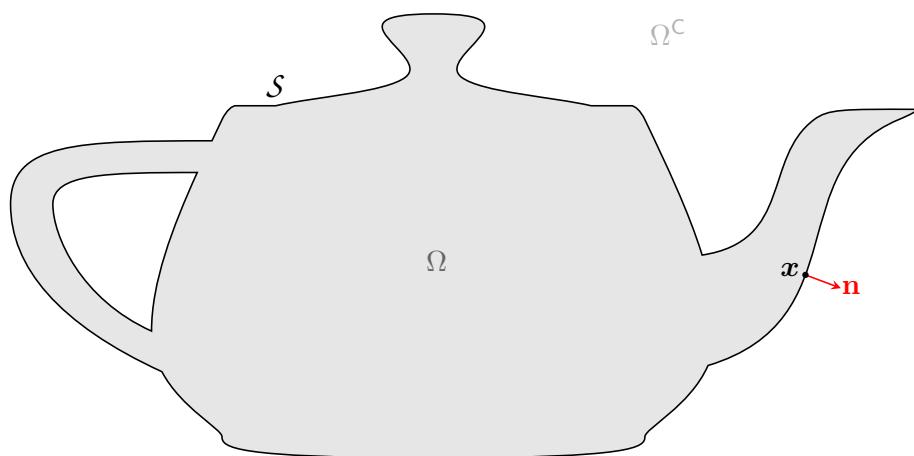


FIGURE 1.6 – ...

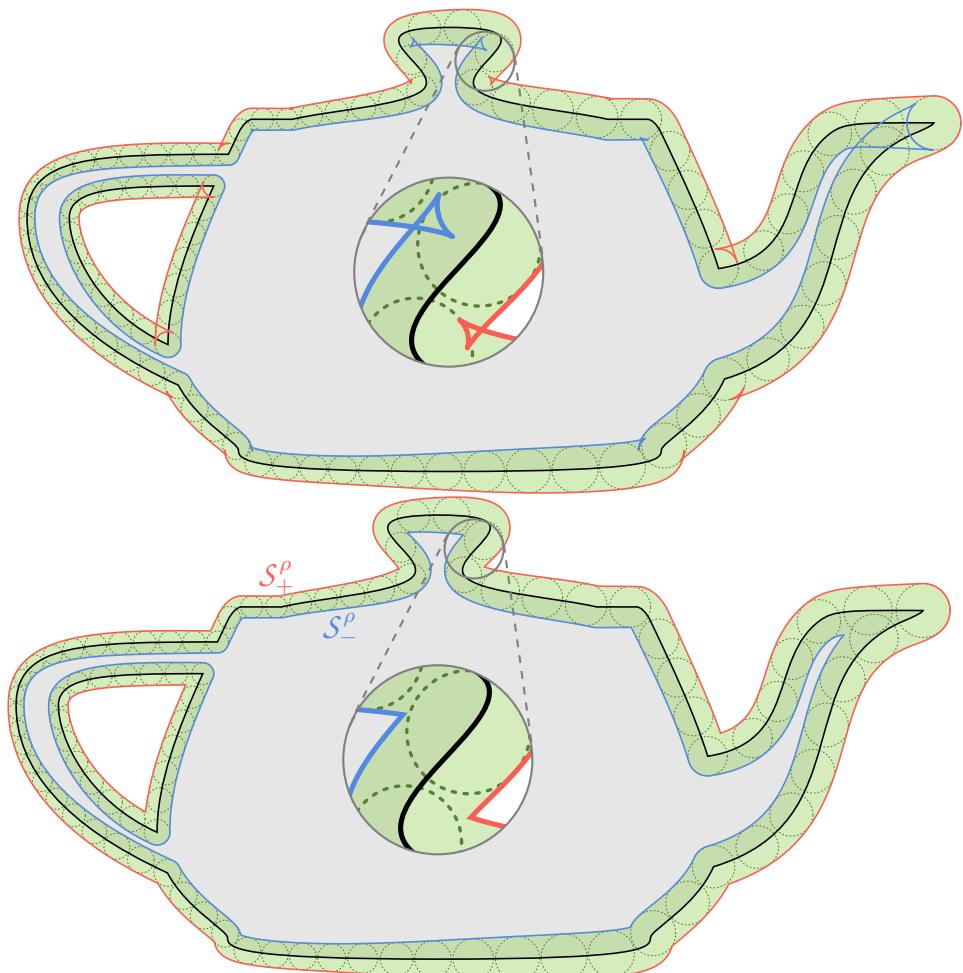


FIGURE 1.7 – Schéma pour distinguer EdS et EdB (...).

# MISE AU POINT D'UN ALGORITHME GÉNÉRAL POUR LA PROPAGATION D'INTERFACES RÉGULIÈRES PAR MORCEAUX

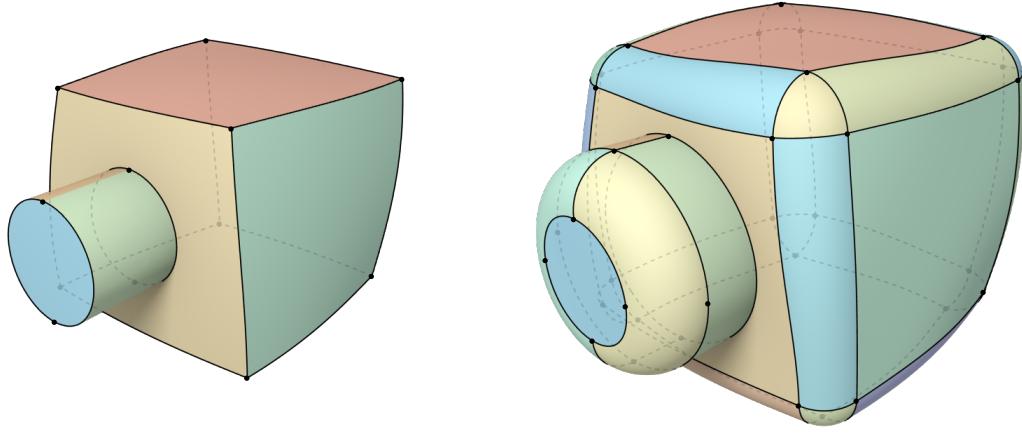
2

Dans ce deuxième chapitre on propose un algorithme basé sur le principe de Huygens avec condition d'entropie pour simuler la propagation d'une interface décrite dans le formalisme de la représentation par les frontières. L'objectif est donc de construire un nouveau modèle BRep décrivant l'enveloppe des boules (EdB) centrées sur l'interface à un instant donné. Pour cela, on tire des observations sur lesquelles on se basera pour construire dans un premier temps un sous-ensemble de l'enveloppe des sphères (EdS), duquel on retirera dans un second temps les régions qui sont exclues de l'EdB.

Dans ce chapitre, on explicite chaque étape de l'algorithme mais les détails de la mise en œuvre numérique font l'objet du chapitre suivant.

## 2.1 CONVEXITÉ DES COURBES SINGULIÈRES

[Objectif : formaliser la notion de convexité d'une courbe singulière de  $\mathcal{S}$  (qui servira pour simplifier la construction de l'EdB) et démontrer que la convexité est "continue", i.e. que deux segments d'une même courbe singulière, l'un convexe et l'autre concave, sont nécessairement séparés par un point régulier de  $\mathcal{S}$ ]



(a) Modèle BRep de l'interface.

(b) Modèle BRep de l'enveloppe des boules centrées sur l'interface.

FIGURE 2.1 – Entrée et sortie de l'algorithme présenté dans le chapitre.

## 2.2 OBSERVATIONS

[Objectif : justifier en quoi la construction intermédiaire d'une « EdS partielle » (sous-ensemble de l'EdS qui contient l'EdB) permet de simplifier la construction d'un modèle BRep de l'EdB en évitant de construire des éléments de l'EdS qui sont trivialement exclus de l'EdB]

définitions :

- zone d'influence<sup>1</sup> de  $H \subseteq S$  sur l'EdB (lieu des points de tangence entre  $S^\rho$  et  $\mathcal{S}(H, \rho)$ )

$$\mathcal{J}^\rho(H) := S^\rho \cap \mathcal{S}(H, \rho)$$

- EdS propre<sup>1</sup> de  $H \subseteq S$

$$\mathcal{E}_*(H) := \overline{\mathcal{E}^\rho(H)} \setminus \mathcal{E}^\rho(\partial H)$$

arguments :

1. on sait décrire l'EdB simplement de manière *implicite* (cf. [Section 1.4](#)) mais on cherche à en construire une représentation *explicite*
2. en revanche, on peut décrire explicitement l'EdS de chaque carreau ( $\rightarrow$  introduire système définissant l'EdS à 2 paramètres)
3. il est plus commode de voir l'EdS d'un carreau comme (un sous-ensemble de) la réunion de 10 nouveaux carreaux (intérieur  $\rightarrow$  2, bords  $\rightarrow$  4 et “pics”  $\rightarrow$  4)
4. si on procède ainsi pour chaque carreau qui décrit l'interface, on construit beaucoup de nouveaux carreaux qui sont redondants, voire même trivialement exclus de l'EdB
5. cf. notes “Huygens”, section “Observations et preuves”
6. Les régions de l'EdS partielle qui sont exclues de l'EdB sont délimitées par les courbes d'intersection entre les carreaux restreints matérialisant les EdS propres des faces et les pseudo-EdS des arêtes et sommets du modèle BRep de l'interface courante.

*Preuve. ?*

■

7.  $\Rightarrow$  On construit d'abord tous les carreaux de l'EdS partielle. On détermine ensuite les courbes d'intersection entre ces carreaux  $\rightarrow$  “graphe des intersections”. On analyse ensuite ce graphe pour constituer le modèle BRep de l'EdB.

## 2.3 CONSTRUCTION DE L'EDS PARTIELLE

[Objectif : donner les étapes de la construction d'une EdS partielle sous la forme d'un ensemble de carreaux restreints (paramétrisation + courbes de restriction du domaine paramétrique) avec des relations d'adjacences partielles]

1. construction d'un ensemble de carreaux restreints suffisant pour décrire l'EdB
2. construction du graphe des intersections tangentielles entre ces carreaux

---

<sup>1</sup>vocabulaire et notation à préciser ...

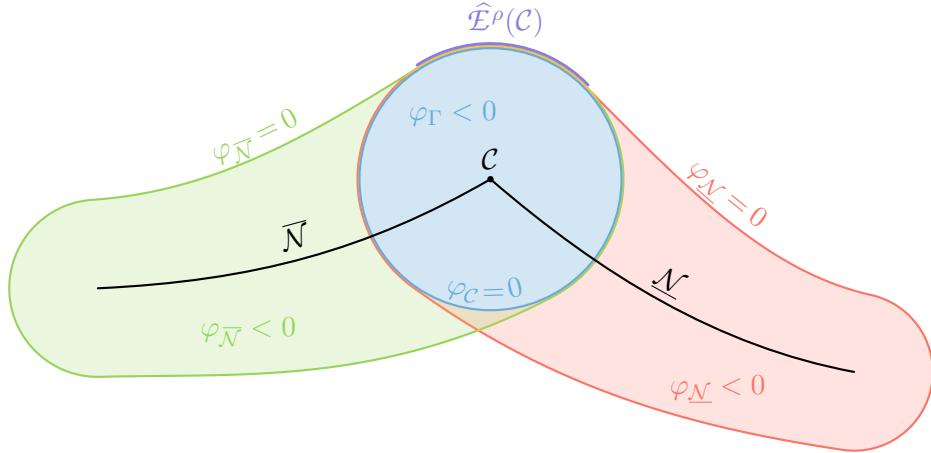


FIGURE 2.2 – Vue en coupe ...

- le calcul numérique des intersections tangentielles pose généralement des difficultés d'efficacité et de robustesse
- avec l'approche choisie, il est aisément de construire explicitement ces courbes et points intersections simultanément à la construction des carreaux puisqu'on connaît la nature de ces derniers (EdS propre de face, pseudo-EdS d'arête ou de sommet), qui perdue par la suite  $\Rightarrow$  de cette façon, on simplifie significativement le futur calcul des intersections

### 2.3.1 REPRÉSENTATION DE L'EDS PROPRE D'UNE FACE BREP

#### 2.3.1.1 Paramétrisation de l'EdS propre d'un carreau paramétrique

1. paramétrisation  $e$  de l'EdS propre d'un carreau non-restréint  $\Sigma: ([\underline{u}, \bar{u}] \times [\underline{v}, \bar{v}], \sigma)$

a) rappeler système définissant une EdS propre à 2 paramètres

$$\begin{cases} S_\rho(e(u, v), \sigma(u, v)) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial u} S_\rho(e(u, v), \sigma(u, v)) = 0, \end{cases} \quad (2.1a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} S_\rho(e(u, v), \sigma(u, v)) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} S_\rho(e(u, v), \sigma(u, v)) = 0. \end{cases} \quad (2.1b)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial v} S_\rho(e(u, v), \sigma(u, v)) = 0. \end{cases} \quad (2.1c)$$

b) interprétation : intersection de cercles caractéristiques (voir figure Figure 2.3)  $\rightarrow$  2 points (i.e. 2 nouveaux carreaux), on garde celui dans le sens de  $+n$  (i.e.  $E_+^\rho(\Sigma)$ , l'autre ( $E_-^\rho(\Sigma)$ ) est trivialement exclu de l'EdB)

c) paramétrisation à la Gelston [7] :

En considérant  $\rho$  comme une fonction des paramètres  $u$  et  $v$ , on peut réécrire le système (2.1)

$$\begin{cases} \|e - \sigma\|^2 - \rho^2 = 0, \end{cases} \quad (2.2a)$$

$$\begin{cases} (e - \sigma)^T (e_u - \sigma_u) - \rho \rho_u = 0, \end{cases} \quad (2.2b)$$

$$\begin{cases} (e - \sigma)^T (e_v - \sigma_v) - \rho \rho_v = 0. \end{cases} \quad (2.2c)$$

Or  $e - \sigma$  est un rayon de la sphère  $\mathcal{S}(\sigma, \rho)$  et est donc orthogonal à  $\mathcal{E}_*^\rho(\Sigma)$  en  $e$ . Donc  $(e - \sigma)^\top e_u = (e - \sigma)^\top e_v = 0$  et on a finalement

$$\left\{ \begin{array}{l} \|e - \sigma\|^2 - \rho^2 = 0, \\ (e - \sigma)^\top \sigma_u + \rho \rho_u = 0, \\ (e - \sigma)^\top \sigma_v + \rho \rho_v = 0. \end{array} \right. \quad (2.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (e - \sigma)^\top \sigma_u + \rho \rho_u = 0, \\ (e - \sigma)^\top \sigma_v + \rho \rho_v = 0. \end{array} \right. \quad (2.3b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (e - \sigma)^\top \sigma_v + \rho \rho_v = 0. \end{array} \right. \quad (2.3c)$$

On cherche alors une paramétrisation de la forme

$$e(u, v) = \sigma(u, v) + \rho(u, v)\mathbf{n}_E(u, v), \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{n}_E$  est la direction normale à  $\mathcal{E}_*^\rho(\Sigma)$ , qui vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{n}_E\| = 1, \\ \mathbf{n}_E^\top \sigma_u = -\rho_u, \end{array} \right. \quad (2.5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}_E^\top \sigma_v = -\rho_v. \end{array} \right. \quad (2.5b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}_E^\top \sigma_v = -\rho_v. \end{array} \right. \quad (2.5c)$$

On décompose  $\mathbf{n}_E = n_u \sigma_u + n_v \sigma_v + n_n \mathbf{n}$ , où  $\mathbf{n} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ .

Puisque  $\sigma_u^\top \mathbf{n} = \sigma_v^\top \mathbf{n} = 0$ , on a

$$\mathbf{J}_\sigma^\top \mathbf{n}_E = \mathbf{I}_\sigma \begin{pmatrix} n_u \\ n_v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \rho_u \\ \rho_v \end{pmatrix}.$$

Si on pose  $\mathbf{t} = \mathbf{J}_\sigma \begin{pmatrix} n_u \\ n_v \end{pmatrix}$  (on a alors  $\mathbf{n}_E = \mathbf{t} + n_n \mathbf{n}$ ), on a

$$\mathbf{t} = -\mathbf{J}_\sigma (\mathbf{I}_\sigma)^{-1} \begin{pmatrix} \rho_u \\ \rho_v \end{pmatrix},$$

soit

$$\mathbf{t} = \frac{(\rho_v I_{1,2} - \rho_u I_{2,2}) \sigma_u + (\rho_u I_{1,2} - \rho_v I_{1,1}) \sigma_v}{\det \mathbf{I}_\sigma}.$$

Si  $\|\mathbf{t}\| \leq 1$  alors on a  $\mathbf{n}_E^\pm = \mathbf{t} \pm \sqrt{1 - \|\mathbf{t}\|^2} \mathbf{n}$ .

d) différence avec le simple transport suivant la normale → abordé dans la [Section 3.3.2.1](#)

### 2.3.1.2 Courbes de restriction ...

1. conservation du domaine paramétrique (pas de re-paramétrisation) ⇒ coordonnées  $(x, y, z)$  des courbes de restriction données directement par la nouvelle paramétrisation (voir [Figure 2.4](#)).
2. on ajoute au graphe des intersections tangentielles celles parmi ces courbes de restriction qui correspondent à des intersections tangentielles  
(argument : la zone d'influence sur l'EdB d'un point régulier de  $\mathcal{S}$  est incluse dans un point, donc si  $p = \sigma^1(u_1, v_1) = \sigma^2(u_2, v_2)$  est un point d'intersection entre les faces  $F_1$  et  $F_2$  tel qu'elles y ont la même direction normale alors leurs EdS propres s'intersectent aussi au point  $q = e^1(u_1, v_1) = e^2(u_2, v_2)$  où elles partagent la même direction normale.)

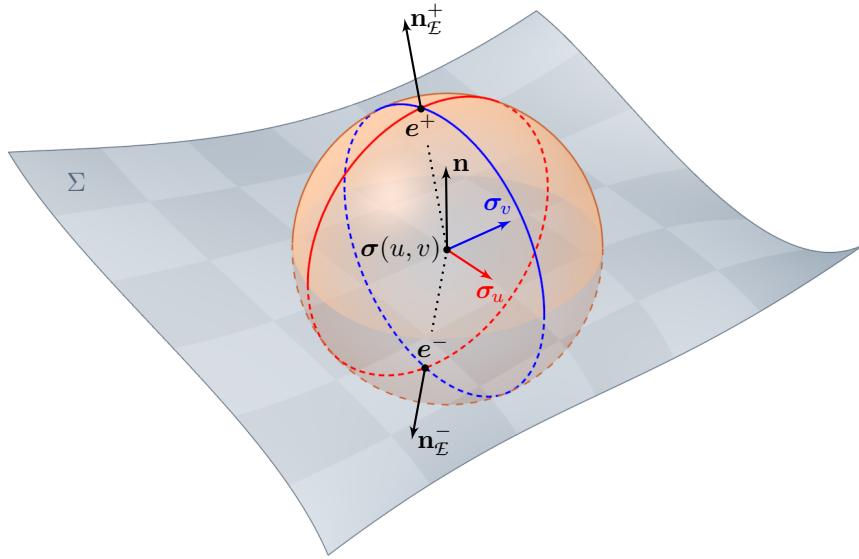


FIGURE 2.3 – Paramétrisation de l'EdS propre d'un carreau paramétrique.

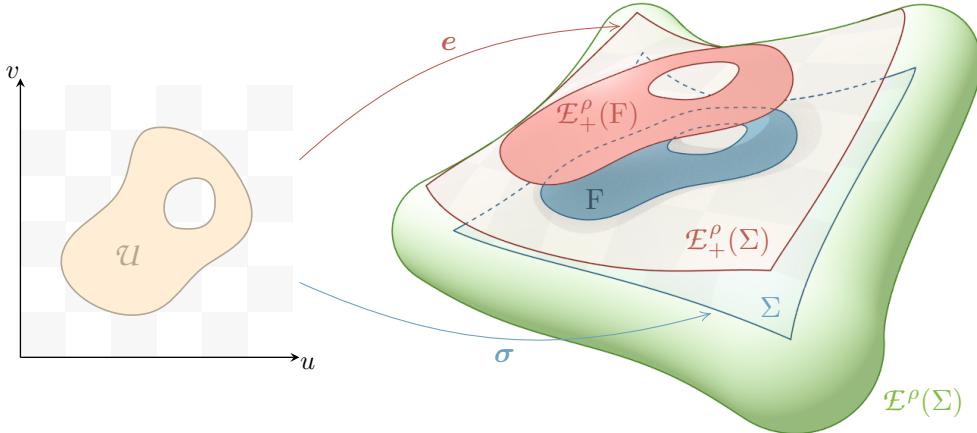


FIGURE 2.4 – EdS propre d'un carreau paramétrique restreint.

## 2.3.2 REPRÉSENTATION DE LA PSEUDO-EDS D'UNE ARÈTE BREP CONVEXE

### 2.3.2.1 Paramétrisation de l'EdS propre d'un arc paramétrique

Soit  $\gamma : [u, \bar{u}] \rightarrow \mathbb{R}^3$  une paramétrisation du support géométrique  $\Gamma$  de l'arête E. Si l'on considère  $\rho$  comme une fonction du paramètre  $u$  alors  $\mathcal{E}_*^\rho(\Gamma)$  est le lieu des points  $x \in \mathbb{R}^3$  qui vérifient

$$\begin{cases} \|x - \gamma(u)\|^2 - \rho(u)^2 = 0, \\ (x - \gamma(u))^\top \gamma'(u) + \rho(u)\rho_u(u) = 0. \end{cases} \quad (2.6a)$$

A condition que  $\rho_u^2 \leq \|\gamma'\|^2$ , le système (2.6) définit une famille de *cercles caractéristiques*, dont chacun est le lieu des points de tangence entre  $\mathcal{E}_*^\rho(\Gamma)$  et une sphère de la famille  $\mathcal{S}(\Gamma, \rho)$  (voir Figure 2.5).

D'après (2.6), le cercle caractéristique  $\mathcal{C}(u)$  au point  $\gamma(u)$  est l'intersection de la sphère  $\mathcal{S}(u) = \mathcal{S}(\gamma(u), \rho(\gamma(u)))$  et d'un plan orthogonal à la direction tangente à  $\Gamma$  en ce point (donnée par le vecteur

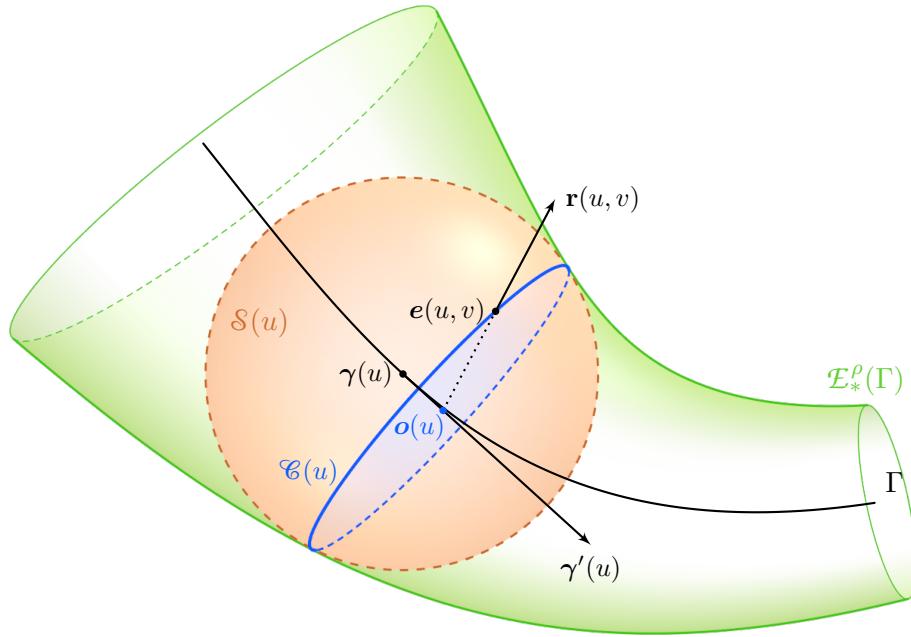


FIGURE 2.5 – Paramétrisation de l'EdS propre d'un arc paramétrique.

$\gamma'(u)$ ). Ce cercle est centré en

$$\mathbf{o}(u) = \gamma(u) - \frac{\rho(u)\rho_u(u)}{\|\gamma'(u)\|^2}\gamma'(u), \quad (2.7)$$

et a pour rayon

$$r(u) = \rho(u)\sqrt{1 - \frac{\rho_u(u)^2}{\|\gamma'(u)\|^2}}. \quad (2.8)$$

Voir  $\mathcal{E}_*^\rho(\Gamma)$  comme une famille cercles caractéristiques permet d'en donner la paramétrisation suivante

$$\mathbf{e}(u, v) = \mathbf{o}(u) + r(u)\mathbf{r}(u, v), \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{r}$  vérifie

$$\begin{cases} \|\mathbf{r}\| = 1, \\ \mathbf{r}^T \gamma' = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

De cette façon, les courbes iso- $u$  de  $\mathbf{e}$  sont les cercles caractéristiques.

### 2.3.2.2 Ajustement d'un carreau paramétrique (non-restreint)

1.  $E$  une arête convexe du modèle BRep de  $\Sigma$ ,  $\gamma : [\underline{u}, \bar{u}] \rightarrow \mathbb{R}^3$  une paramétrisation de son support géométrique
2.  $\underline{F}$  (resp.  $\bar{F}$ ) la face à gauche<sup>2</sup> (resp. à droite) de  $E$
3. but : construire une paramétrisation  $e^E$  de la pseudo-EdS de  $E$ , i.e. la région  $\hat{\mathcal{E}}^\rho(E)$  de  $\mathcal{E}^\rho(E)$  qui est tangente à la fois à  $\mathcal{E}^\rho(\underline{F})$  et  $\mathcal{E}^\rho(\bar{F})$  (voir Figure 2.6)

<sup>2</sup>relativement à l'orientation donnée par  $\gamma$ , vu de l'extérieur de  $\Omega$ .

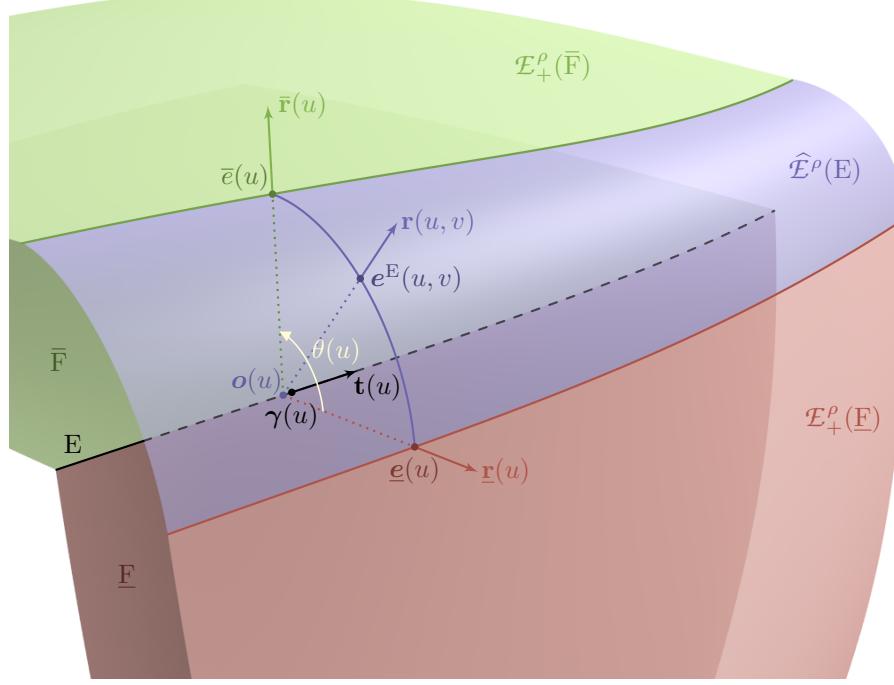


FIGURE 2.6 – Paramétrisation de la pseudo-EdS d'une arête BRep convexe.

4. on note  $\underline{\sigma}$  (resp.  $\bar{\sigma}$ ) une paramétrisation du carreau supportant  $\underline{F}$  (resp.  $\bar{F}$ ) et  $\underline{\psi}$  (resp.  $\bar{\psi}$ ) une paramétrisation de la trace de  $E$  dans l'espace paramétrique de  $\underline{F}$  (resp. de  $\bar{F}$ ) telle que

$$\gamma = \underline{\sigma} \circ \underline{\psi} = \bar{\sigma} \circ \bar{\psi}. \quad (2.11)$$

5. on note  $e^{\underline{F}}$  (resp.  $e^{\bar{F}}$ ) la paramétrisation de  $\mathcal{E}_+^\rho(\underline{F})$  (resp. de  $\mathcal{E}_+^\rho(\bar{F})$ ) obtenue comme décrit dans la [Section 2.3.1](#).

6. enfin, on note

$$\underline{e} = e^{\underline{F}} \circ \underline{\psi} \quad \text{et} \quad \bar{e} = e^{\bar{F}} \circ \bar{\psi}. \quad (2.12)$$

7. On choisit une paramétrisation de la forme (2.9), i.e. les courbes iso- $u$  sont des arcs de cercles caractéristiques dont les extrémités  $\underline{e}$  et  $\bar{e}$  sont respectivement atteintes en  $v = \underline{v}$  et  $v = \bar{v}$ . Le domaine paramétrique du carreau décrivant  $\widehat{\mathcal{E}}^\rho(E)$  est donc le rectangle  $\mathcal{U} = [\underline{u}, \bar{u}] \times [\underline{v}, \bar{v}]$ .

8. on propose alors une méthode pour construire une telle paramétrisation qui n'exploite pas directement la donnée de  $\rho$  et  $\rho_u$  mais plutôt celle de  $\underline{e}(u)$  et  $\bar{e}(u)$  (ce choix, qui sera motivé lors de la mise en œuvre numérique, garantit que  $e^E(u, \underline{v}) = \underline{e}(u)$  et  $e^E(u, \bar{v}) = \bar{e}(u)$ )

9. on note  $\mathbf{t} = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$  et  $\mu = -\frac{\rho \rho_u}{\|\gamma'\|}$ , on a alors  $\mathbf{o} = \gamma + \mu \mathbf{t}$

10. or  $\mu = (\underline{e} - \gamma)^\top \mathbf{t} = (\bar{e} - \gamma)^\top \mathbf{t}$

11. on a  $r = \|\underline{e} - \mathbf{o}\| = \|\bar{e} - \mathbf{o}\|$  (rayon du cercle caractéristique)

12. on note  $\underline{\mathbf{r}} = \frac{\underline{e} - \mathbf{o}}{\|\underline{e} - \mathbf{o}\|}$  et  $\bar{\mathbf{r}} = \frac{\bar{e} - \mathbf{o}}{\|\bar{e} - \mathbf{o}\|}$

13. on définit  $\underline{\mathbf{r}}^\perp = \underline{\mathbf{r}} \times \mathbf{t}$  (de telle sorte que  $(\underline{\mathbf{r}}, \underline{\mathbf{r}}^\perp, -\mathbf{t})$  forme un trièdre orthonormé direct)

14. on note  $\theta \in [0, 2\pi[$  l'angle entre les vecteurs  $\underline{\mathbf{r}}$  et  $\bar{\mathbf{r}}$  mesuré dans le sens direct autour de  $-\mathbf{t}$ , i.e.

$$\theta = \begin{cases} \vartheta + 2\pi & \text{si } \vartheta < 0, \\ \vartheta & \text{si } \vartheta \geq 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

où

$$\vartheta = \arctan \left( \frac{\bar{\mathbf{r}}^\top \underline{\mathbf{r}}^\perp}{\bar{\mathbf{r}}^\top \underline{\mathbf{r}}} \right). \quad (2.14)$$

15. Enfin, on choisit une paramétrisation naturelle pour l'arc de cercle caractéristique  $e^E(u, [\underline{v}, \bar{v}])$ , i.e.

$$\mathbf{r}(u, v) = \cos \left( \frac{v - \underline{v}}{\bar{v} - \underline{v}} \theta(u) \right) \underline{\mathbf{r}}(u) + \sin \left( \frac{v - \underline{v}}{\bar{v} - \underline{v}} \theta(u) \right) \underline{\mathbf{r}}^\perp(u). \quad (2.15)$$

De cette façon,  $\mathbf{r}$  vérifie bien les conditions (2.10) et on a bien  $\mathbf{r}(u, \underline{v}) = \underline{\mathbf{r}}(u)$  et  $\mathbf{r}(u, \bar{v}) = \bar{\mathbf{r}}(u)$  (donc  $e^E(u, \underline{v}) = \underline{e}(u)$  et  $e^E(u, \bar{v}) = \bar{e}(u)$ ).

16. *Remarque* : si une extrémité de E est un point régulier de  $\Sigma$  alors l'arc de cercle caractéristique en cette extrémité est réduit à un seul point et la paramétrisation  $e^E$  y est singulière  
→ un moyen d'y remédier serait d'utiliser un carreau restreint (i.e. les courbes  $\underline{e}$  et  $\bar{e}$  ne correspondent plus aux courbes  $v = \underline{v}$  et  $v = \bar{v}$ )

17. on ajoute au graphe des intersections tangentielles les courbes d'intersection suivantes :

- a) les carreaux  $\hat{\mathcal{E}}^\rho(E)$  et  $\mathcal{E}_+^\rho(F)$  s'intersectent le long de la courbe  $\underline{e}([\underline{u}, \bar{u}]) = e^E([\underline{u}, \bar{u}], \underline{v}) = (e^E \circ \underline{\psi})([\underline{u}, \bar{u}])$  ;
- b) les carreaux  $\hat{\mathcal{E}}^\rho(E)$  et  $\mathcal{E}_+^\rho(\bar{F})$  s'intersectent le long de la courbe  $\bar{e}([\underline{u}, \bar{u}]) = e^E([\underline{u}, \bar{u}], \bar{v}) = (e^E \circ \bar{\psi})([\underline{u}, \bar{u}])$  ;
- c) si les arêtes  $E_1$  et  $E_2$  partagent un sommet où elles ont la même direction tangente (i.e.  $E_1$  et  $E_2$  sont sur une même courbe singulière de  $\Sigma$ ) alors les carreaux  $\hat{\mathcal{E}}^\rho(E_1)$  et  $\hat{\mathcal{E}}^\rho(E_2)$  s'intersectent le long de l'arc caractéristique associé à leur sommet commun.

### 2.3.3 REPRÉSENTATION DE LA PSEUDO-EDS D'UN SOMMET BREP NON-CONCAVE

La pseudo-EdS  $\hat{\mathcal{E}}^\rho(V)$  d'un sommet convexe V ayant pour support géométrique le point  $v$  est la région de la sphère  $\mathcal{S}(v, \rho(v))$  qui est tangente à l'EdS de chacune des arêtes  $\{E_i\}_{i=0, \dots, m-1}$  incidentes à V. Cette région est le lieu des points  $x$  vérifiant

$$\begin{cases} \|x - v\| = \rho(v), \\ (x - \underline{o}_i)^\top \underline{\mathbf{t}}_i \leq 0 \quad (i = 0, \dots, m-1), \end{cases} \quad (2.16a)$$

$$(2.16b)$$

où  $\underline{o}_i$  désigne le centre du cercle caractéristique de l'arête incidente  $E_i$  en son extrémité correspondant à V et  $\underline{\mathbf{t}}_i$  la normale au plan contenant ce cercle, orientée vers l'intérieur de  $E_i$  (cf. Section 2.3.2.2).

$\hat{\mathcal{E}}^\rho(V)$  est donc l'intersection de  $\mathcal{S}(v, \rho(v))$  et de  $m$  demi-espaces délimités par les plans contenant les arcs de cercles caractéristiques des arêtes incidentes.

Si  $\nabla\rho(v) = \mathbf{0}$  alors  $\underline{o}_i = v$  pour  $i = 0, \dots, m-1$  donc ces arcs caractéristiques sont des arcs de grands cercles sur  $\mathcal{S}(v, \rho(v))$  et donc  $\hat{\mathcal{E}}^\rho(V)$  est un polygone sphérique. En revanche, dans le cas général ces plans ne passent pas par  $v$ .

On cherche à construire un ou plusieurs carreaux paramétriques (restreints ou non) décrivant  $\hat{\mathcal{E}}^\rho(v)$ .

On note respectivement  $\{E_i\}_{i=0, \dots, m-1}$  et  $\{F_i\}_{i=0, \dots, m-1}$  les arêtes et les faces incidentes à V, que l'on suppose ordonnées dans le sens direct autour de V, vu de l'extérieur de  $\Omega$  (voir Figure 2.7 gauche).

On note également  $\gamma^{E_i}$  (resp.  $\sigma^{F_i}$ ) une paramétrisation du support géométrique de  $E_i$  (resp. de  $F_i$ ) et  $e^{E_i}$  (resp.  $e^{F_i}$ ) celle de  $\widehat{\mathcal{E}}^\rho(E_i)$  (resp. de  $\mathcal{E}_+^\rho(F_i)$ ). Enfin, on note respectivement  $u_{E_i}$  et  $(u_{F_i}, v_{F_i})$  les coordonnées paramétriques du sommet  $V$  dans  $E_i$  et  $F_i$ , i.e.  $\gamma^{E_i}(u_{E_i}) = \sigma^{F_i}(u_{F_i}, v_{F_i}) = \mathbf{v}$ .

On propose deux approches, en en donnant le principe ainsi que les avantages et les inconvénients.

### 2.3.3.1 Ajustement de plusieurs carreaux non-restruits

Dans un premier temps, on suppose que  $\rho$  est uniforme sur  $\Sigma$ .

$\Rightarrow \widehat{\mathcal{E}}^\rho(\mathbf{v})$  est alors le polygone sphérique formé par les  $m$  points  $\mathbf{v} + \rho \mathbf{n}_i$ , où  $\mathbf{n}_i$  désigne la direction normale à la face  $F_i$  au point  $\mathbf{v}$

1. si  $m = 4$ , on représente ce polygone à l'aide d'un seul carreau sphérique
2. si  $m \neq 4$ , on « quadrangule » le polygone de la manière suivante
  - on note  $\mathbf{q} = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{n}_i}{\|\sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{n}_i\|}$  et  $\mathbf{m}_i = \frac{\mathbf{n}_i + \mathbf{n}_{i+}}{\|\mathbf{n}_i + \mathbf{n}_{i+}\|}$
  - on construit  $m$  carreaux sphériques  $\left\{ \widehat{\mathcal{E}}_i^\rho(V) \right\}_{i=1, \dots, m-1}$  dont les « pics » sont  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{m}_{i_-}$ ,  $\mathbf{n}_i$  et  $\mathbf{m}_i$  (voir Figure 2.7 droite)
  - avec  $i_+ := (i+1) \bmod m$  et  $i_- := (i-1) \bmod m$
3. dans les deux cas, les carreaux sphériques sont construits en projetant sur  $\mathcal{S}(\mathbf{v}, \rho)$  le carreau bilinéaire qui interpole ses pics

$$\begin{aligned} \ell_i(u, v) &= \frac{(\bar{u} - u)(\bar{v} - v)}{(\bar{u} - \underline{u})(\bar{v} - \underline{v})} \mathbf{q} \\ &\quad + \frac{(u - \underline{u})(\bar{v} - v)}{(\bar{u} - \underline{u})(\bar{v} - \underline{v})} \mathbf{m}_{i_-} \\ &\quad + \frac{(u - \underline{u})(v - \underline{v})}{(\bar{u} - \underline{u})(\bar{v} - \underline{v})} \mathbf{n}_i \\ &\quad + \frac{(\bar{u} - u)(v - \underline{v})}{(\bar{u} - \underline{u})(\bar{v} - \underline{v})} \mathbf{m}_i. \end{aligned} \tag{2.17}$$

et

$$e^{V_i} = \mathbf{v} + \rho \frac{\ell_i}{\|\ell_i\|}.$$

4. on ajoute au graphe des intersections tangentielles les courbes et points d'intersection suivants :

- a) les carreaux  $\widehat{\mathcal{E}}_i^\rho(V)$  et  $\mathcal{E}_+^\rho(F_i)$  s'intersectent au point  $\mathbf{v} + \rho \mathbf{n}_i = e^{V_i}(\bar{u}, \bar{v}) = e^{F_i}(u_{F_i}, v_{F_i})$  ;
- b) tous les carreaux  $\widehat{\mathcal{E}}_i^\rho(V)$  s'intersectent au point  $\mathbf{v} + \rho \mathbf{q} = e^{V_i}(\underline{u}, \underline{v})$  ;
- c) les carreaux  $\widehat{\mathcal{E}}_{i_-}^\rho(V)$  et  $\widehat{\mathcal{E}}_i^\rho(V)$  s'intersectent le long de la courbe

$$\Gamma_i = e^{V_{i_-}}(\underline{u}, [\underline{v}, \bar{v}]) = e^{V_i}([\underline{u}, \bar{u}], \underline{v}),$$

dont les extrémités sont les points  $\mathbf{v} + \rho \mathbf{q}$  et  $\mathbf{v} + \rho \mathbf{m}_{i_-} = e^{V_{i_-}}(\underline{u}, \bar{v}) = e^{V_i}(\bar{u}, \underline{v})$  ;

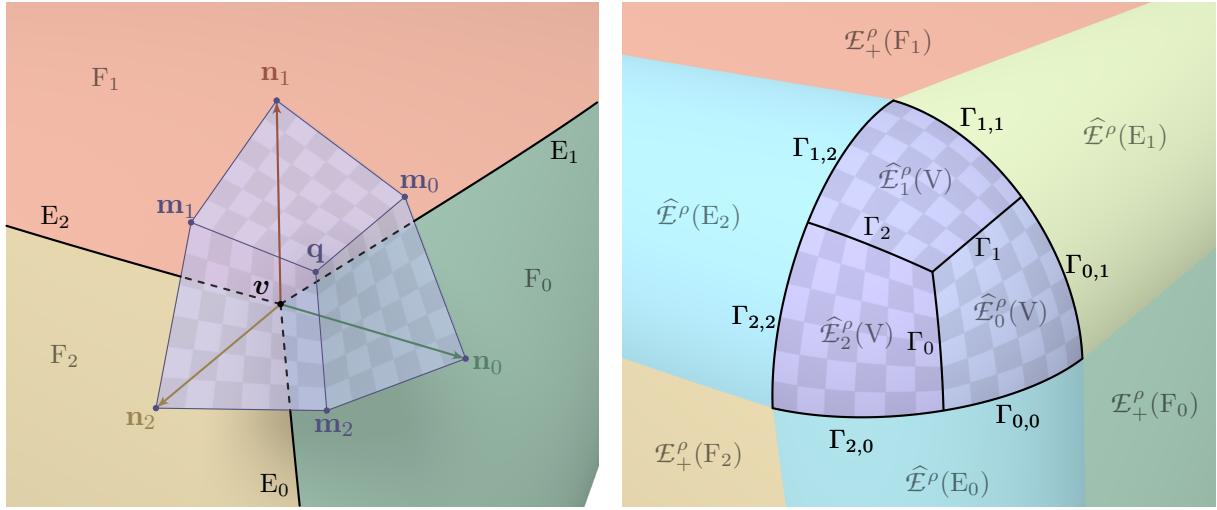


FIGURE 2.7 – Représentation de la pseudo-EdS d'un sommet à l'aide de plusieurs carreaux non-restreints.

d) les carreaux  $\widehat{\mathcal{E}}_i^\rho(V)$  et  $\widehat{\mathcal{E}}^\rho(E_i)$  s'intersectent le long de la courbe (demi-arc caractéristique limite)

$$\Gamma_{i,i} = e^{V_i}(\bar{u}, [\underline{v}, \bar{v}]) = \begin{cases} e^{E_i}(u_{E_i}, [\frac{\underline{v}+\bar{v}}{2}, \bar{v}]) & \text{si } u_{E_i} = \underline{v}, \\ e^{E_i}(u_{E_i}, [\underline{v}, \frac{\underline{v}+\bar{v}}{2}]) & \text{si } u_{E_i} = \bar{v}, \end{cases}$$

dont les extrémités sont les points  $v + \rho \mathbf{m}_i = e^{E_i}(u_{E_i}, \frac{\underline{v}+\bar{v}}{2})$  et

$$v + \rho \mathbf{n}_i = e^{V_i}(\bar{u}, \bar{v}) = \begin{cases} e^{E_i}(u_{E_i}, \bar{v}) & \text{si } u_{E_i} = \underline{v}, \\ e^{E_i}(u_{E_i}, \underline{v}) & \text{si } u_{E_i} = \bar{v}; \end{cases}$$

e) les carreaux  $\widehat{\mathcal{E}}_i^\rho(V)$  et  $\widehat{\mathcal{E}}^\rho(E_{i+})$  s'intersectent le long de la courbe (demi-arc caractéristique limite)

$$\Gamma_{i,i+} = e^{V_i}([\underline{u}, \bar{u}], \bar{v}) = \begin{cases} e^{E_{i+}}(u_{E_{i+}}, [\underline{v}, \frac{\underline{v}+\bar{v}}{2}]) & \text{si } u_{E_{i+}} = \underline{v}, \\ e^{E_{i+}}(u_{E_{i+}}, [\frac{\underline{v}+\bar{v}}{2}, \bar{v}]) & \text{si } u_{E_{i+}} = \bar{v}, \end{cases}$$

dont les extrémités sont les points  $v + \rho \mathbf{n}_i = e^{E_{i+}}(u_{E_{i+}}, u_{E_{i+}})$  et  $v + \rho \mathbf{m}_i = e^{E_{i+}}(u_{E_{i+}}, \frac{\underline{v}+\bar{v}}{2})$ .

avantages/inconvénients :

- valable seulement si la vitesse normale est uniforme
- génère plusieurs carreaux
- + utiliser des carreaux paramétriques non restreints présente plusieurs avantages :
  1. permet l'utilisation de quadratures simples (cf. [Section 3.1.2.5](#))
  2. simplifie les tests de sortie du domaine paramétrique (cf. partie optimisation de maillage trans-carreaux)

### 2.3.3.2 Ajustement d'un seul carreau restreint

On suppose maintenant que  $\rho$  peut varier continument sur  $\Sigma$ .

1. on cherche alors à construire le carreau paramétrique restreint  $\widehat{\mathcal{E}}^\rho(V) = (\mathcal{U}, e^V)$

- a) on trouve une paramétrisation  $e^V$  d'un carreau  $\Sigma_V := e^V([\underline{u}, \bar{u}] \times [\underline{v}, \bar{v}])$  vérifiant  $\widehat{\mathcal{E}}^\rho(V) \subset \Sigma_V$
- b) on détermine les courbes de restriction du domaine paramétrique  $\mathcal{U} \subset [\underline{u}, \bar{u}] \times [\underline{v}, \bar{v}]$  (i.e. la trace des arcs caractéristiques limites dans l'espace paramétrique de  $\Sigma_V$ )
2. on cherche une paramétrisation de la forme
- $$e^V = v + \rho(v)\mathbf{B}s,$$
- où
- a)  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3) \in \text{SO}(3)$  désigne une matrice de rotation ( $\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{1}$  et  $\det \mathbf{B} = 1$ )
- b)  $s = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda \\ \sin \theta \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix}$
- c)  $\theta(u, v) = \Theta u + \theta_0$  est la longitude
- d)  $\lambda(u, v) = \Lambda v + \lambda_0$  est la latitude
- e)  $\underline{u} = -1 \leq u \leq 1 = \bar{u}$
- f)  $\underline{v} = -1 \leq v \leq 1 = \bar{v}$

3. on veut éviter que  $\Sigma_V$  contienne les pôles  $\lambda = \pm \frac{\pi}{2}$  (i.e.  $s = \pm \mathbf{b}_3$ ), car la paramétrisation  $e^V$  y est singulière (en effet  $e_\theta^V(\theta, \pm \frac{\pi}{2}) = 0$ )

→ étendue en latitude  $\Lambda$  (relativement) minimale

4. on veut limiter le risque de "fausses intersections" avec les carreaux voisins lors de la construction de l'EdB

→ ratio des aires  $\frac{|\widehat{\mathcal{E}}^\rho(V)|}{|\Sigma_V|}$  (relativement) proche de 1 ( $|\Sigma_V| = 4\rho(v)^2\Theta \cos \lambda_0 \sin \Lambda$ )

5.

$$s = \frac{1}{\rho(v)} \mathbf{B}^T (e^V - v) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda \\ \sin \theta \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

donc

$$\theta = \arctan \left( \frac{\mathbf{b}_2^T (e^V - v)}{\mathbf{b}_1^T (e^V - v)} \right), \quad (2.19)$$

$$\lambda = \arcsin \left( \frac{\mathbf{b}_3^T (e^V - v)}{\rho(v)} \right). \quad (2.20)$$

6. choix de  $\mathbf{B}$ :

7. on note  $\mathbf{n}_i$  la direction normale à  $\mathcal{E}_+^\rho(F_i)$  au point  $e^{F_i}(u_{F_i}, v_{F_i})$
8. on choisit  $\mathbf{b}_1 = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{n}_i}{\|\sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{n}_i\|}$
9. on note  $\mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{\mathbf{b}_1^T \mathbf{n}_i}$  la projection centrale de  $\mathbf{n}_i$  sur le plan tangent à la sphère unité au point  $\mathbf{b}_1$
10. on détermine une base orthonormée  $(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$  de ce plan, adéquate vis-à-vis des points  $\{\mathbf{p}_i\}_{i=0, \dots, m-1}$

- rectangle englobant d'aire minimale
- ellipse de covariance

→ on obtient la matrice  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix}$

11. on calcule les extrema en longitude et latitude atteints sur les arcs caractéristiques

a) cf. notes "Huygens" ...

12. on prend  $\theta_0 = \frac{\theta+\bar{\theta}}{2}$ ,  $\lambda_0 = \frac{\lambda+\bar{\lambda}}{2}$ ,  $\Theta = (1+\epsilon)\frac{\bar{\theta}-\theta}{2}$  et  $\Lambda = (1+\epsilon)\frac{\bar{\lambda}-\lambda}{2}$ , où  $\epsilon \geq 0$  est un paramètre de marge

13. on ajoute au graphe des intersections tangentielles les courbes d'intersection suivantes :

a) les carreaux  $\widehat{\mathcal{E}}^\rho(V)$  et  $\mathcal{E}_+^\rho(F_i)$  s'intersectent au point  $e^{F_i}(u_{F_i}, v_{F_i})$  ;

b) les carreaux  $\widehat{\mathcal{E}}^\rho(V)$  et  $\widehat{\mathcal{E}}^\rho(E_i)$  s'intersectent le long de la courbe (arc caractéristique limite)  $e^{E_i}(u_{E_i}, [\underline{v}, \bar{v}])$ .

c) Pour obtenir les coordonnées de ces points et courbes d'intersection dans l'espace paramétrique du carreau  $\widehat{\mathcal{E}}^\rho(V)$ ,

- on en calcule les coordonnées sphériques

$$\theta = \arctan \left( \frac{\mathbf{b}_2^\top(\mathbf{x} - \mathbf{v})}{\mathbf{b}_1^\top(\mathbf{x} - \mathbf{v})} \right), \quad (2.21)$$

$$\lambda = \arcsin \left( \frac{\mathbf{b}_3^\top(\mathbf{x} - \mathbf{v})}{\rho(\mathbf{v})} \right), \quad (2.22)$$

- on a alors

$$u = \frac{\theta - \theta_0}{\Theta}, \quad (2.23)$$

$$v = \frac{\lambda - \lambda_0}{\Lambda}. \quad (2.24)$$

avantages/inconvénients :

- le nouveau carreau est restreint
- + valable également si la vitesse normale varie spatialement
- + génère un seul nouveau carreau de surface

## 2.4 CONSTRUCTION D'UN MODÈLE BREP DE L'EDB

1. les régions de l'EdS partielle qui sont exclues de l'EdB sont délimitées par les courbes d'intersections entre les carreaux restreints (argument à introduire plus tôt...)

*Preuve.* cf. notes "Huygens" (→ définition implicite de l'EdB) ■

2. pour obtenir un modèle BRep valide de l'EdB, il faut

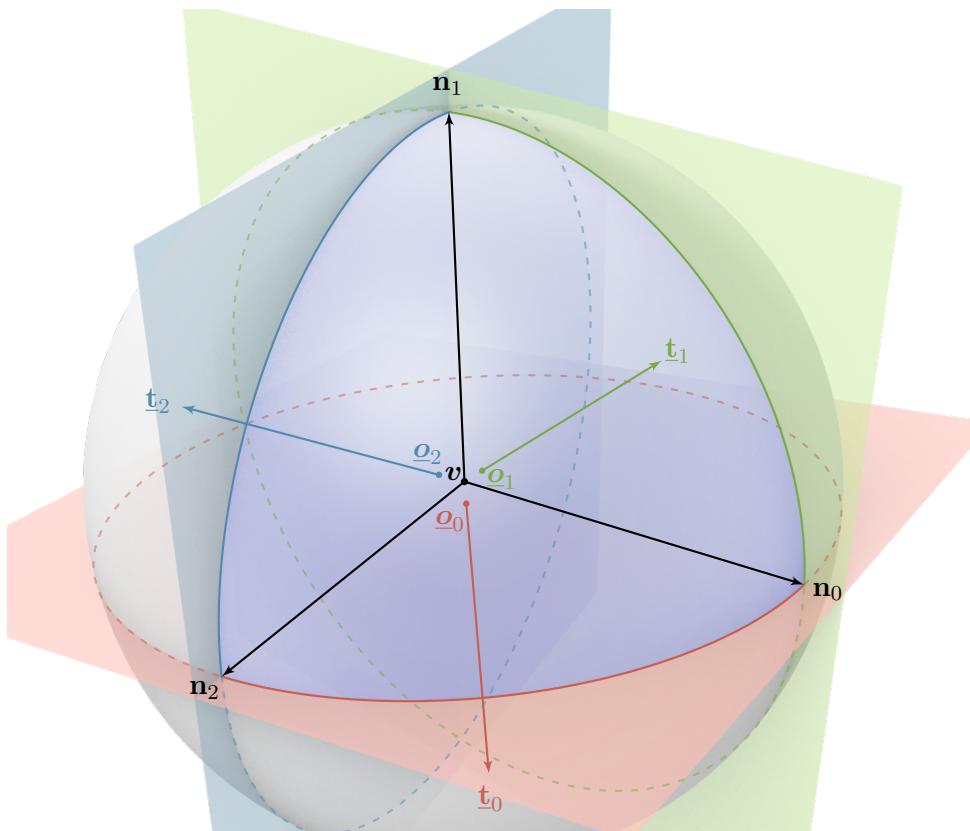


FIGURE 2.8 – Représentation de la pseudo-EdS d'un sommet à l'aide d'un seul carreau restreint.

- délimiter les faces, i.e. éliminer les régions des carreaux qui sont exclues de l'EdB (i.e. toute région  $G$  pour laquelle il existe une région (e.g. un ou plusieurs carreaux restreints)  $H$  telle que  $\forall \mathbf{x} \in G, \varphi_H(\mathbf{x}) < 0$ ). Chacune de ces faces doit vérifier les critères donnés dans la [Section 1.2.1.1](#) :
  - a) délimitée par exactement un contour extérieur ( $\rightarrow$  connexe, donc un carreau peut donner plusieurs faces) et éventuellement par un ou plusieurs contours intérieurs  $\Rightarrow$  former contours et distinguer extérieur/intérieur
- matérialiser les courbes d'intersection par des arêtes vérifiant les critères donnés dans la [Section 1.2.1.2](#) :
  - a) quasi-disjointes deux-à-deux  $\Rightarrow$  scinder les courbes d'intersection en segments quasi-disjoints
  - b) a pour extrémités deux sommets distincts  $\Rightarrow$
  - c) décomposer chaque arête en une paire de co-arêtes jumelles à chacune desquelles on associe
    - la face incidente
    - le sommet origine
    - la co-arête précédente (sur un contour)
    - la co-arête suivante (sur un contour)
- matérialiser les points d'intersection par des sommets vérifiant les critères donnés dans la [Section 1.2.1.3](#)

#### 2.4.1 CONSTRUCTION DU GRAPHE DES INTERSECTIONS

1. tous les points et courbes d'intersection tangentielle entre les carreaux de l'EdS partielle sont connus (cf. [Section 2.3](#)) (!!! en fait, seulement les intersections de "bord", il peut éventuellement y avoir des contacts tangentiels "intérieurs" → configurations *non-manifold*)
2. (l'EdB ne peut contenir aucune courbe singulière convexe)
3. il reste à trouver les points et courbes d'intersection transverse concave entre les carreaux de l'EdS partielle
4. on complète ainsi le graphe des intersections, qui donne la topologie de l'agencement des carreaux (relations d'adjacences)
5. (le choix de la méthode de calcul des intersections est étroitement lié au type de paramétrisation choisi pour les carreaux de surface ⇒ détails d'implémentation donnés au chapitre [Chapitre 3](#))
6. principe : pour chaque paire de carreaux  $\{(\mathcal{U}_i, e_i), (\mathcal{U}_j, e_j)\}$  de l'EdS partielle,
  - a) trouver toutes les branches  $B_k^{i,j}$  de l'intersection des carreaux non-restrints, i.e.  $e_i(\overline{\mathcal{U}}) \cap e_j(\overline{\mathcal{U}}) = \cup_k B_k^{i,j}$   
Remarque : la courbe d'intersection entre deux carreaux non-restrints est composée de branches
    - i. *ouvertes*, dont chacune des deux extrémités est située sur le bord d'au moins un des deux carreaux ;
    - ii. *fermées*, qui n'intersectent le bord daucun des deux carreaux.
 On suppose (sans restreindre la généralité) que toutes les branches sont ouvertes, i.e. chaque branche fermée est découpée en au moins deux branches ouvertes. (On verra au chapitre suivant qu'on peut toujours se ramener à ce cas.)
  - b) pour chaque branche  $B_k^{i,j}$ ,
    - i. pour chaque carreau  $k = i$  ou  $j$ , trouver les éventuels points d'intersection entre  $B_k^{i,j}$  et les courbes  $\Gamma_\ell^k \subset e_k(\partial\mathcal{U}_k)$  qui correspondent à des intersections *tangentialles* entre  $(\mathcal{U}_k, e_k)$  et un carreau tiers. Ces points sont ainsi situés à l'intersection d'au moins 3 carreaux (dont  $i$  et  $j$ ).
    - ii. scinder  $B_k^{i,j}$  en segments séparés par ces points (initialement,  $B_k^{i,j}$  est composée d'un seul segment puisque  $B_k^{i,j}$  possède exactement deux extrémités distinctes, qui ne représentent pas nécessairement des points d'intersection)  $B_k^{i,j}$  étant orientée<sup>3</sup>, on peut déterminer
    - iii. déterminer pour chacun de ces segments
    - iv. ne considérer que les segments de  $B_k^{i,j}$  étant contenus à la fois dans  $e_i(\mathcal{U}_i)$  et  $e_j(\mathcal{U}_j)$

1. Pour chaque carreau, on peut extraire le sous-graphe

- dont les arcs sont des segments (quasi-disjoints) de courbes d'intersection entre ce carreau et chaque autre carreau adjacent
- dont les noeuds sont les extrémités de ces segments (points d'intersection entre plusieurs courbes)

---

<sup>3</sup>intersection transverse concave,

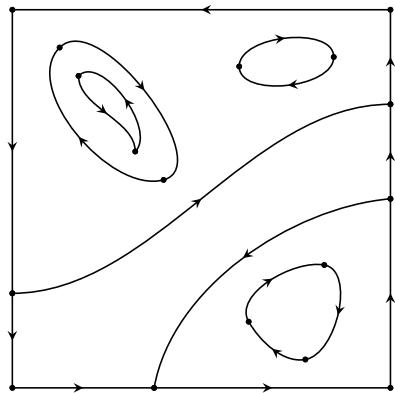


FIGURE 2.9 – Plongement du sous-graphe des intersections associé à un carreau de surface.

2. on peut orienter ces segments de telle sorte que les régions localement à droite de chacun d'eux soient nécessairement exclues de l'EdB
  - a) ambigu pour les intersections tangentielles, mais celles-ci décrivent nécessairement des portions du bord du domaine paramétrique et sont déjà orientées de façon adéquate
  - b) les nouvelles intersections calculées ne peuvent pas correspondre à des courbes singulières convexes de l'EdB, donc l'orientation correcte de ces courbes est obtenue aisément (cf. notes "Huygens", paragraphe "Intersection des EdS propres")
3. on obtient donc un graphe planaire orienté dont un plongement dans  $\mathbb{R}^2$  est donné par la trace des courbes d'intersections dans l'espace paramétrique du carreau (exemple donné sur la Figure 2.9).

#### 2.4.2 CONSTRUCTION DES FACES, ARÈTES ET SOMMETS BREP

pour chaque carreau : extraction des cycles du graphe d'intersection, caractérisations des contours (extérieurs/intérieurs), détermination des faces → insertion des contours dans la BRep → insertion des (co-)arêtes et sommets

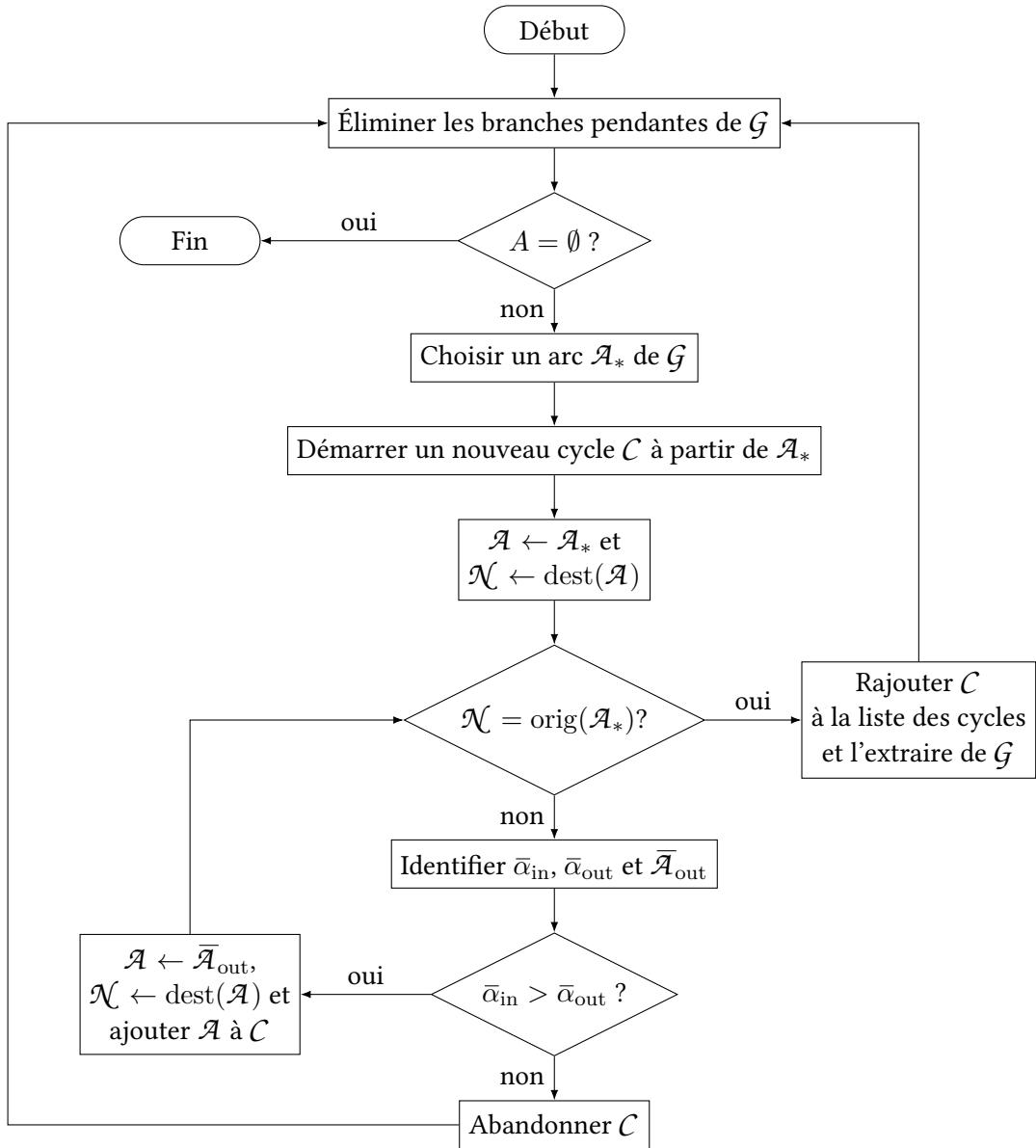
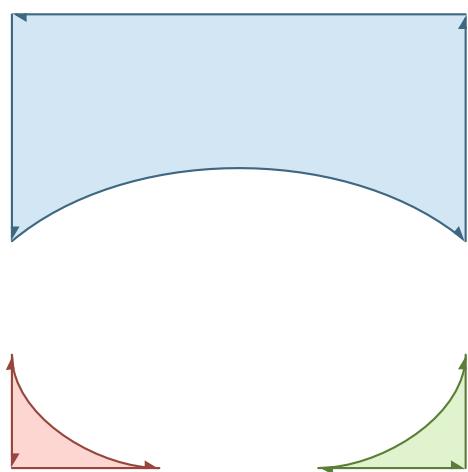


FIGURE 2.10 – Organigramme de l'algorithme d'extraction des cycles d'un graphe orienté plongé dans  $\mathbb{R}^2$ .

FIGURE 2.11 – *Faces du graphe*



# MISE EN ŒUVRE NUMÉRIQUE DE L'ALGORITHME DE PROPAGATION | 3

Dans ce chapitre, on propose une mise en œuvre numérique de l'algorithme présenté au chapitre précédent.

1. choix de la discréttisation spatiale
  - représentation des carreaux de surface
  - représentation (et calcul) des courbes d'intersection entre carreaux
2. intégration temporelle
  - intégration explicite du champ de vitesse
  - construction géométrique discrète de l'EdB suivant une méthode pseudo-spectrale (exacte aux points de collocation + interpolation)
3. considérations sur la stabilité numérique

## 3.1 REPRÉSENTATION DES CARREAUX DE SURFACE

### 3.1.1 ÉTAT DE L'ART

1. harmoniques sphériques [8]
2. polynômes trigonométriques [9]
  - ⇒ limitations géométriques (régularité globale) et topologique (périodicité)
3. modèle BRep permet une plus grande flexibilité
4. polynômes algébriques (en produit tensoriel) adaptés aux carreaux de surface
5. CAO : Bezier, NURBS → base des polynômes de Bernstein
  - $B_n^N(x) = \binom{N}{n} (1-x)^{N-n} x^n$  pour  $0 \leq n \leq N$ .
  - positivité : pour  $0 \leq x \leq 1$ ,  $B_n^N(x) \geq 0$
  - partition de l'unité :  $\sum_{n=0}^N B_n^N = 1$
  - ⇒ propriétés intéressantes pour la conception géométrique
    - coefficients = points de contrôle
    - l'enveloppe convexe des points de contrôle englobe la courbe/surface de Bézier
  - inconvénients :
    - points de contrôle pas *sur* la courbe/surface ⇒ pas exploitables comme marqueurs lagrangiens
    - algorithme d'évaluation (de Casteljau) numériquement stable mais coûteux  $O(N^2)$
6. motivation le choix des polynômes de Chebyshev

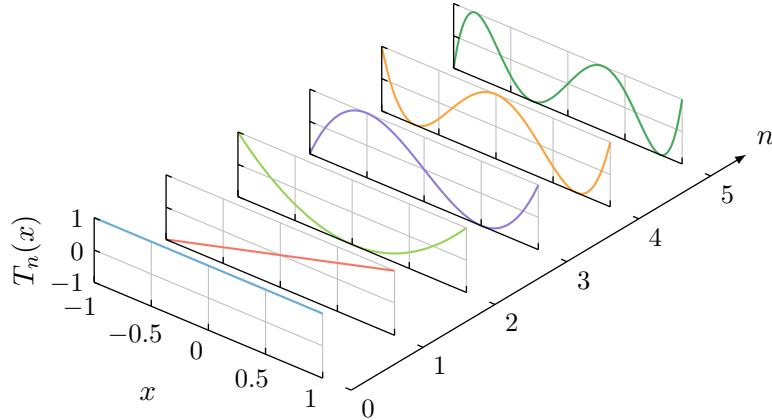


FIGURE 3.1 – Graphe des six premiers polynômes de Chebyshev.

### 3.1.2 POLYNÔMES DE CHEBYSHEV UNIVARIÉS

Les polynômes de Chebyshev sont très largement utilisés dans de nombreux domaines tels que l’analyse numérique. L’objet des sections suivantes est de rappeler la définition de cette famille de polynômes et d’en présenter brièvement les propriétés remarquables qui seront exploitées dans cette thèse. Nombreux sont les ouvrages consacrés aux polynômes de Chebyshev [10, 11] ainsi qu’à leur usage dans les méthodes spectrales [12, 13], aussi le lecteur est invité à s’y référer pour plus de détails.

#### 3.1.2.1 Définition et principales propriétés

**DÉFINITION 3.1** — Pour  $n \in \mathbb{N}$ , le polynôme de Chebyshev (de première espèce)  $T_n$  est défini par

$$T_n(\cos \theta) = n \cos \theta. \quad (3.1)$$

De cette définition et de l’identité trigonométrique  $\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2 \cos \theta \cos(n-1)\theta$ , on peut déduire la relation de récurrence suivante, pour  $-1 \leq x \leq 1$ ,

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x, \\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \text{ pour } n \geq 2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Le graphe des six premiers polynômes de Chebyshev est tracé sur la Figure 3.1.

$T_n$  est un polynôme de degré  $n$  qui atteint ses extrema locaux sur  $[-1, 1]$  aux  $n + 1$  noeuds de Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL)

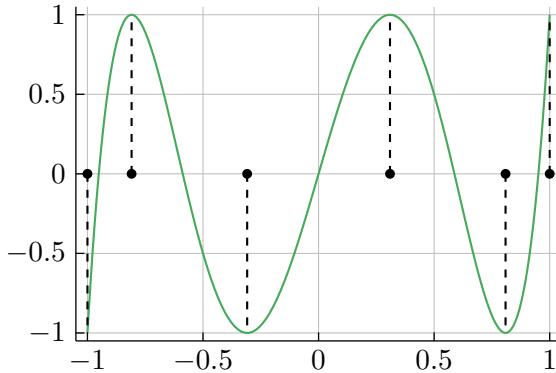
$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad (3.3)$$

pour  $0 \leq k \leq n$ . Seuls les  $n - 1$  noeuds intérieurs sont réellement des extrema au sens où la dérivée s’y annule. À noter également que ces noeuds sont rangés en ordre décroissant.

Comme illustré sur la Figure 3.2, ces extrema sont alternativement des maxima puis des minima, tous égaux en valeur absolue

$$T_n(x_k) = (-1)^k. \quad (3.4)$$

Cette propriété d’équioscillation a pour conséquence le théorème suivant.

FIGURE 3.2 – Nœuds de Chebyshev-Gauss-Lobatto (extrema locaux) du polynôme  $T_5$ .

**THÉORÈME 3.1** — Le polynôme de degré  $N - 1$  qui donne la meilleure approximation uniforme (i.e. en norme  $L_\infty$ ) du polynôme  $q = \sum_{n=0}^N a_n X^n$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$  est

$$p_{N-1} = q - 2^{1-N} a_N T_N, \quad (3.5)$$

et, pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,

$$|q(x) - p_{N-1}(x)| \leq 2^{1-N} |a_N|, \quad (3.6)$$

l'égalité étant atteinte aux  $N + 1$  nœuds CGL de  $T_N$ .

Ce théorème trouve une application immédiate dans l'économisation des séries (à développer...).

### 3.1.2.2 Approximation de fonctions

Notons  $L^2[-1, 1]$  l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur  $[-1, 1]$ , muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (3.7)$$

La famille des polynômes de Chebyshev est une base orthogonale et maximale de cet espace, et pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$ ,

$$\langle T_m, T_n \rangle = \frac{\pi}{2} \alpha_n \delta_{m,n}, \quad (3.8)$$

où  $\delta_{\cdot, \cdot}$  représente le symbole de Kronecker, et

$$\alpha_n = 1 + \delta_{0,n}. \quad (3.9)$$

Toute fonction  $f \in L^2[-1, 1]$  peut alors être représentée par sa série de Chebyshev

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n T_n, \quad (3.10)$$

dont les coefficients  $\hat{f}_n$  sont obtenus en prenant le produit scalaire

$$\begin{aligned} \hat{f}_n &= \frac{\langle f, T_n \rangle}{\langle T_n, T_n \rangle}, \\ &= \frac{2}{\pi \alpha_n} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La somme partielle

$$P_N f = \sum_{n=0}^N \hat{f}_n T_n \quad (3.12)$$

est le projeté orthogonal de  $f$  sur le sous-espace  $\Pi_N$  de  $L^2[-1, 1]$  des polynômes de degré au plus  $N$ . Il s'agit donc de l'élément de  $\Pi_N$  le plus proche de  $f$ , au sens de la norme induite par le produit scalaire (3.7).

La somme partielle  $P_N f$  est également proche de la meilleure approximation uniforme de  $f$  par un polynôme de degré  $N$ . En effet, si  $f$  est continue sur  $[-1, 1]$ , alors

$$\|f - P_N f\|_\infty \leq (1 + \lambda_N) \min_{p \in \Pi_N} \|f - p\|_\infty, \quad (3.13)$$

où la constante de Lebesgue  $\lambda_N = 1.27 \dots + \frac{4}{\pi^2} \log N + O(N^{-1})$  croît lentement avec  $N$  ( $\lambda_{500} \approx 3.8$ ).

Dans le contexte particulier de la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles, on s'intéresse à l'approximation de fonctions qui possèdent des dérivées continues. Pour de telles fonctions, les séries de Chebyshev convergent très rapidement. En effet, à l'aide d'une intégration par parties répétée, on peut montrer que la relation (3.11) implique le théorème suivant.

**THÉORÈME 3.2** — Si  $f$  est  $p - 1$  fois dérivable presque partout sur  $[-1, 1]$  et si  $f^{(p-1)}$  est de variation bornée sur  $[-1, 1]$ , alors

$$\hat{f}_n = O(n^{-p}). \quad (3.14)$$

En particulier, si  $f \in C^\infty[-1, 1]$  alors la suite des coefficients  $\hat{f}_n$  décroît plus rapidement que n'importe quelle puissance négative de  $n$ .

En outre, si  $f$  admet une extension analytique dans une région du plan complexe contenant le segment  $[-1, 1]$ , alors il existe  $r > 1$  tel que

$$\hat{f}_n = O(r^{-n}). \quad (3.15)$$

Puisque  $|T_n| \leq 1$  sur  $[-1, 1]$  pour tout entier  $n$ , il s'ensuit que l'erreur de troncature est bornée par la somme des valeurs absolues des coefficients négligés

$$\|f - P_N f\|_\infty \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |\hat{f}_n|. \quad (3.16)$$

Or, si les coefficients  $\hat{f}_n$  convergent avec une rapidité algébrique de la forme (3.14), alors

$$\|f - P_N f\|_\infty = O(N^{1-p}) = O(N |\hat{f}_N|). \quad (3.17)$$

Si, en revanche, la convergence est géométrique (i.e. de la forme (3.15)), alors

$$\|f - P_N f\|_\infty = O(r^{-N}) = O(|\hat{f}_N|). \quad (3.18)$$

Les règles empiriques (3.17) et (3.18) permettent d'estimer efficacement l'erreur de troncature qui, en pratique, est inconnue. (développer...)

*Motivation pour interpolation...*

Les polynômes de Chebyshev satisfont une seconde relation d'orthogonalité, dite « discrète », pour  $0 \leq n \leq N$  et  $m \geq n$ ,

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{\beta_k} T_m(x_k) T_n(x_k) = \frac{N}{2} \beta_n \delta_{m, \pm n \bmod 2N}, \quad (3.19)$$

où  $\{x_k\}_{k=0,\dots,N}$  sont les nœuds CGL de  $T_N$  définis par l'équation (3.3) et

$$\beta_n = 1 + \delta_{0,n} + \delta_{N,n}. \quad (3.20)$$

Soit  $I_N f$  l'unique polynôme de  $\Pi_N$  qui interpole  $f$  aux  $N + 1$  nœuds CGL de  $T_N$

$$I_N f(x_k) = f(x_k). \quad (3.21)$$

Ce polynôme peut s'exprimer dans la base de Chebyshev

$$I_N f = \sum_{n=0}^N \tilde{f}_n T_n. \quad (3.22)$$

En utilisant les relations (3.22), (3.21) et (3.19), on peut alors déduire les coefficients  $\tilde{f}_n$  à partir des valeurs de  $f$  en ces nœuds

$$\tilde{f}_n = \frac{2}{\beta_n N} \sum_{k=0}^N \frac{1}{\beta_k} f(x_k) \cos \frac{nk\pi}{N}. \quad (3.23)$$

L'équation (3.23) définit ainsi une transformation discrète [de l'espace « physique » vers l'espace « spectral »]<sup>1</sup>. Par ailleurs, des relations (3.21), (3.22) et (3.1), on peut déduire la transformation inverse

$$f(x_k) = \sum_{n=0}^N \tilde{f}_n \cos \frac{nk\pi}{N}. \quad (3.24)$$

Les équations (3.23) et (3.24) décrivent des transformations en cosinus discrètes (DCT), qui peuvent être effectuées efficacement à l'aide d'un algorithme de transformation de Fourier rapide (FFT) pour un coût asymptotique de  $O(N \log N)$  opérations.

Les coefficients  $\tilde{f}_n$  peuvent être reliés aux coefficients  $\hat{f}_n$  par la relation

$$\tilde{f}_n = \hat{f}_n + \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \hat{f}_{2jN+n} & \text{si } n = 0 \text{ ou } N, \\ \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{f}_{2jN-n} + \hat{f}_{2jN+n}) & \text{si } 0 < n < N. \end{cases} \quad (3.25)$$

Cette relation met en évidence le phénomène d'*aliasing*, qui traduit le fait que les polynômes  $T_n$  et  $T_{\pm n \bmod 2N}$  prennent les mêmes valeurs aux nœuds  $\{x_k\}_{k=0,\dots,N}$ , comme illustré sur la Figure 3.3. La différence entre le polynôme d'interpolation  $I_N f$  et la somme partielle  $P_N f$  est l'*erreur d'aliasing*, qui est orthogonale à l'erreur de troncature<sup>2</sup>

$$\|f - I_N f\|^2 = \|f - P_N f\|^2 + \|I_N f - P_N f\|^2. \quad (3.26)$$

L'erreur d'approximation due à l'interpolation est donc toujours supérieure à l'erreur liée à la troncature de la série de Chebyshev. Si  $f$  est régulière, la suite des coefficients  $\hat{f}_n$  converge rapidement vers zéro, si bien que l'erreur d'aliasing reste faible, à condition que le degré de troncature  $N$  soit choisi suffisamment grand. En outre, de la relation (3.25) on déduit que pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,

$$|f(x) - I_N f(x)| \leq 2 \sum_{n>N} |\hat{f}_n|. \quad (3.27)$$

L'erreur d'approximation due à l'interpolation est donc *au pire* supérieure à l'erreur de troncature par un facteur 2. L'erreur d'aliasing peut cependant devenir problématique lorsqu'elle est amplifiée par les non-linéarités présentes dans les équations que l'on sera amené à résoudre. Nous reviendrons sur ce point dans la Section 3.4 lorsque nous aborderons ...

<sup>1</sup>reformuler!

<sup>2</sup> $\|\cdot\|$  désigne ici la norme induite par le produit scalaire (3.7).

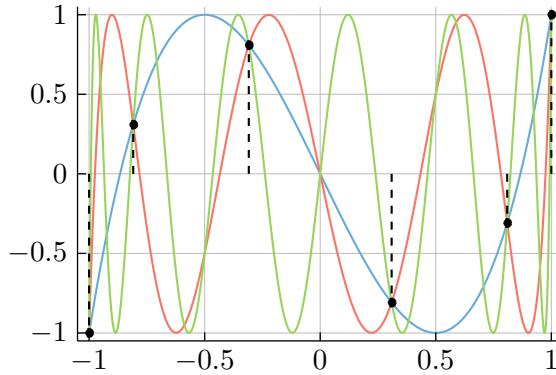


FIGURE 3.3 – Les polynômes  $T_n$  (—),  $T_{2N-n}$  (—) et  $T_{2N+n}$  (—) sont indiscernables aux nœuds CGL de  $T_N$  (ici,  $n = 3$  et  $N = 5$ ).

### 3.1.2.3 Évaluation d'une somme partielle

Par la suite, nous serons amenés à évaluer à maintes reprises des sommes de la forme

$$s_N = \sum_{n=0}^N \hat{s}_n T_n \quad (3.28)$$

en des points autres que les nœuds CGL. Plutôt que de réécrire cette somme dans la base canonique de  $\Pi_N$ , il est intéressant de tirer parti de la relation (3.2). En introduisant la suite récurrente

$$b_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > N, \\ \hat{s}_n - b_{n+2}(x) + 2xb_{n+1}(x) & \text{si } 0 \leq n \leq N, \end{cases} \quad (3.29)$$

on obtient, pour  $-1 \leq x \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} s_N &= \hat{s}_0 T_0 + \hat{s}_1 T_1 + \dots + \hat{s}_{N-2} T_{N-2} + \hat{s}_{N-1} T_{N-1} + \hat{s}_N T_N, \\ &= \hat{s}_0 T_0 + \hat{s}_1 T_1 + \dots + (\hat{s}_{N-2} - b_N) T_{N-2} + (\hat{s}_{N-1} - b_{N+1} + 2xb_N) T_{N-1}, \\ &= \hat{s}_0 T_0 + \hat{s}_1 T_1 + \dots + (\hat{s}_{N-3} - b_{N-1}) T_{N-3} + b_{N-2} T_{N-2}, \\ &\dots \\ &= (\hat{s}_0 - b_2) T_0 + b_1 T_1, \\ &= \hat{s}_0 - b_2 + b_1 x, \end{aligned}$$

et enfin

$$s_N(x) = b_0(x) - xb_1(x). \quad (3.30)$$

L'exécution de cet algorithme de sommation — proposé par Clenshaw [14] — requiert seulement  $O(N)$  opérations. La sommation de Clenshaw est donc un moyen efficace et numériquement stable pour évaluer des séries de Chebyshev.

### 3.1.2.4 Déivation

(versions matricielle (espace physique) et récursive (espace spectral)  
quadrature de Clenshaw-Curtis)

En posant  $x = \cos \theta$ , il vient, d'après (3.1),

$$T'_n(x) := \frac{d}{dx} T_n(x) = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta}. \quad (3.31)$$

Ainsi, de l'identité  $2 \cos n\theta \sin \theta = \sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta$ , on peut déduire la relation

$$2T_n = \frac{T'_{n+1}}{n+1} - \frac{T'_{n-1}}{n-1}, \quad (3.32)$$

pour  $n \geq 2$ .

Soit  $f \in C^k [-1, 1]$ . On approche la dérivée  $k$ -ième  $f^{(k)}$  de  $f$  par la dérivée  $k$ -ième du polynôme d'interpolation  $I_N f$

$$D_N^{(k)} f := (I_N f)^{(k)}. \quad (3.33)$$

En général, les opérations de dérivation et d'interpolation ne commutent pas, i.e.

$$D_N^{(k)} f \neq I_N(f^{(k)}). \quad (3.34)$$

Les valeurs aux noeuds CGL de cette dérivée peuvent être exprimées comme une combinaison linéaire des valeurs de  $f$  en ces mêmes noeuds

$$\begin{pmatrix} D_N^{(k)} f(x_0) \\ \vdots \\ D_N^{(k)} f(x_N) \end{pmatrix} = (\mathbf{D}_N)^k \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

où  $\mathbf{D}_N$  est la matrice de différentiation [13]

$$(\mathbf{D}_N)_{i,j} = \begin{cases} \frac{2N^2 + 1}{6} & \text{si } i = j = 0, \\ -\frac{2N^2 + 1}{6} & \text{si } i = j = N, \\ -\frac{x_i}{2 \sin^2 \frac{i\pi}{N}} & \text{si } 0 < i = j < N, \\ -\frac{(-1)^{i+j} \beta_i}{2\beta_j \sin \frac{(i+j)\pi}{2N} \sin \frac{(i-j)\pi}{2N}} & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (3.36)$$

Alternativement, il est intéressant de construire explicitement le polynôme dérivé  $D_N^{(k)} f$  comme une somme de la forme

$$D_N^{(k)} f = \sum_{n=0}^{N-k} \tilde{f}_n^{(k)} T_n. \quad (3.37)$$

*Développer motivation...*

La relation (3.32) implique que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$2(n+1) \tilde{f}_{n+1} = \alpha_n \tilde{f}_n^{(1)} - \tilde{f}_{n+2}^{(1)}. \quad (3.38)$$

Les coefficients  $\tilde{f}_n^{(1)}$  peuvent ainsi être calculés suivant la relation de récurrence

$$\tilde{f}_n^{(1)} = \frac{1}{\alpha_n} (2(n+1) \tilde{f}_{n+1} + \tilde{f}_{n+2}^{(1)}). \quad (3.39)$$

Plus généralement, les coefficients de Chebyshev de la dérivée  $k$ -ième vérifient

$$\tilde{f}_n^{(k)} = \frac{1}{\alpha_n} (2(n+1) \tilde{f}_{n+1}^{(k-1)} + \tilde{f}_{n+2}^{(k)}). \quad (3.40)$$

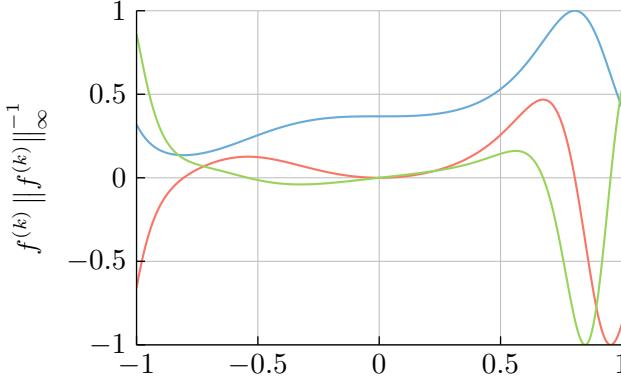


FIGURE 3.4 – Graphes de la fonction  $f : x \mapsto e^{\sin 3x^3}$  et ses dérivées  $f^{(k)}$  ( $k = 0$ (—),  $1$ (—),  $2$ (—)).

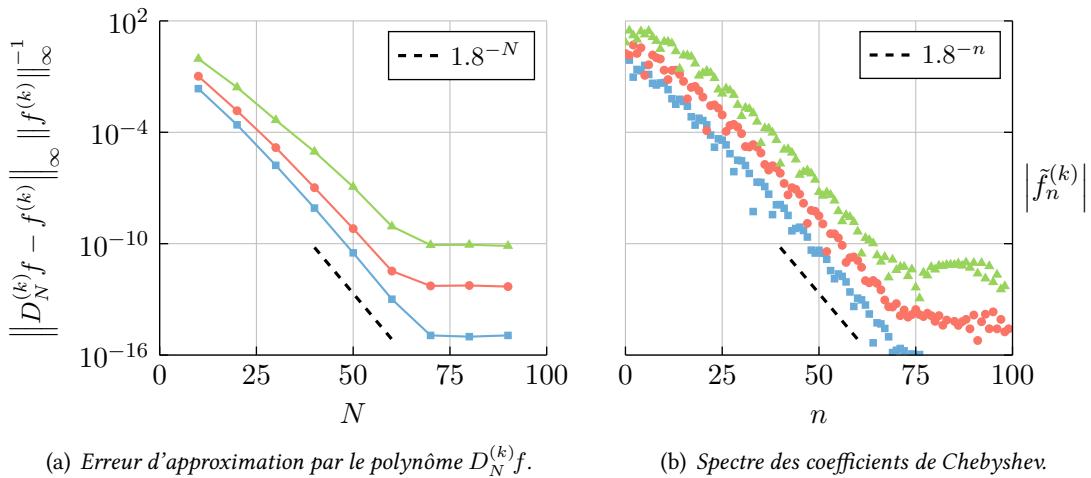


FIGURE 3.5 – Décroissance exponentielle de l'erreur d'approximation et des coefficients de Chebyshev pour la fonction analytique  $f : x \mapsto e^{\sin 3x^3}$  et ses dérivées  $f^{(k)}$  ( $k = 0$ (■),  $1$ (●),  $2$ (▲)).

Cette méthode + FFT permet d'évaluer les dérivées aux nœuds CGL pour  $O(N + N \log N) = O(N \log N)$ , qui est asymptotiquement (au-delà de  $N \approx 16$ ) plus efficace que le produit matrice-vecteur (3.35) ( $O(N^2)$ ).

Toutefois, comme l'ont fait remarquer Wengle et Seinfeld [15], l'algorithme récursif (3.40) peut amplifier les erreurs d'arrondi commises sur les plus petits coefficients  $\hat{f}_n^{(k-1)}$  et ainsi compromettre la précision de *tous* les coefficients  $\hat{f}_n^{(k)}$ . Un moyen simple de remédier à ce problème consiste à mettre à zéro les coefficients  $\hat{f}_n^{(k-1)}$  inférieurs en valeur absolue à un seuil donné, choisi en fonction de la précision machine  $\epsilon_M$ . (Un seuil égal à  $10\epsilon_M$  semble être un bon choix (*détailler...*)).

[Illustration de la qualité de l'approximation d'une fonction analytique (et ses dérivées) par le polynôme d'interpolation (et ses dérivées) (voir Figure 3.4 et Figure 3.5)]

### 3.1.2.5 Intégration

La primitive de  $I_N f$  qui s'annule en  $-1$

$$D_N^{(-1)} f := x \mapsto \int_{-1}^x I_N f(t) dt \quad (3.41)$$

est un polynôme de degré  $N + 1$

$$D_N^{(-1)} f = \sum_{n=0}^{N+1} \tilde{f}_n^{(-1)} T_n. \quad (3.42)$$

(3.38) implique

$$\tilde{f}_n^{(-1)} = \frac{\alpha_n \tilde{f}_{n-1} - \tilde{f}_{n+1}}{2n}, \quad (3.43)$$

pour  $n \geq 1$  et, puisque  $D_N^{(-1)} f(-1) = 0$ , on a

$$\tilde{f}_0^{(-1)} = - \sum_{n=1}^{N+1} (-1)^n \tilde{f}_n^{(-1)}. \quad (3.44)$$

$$\int_{-1}^x f(t) dt \approx D_N^{(-1)} f(x). \quad (3.45)$$

En particulier,

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx D_N^{(-1)} f(1) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^N \frac{2\tilde{f}_n}{1-n^2}, \quad (3.46)$$

et

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) dx - D_N^{(-1)} f(1) \right| \approx \left| \frac{2\tilde{f}_N}{1-N^2} \right|. \quad (3.47)$$

[→ quadrature de Clenshaw-Curtis]

### 3.1.3 POLYNÔMES DE CHEBYSHEV BIVARIÉS

- Fonctions de base : polynômes de Chebyshev en produit tensoriel

$$I_{M,N} f(u, v) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \tilde{f}_{m,n} T_m(u) T_n(v).$$

- généralisation des propriétés des polynômes univariés
- paramétrisation d'un carreau de surface

$$\sigma(u, v) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \tilde{\sigma}_{m,n} T_m(u) T_n(v). \quad (3.48)$$

(les coefficients  $\tilde{\sigma}_{m,n}$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ )

## 3.2 REPRÉSENTATION ET CALCUL DES COURBES D'INTERSECTION

### 3.2.1 ENJEUX, ÉTAT DE L'ART

Enjeux :

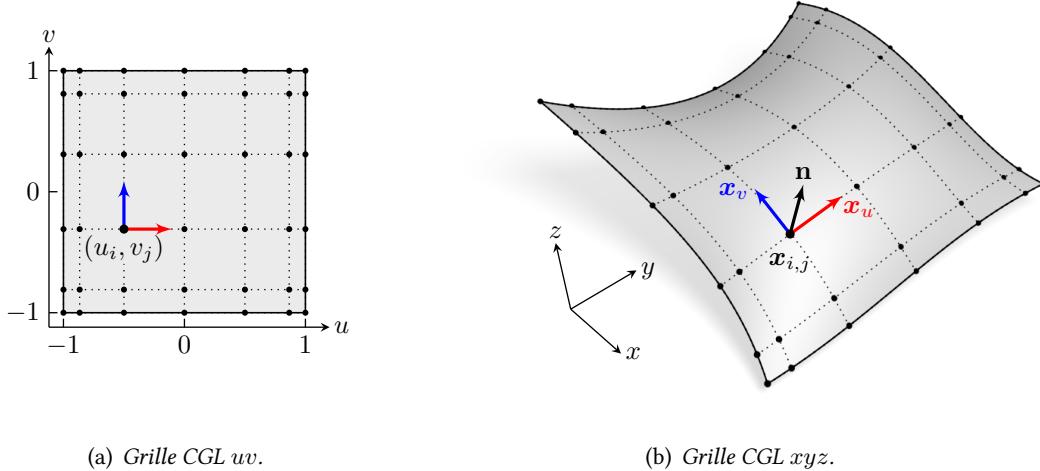


FIGURE 3.6 – Grille CGL.

1. le problème du calcul de l'intersection de carreaux paramétriques consiste à résoudre un système de trois équations non-linéaires (ici polynomiales)

$$\boldsymbol{\sigma}^1(u_1, v_1) - \boldsymbol{\sigma}^2(u_2, v_2) = \mathbf{0}, \quad (3.49)$$

dont les quatre inconnues (paramètres des deux carreaux), sont soumises aux contraintes

$$-1 \leq u_1, v_1, u_2, v_2 \leq 1. \quad (3.50)$$

(On cherche en effet à déterminer la « trace » de l'intersection dans l'espace paramétrique de chaque carreau.)

2. l'intersection non-vide de deux carreaux de surface peut être constituée
  - d'un ensemble de points isolés
    - points de contact (tangential) isolés ([Figure 3.7\(a\)](#)) ;
    - points d'intersection sur bord d'un carreau ([Figure 3.7\(b\)](#)) ;
  - d'un ensemble de courbes
    - puisque chaque carreau est une variété différentielle homéomorphe à un disque (i.e. avec un bord), les courbes d'intersections sont soit
      - *ouvertes* (segments), dont chacune des deux extrémités est située sur le bord d'au moins un des deux carreaux ([Figure 3.7\(c,d,f\)](#)) (ces segments peuvent s'intersecter en des points de branchements ([Figure 3.7\(d\)](#))) ;
      - *fermées* (boucles), qui sont intérieures aux deux carreaux (i.e. n'intersectent aucun bord) ([Figure 3.7\(e\)](#))).
  - d'un ensemble de régions surfaciques ([Figure 3.7\(g\)](#))
    - si deux carreaux définis par des équations paramétriques polynomiales ont une intersection de dimension 2 alors ils coïncident partout (la zone d'intersection est délimitée par les bords des carreaux), on peut donc les considérer comme deux régions d'un même carreau polynomial plus grand [[16](#), Théorème 3].
3. idéalement, l'algorithme de calcul des intersections doit être

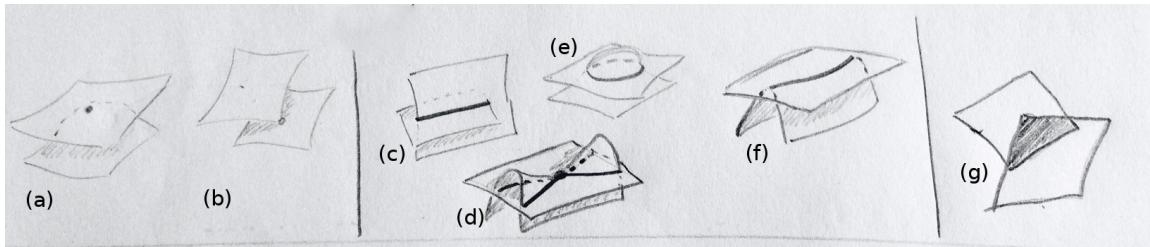


FIGURE 3.7 – Configurations possibles pour l'intersection de deux carreaux (non exhaustif).

- *robuste*, i.e. capable d'identifier la bonne topologie de l'intersection dans toutes les configurations (délicat en précision finie (arithmétique flottante), car les intersections (quasi-)tangentielles sont par nature instables, i.e. une perturbation infinitésimale suffit à modifier leur topologie) ;
- *précis*, i.e. capable de restituer fidèlement la géométrie des éléments d'intersection ;
- *efficace* car il doit être exécuté à chaque instant de la propagation ;
- *autonome*, i.e. doit fonctionner sans intervention de l'utilisateur, comme les autres composants de l'outil de propagation d'interface.

Ces critères étant contradictoires, il est nécessaire de trouver un compromis.

État de l'art des méthodes pour calculer l'intersection de carreaux paramétriques :

#### 1. Lattice.

Les méthodes de ce type consistent à calculer les intersections entre un réseau de *courbes iso-paramétriques* d'un carreau et la *surface* de l'autre carreau [17]. Les points d'intersection obtenus sont ensuite connectés pour former les différentes courbes d'intersection. Cette approche, qui présente l'avantage de réduire la complexité du problème, nécessite toutefois de choisir une résolution suffisamment fine pour le réseau des courbes iso-paramétriques afin de capturer correctement la topologie l'intersection. En effet, si cette résolution est trop grossière, la méthode peut échouer à détecter certains détails tels que des points de contact isolés ou des petites boucles, qui apparaissent lorsque les carreaux s'intersectent de façon tangentielle ou quasi-tangentielle.

#### 2. Subdivision.

Le principe de cette approche est de subdiviser de manière récursive le problème d'intersection original en plusieurs sous-problèmes — typiquement des intersections de régions planes (e.g. triangles) — pour chacun desquels on peut aisément trouver la solution [18]. Ce type de méthodes produit ainsi un ensemble de segments de la courbe d'intersection, qui doivent également être connectés pour en former les branches. Si la position des points d'intersection ainsi calculés peut être corrigée a posteriori afin de les ramener sur la véritable intersection des carreaux, les approximations utilisées ne garantissent pas la restitution exacte de la topologie de la courbe d'intersection, en particulier dans des cas d'intersections tangentielles ou quasi-tangentielles (illustration faux positif/faux négatif). Par ailleurs, le niveau élevé de précision requis par la plupart des applications en CAO nécessite un nombre de subdivisions souvent prohibitif, ce qui disqualifie les méthodes reposant uniquement sur la subdivision.

#### 3. Suivi (Marching).

Les méthodes dites de suivi cherchent dans un premier temps à trouver un point sur chaque branche de la courbe d'intersection. Ensuite, elles procèdent au tracé de ces branches en marchant dans une direction indiquée par la géométrie différentielle locale de la courbe. Afin d'identifier

toutes les composantes connexes de la courbe d'intersection, il suffit de trouver les points où les branches ouvertes rencontrent le bord d'un des carreaux, ainsi que les paires de points critiques où les carreaux ont des directions normales parallèles. En effet, à chaque branche fermée de la courbe d'intersection est associée une telle paire de points [19]. En outre, tous les points singuliers de la courbe d'intersection (points de contact isolés, points « doubles », points de branchemen) sont également des points critiques.

- trouver toutes les branches, sans doublons
  - bords, points critiques
- tracer (problème de Cauchy) avec un pas adéquat pour éviter saut/jumping, (looping) et marche-arrière /backtracking et s'arrêter au bon endroit

**DÉFINITION 3.2** — Deux points  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  reposant respectivement sur les carreaux  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  forment une paire de points critiques si, pour  $i = 1, 2$ ,

$$\mathbf{n}_{\Sigma_i}(\mathbf{p}_i) \times (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) = \mathbf{0}. \quad (3.51)$$

(Ce sont en effet des points critiques (au sens où le gradient s'y annule) pour la fonction  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \mapsto \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|^2$ .)

[20] caractérise ces points (avec une autre fonction distance) et donne un algorithme pour tous les trouver

### 3.2.2 PRÉSENTATION/VUE D'ENSEMBLE/CARACTÉRISTIQUES DE LA MÉTHODE RETENUE

Adaptation de la méthode présentée dans [21], qui est centrée autour du théorème suivant

**THÉORÈME 3.3** (HOHMEYER) — Soient  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux carreaux de continuité  $C^1$  dont les directions normales sont respectivement contenues dans les ensembles  $\mathcal{N}_1$  et  $\mathcal{N}_2$ .

S'il existe deux vecteurs  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$  tels que, pour tout  $\mathbf{n}_1 \in \mathcal{N}_1$  et pour tout  $\mathbf{n}_2 \in \mathcal{N}_2$ ,

$$\mathbf{p}_1^\top \mathbf{n}_1 > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_1^\top \mathbf{n}_2 < 0, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{p}_2^\top \mathbf{n}_1 > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_2^\top \mathbf{n}_2 > 0, \quad (3.53)$$

alors  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$  n'est composée que de

- points isolés situés sur le bord des carreaux ;
- segments ouverts qui ne contiennent ni point double ni point de branchemen.

En outre, la direction tangente  $\mathbf{t}$  d'un tel segment vérifie en tout point

$$\mathbf{t}^\top (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2) > 0. \quad (3.54)$$

*Preuve.* cf. [21, Théorème 4] ■

Géométriquement, ce théorème peut s'interpréter de la manière suivante. D'une part, l'[Equation 3.52](#) stipule que les ensembles  $\mathcal{N}_1$  et  $\mathcal{N}_2$  sont strictement séparables par un plan (passant par l'origine et orthogonal à  $\mathbf{p}_1$ ). D'autre part, l'[Equation 3.53](#) indique que  $\mathcal{N}_1$  et  $\mathcal{N}_2$  sont strictement contenus dans un même hémisphère (centré sur l'origine et centré autour du pôle  $\mathbf{p}_2$ ). Le [Théorème 3.3](#) donne ainsi une condition suffisante pour garantir que deux carreaux ne s'intersectent pas en une boucle fermée. Dans cette situation tous les points nécessaires à la détection de tous les éléments d'intersection (non singuliers) peuvent être trouvés en intersectant les bords de chaque carreau avec la surface de l'autre. De plus, l'[Equation 3.54](#) simplifie et garantit la validité du tracé des segments d'intersection. [...]

1. Détection des branches (composantes connexes) de la courbe d'intersection
  - a) Subdivision récursive des carreaux en régions qui
    - sont clairement disjointes (test de séparation de volumes englobants [22])
    - ou bien s'intersectent de façon tangentielle
    - ou bien ne peuvent pas s'intersecter en une boucle (critère d'élimination des boucles basé sur les enveloppes des normales basé sur le Théorème 3.3)
  - b) Intersection entre les bords d'une région et la surface de l'autre, et vice versa (intersection arc-carreau)
  - c) Subdivision récursive en régions qui
    - sont clairement disjointes
    - ne s'intersectent qu'en un seul segment transverse (pas de singularité), que l'on peut tracer sans ambiguïté (pas de saut d'une branche à l'autre)
2. Représentation des courbes d'intersection
  - a) le degré algébrique ainsi que le genre topologique des courbes solutions du système (3.49) augmentent tellement vite avec le degré des polynômes  $\sigma^i$  qu'il n'est pas envisageable de les représenter par des arcs paramétriques polynomiaux (e.g. la courbe d'intersection de deux carreaux bi-cubiques est de degré 324 et de genre topologique 433 [23]).
  - b) on a tout de même besoin d'un type de représentation permettant une évaluation précise des courbes d'intersection
  - c) (compte tenu du niveau de précision exigé, une approximation paramétrique polynomiale globale ou par morceaux (spline) nécessiterait un volume excessif de données)
  - d) on choisit donc d'adopter une représentation *procédurale*
    - i. approximation linéaire par morceaux (polyligne)  $(x, y, z, u_1, v_1, u_2, v_2)$
    - ii. on peut évaluer précisément n'importe quel point sur la courbe en évaluant d'abord la polyligne puis en raffinant le résultat de façon itérative (projection sur la véritable intersection)
 

⇒ un faible volume de données est stocké mais permet d'évaluer la courbe avec une précision arbitraire
3. Tracé des courbes d'intersection
  - a) le critère d'élimination des boucles assure la monotonie de la paramétrisation de chaque segment d'intersection (pas de marche-arrière)
  - b) problème aux limites (on connaît les deux extrémités du segment avant même de tracer la courbe) au lieu de problème de Cauchy (de valeurs initiales)

#### Apports/modifications

1. représentation des polynômes dans les bases de Bernstein et Chebyshev (pour les arcs et carreaux)
 

→ on tire parti des avantages de chaque base pour les différentes étapes de l'algorithme :

  - base de Bernstein (Bézier)
    - + propriété d'enveloppe convexe → tests de séparation
    - ⇒ utilisée pour décrire localement les régions de carreau/arc

- base de Chebyshev
  - + évaluation efficace (Clenshaw) → méthodes itératives de type Newton qui nécessitent de nombreuses évaluations
    - \* recherche/raffinement d'un point d'intersection arc-carreau
    - \* recherche/raffinement d'une paire de points critiques
    - \* raffinement d'un point d'intersection (entre 2 ou 3 carreaux)
  - + orthogonalité → économisation
  - + FFT → (calcul du carreau pseudo-normal?)
  - ⇒ utilisée pour décrire le carreau/arc « racine »
- changement de base par un produit matrice vecteur, matrice de passage donnée par [24]
- on dérive des techniques pour les deux bases et pour les arcs et carreaux
  - a) extraction d'un bord de carreau sous la forme d'un arc
  - b) subdivision : De Casteljau/« Reparamétrisation affine », généralisation de [25] (cas particulier degré 3 et subdivision au milieu, i.e.  $u = v = 0$ ), à mettre en annexe
  - c) boîtes englobantes orientées : heuristiques, [26] (Bernstein) et extension de [27] (Cheby-shev), à mettre en annexe et comparer complexité de construction et volume des boîtes)

### 3.3 INTÉGRATION TEMPORELLE

Suivi lagrangien de marqueurs (points de collocation, nœuds de la grille CGL)

#### 3.3.1 ADVECTION DANS CHAMP DE VECTEUR VITESSE CONNU

1. Intégration explicite du vecteur vitesse des marqueurs lagrangiens (typiquement Runge-Kutta à l'ordre 4)
2. Pas vraiment le cas dans les applications visées, mais on peut imaginer des situations de ce type (e.g. déformation d'un solide sous l'effet d'efforts aérodynamiques → vitesse donnée par des solveurs de mécanique des structures/fluides)

#### 3.3.2 PROPAGATION SUIVANT UNE VITESSE NORMALE DONNÉE

##### 3.3.2.1 Discréétisation de l'EdS propre d'un carreau paramétrique

Entrée : vecteur position  $\mathbf{x}_{i,j}^{(k)}$  et vitesse normale  $\nu_{i,j}^{(k)}$  de chaque marqueur lagrangien au  $k$ -ième instant, pas de temps  $\Delta t$  (i.e.  $\rho = \nu \Delta t$ )

1. transformation directe (de l'espace physique vers l'espace spectral) pour construire les polynômes d'interpolation du vecteur position et de la vitesse normale
2. construction des polynômes dérivés
3. transformation inverse pour évaluer les dérivées  $\sigma_u$  et  $\sigma_v$  aux nœuds CGL ( $u_i, v_j$ )
4. calcul de la normale aux nœuds CGL

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v}{\|\boldsymbol{\sigma}_u \times \boldsymbol{\sigma}_v\|} \quad (3.55)$$

5. calcul de la composante tangentielle du déplacement vers l'EdS propre aux nœuds CGL

$$\mathbf{t} = \frac{(\nu_v I_{1,2} - \nu_u I_{2,2}) \boldsymbol{\sigma}_u + (\nu_u I_{1,2} - \nu_v I_{1,1}) \boldsymbol{\sigma}_v}{I_{1,1} I_{2,2} - I_{1,2}^2}. \quad (3.56)$$

6. on pose  $\tau = \min \left\{ \Delta t, \frac{\lambda}{\max_{i,j} \|\mathbf{t}_{i,j}^{(k)}\|} \right\}$  ( $\lambda \leq 1$ ) et on avance dans le temps d'un pas  $\tau$   
 (ATTENTION :  $\tau$  doit être le même pour tous les carreaux!)

$$\mathbf{x}_{i,j}^{(k+1)} = \mathbf{x}_{i,j}^{(k)} + \tau \nu_{i,j}^{(k)} \left( \tau \mathbf{t}_{i,j}^{(k)} + \sqrt{1 - \tau^2 \|\mathbf{t}_{i,j}^{(k)}\|^2} \mathbf{n}_{i,j}^{(k)} \right) \quad (3.57)$$

7. Différence avec le simple transport suivant la normale

- on se bouge suivant la normale à l'EdS propre au lieu de la normale à l'interface

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \tau \nu^{(k)} \mathbf{n}^{(k+1)}$$

au lieu de

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \tau \nu^{(k)} \mathbf{n}^{(k)}$$

~ schéma semi-implicite en temps?

$$\sqrt{1 - y} = 1 + O(y),$$

donc

$$(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) - \tau \nu^{(k)} \mathbf{n}^{(k)} = \tau^2 \nu^{(k)} \mathbf{t}^{(k)} + O(\tau^3)$$

et donc la différence est d'ordre 2 en temps

- si  $\nu$  est uniforme (i.e.  $\nu_u = \nu_v = 0$ ) alors construire l'EdS propre revient à propager suivant la normale à l'interface courante. En outre, la direction de  $\mathbf{n}$  reste constante en chaque point. En revanche, le signe de  $\mathbf{n}$  peut s'inverser lorsque  $\nu\tau$  dépasse le plus petit rayon de courbure local ( $\rightarrow$  offset dégénéré ...).

### 3.3.2.2 Discrétisation de la pseudo-EdS d'une arête BRep convexe

1. cf. [Section 2.3.2.2](#)

2. paramétrisation polynomiale

$\Rightarrow$  approximation (remarque sur les paramétrisations rationnelles exactes [[28](#)])

$\Rightarrow$  degré à choisir

3. décrire l'échantillonnage de la courbe d'intersection ( $\underline{\psi}, \bar{\psi}$  et  $\gamma$ ) aux nœuds CGL pour le paramètre de Hohmeyer  $w = \mathbf{p}^\top \boldsymbol{\gamma}$

- méthode procédurale : on s'appuie sur une polyligne et on affine par la méthode de Newton (expliciter l'itération)
- calcul de la direction tangente  $\mathbf{t} = \frac{\gamma_w}{\|\gamma_w\|}$  (cf. géométrie différentielle des courbes d'intersection transverses, s'assurer de la positivité du produit scalaire avec le vecteur de paramétrisation de Hohmeyer  $\mathbf{p}$ )

4. évaluation des courbes « limites »  $\underline{e}$  et  $\bar{e}$
5. échantillonnage des arc caractéristiques aux nœuds CGL en  $v \in [-1, 1]$ 
  - a) en pratique, pour garantir la validité des courbes d'intersections tangentielles entre les carreaux de l'EdB, on choisit

$$\mathbf{o}_i = \boldsymbol{\gamma}_i + \frac{(\underline{e}_i + \bar{e}_i - 2\boldsymbol{\gamma}_i)^T \mathbf{t}_i}{2} \mathbf{t}_i,$$

et, puisque  $\underline{v} = -1$  et  $\bar{v} = 1$ ,

$$r_{i,j} = \frac{(1 - v_j) \|\underline{e}_i - \mathbf{o}_i\| + (1 + v_j) \|\bar{e}_i - \mathbf{o}_i\|}{2},$$

et

$$\mathbf{r}_{i,j} = \cos\left(\frac{1+v_j}{2}\theta_i\right) \underline{\mathbf{r}}_i + \sin\left(\frac{1+v_j}{2}\theta_i\right) \underline{\mathbf{r}}_i^\perp,$$

$\Rightarrow$  on a alors

$$\mathbf{e}_{i,j} = \mathbf{o}_i + r_{i,j} \mathbf{r}_{i,j}$$

6. à noter qu'ici on n'utilise ni  $\tau$  ni  $\nu$
7. les nouveaux carreaux ainsi créés seront ensuite propagés comme les autres aux instants suivants

### 3.3.2.3 Discrétisation de la pseudo-EdS d'un sommet BRep non-concave

1. polygone sphérique découpé en quadrilatères (cf. [Section 2.3.3.1](#))
  - construction d'un carreau bilinéaire (échantillonnage aux nœuds de la grille CGL)
  - projection sur la sphère
  - spectre de Chebyshev plus étalé (degré plus élevé pour une précision donnée)
2. ajustement de carreau sphérique à un nuage de points
  - échantillonnage aux nœuds de la grille CGL du carreau obtenu par la méthode décrite dans la [Section 2.3.3.2](#)
  - + spectre de Chebyshev plus compact

## 3.4 AMÉLIORATION DE LA STABILITÉ NUMÉRIQUE

### 3.4.1 RÉDUCTION DE L'ERREUR D'ALIASING

méthode proposée par [8] difficile à appliquer dans notre cas car

1. les carreaux de surface ont un bord,
2. l'espacement non-uniforme des marqueurs lagrangiens (images des nœuds CGL) impose une forte contrainte CFL sur leurs déplacements

### 3.4.2 PRÉVENTION DES SINGULARITÉS GÉOMÉTRIQUES

Notre approche permet naturellement de supporter les singularités géométriques de l'interface, à condition qu'elles soient localisées à l'intersection d'au moins deux carreaux de surface (et donc sur leur bord). En revanche, les singularités qui se forment au sein d'un même carreau provoquent de sérieux problèmes de stabilité numérique. On distingue 2 types de singularités ([29, p.320]) :

- points irréguliers (auto-intersection locale) (normale et plan tangent non définis,  $\det \mathbf{I} = 0$ )  $\Rightarrow$  oscillations de Gibbs
- auto-intersections globales (non-injectivité de la paramétrisation) : ne pose pas de problème de stabilité numérique mais viole la définition de variété
- [30] (en 2D, i.e. l'interface est une courbe) :
- [31] donne les conditions pour qu'une interface (représentée par une mosaïque de carreaux paramétriques) propagée à vitesse normale uniforme devienne localement singulière

pistes de résolution envisageables

1. approximation non dégénérée [31]
2. tracé des courbes iso-courbure critique [29, chap.8] pour redéfinir les carreaux de surfaces concernés
3. redécoupage des carreaux le long des courbes d'auto-intersection [32]
  - élimine les régions problématiques
  - produit des nouveaux carreaux non-restrints
  - (assure l'étanchéité de la mosaïque de carreaux)

bilan : en l'état actuel, problème non résolu mais idées solutions prometteuses



# VALIDATION DES MÉTHODES NUMÉRIQUES

4

On s'intéresse d'abord à des cas de référence dans lesquels tous les carreaux ont un domaine paramétrique égal à  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , ce qui permet d'effectuer des mesures de précisions à la fois locales (position de l'interface) et globales (aire et volume délimité, par quadrature). Pour cela, on choisit des géométries simples et sans arête concave. (On pourrait étendre les formules de quadrature aux carreaux restreints, voir IGA.)

## 4.1 PROPAGATION SUIVANT UN CHAMP DE VITESSE ANALYTIQUE

sphère dans un écoulement tourbillonnaire incompressible analytique de période temporelle  $2T$

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \cos(\pi t/T) \begin{pmatrix} \sin^2(\pi x) [\sin(2\pi z) - \sin(2\pi y)] \\ \sin^2(\pi y) [\sin(2\pi x) - \sin(2\pi z)] \\ \sin^2(\pi z) [\sin(2\pi y) - \sin(2\pi x)] \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

1. paramétrisation initiale : grille CGL des faces d'un cube projetées sur la sphère
2. calcul de l'aire : intégration (approchée) par quadrature de Clenshaw-Curtis de l'élément d'aire  $\sqrt{\det \bar{\mathbf{I}}}$
3. calcul de volume : formule de Green avec quadrature exacte car l'intégrande est polynomiale
4. critère d'erreur sur la position : distance à la sphère exacte
5. convergence de l'erreur d'approximation sur la position ([Figure 4.2](#)), l'aire ([Figure 4.3](#)) et le volume ([Figure 4.4](#)) à  $t = 0$  et  $t = T$  pour différents niveaux de discrétisations spatiale et temporelle
  - l'approximation de la sphère initiale converge rapidement avec le degré du polynôme d'interpolation(i.e. le nombre de degrés de liberté)
  - si la résolution spatiale est suffisamment fine, l'erreur d'approximation est essentiellement due à la discrétisation temporelle
6. convergence de la variation de volume au cours de la déformation (censée être nulle car  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) ([Figure 4.5](#))
  - on retrouve une convergence rapide : le pic à  $t = T/2$  décroît exponentiellement avec  $N$

Nuancer la pertinence de ce cas test :

- pour d'autres cas test analogues (e.g. cas test de Enright), un mouvement tangentiel (reparamétrisation) des marqueurs lagrangiens est nécessaire pour garantir la stabilité numérique
- mais ce type de déformation extrême n'est pas celui que l'on vise dans nos applications, ce pourquoi on n'a pas plus considéré la reparamétrisation

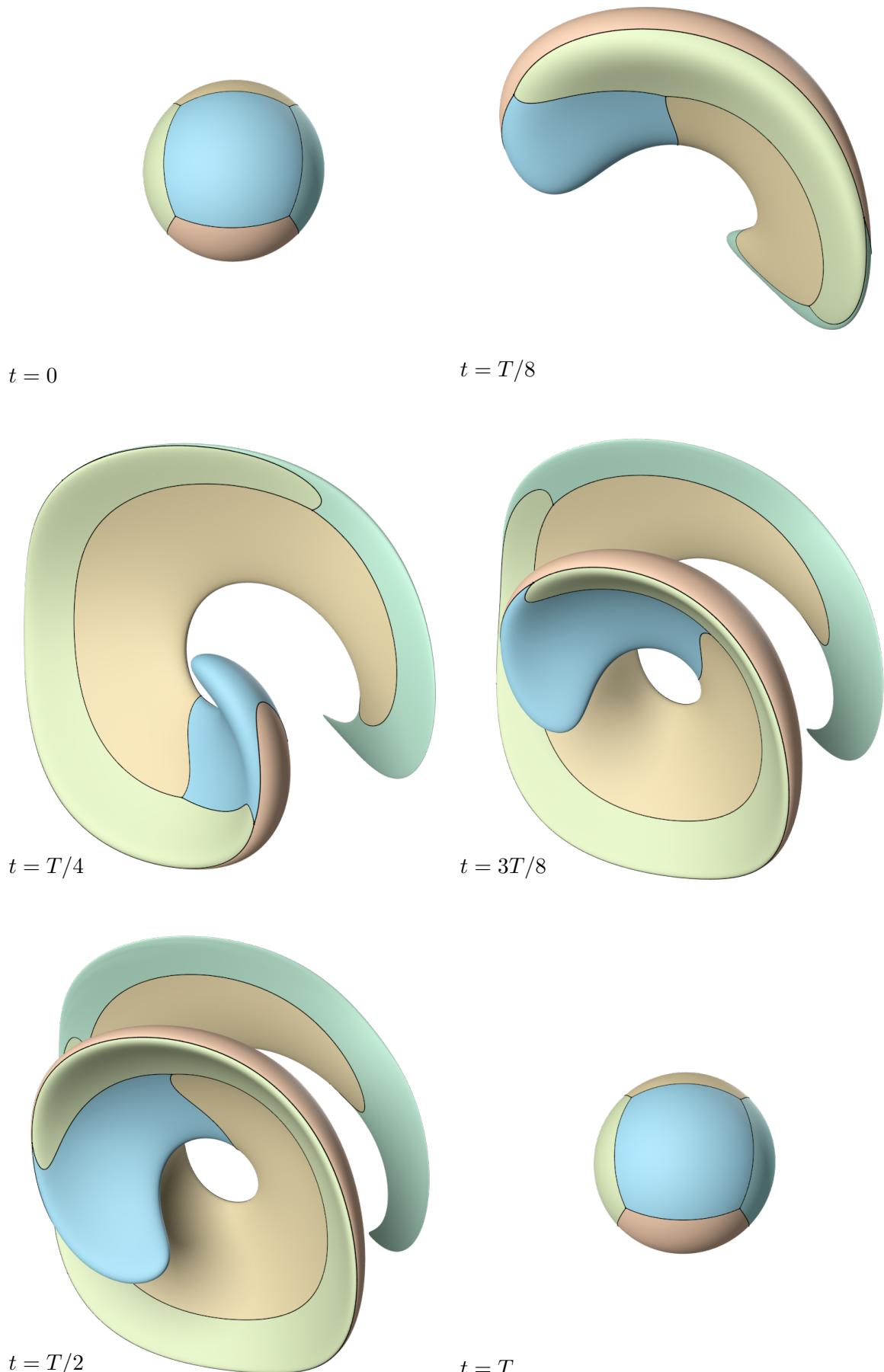


FIGURE 4.1 – Aperçu du modèle BRep de la sphère dans un écoulement tourbillonnaire à différents instants de la propagation ( $T = 4$ ).

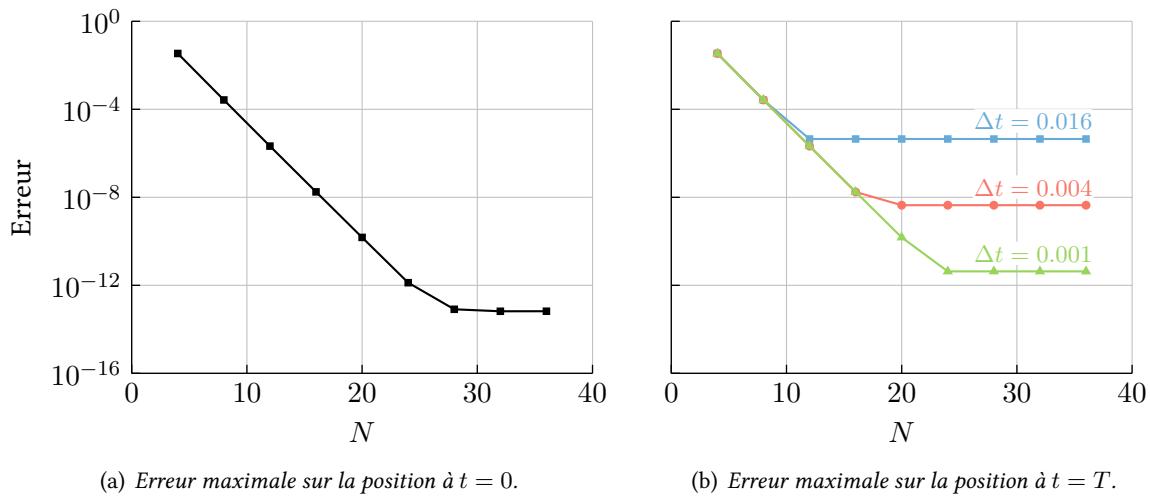


FIGURE 4.2 – Erreur maximale sur la position pour différents niveaux de discrétisations spatiale et temporelle.

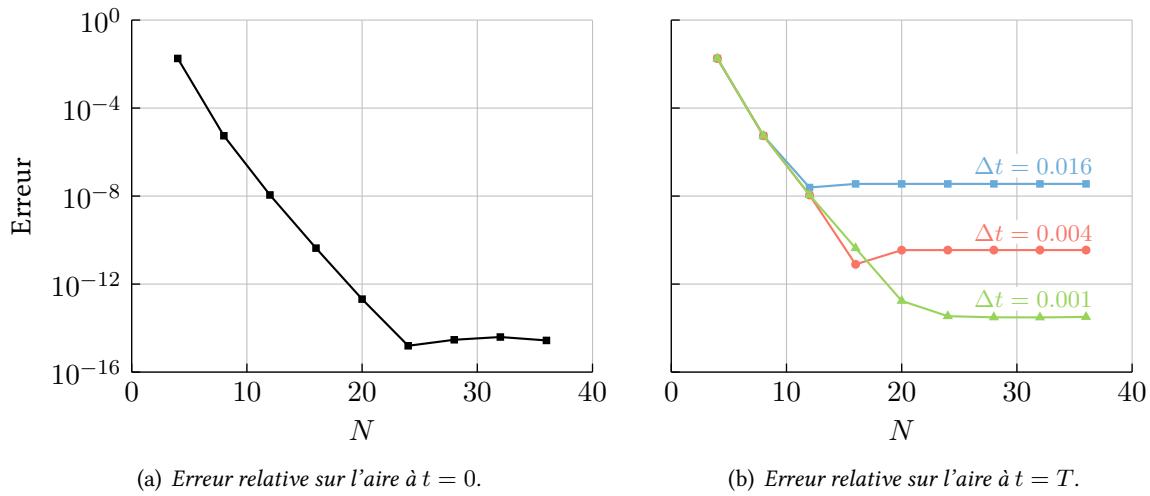


FIGURE 4.3 – Erreur relative sur l'aire pour différents niveaux de discrétisations spatiale et temporelle.

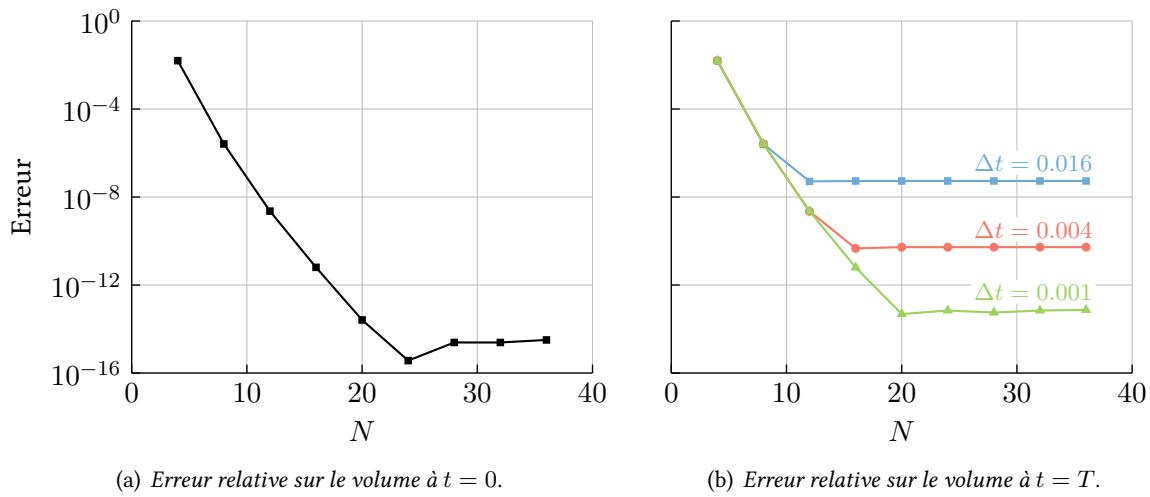


FIGURE 4.4 – Erreur relative sur le volume pour différents niveaux de discrétisations spatiale et temporelle.

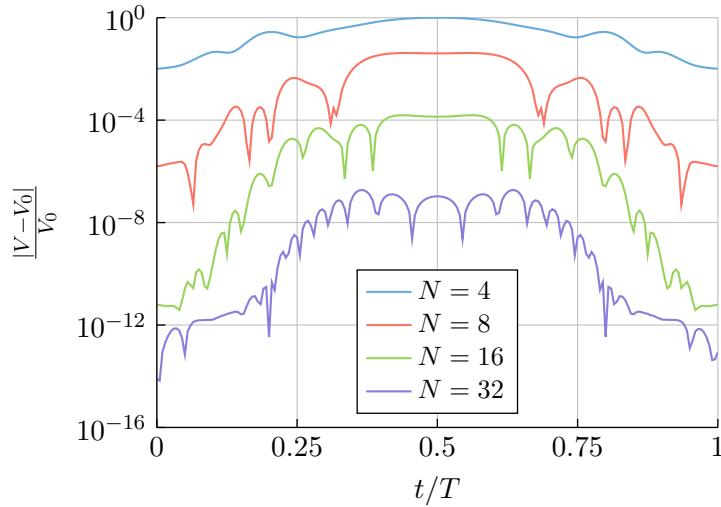


FIGURE 4.5 – Évolution au cours du temps de l'erreur relative en volume pour différents niveaux de discréétisation spatiale. Le schéma de Runge-Kutta explicite à l'ordre 4 est utilisé pour l'intégration temporelle, avec un pas de temps  $\Delta t = 0.001$ .

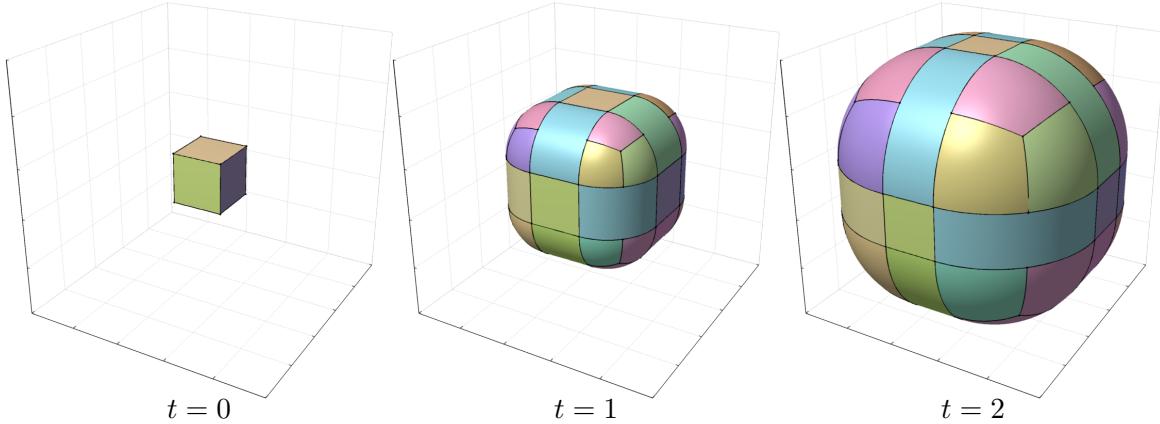


FIGURE 4.6 – Aperçu du modèle BRep du cube en expansion à différents instants de la propagation.

- permet toutefois d'évaluer le pouvoir de résolution des polynômes de Chebyshev et vérifier la convergence rapide de l'erreur d'approximation

## 4.2 PROPAGATION À VITESSE NORMALE UNIFORME

cube en expansion à vitesse normale uniforme  $\nu = 1$

1. stratégie pour la pseudo-EdS des sommets : polygone découpé en quads (cf. [Section 2.3.3.1](#)) pour évaluer simplement l'aire et le volume par quadrature (possible car  $\nu$  est uniforme)
2. critère d'erreur sur la position : erreur relative sur la distance au cube (car la solution exacte est une iso-surface de la fonction distance)
3. convergence de l'erreur d'approximation sur la position, l'aire et le volume à  $t = 2$  pour différents niveaux de discréétisations spatiale et temporelle (voir [Figure 4.7](#))

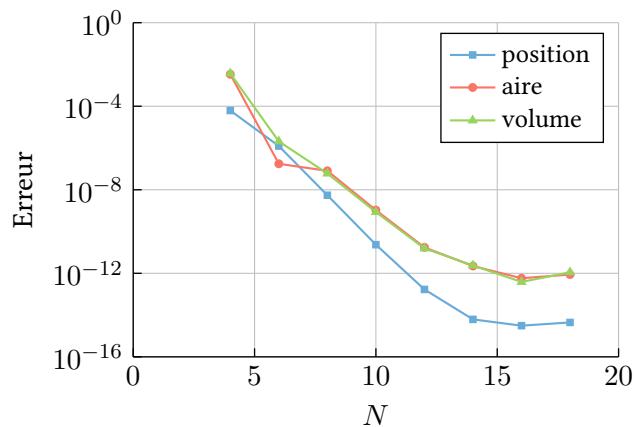


FIGURE 4.7 – Erreurs sur la position l'aire et le volume pour différents niveaux de discrétisations spatiale et temporelle, à  $t = 2$ .

Intérêts de ce cas test :

- valider l'approximation du vecteur normal unitaire
- valider la construction des pseudo-EdS des arêtes et sommets BRep convexes



## **SECONDE PARTIE**

---

# **INTÉGRATION DE L'OUTIL DE SUIVI DE SURFACE DANS UNE CHAÎNE DE CALCUL MULTI-PHYSIQUE**



# ADAPTATION D'UN MAILLAGE DE SURFACE DYNAMIQUE

5

*Objectif du chapitre: on veut mettre au point une méthodologie pour déformer un maillage de l'interface en propagation en utilisant le modèle BRep dynamique comme support géométrique, afin de pouvoir réaliser des simulations EF/VF dans des domaines de géométrie déformable.*

(Motivation : les méthodes (EF, VF, ...) employées pour la simulation numérique nécessitent un *maillage* du (volume du) domaine de calcul)

## 5.1 PROBLÉMATIQUES ET ÉTAT DE L'ART

### 5.1.1 SIMULATION NUMÉRIQUE DANS UN DOMAINE À GÉOMÉTRIE DÉFORMABLE

État de l'art :

#### 1. maillage volumique (fluide) conforme à l'interface

##### a) un seul maillage *body-fitted* avec formulation ALE (*ref*)

- principe : frontière = maillage de l'interface, intérieur déformé de façon arbitraire (purement lagrangien si la vitesse de déformation du maillage est imposée par le champ de vitesse du fluide)
- intérêt/avantages : ...
- contraintes/inconvénients :
  - la qualité du maillage volumique dépend fortement de celle du maillage surfacique, surtout dans les régions proches de l'interface, où ont généralement lieu les phénomènes physiques les plus pertinents
  - la connectivité du maillage doit rester fixe (*à vérifier*)

##### b) plusieurs maillages *body-fitted* qui se superposent

- méthode Chimère [33, 34], FLUSEPA [35]
- intérêt/avantages :
  - facilite la génération du maillage volumique lorsque la géométrie est complexe (e.g. hyper-sustentateurs)
  - évite de déformer un maillage 3D
- contraintes/inconvénients :
  - nécessite de traiter les intersections entre les blocs de maillage
  - limité aux mouvements rigides (*à vérifier*)

#### 2. maillage volumique non-conforme à l'interface

- méthode des frontières immergées [36, 37, 38] : interface représentée explicitement, volume (fluide) traité de façon eulérienne (i.e. maillage fixe)

- intérêt/avantages : évite de générer et déformer un maillage 3D autour d'une géométrie complexe
- contraintes/inconvénients : application indirecte des conditions aux limites

Dans cette thèse,

1. on ne traite que le maillage (surfique) de l'interface
2. on se concentre sur des maillages triangulaires linéaires par morceaux, mais une extension aux maillages hybrides et courbes (high-order) est envisageable
3. Objectifs :
  - a) Représenter fidèlement la géométrie de l'interface (courbe, décrite par le modèle BRep dynamique) par un maillage (linéaire).
  - b) Garantir la validité et la qualité du maillage
    - afin d'assurer le bon déroulement du calcul (vitesse de convergence et précision).
  - c) Préserver autant que possible la connectivité du maillage au cours de la propagation de l'interface
    - afin d'éviter d'avoir à régénérer un nouveau maillage (ce qui impose d'interpoler/projeter la solution et est généralement coûteux, non-conservatif, introduit de la diffusion numérique ...);
    - pas réalisable si l'interface subit des changements de topologie.

### 5.1.2 GÉNÉRATION DE MAILLAGE SURFACIQUE BASÉ SUR UN MODÈLE BREP

1. chaîne traditionnelle :
  - a) conception de la géométrie dans un système de CAO → modèle BRep (formats standards : STEP, IGES)
  - b) génération de maillage surfacique utilisant le modèle BRep comme support géométrique
2. stratégie la plus courante : placer les nœuds du maillage exactement sur la surface décrite par le modèle BRep (les arêtes et faces du maillage *interpolent* la surface BRep)

Essentiellement extension de méthodes standard (i.e. quadtree, Delaunay, avancée de front) 2D plan à des surfaces immergées/plongées dans  $\mathbb{R}^3$

1. méthodes indirectes (Riemanniennes) : on travaille dans l'espace paramétrique en tenant compte de la métrique (anisotrope, Riemannienne) induite par la paramétrisation de façon à ce que le plongement du maillage dans  $\mathbb{R}^3$  respecte les critères prescrits
  - a) conforme à la topologie BRep : on exploite directement les paramétrisations locales (carreaux de surface) du modèle BRep [39] (on maille d'abord les sommets, puis les arêtes et enfin les faces afin de garantir la conformité du maillage)
    - intérêt/avantages : utilisation de méthodes 2D plan robustes et efficaces
    - contraintes/inconvénients : les arêtes BRep régulières introduisent des contraintes supplémentaires sur le maillage, sans avoir de signification du point de vue du calcul EF/VF  
⇒ éléments de mauvaise qualité

- b) trans-carreaux par (re-)paramétrisation globale : l'idée générale est de construire une transformation affine par morceaux (par triangles) l'espace  $uv$  de chaque face et un espace  $uv$  global, sans affecter la définition géométrique du modèle BRep sous-jacent
- [40] :
    - on construit d'abord un maillage de référence conforme à la topologie BRep d'un ensemble de faces regroupées
    - on bouche artificiellement les éventuels « trous » afin qu'il n'y ait qu'un seul bord
    - on plonge ce maillage dans un espace paramétrique global :
      - afin d'obtenir les coordonnées paramétriques globales des noeuds intérieurs, on résout un système d'équations elliptique (opérateur Laplacien combinatoire) avec une condition de Dirichlet pour fixer les noeuds du bord sur un cercle
      - on modifie les coordonnées paramétriques globales des noeuds du bord afin d'améliorer la forme des éléments incidents
      - (on répète le processus jusqu'à ce que la qualité des éléments dans l'espace paramétrique global soit convenable)
    - on élimine les éventuels éléments fictifs créés à l'étape 1(b)iB
    - on génère une triangulation dans l'espace paramétrique global par avancée de front en utilisant le maillage de référence comme approximation géométrique dans l'espace physique
    - on retrouve les coordonnées paramétriques locales des noeuds du nouveau maillage
    - limites : le groupe de faces doit avoir au moins un bord
  - [41] :
    - le domaine paramétrique de chaque face BRep est décomposé en cellules triangulaires s'appuyant sur les contours
    - chaque cellule (courbe) est en bijection avec un triangle (linéaire) dans l'espace paramétrique global de la nappe
    - une triangulation du domaine paramétrique global (convexe) est générée (quadtree-Delaunay)
    - limites : le groupe de faces doit avoir au moins un bord
  - [42] :
    - on part ici aussi d'une triangulation de référence conforme à la topologie BRep (i.e. chaque face a sa propre triangulation)
    - l'assemblage des faces en nappes est réalisé directement dans le plan  $(u, v)$  à partir des plongements de leur triangulation respective dans leur espace paramétrique local
    - une face de "base" est choisie, le plongement de sa triangulation dans l'espace paramétrique global est identique à celui dans son espace paramétrique local
    - les triangulations des faces adjacentes sont ensuite plongées une à une dans l'espace  $uv$  global à l'aide d'une technique d'avancée de front qui préserve la forme des triangles
    - limites :
      - cette approche peut échouer si les plongements des triangulations de deux faces adjacentes dans leur espace  $uv$  respectif ont des rapports d'échelles différents au niveau d'une arête commune
      - il semblerait que les groupes de faces doivent ici aussi avoir au moins un bord

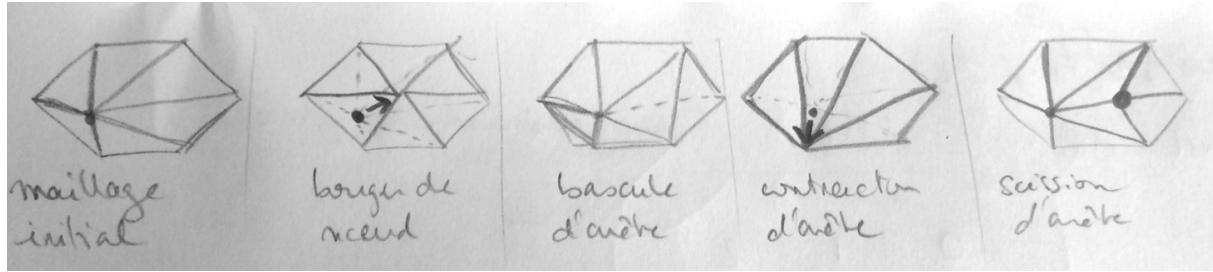


FIGURE 5.1 – ...

- intérêt/avantages : lève les contraintes topologiques du modèle BRep qui ne sont pas pertinentes pour le calcul EF/VF, sans en affecter la définition géométrique
- limites/inconvénients :
  - topologie : limité aux groupes de faces avec un ou plusieurs bords  $\Rightarrow$  nécessite un découpage (généralement manuel) de l'interface
  - géométrie : limité aux groupes de faces quasi-plans

## 2. méthodes directes :

- a) [43] : avancée de front directement dans  $\mathbb{R}^3$  avec projection sur la surface exacte des noeuds au cours de la génération  $\rightarrow$  limité à une paramétrisation continue (i.e. carreau par carreau, conforme à la topologie BRep)
- b) [44] : avancée de front directe trans-carreaux

### 5.1.3 OPTIMISATION DE MAILLAGE SURFACIQUE

1. bouger de nœud (direct, i.e.  $xyz$  ou indirect, i.e.  $uv$ )
  - a) méthodes heuristiques (lissage laplacien, analogies physiques [45], interpolation (IDW, RBF, ...) ...)
  - b) lissage basé sur l'optimisation d'une métrique de qualité [46, 47, 48], [49]  $\rightarrow$  maillage supporté sur un carreau paramétrique
2. changements locaux de connectivité
  - a) bascule d'arête
  - b) contraction d'arête
  - c) scission d'arête

## 5.2 MAILLAGE TRANS-CARREAUX REPOSANT SUR UN MODÈLE BREP DYNAMIQUE

Motivation : on veut que le maillage respecte la *géométrie* du modèle BRep (cf. objectif 3a), mais pas nécessairement sa *topologie*  
 $\rightarrow$  on veut s'affranchir de toutes les contraintes topologiques du modèle BRep qui ne sont pas pertinentes du point de vue du calcul EF/VF

### 5.2.1 MODÈLE MAXIMAL

Comme nous l'avons vu dans la [Section 1.2](#), une surface régulière par morceaux peut être décrite comme un ensemble de *nappes*, *crêtes* et *pics*.

**DÉFINITION 5.1 (MODÈLE MAXIMALE)** — *On dit qu'une nappe  $\mathcal{N}_a$  (resp. crête  $\mathcal{C}_a$ ) est maximale s'il n'existe aucune nappe  $\mathcal{N}_b$  (resp. crête  $\mathcal{C}_b$ ) telle que  $\mathcal{N}_a \subset \mathcal{N}_b$  (resp.  $\mathcal{C}_a \subset \mathcal{C}_b$ ).*

*On appelle modèle maximale d'une surface  $G^1$  par morceaux l'ensemble de ses nappes maximales, crêtes maximales et pics.*

Ainsi, une nappe maximale correspond à un ensemble connexe et globalement  $G^1$  de faces BRep. Une crête maximale correspond à un ensemble connexe et globalement  $G^1$  d'arêtes BRep vives, qui est incident à une seule ou deux nappe(s) maximale(s) et est délimitée par zéro, un ou deux pic(s). Enfin, un pic correspond à un sommet BRep (vif), et représente l'extrémité d'une ou plusieurs crêtes maximales.

Essentiellement, la différence entre la décomposition maximale et celle induite par le modèle BRep est que celle-ci est unique. Regrouper les faces et arêtes d'un modèle BRep en nappes et crêtes maximales ne modifie ainsi pas la définition géométrique de la surface qu'il décrit, mais permet d'en fournir une nouvelle représentation, dont la topologie est plus simple. Cette représentation, qui était peu pratique pour concevoir un algorithme d'ordre élevé et efficace de propagation d'interface, s'avère maintenant être un outil intéressant pour imposer au maillage un nombre minimal de contraintes topologiques.

On décrit dans les paragraphes suivants les procédures permettant de construire explicitement cette décomposition à partir des entités du modèle BRep.

#### 5.2.1.1 Assemblage des faces en nappes maximales

Pour constituer les nappes maximales, on procède de la manière suivante. On commence par marquer toutes les faces du modèle BRep comme *non-visitées*. Ensuite, pour chaque face non-visitéée, on initialise une nouvelle nappe vide que l'on remplit en suivante la procédure récursive décrite par l'[Algorithme 1](#).

---

**Algorithme 1** Assemblage récursif de faces en une nappe.

---

```

1 procédure ASSEMBLER_NAPPE(F,  $\mathcal{N}$ )
2   marquer F comme visitée
3   ajouter F à la nappe  $\mathcal{N}$ 
4   pour chaque contour W de F
5     pour chaque co-arête régulière  $E^i$  de W
6       si la face  $F_j$  incidente à la co-arête jumelle de  $E^i$  n'a pas déjà été visitée alors
7         ASSEMBLER_NAPPE( $F_j$ ,  $\mathcal{N}$ )
8       fin si
9     fin pour
10   fin pour
11 fin procédure

```

---

#### 5.2.1.2 Identification des pics

Les pics correspondent à des extrémités de crêtes maximales. On définit la *valence* d'un sommet BRep comme le nombre d'arêtes vives auxquelles il est incident. Sont des pics les sommets

- de valence strictement supérieure à 2 ;
- de valence égale à 1 (techniquement un tel sommet est un point régulier de l'interface, mais il délimite tout de même une crête) ;

- de valence égale à 2, et où les deux arêtes incidentes ont des directions tangentes non-parallèles.

Pour le dernier cas, on calcule la direction tangente  $\mathbf{t}_i$  ( $i = 1, 2$ ) à chaque arête en exploitant la géométrie différentielle de la courbe d'intersection transverse qui la supporte (voir [Section 3.2](#)). On considère que le sommet commun de ces arêtes est un pic si l'angle entre les directions tangentes dépasse un certain seuil  $\epsilon$ , i.e. si

$$\left| \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2 \right| < \cos \epsilon. \quad (5.1)$$

### 5.2.1.3 Assemblage des arêtes vives en crêtes maximales

Afin d'en simplifier le parcours, on donne une orientation consistante aux crêtes. Pour cela, on conçoit une crête comme une suite de *co-arêtes*.

Dans un premier temps, on obtient les crêtes maximales *ouvertes*, i.e. qui possèdent deux pics (pas nécessairement distincts<sup>1</sup>) comme extrémités. L'[Algorithme 2](#) qui réalise l'assemblage de ces crêtes consiste à « marcher » de pic en pic le long d'arêtes vives en prenant soin de ne parcourir chaque arête qu'au plus une fois. Cette procédure de marche est décrite par l'[Algorithme 4](#). On a obtenu toutes les crêtes ouvertes une fois que toutes les arêtes vives incidentes à chaque pic ont été visitées.

---

#### Algorithme 2 Obtention des crêtes ouvertes.

---

```

1 pour chaque pic V
2   pour chaque co-arête vive Ei non-visitée ayant pour origine V
3     C = ASSEMBLER CRÊTE(Ei)
4     Ajouter C à la liste des crêtes
5   fin pour
6 fin pour

```

---

On procède alors à l'assemblage des crêtes maximales *fermées*. Celles-ci n'ayant pas d'extrémité, on choisit arbitrairement un de leurs sommets intérieurs comme point de départ pour l'assemblage. L'[Algorithme 2](#) qui réalise l'assemblage des crêtes fermées utilise également la procédure de marche décrite par l'[Algorithme 4](#). Cette fois, en revanche, l'assemblage se termine lorsque le sommet destination de la dernière co-arête visitée est identique au sommet de départ. On a obtenu toutes les crêtes fermées une fois que chaque arête vive a été visitée exactement une fois.

---

#### Algorithme 3 Obtention des crêtes fermées.

---

```

1 pour chaque sommet BRep V de valence égale à 2 qui n'est pas un pic
2   Ei ← co-arête vive ayant pour origine V // celle-ci est unique et n'a pas encore été visitée
3   C = ASSEMBLER CRÊTE(Ei)
4   Ajouter C à la liste des crêtes
5 fin pour

```

---

### 5.2.1.4 Liens entre maillage et modèle maximale

## 5.2.2 COHÉRENCE/PERSISTANCE DU MODÈLE MAXIMALE

cf. notes “Virtual topology”

---

<sup>1</sup>On traite en effet les crêtes ayant leurs deux extrémités au même pic comme des crêtes ouvertes.

---

**Algorithme 4** Assemblage de co-arêtes en une crête.

---

```

1 procédure ASSEMBLER CRÊTE( $E_0^i$ )
2   initialiser une crête vide  $\mathcal{C}$ 
3    $E^j \leftarrow E_0^i$ 
4   tant que dest( $E^j$ )  $\neq$  orig( $E_0^i$ ) et dest( $E^j$ ) n'est pas un pic
5     ajouter  $E^j$  à la crête  $\mathcal{C}$ 
6     marquer la co-arête  $E^j$  et sa jumelle comme visitées
7      $E^j \leftarrow$  co-arête vive ayant pour origine dest( $E^j$ ) // celle-ci est unique et n'a pas encore été
     visitée
8   fin tant que
9   retourner  $\mathcal{C}$ 
10 fin procédure
```

---

## 5.3 OPTIMISATION DE MAILLAGE TRANS-CARREAUX

### 5.3.1 BOUGER DE NŒUD

1. l'étape d'optimisation prescrit pour chaque noeud un déplacement  $\mathbf{d}$  dans l'espace physique
  2. pour chaque noeud, on projette ce déplacement sur l'entité naturelle qui le supporte, en mettant à jour sa localisation sur le modèle BRep
    - si le noeud est associé à un pic/sommet (zéro degré de liberté), il reste fixe
    - si le noeud fait partie d'une chaîne (un degré de liberté), on projette  $\mathbf{d}$  sur la crête associée à cette chaîne (procédure décrite dans l'[Algorithme 5](#))
    - si le noeud repose sur une nappe (deux degrés de liberté), on projette  $\mathbf{d}$  sur cette nappe
- ⇒ les nœuds suivent des trajectoires trans-carreaux [[2](#), Section 5.5]), [[50](#)], [[51](#), p.42 et Section 4.4.1]

#### 5.3.1.1 Projection sur une crête

Ligne [21](#) de l'[Algorithme 5](#)

#### 5.3.1.2 Projection sur une nappe

### 5.3.2 RECONNECTIONS LOCALES

#### 5.3.2.1 Bascule d'arête

Les arêtes contenues dans les chaînes ne peuvent pas être basculées.

#### 5.3.2.2 Contraction d'arête

Soit  $e$  l'arête entre les noeuds  $p_1$  et  $p_2$ . Sans restreindre la généralité, on supposera que  $\text{ddl}(p_1) \leq \text{ddl}(p_2)$ . Ici,  $\text{ddl}(p)$  représente le nombre de degrés de liberté du noeud  $n$ , i.e.

- $\text{ddl}(p) = 0$  si  $n$  est contraint sur un sommet BRep ;
- $\text{ddl}(p) = 1$  si  $n$  est contraint sur une hyper-arête (chaîne) ;
- $\text{ddl}(p) = 2$  si  $n$  n'est pas contraint (ou plutôt est contraint sur une hyper-face).

---

**Algorithme 5** Projection d'un déplacement sur une crête (introduire dans section "Régénération des chaînes").

---

```

1 procédure PROJECTION SUR CRÊTE( $q, u = (u_1, v_1, u_2, v_2), E^i$ )
2   répéter
3     convergé  $\leftarrow$  Faux
4      $\underline{\gamma} \leftarrow$  coordonnées physiques de orig( $E^i$ )
5      $\bar{\gamma} \leftarrow$  coordonnées physiques de dest( $E^i$ )
6      $t \leftarrow$  direction tangente à  $E^i$  en  $q$ 
7      $d \leftarrow (d^T t)d$ 
8      $p$  vecteur de paramétrisation (Hohmeyer), orienté tel que  $p^T t > 0$ 
9      $w \leftarrow \frac{p^T(q+d-\underline{\gamma})}{p^T(\bar{\gamma}-\underline{\gamma})}$ 
10    si  $w < 0$  alors
11       $E^i \leftarrow$  co-arête qui précède  $E^i$  sur la crête
12       $d \leftarrow d + q - \underline{\gamma}$ 
13       $q \leftarrow \underline{\gamma}$ 
14       $u \leftarrow$  coordonnées paramétriques de dest( $E^i$ ) dans les faces incidentes à  $E^i$  et sa co-arête
           jumelle
15    sinon si  $w > 1$  alors
16       $E^i \leftarrow$  co-arête qui succède  $E^i$  sur la crête
17       $d \leftarrow d + q - \bar{\gamma}$ 
18       $q \leftarrow \bar{\gamma}$ 
19       $u \leftarrow$  coordonnées paramétriques de orig( $E^i$ ) dans les faces incidentes à  $E^i$  et sa co-arête
           jumelle
20    sinon
21      projection sur  $E^i$ 
22      convergé  $\leftarrow$  Vrai
23      retourner  $q, u, E^i$ 
24    fin si
25  jusqu'à convergé
26 fin procédure

```

---

Si  $dd\ell(p_1) = dd\ell(p_2) = 1$ , la contraction n'est possible que si  $e$  fait partie d'une chaîne, i.e. les noeuds  $p_1$  et  $p_2$  sont contraints sur la même hyper-arête (voir [Figure 5.2](#)).

Si  $dd\ell(p_1) < dd\ell(p_2)$  on contracte  $e$  vers le noeud  $p_1$ . Si  $dd\ell(p_1) = dd\ell(p_2)$  on contracte  $e$  vers son milieu. Afin de localiser précisément ce milieu sur la surface BRep (i.e. connaître l'entité BRep qui le supporte, ainsi que ses coordonnées paramétriques dans les carreaux de surface concernés), on calcule la projection sur la surface BRep du noeud  $p_1$  translaté d'un vecteur  $\frac{p_2-p_1}{2}$  (voir [Figure 5.3](#)), en suivant la procédure décrite dans la [Section 5.3.1](#).

### 5.3.2.3 Scission d'arête

On insère un noeud au milieu d'une arête. Comme pour la contraction d'arête, les coordonnées de ce milieu sont une nouvelle fois obtenue par la procédure de projection décrite dans la [Section 5.3.1](#). Cette fois, la projection du déplacement se fait en partant du sommet de l'arête ayant le plus grand nombre de degrés de liberté, comme illustré sur la [Figure 5.4](#).

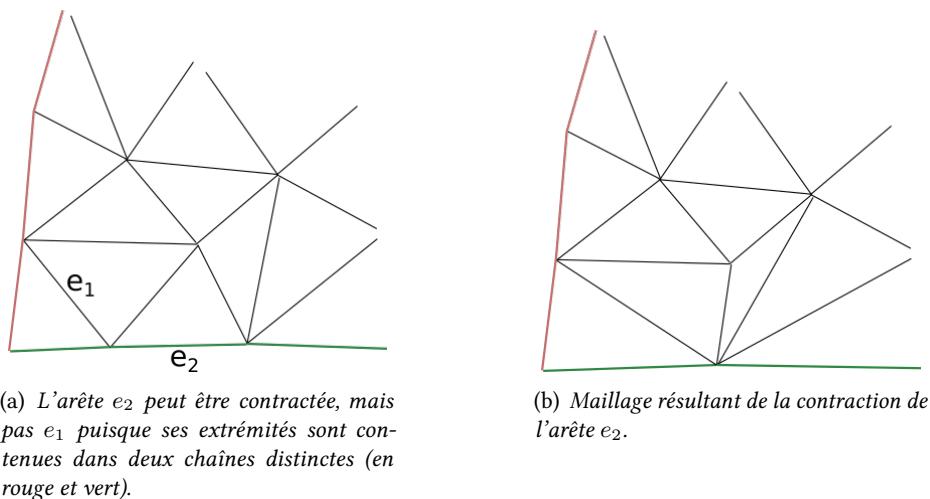
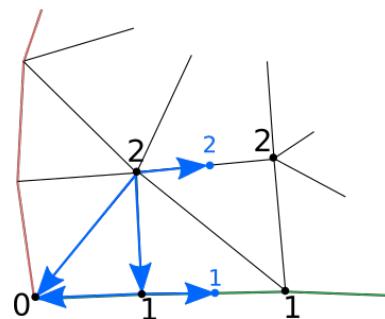
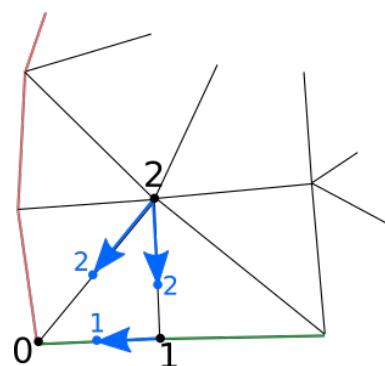


FIGURE 5.2 – Deux cas possibles pour une arête dont les deux sommets ont un seul degré de liberté.

FIGURE 5.3 – Placement du nœud résultant de la contraction d'une arête. Le dd $\ell$  de chaque nœud concerné est indiqué à côté de celui-ci. Les flèches représentent les vecteurs déplacement à projeter pour chaque arête contractée.FIGURE 5.4 – Placement du nouveau nœud résultant d'une scission d'arête. Le dd $\ell$  de chaque nœud concerné est indiqué à côté de celui-ci. Les flèches représentent les vecteurs déplacement à projeter pour chaque arête scindée.



# APPLICATION À LA SIMULATION DE LA RÉGRESSION DE PROPERGOL SOLIDE

6

## 6.1 CONTEXTE

6.1.1 PRINCIPE D'UN PROPULSEUR À PROPERGOL SOLIDE

6.1.2 ÉTAT DE L'ART DES MÉTHODES DE SIMULATION

## 6.2 CAS D'APPLICATION

6.2.1 PLATEFORME DE SIMULATION MULTI-PHYSIQUE CEDRE

6.2.2 CONFIGURATION DU CAS D'APPLICATION

6.2.3 MÉTHODOLOGIE DE COUPLAGE/CHAÎNAGE

6.2.4 RÉSULTATS DE LA SIMULATION



## CONCLUSION



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. NOËL, J. C. LEON et P. TROMPETTE. A new approach to free-form surface mesh control in a CAD environment. *International journal for numerical methods in engineering*, **38** (18) : pp. 3121–3142, 1995. (cf. p. 8)
- [2] G. FOUCault, J.-C. CUILLIÈRE, V. FRANÇOIS, J.-C. LÉON et R. MARANZANA. Adaptation of CAD model topology for finite element analysis. *Computer-Aided Design*, **40** (2) : pp. 176–196, 2008. (cf. pp. 8 et 69)
- [3] M. J. MARTIN-BURGOS, D. GONZÁLEZ-JUÁREZ et E. ANDRÉS-PÉREZ. A novel surface mesh deformation method for handling wing-fuselage intersections. *Chinese Journal of Aeronautics*, **30** (1) : pp. 264–273, 2017. (cf. p. 8)
- [4] B. LOUHICHI, G. N. ABENHAIM et A. S. TAHAN. CAD/CAE integration: updating the CAD model after a FEM analysis. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **76** (1-4) : pp. 391–400, 2015. (cf. p. 8)
- [5] J. R. ROSSIGNAC. *Blending and Offsetting Solid Models*. Thèse de Doctorat, University of Rochester, 1985. (cf. p. 12)
- [6] X. JIAO. Face Offsetting: A Unified Approach for Explicit Moving Interfaces. *Journal of Computational Physics*, **220** (2) : pp. 612–625, 2007. (cf. p. 16)
- [7] S. M. GELSTON et D. DUTTA. Boundary surface recovery from skeleton curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **12** (1) : pp. 27–51, 1995. (cf. p. 21)
- [8] A. RAHIMIAN, S. K. VEERAPANENI, D. ZORIN et G. BIROS. Boundary Integral Method for the Flow of Vesicles with Viscosity Contrast in Three Dimensions. *Journal of Computational Physics*, **298** : pp. 766–786, 2015. (cf. pp. 37 et 52)
- [9] D. GUEYFFIER, F. ROUX, Y. FABIGNON, G. CHAINERAY, N. LUPOGLAZOFF, F. VUILLOT, J. HILKEMA et F. ALAUZET. Accurate Computation of Grain Burning Coupled with Flow Simulation in Rocket Chamber. *Journal of Propulsion and Power*, **31** (6) : pp. 1761 – 1776, 2015. (cf. p. 37)
- [10] J. MASON et D. HANDSCOMB. *Chebyshev Polynomials*. CRC Press, 2002. (cf. p. 38)
- [11] A. GIL, J. SEGURA et N. M. TEMME. *Numerical Methods for Special Functions*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2007. (cf. p. 38)
- [12] J. P. BOYD. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, Mineola, NY, seconde édition, 2001. (cf. p. 38)
- [13] C. CANUTO, M. Y. HUSSAINI, A. QUARTERONI et T. A. ZANG. *Spectral Methods. Fundamentals in Single Domains*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. (cf. pp. 38 et 43)
- [14] C. CLENSHAW. A note on the summation of Chebyshev series. *Mathematics of Computation*, **9** (51) : pp. 118–120, 1955. (cf. p. 42)

- [15] H. WENGLE et J. H. SEINFELD. Pseudospectral solution of atmospheric diffusion problems. *Journal of computational Physics*, **26** (1) : pp. 87–106, 1978. (cf. p. 44)
- [16] C.-Y. HU, T. MAEKAWA, N. M. PATRIKALAKIS et X. YE. Robust interval algorithm for surface intersections. *Computer-Aided Design*, **29** (9) : pp. 617–627, 1997. (cf. p. 46)
- [17] J. R. ROSSIGNAC et A. A. REQUICHA. Piecewise-circular curves for geometric modeling. *IBM Journal of Research and Development*, **31** (3) : pp. 296–313, 1987. (cf. p. 47)
- [18] E. G. HOUGHTON, R. F. EMNETT, J. D. FACTOR et C. L. SABHARWAL. Implementation of a divide-and-conquer method for intersection of parametric surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **2** (1-3) : pp. 173–183, 1985. (cf. p. 47)
- [19] T. SEDERBERG, H. CHRISTIANSEN et S. KATZ. Improved test for closed loops in surface intersections. *Computer-Aided Design*, **21** (8) : pp. 505 – 508, 1989. (cf. p. 48)
- [20] Y. YAMAGUCHI, R. KAMIYAMA et F. KIMURA. Surface-surface intersection with critical point detection based on b閦ier normal vector surfaces. Dans *International Workshop on Geometric Modelling*, pp. 287–308. Springer, 1998. (cf. p. 48)
- [21] M. E. HOHMEYER. *Robust and Efficient Surface Intersection for Solid Modeling*. Thèse de Doctorat, EECS Department, University of California, Berkeley, 1992. (cf. p. 48)
- [22] D. EBERLY. Dynamic Collision Detection using Oriented Bounding Boxes. <https://www.geometrictools.com/Documentation/DynamicCollisionDetection.pdf>, 1999. (cf. p. 49)
- [23] S. KATZ et T. W. SEDERBERG. Genus of the intersection curve of two rational surface patches. *Computer Aided Geometric Design*, **5** (3) : pp. 253 – 258, 1988. (cf. p. 49)
- [24] A. RABABAH. Transformation of Chebyshev–Bernstein polynomial basis. *Computational Methods in Applied Mathematics*, **3** (4) : pp. 608–622, 2003. (cf. p. 50)
- [25] A. FOURNIER et J. BUCHANAN. Chebyshev polynomials for boxing and intersections of parametric curves and surfaces. Dans *Computer Graphics Forum*, volume 13, pp. 127–142. Wiley Online Library, 1994. (cf. p. 50)
- [26] J. MUNKBERG, J. HASSELGREN, R. TOTH et T. AKENINE-M LLER. Efficient bounding of displaced Bézier patches. Dans *Proceedings of the Conference on High Performance Graphics*, pp. 153–162. Eurographics Association, 2010. (cf. p. 50)
- [27] S. CAMPAGNA, P. SLUSALLEK et H.-P. SEIDEL. Ray tracing of spline surfaces: Bézier clipping, Chebyshev boxing, and bounding volume hierarchy – a critical comparison with new results. *The Visual Computer*, **13** (6) : pp. 265–282, 1997. (cf. p. 50)
- [28] M. PETERNELL et H. POTTMANN. Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, **23** (2-3) : pp. 255–266, 1997. (cf. p. 51)
- [29] N. M. PATRIKALAKIS et T. MAEKAWA. *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*. Springer Science & Business Media, 2009. (cf. p. 53)
- [30] X. M. JIAO. *Data transfer and interface propagation in multicomponent simulations*. Thèse de Doctorat, University of Illinois, Urbana-Champaign, 2001. (cf. p. 53)
- [31] R. T. FAROUKI. The approximation of non-degenerate offset surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **3** (1) : pp. 15–43, 1986. (cf. p. 53)

- [32] B. URICK, B. MARUSSIG, E. COHEN, R. H. CRAWFORD, T. J. HUGHES et R. F. RIESENFIELD. Watertight Boolean operations: A framework for creating CAD-compatible gap-free editable solid models. *Computer-Aided Design*, **115** : pp. 147 – 160, 2019. (cf. p. 53)
- [33] R. L. MEAKIN et N. E. SUHS. Unsteady aerodynamic simulation of multiple bodies in relative motion. Dans *9th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, p. 1996, 1989. (cf. p. 63)
- [34] Z. J. WANG et V. PARTHASARATHY. A fully automated Chimera methodology for multiple moving body problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **33** (7) : pp. 919–938, 2000. (cf. p. 63)
- [35] P. BRENNER. Three-dimensional aerodynamics with moving bodies applied to solid propellant. Dans *27th Joint Propulsion Conference*, p. 2304, 1991. (cf. p. 63)
- [36] C. S. PESKIN. The immersed boundary method. *Acta numerica*, **11** : pp. 479–517, 2002. (cf. p. 63)
- [37] J. HOVNANIAN. *Méthode de frontières immergées pour la mécanique des fluides. Application à la simulation de la nage..* Thèse de Doctorat, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2012. (cf. p. 63)
- [38] K. WANG, J. GRÉTARSSON, A. MAIN et C. FARHAT. Computational algorithms for tracking dynamic fluid–structure interfaces in embedded boundary methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **70** (4) : pp. 515–535, 2012. (cf. p. 63)
- [39] H. BOROUCHAKI, P. LAUG et P.-L. GEORGE. Parametric surface meshing using a combined advancing-front generalized Delaunay approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **49** (1-2) : pp. 233–259, 2000. (cf. p. 64)
- [40] D. L. MARCUM et J. A. GAITHER. Unstructured Surface Grid Generation Using Global Mapping and Physical Space Approximation. Dans *Proceedings of the 8th International Meshing Roundtable*, pp. 397–406, 1999. (cf. p. 65)
- [41] F. NOËL. Global parameterization of a topological surface defined as a collection of trimmed bi-parametric patches: Application to automatic mesh construction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **54** (7) : pp. 965–986, 2002. (cf. p. 65)
- [42] W. JONES. Toward a global parameterization for quilted CAD entities. Dans *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, p. 611, 2004. (cf. p. 65)
- [43] T. LAU et S. LO. Finite element mesh generation over analytical curved surfaces. *Computers & Structures*, **59** (2) : pp. 301–309, 1996. (cf. p. 66)
- [44] G. FOUCault, J.-C. CUILLIÈRE, V. FRANÇOIS, J.-C. LÉON et R. MARANZANA. Generalizing the advancing front method to composite surfaces in the context of meshing constraints topology. *Computer-Aided Design*, **45** (11) : pp. 1408–1425, 2013. (cf. p. 66)
- [45] C. FARHAT, C. DEGAND, B. KOOBUS et M. LESOINNE. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **163** (1-4) : pp. 231–245, 1998. (cf. p. 66)
- [46] L. A. FREITAG, M. JONES et P. PLASSMANN. An efficient parallel algorithm for mesh smoothing. Dans *Proceedings of the 4th International Meshing Roundtable*, pp. 47–58, 1995. (cf. p. 66)
- [47] S. A. CANANN, J. R. TRISTANO, M. L. STATEN ET AL. An Approach to Combined Laplacian and Optimization-Based Smoothing for Triangular, Quadrilateral, and Quad-Dominant Meshes. Dans *Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable*, pp. 85–102, 1998. (cf. p. 66)

- [48] X. JIAO, D. WANG et H. ZHA. Simple and Effective Variational Optimization of Surface and Volume Triangulations. Dans *Proceedings of the 17th International Meshing Roundtable*, pp. 315–332, 2008. (cf. p. 66)
- [49] A. GARGALLO-PEIRÓ, X. ROCA et J. SARRATE. A surface mesh smoothing and untangling method independent of the CAD parameterization. *Computational Mechanics*, **53** (4) : pp. 587–609, 2014. (cf. p. 66)
- [50] T. V. THOMPSON, II et E. COHEN. Direct haptic rendering of complex trimmed NURBS models. Dans *ACM SIGGRAPH 2005 Courses*, SIGGRAPH '05. ACM, New York, NY, USA, 2005. (cf. p. 69)
- [51] S. CROZET. *Efficient contact determination between solids with boundary representations (B-Rep)*. Thèse de Doctorat, Communauté Université Grenoble Alpes, 2017. (cf. p. 69)
- [52] M. A. LACHANCE. Chebyshev economization for parametric surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **5** (3) : pp. 195–208, 1988. (Pas cité)
- [53] O. P. BRUNO, Y. HAN et M. M. POHLMAN. Accurate, high-order representation of complex three-dimensional surfaces via Fourier continuation analysis. *Journal of Computational Physics*, **227** (2) : pp. 1094 – 1125, 2007. (Pas cité)
- [54] R. PEYRET. *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*, volume 148. Springer Science & Business Media, 2013. (Pas cité)
- [55] A. BOWYER. Computing dirichlet tessellations. *The Computer Journal*, **24** (2) : pp. 162–166, 1981. (Pas cité)
- [56] D. F. WATSON. Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes. *The Computer Journal*, **24** (2) : pp. 167–172, 1981. (Pas cité)
- [57] W. CHO, N. M. PATRIKALAKIS et J. PERAIRE. Approximate development of trimmed patches for surface tessellation. *Computer-Aided Design*, **30** (14) : pp. 1077–1087, 1998. (Pas cité)
- [58] P. J. FREY et H. BOROUCHAKI. Geometric surface mesh optimization. *Computing and Visualization in Science*, **1** (3) : pp. 113–121, 1998. (Pas cité)
- [59] J. L. F. AYMONE, E. BITTENCOURT et G. J. CREUS. Simulation of 3D metal-forming using an arbitrary Lagrangian–Eulerian finite element method. *Journal of Materials Processing Technology*, **110** (2) : pp. 218–232, 2001. (Pas cité)
- [60] X. JIAO, A. COLOMBI, X. NI et J. HART. Anisotropic mesh adaptation for evolving triangulated surfaces. *Engineering with Computers*, **26** (4) : pp. 363–376, 2010. (Pas cité)
- [61] F. ALAUZET, B. FABRÈGES, M. A. FERNÁNDEZ et M. LANDAJUELA. Nitsche-XFEM for the coupling of an incompressible fluid with immersed thin-walled structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **301** : pp. 300–335, 2016. (Pas cité)
- [62] M. S. CASALE. Free-Form Solid Modeling with Trimmed Surface Patches. *IEEE Computer Graphics and Applications*, **7** (1) : pp. 33–43, 1987. (Pas cité)
- [63] R. E. BARNHILL et S. KERSEY. A marching method for parametric surface/surface intersection. *Computer Aided Geometric Design*, **7** (1-4) : pp. 257–280, 1990. (Pas cité)
- [64] S. KRISHNAN, A. NARKHEDE et D. MANOCHA. BOOLE: A System to Compute Boolean Combinations of Sculptured Solids. Rapport technique, Department of Computer Science, University of North California, 1994. (Pas cité)

- [65] H. FREEMAN et R. SHAPIRA. Determining the Minimum-Area Encasing Rectangle for an Arbitrary Closed Curve. *Communications of the ACM*, **18** (7) : pp. 409–413, 1975. (Pas cité)
- [66] G. MONGE et J. LIOUVILLE. *Application de l'analyse à la géométrie*. Bachelier, 1850. (Pas cité)
- [67] J. R. ROSSIGNAC et A. A. REQUICHA. Offsetting operations in solid modelling. *Computer Aided Geometric Design*, **3** (2) : pp. 129–148, 1986. (Pas cité)