PC1: Eléments de Correction

MF101

Dans le cadre d'un écoulement de fluide newtonien incompressible, on trouvera en annexe du livre de cours les expressions de la conservation de la masse, les équations de Navier-Stokes, ainsi que certaines relations utiles d'analyse vectorielle en annexe C

1 Ecoulement de Poiseuille plan

L'écoulement est supposé non pesant donc $\vec{g}$ est négligeable. La stationarité impose que $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Le mouvement est supposé rectiligne, $V(x, y) = 0$ et $W(x, y) = 0$. Le mouvement est plan donc il ne dépend pas de la coordonnée z.
La conservation de la masse avec $\rho = Cte$ s'écrit alors tout simplement:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

On a donc U qui est une fonction de y uniquement. Les équations de Navier-Stokes s'expriment sous la forme ci-dessous:

$$\mu \, \frac{d^2U}{d^2y} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

On déduit de (3) et (4) que $P = P(x)$ et donc (2) s'intègre pour donner:

$$U = \frac{1}{2\mu} \, \frac{dP}{dx} \, y^2 + Ay + B \tag{5}$$

Or le fluide est visqueux donc il adhère aux parois et l'on doit écrire:

$$U(y = \pm h) = 0 \qquad \text{en } y = \pm h \tag{6}$$

Finalement le profil sous forme parabolique s'écrit:

$$U(y) = \frac{1}{2\mu} \, \frac{dP}{dx} \left(y^2 - h^2\right) \tag{7}$$

la vitesse est maximale en $y = 0$
Les seules forces présentes sont les efforts de pression sur les parois et les frottements visqueux. L'équation de quantité de mouvement (2), peut être réécrite sous la forme:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \tag{8}$$

avec $\tau = \mu \frac{dU}{dy}$ le frottement visqueux. L'équation (8) est valable quelque soit y donc en particulier sur les parois. On voit donc que les forces de pression et de viscosité s'équilibrent exactement. Il y a une diminution de la pression dans le sens de l'écoulement sans qu'il y ait changement de vitesse.

2 Ecoulement de Couette

2.1 Cas général

Avec les hypothèses de l'écoulement permanent on a $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. D'autre part, la symétrie de révolution impose: $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$. Les deux cylindres sont supposés infiniments longs, si bien qu'il n'y a pas lieu de considérer de conditions d'entrées et de sorties en vitesse. Cette géométrie est idéalisée. Elle suppose qu'il n'y a pas de débit de masse dans une section perpendiculaire à l'axe z. On a donc $V_z(r, z) = 0$. L'équation de conservation de la masse s'écrit:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} = 0 \tag{9}$$

Le fluide étant visqueux, il adhère aux cylindres. On doit donc avoir:

$$\text{sur le cylindre } r = R_1\text{:}\;\; V_r = 0 \;\text{ et }\; V_\theta = \omega_1 R_1 \tag{10}$$

$$\text{sur le cylindre } r = R_2\text{:}\;\; V_r = 0 \;\text{ et }\; V_\theta = \omega_2 R_2 \tag{11}$$

De (9) on tire que $V_r = C(z)/r$, compte tenu de (10) et (11) on en déduit que $V_r = 0$. Le champ de vitesse est donc selon V_θ. Les équations de Navier Stokes en cylindriques s'écrivent:

$$-\rho\frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} \tag{12}$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{13}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \tag{14}$$

On obtient de (14) la pression:

$$P(r, z) = f(r) \tag{15}$$

De (12) on tire le champ de vitesse:

$$V_\theta^2 = \frac{r}{\rho}\frac{df}{dr} \tag{16}$$

L'équation (13) est alors une équation différentielle qui s'intègre pour donner compte tenu des conditions aux limtes citées plus haut:

$$V_\theta = \frac{A}{2}\,r + \frac{B}{r} \;\text{ avec }\; A = 2\frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \;\text{ et }\; B = (\omega_1 - \omega_2)\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \tag{17}$$

On laissera au lecteur le loisir de déterminer f et donc le champ de pression définitif.

2.2 viscosimètre

On suppose maintenant que le cylindre extérieur est au repos. Le champ de vitesse est alors obtenu en faisant dans (17) $\omega_2 = 0$. La contrainte tangentielle s'explicite sous la forme:

$$\tau_{r\theta} = \mu\left[r\frac{\partial\left(\frac{V_\theta}{r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right] = -2\mu B/r^2 \tag{18}$$

La force qui s'exerce par unité de longueur s'écrit:

$$dF = |\tau_{r\theta}(R_2)| \times R_2 d\theta = 2\mu\frac{B}{R_2}d\theta \tag{19}$$

l'expression de B est donnée en (17).Le moment de cette force par rapport au centre du cylindre s'exprime $d\mathcal{C} = R_2 dF$ de sorte que l'intensité du couple vaut:

$$\mathcal{C} = \int_0^{2\pi} 2\mu B d\theta = 4\pi\mu\omega_1\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \tag{20}$$

2.3 Cylindre en rotation en milieu fluide

On considère le cas particulier où le cylindre extérieur supposé immobile devient infiniment grand: $R_2 \to \infty$. Immédiatement on obtient d'après (17):

$$V_\theta(r) = \frac{\omega_1 R_1^2}{r} \tag{21}$$

On peut aisément calculer (cf cours annexe C) le rotationnel du vecteur vitesse en cylindrique. Celui ci est nul. Ainsi un écoulement qui tourne n'est pas nécessairement irrotationnel. Le rotationnel en un point caractérise la rotation instantanée de la particule fluide sur elle même.

2.4 Mouvement de rotation en bloc

Nous considérons maintenant un autre cas particulier qui est est celui d'un écoulemnt de Couette en l'absence de cylindre intérieur $R_1 = 0$. On peut toujours de (17) en déduire que

$$V_\theta = \omega_2 r \tag{22}$$

Si l'on calcule le rotationnel, on montre que la seule composante non nulle est selon z et vaut ω_2. Il est donc uniforme dans tout le fluide. Le mouvement du fluide se fait comme un solide. On parle de mouvement en bloc ou rigidifiant. L'étude de ces deux mouvements permet de construire une structure tourbillonnaire irrotationnelle sauf au coeur: vidange d'un lavabo, tornade (cf cours n3)