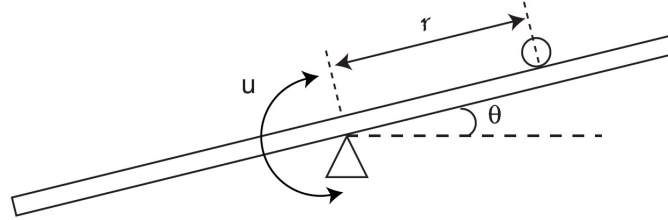


La balle sur une barre



Il s'agit d'un système à deux degrés de liberté : l'angle θ que fait la barre par rapport à l'horizontale et la position r de la balle qui roule sans glisser sur cette barre. Ce système est équipé d'un seul moteur. Fixé sur l'axe de rotation de la barre ce moteur délivre un couple u . On note J le moment d'inertie de la barre par rapport à son axe de rotation, m la masse de la balle de rayon R , J_b le moment d'inertie par rapport à son centre, g l'accélération de la pesanteur. On souhaite concevoir un algorithme de contrôle qui, à partir des capteurs de positions r et θ , puisse jouer avec des balles de masses m , d'inerties J_b et de tailles R très diverses. Noter que $J_b = \sigma m R^2$ avec σ entre 0 et 1 dépendant de la densité en fonction du rayon.

1. Modélisation

- (a) Montrer que l'énergie cinétique du système est

$$T = \frac{J}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{J_b}{2} \left(\frac{\dot{r}}{R} \right)^2$$

(on négligera dans l'énergie cinétique de la bille en rotation sur elle même, l'effet de la rotation de la barre $\dot{\theta}$).

- (b) Calculer l'énergie potentielle U en fonction de r et θ . On supposera que l'axe de rotation est au niveau du centre de gravité de la barre.
- (c) Dédurre de ce qui précède les équations de Lagrange suivantes :

$$(1 + \sigma) \frac{d}{dt}(\dot{r}) = r \dot{\theta}^2 - g \sin \theta, \quad \frac{d}{dt}((J + m r^2) \dot{\theta}) = -m g r \cos \theta + u$$

- (d) Avec $x = (r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$, montrer que le système sous-forme d'état $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$ s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 = \frac{1}{1 + \sigma} x_1 (x_4)^2 - \frac{g}{1 + \sigma} \sin x_3 \\ \frac{d}{dt}x_3 = x_4 \\ \frac{d}{dt}x_4 = \frac{1}{J + m(x_1)^2} u - \frac{m g}{J + m(x_1)^2} x_1 \cos x_3 - \frac{2m}{J + m(x_1)^2} x_1 x_2 x_4 \end{cases} \quad (1)$$

2. Simulation boucle ouverte.

- (a) On utilise d'abord $u = 0$. Faire une simulation avec Simulink des équations (1). On utilisera les valeurs $m = 600\text{g}$, $R = 60\text{mm}$, $\sigma = 0.8$, $J = 0.02 \text{ kg.m}^2$. Montrer que, sauf si le système part exactement de l'équilibre, les trajectoires divergent.
- (b) On veut démarrer à $x_1 = 1$. Quelle est la commande d'équilibre correspondante ? Appliquer cette commande dans la simulation et constater la divergence du système s'il est imparfaitement initialisé.

3. Placement de pôles.

- (a) Donner le point d'équilibre de (1) associé à $u = 0$. Ecrire les équations du système linéarisé. Calculer les pôles en boucle ouverte (on posera $\omega = \sqrt[4]{\frac{mg^2}{(1+\sigma)J}}$) et discuter la stabilité. Vérifier numériquement la valeur des valeurs propres avec Matlab.
- (b) Montrer que le linéaire tangent est commandable. Quelle est sa sortie de Brunovsky. Vérifier le conditionnement de la matrice de commandabilité avec Matlab.
- (c) Calculer le bouclage d'état $u = Kx$ qui place les pôles en $(-\omega, -\omega, \omega e^{\frac{3i\pi}{4}}, \omega e^{\frac{-3i\pi}{4}})$. Vérifier les valeurs propres en boucle fermée avec Matlab.

4. Simulation boucle fermée.

- (a) Rajouter au modèle Simulink les équations du contrôleur.
 - (b) Vérifier que le point d'équilibre 0 est bien asymptotiquement stable.
 - (c) Utiliser des conditions initiales loin de l'équilibre. Que constate-on sur le comportement du système ?
 - (d) Tester la robustesse en simulant une incertitude des paramètres.
 - (e) Rajouter du bruit sur les capteurs. Que constate-on ?
5. **Contrôle hiérarchisé.** On pose $u = \frac{J\omega}{\epsilon}(v - x_4)$ où ϵ est un petit paramètre > 0 (typiquement $\epsilon = 1/10$) et où v , le nouveau contrôle, est une consigne lentement variable de la vitesse de rotation de la barre ($|\dot{v}| \ll \omega|v|$).
- (a) Justifier l'approximation lente suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 = \frac{1}{1+\sigma}x_1v^2 - \frac{g}{1+\sigma}\sin x_3 \\ \frac{d}{dt}x_3 = v \end{cases} \quad (2)$$

- (b) Quel est le linéaire tangent autour de l'équilibre $v = 0$ et $x_1 = 0$. Calculer les pôles en boucle ouverte de (2).
- (c) Donner le bouclage d'état lent : $v = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$ qui place les pôles en

$$(-\omega, \omega e^{\frac{3i\pi}{4}}, \omega e^{\frac{-3i\pi}{4}})$$

6. Simulation boucle fermée hiérarchisée.

Modifier le contrôleur de la précédente simulation et estimer les performances de cette commande hiérarchisée.

7. **Discussion.** Avec les questions 3c et 5c, on dispose de deux algorithmes pour stabiliser la balle autour de l'origine. Quel est l'algorithme a priori le plus à même de répondre à la question de départ (la robustesse par rapport aux types de balle) ? Quels sont aussi ses inconvénients cependant ?