I Définition et notation

A Matrices n*p

On note $M_{n,p}$ l'ensembles des matrices n lignes et p colonnes.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix}$$

B Opérations sur les matrices

1.Transpositions

Soit une matrice $A \in M_{n,p}$, on appelle transposée de A et on note ${}^{t}A$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & -4 \\ 12 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 2 & 5 & 5 \\ 7 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Remarque: Transposer une matrice revient à échanger lignes et colonnes

2.Addition

Soit A et $B \in M_{n,p}$, on appelle somme des matrices A et B et on note A+B la matrice $S \in M_{n,p}$ telle que Sij=Aij+Bij.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & -4 \\ 12 & 5 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 3 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 10 \\ 8 & 10 & -1 \\ 10 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

Remarque: On ne peut additionner que des matrices de même dimension.

3.Produit par un scalaire

Soit $A \in M_{n,p}$ et $k \in R$, on note k.A.

$$2 . \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 10 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

4.Produit matriciel

Soit A ∈ $M_{n,p}$ et B ∈ $M_{n,p}$, on appelle produit matriciel de A par B et note A*B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 13 \\ 7 & 10 & 13 \\ 7 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

Remarque:
i) Pour multiplier 2 matrice, le nombre de colonne de celle de gauche est égal nombre de ligne de celle de droite.
ii) Le produit possède alors le même nombre de ligne de celle de gauche et le même nombre de colonne de celle de droite.

II Matrices carrées

A Définition,notation

L'ensemble Mn,p est noté par la suite Mn;ses éléments sont appelés matrices carrées car ayant le même nombre de lignes que de colonnes.

B Matrices carrées particulières

Soit A ∈ Mn

1.Matrices triangulaires

A est une matrice triangulaire inférieure ⇔ ∀ i;j ∈ 1,n, $i < j \Rightarrow A_{ij}=0$;
A est une matrice triangulaire supérieure ⇔ ∀ i;j ∈ 1,n, $i > j \Rightarrow A_{ij}=0$;
A est une matrice diagonale ⇔ ∀ i;j ∈ 1;n , $i \neq j \Rightarrow A_{ij}=0$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.Matrices symétrique

A est une matrice symétrique ⇔ $A = {}^tA$.

3.Matrice identité

On note In et on appelle matrice identité la matrice Mn.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III Inversion d'une matrice carrée: déterminant et comatrice

A Définitions et notation

Le déterminant de la matrice A, noté det(A) ou encore |Aij| et le cofacteur de Akl, noté ici Ckl sont deux nombres réels définis par:

$$:\begin{cases} det(A) = \sum_{p=1}^{n}(a_{1p}c_{1p}) \\ c_{kl} = (-1)^{k+l}|a_{ij}|_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n \\ i\neq k \text{ et } j\neq l}} \\ \forall\, a \in \mathbb{R},\ |a| = a \end{cases}$$

La matrice des cofacteurs est appelée comatrice de A.
On dit que la matrice A est inversible si et seulement si il existe B &isin Mn , A*B=B*A=In.
B est alors appelée matrice inverse de A et notée A^{-1}.
Remarque: On peut calculer le déterminant selon n'importe quelle ligne ou colonne.

B Propriété fondamentale

A est inversible ⇔ det(A) ≠ 0 Si A est inversible alors A^{-1}=(1/det(A))*^{t}com(A)

IV Inversion d'une matrice carrée: méthode de Gauss

A Opérations élémentaires

On note Lk ↔ Ll l'opération qui consiste à échanger la k ligne avec la l ligne.
On note Lk ← λLk avec λ ≠ 0 l'opération consistant à multiplier la k ligne par lambda.
On note Lk ← Lk+λLl avec λ ≠ 0 l'opération qui consiste à ajouter lambda fois la l ligne à k.
Quand on effectue une opération sur la matrice A, on doit l'effectuer aussi transformer la matrice inverse.
Ces opérations ne changent pas la nature d'une matrice.
Remarque: On peut évidemmen définir les mêmes opérations sur les colonnes.

B Principes de la méthode de Gauss

Si A est inversible, on lui applique des opérations élémentaires jusqu'à obtenir la matrice In et on applique simultanément les mêmes opérations à la matrice In.
La transformée de In est alors la matrice inverse de A.

1 0 0 2 1 0 0 2 1	1 0 0 0 1 0 0 0 1
1 0 0 0 1 0 0 2 1	1 0 0 -2 1 0 0 0 1
1 0 0 0 1 0 0 0 -1	1 0 0 -2 1 0 4 -2 1
1 0 0 0 1 0 0 0 1	1 0 0 -2 1 0 -4 2 -1

Si A n'est pas inversible, une transformée de A par ces opérations sera triangulaire avec un éléments diagonal nul,donc de déterminant nul.
Pivot: on peut par exemple transformer A en une matrice triangulaire supérieure, condition que toute colonne possède un élément non nul pendant cette transformation: on normalise le pivot puis on créer des 0.

V Application à la résolution de système linéaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*, \forall\,(i\,;j) \in [\![1\,;n]\!]^2, a_{ij} \in \mathbb{R}$ et $(y_1\,;\,y_2\,;\,y_3\,;\dots;y_n) \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n$

Supposons : A est inversible ; alors le système (S) :
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = y_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

équivaut à
$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1}\times A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$