Série 6

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité sousjacent. Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle (complétée).

Nous admettrons sans démonstration l'extension suivante d'un résultat du Cours. Soient $X = (X^1, ..., X^m), Y = (Y^1, ..., Y^n)$ des processus stochastiques admettant tous leur crochets mutuels. Soient $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Alors

$$[f(X), g(Y]_t = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \partial_i f(X_s), \partial_j g(Y_s) d[X^i, Y^j]_s.$$

1

Soit $\sigma, u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Soit $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, y) = b(t, u(t, y)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(t, y) = \sigma(t, u(t, y)). \end{cases}$$

(a) Posons $X_t = u(t, W_t)$, $t \geq 0$.

Vérifier que $(X_t)_{t\geq 0}$ est solution de l'équation de Stratonovich suivante :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \circ dW_s,$$

pour un certain $x \in \mathbb{R}$.

Correction. Nous pouvons appliquer la formule d'Itô pour écrire

$$\begin{aligned}
X_t &= u(t, W_t) = u(0,0) + \int_0^t \partial_s u(s, X_s) ds \\
&+ \int_0^t \partial_y u(s, W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_{yy}^2 u(s, W_s) ds \\
&= x + \int_0^t b(s, u(s, W_s)) ds + \int_0^t \sigma(s, u(s, W_s)) dW_s \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial u}(s, u(s, W_s)) \sigma(s, u(s, W_s)) ds, \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

où $x := u(0,0)$, car

$$\begin{aligned}
\partial_{yy}^2 u(t, y) &= \frac{\partial \left(\sigma(t, u(t, y))\right)}{\partial y} \\
&= \sigma(t, u(t, y)) \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, u(t, y)).
\end{aligned}$$

Compte tenu du résultat introductif, on a

$$\begin{aligned}
[\sigma(\cdot, u(\cdot, W)), W]_t &= \int_0^t \partial_s \sigma(s, u(s, W_s)) d \underbrace{[\cdot, W]_s}_{=0} \\
&+ \int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial u}(s, u(s, W_s)) d[u(\cdot, W), W]_s \\
&= \int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial u}(s, u(s, W_s)) \underbrace{\partial_y u(s, W_s)}_{=\sigma(s, u(s, W_s))} ds.
\end{aligned}$$

Par (1.1) le résultat suit.

(b) Utiliser l'argument précédent pour déterminer la solution de l'équation suivante (au sens d'Itô) :

$$\begin{cases} dX_t = \left[\dfrac{2}{1+t}X_t - a(1+t)^2\right]dt + a(1+t)^2 dW_t \\ \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Corrections. L'équation précédente peut s'écrire sous la forme (a) où

$$\begin{cases} b(t,y) & = & \frac{2y}{1+t} - a(1+t)^2 \\ \sigma(t,u) & = & a(1+t)^2. \end{cases}$$

Cherchons u de la forme décrite dans l'énoncé. D'abord

$$\partial_y u(t,y) = a(1+t)^2,$$

donne

$$u(t,y) = a(1+t)^2 y + C(t), \tag{1.2}$$

où C ne dépend que t. Dérivons (1.2) pour obtenir

$$\partial_t u(t,y) = 2a(1+t)y + C'(t). \tag{1.3}$$

Par ailleurs on doit avoir

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,y) &= b(t,u(t,y)) \\ &= \frac{2}{1+t}u - a(1+t)^2. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Cela, via (1.4), donne

$$\begin{aligned}2a(1+t)y + C'(t) &= \frac{2}{1+t}(a(1+t)^2 y + C(t)) - a(1+t)^2 \\ &= 2ay(1+t) + 2\frac{C(t)}{1+t} - a(1+t)^2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

D'où

$$C'(t) - 2\frac{C(t)}{1+t} = -a(1+t)^2. \tag{1.6}$$

Il s'agit de résoudre l'EDO précédente. On procède par la technique de la variation des constantes. (1.6) sans second membre donne

$$C(t) = D(1+t)^2.$$

On va chercher les solutions de (1.6) sous la forme

$$C(t) = D(t)(1+t)^2, \tag{1.7}$$

En dérivant (1.7) et en remplaçant dans (1.6) on obtient

$$\begin{aligned} D'(t)(1+t)^2 &+ 2D(t)(1+t) - 2D(t)(1+t) \\ &= -a(1+t)^2, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$D'(t) = -a \Rightarrow D(t) = -at + C_1,$$

où C_1 est une constante. Il suit

$$C(t) = (-at + C_1)(1+t)^2.$$

Par conséquent

$$u(t, y) = (1+t)^2(ay - at + C_1)$$

et finalement

$$X_t = (1+t)^2(C_1 - at + aW_t),$$

est solution de l'EDS donnée. En posant $x = X_0 = C_1$, on a

$$X_t = (1+t)^2(x - at + aW_t). \tag{1.8}$$

Vérification (formelle).

$$\begin{aligned} dX_t &= (1+t)^2(-adt + adW_t) \\ &+ 2(1+t)(x - at + aW_t)dt \\ \frac{2}{1+t}X_t &= 2(1+t)(x - at + aW_t)dt. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} dX_t - \frac{2}{1+t}X_t &= (1+t)^2(-adt + adW_t) \\ &= a(1+t)^2(-dt + dW_t), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

(c) Ecrire le "générateur" associé à la diffusion précédente et le problème parabolique déterministe associé à $v(t,x) = E(f(X_T^{t,x}))$ où f est une fonction réelle positive.

Correction.

Le générateur vaut

$$\mathcal{A}_t f(x) = \frac{1}{2}a^2(t,x)f''(x) + b(t,x)f'(x),$$

où

$$\begin{aligned} b(t,x) &= \frac{2x}{1+t} - a(1+t)^2, \\ a(t,x) &= a(1+t)^2,\ (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Remarque 1.1 *Si v est une solution de*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{A}_t v &=& 0 \\ v(T,x) &=& f(x), \end{array} \right.$$

alors $v(t,x) = E(f(X_T^{t,x}))$.

2 Transformation de Zvonkin

Soit $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ respectivement de classe C^1 et C^0, $x \in \mathbb{R}$ telle que $\sigma > 0$. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une solution de

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s. \tag{2.1}$$

(i) Trouver une solution particulière strictement croissante h de l' équation

$$\frac{1}{2}\sigma^2 h'' + bh' = 0. \tag{2.2}$$

Poser $\tilde{\sigma}(x) = (\sigma h')(h^{-1}(x))$ où h^{-1} est l'inverse de h.

Correction. En posant $k = h'$, l'équation précédente devient

$$\frac{k'}{2} = -\frac{b}{\sigma^2}k,$$

ce qui implique (en posant $k(0) = 1$),

$$k(x) = \exp\left(-2\int_0^x \frac{b}{\sigma^2}(y)dy\right),\ x \in \mathbb{R},$$

produit une solution. Par conséquent une solution h de (2.2) telle que $h(0) = 0$ est

$$h(x) = \int_0^x \exp\left(-2\int_0^z \frac{b}{\sigma^2}(y)dy\right) dz,\ x \in \mathbb{R}.$$

Comme h' est strictement positive, h est strictement croissante. De plus

$$\begin{aligned} A &:= \lim_{x\to-\infty} h(x) = -\int_{-\infty}^0 \exp\left(-2\int_0^z \frac{b}{\sigma^2}(y)dy\right) dz \\ B &:= \lim_{x\to+\infty} h(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-2\int_0^z \frac{b}{\sigma^2}(y)dy\right) dz. \end{aligned}$$

Or $h : \mathbb{R} \to]A, B[$ est un homéomorphisme et $h^{-1} :]A, B[\to \mathbb{R}$.

(ii) Vérifier que $Y_t = h(X_t)$ définit une solution de

$$\begin{cases} dY_t &= \tilde{\sigma}(Y_t)dW_t \\ Y_0 &= h(x). \end{cases} \tag{2.3}$$

Correction. Supposons X solution de (2.1). Comme $h \in C^2(\mathbb{R})$, la formule d'Itô donne

$$\begin{aligned} Y_t &= h(x) + \int_0^t h'(X_s)dX_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t h''(X_s)d[X]_s \\ &= h(x) + \int_0^t h'(X_s)b(X_s)ds \\ &+ \int_0^t h'(X_s)\sigma(X_s)dW_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t h''(X_s)\sigma^2(X_s)ds \\ &= h(x) + \int_0^t \underbrace{(h' \circ \sigma)(h^{-1}(Y_s))}_{\tilde{\sigma}(Y_s)} dW_s. \end{aligned}$$

Supposons dès maintenant que σ' et $\frac{b}{\sigma}$ sont bornées.

(iii) Vérifier que le problème (2.3) a une unique solution.

Corrections. Nous allons vérifier que $\tilde{\sigma}$ est Lipschitz. Pour cela il suffit de montrer que sa dérivée est bornée. Nous avons

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}' &= (\sigma h')'(h^{-1})(h^{-1})' \\
&= \big(\sigma' h' + \sigma h''\big)(h^{-1})\,\frac{1}{h'(h^{-1})} \\
&= \left(\sigma' + \sigma\frac{h''}{h'}\right) \circ h^{-1} \\
&= (\sigma' + \sigma(\log h')') \circ h^{-1} \\
&= (\sigma' - 2\frac{b}{\sigma}) \circ h^{-1},
\end{aligned}$$

qui est bornée par hypothèse. Pour la dernière égalité on a utilisé

$$\log h'(x) = \int_0^x \frac{-2b}{\sigma^2}(z)dz.$$

D'où $\tilde{\sigma}$ est Lipschitz. Par le théorème fondamental d'existence et unicité des EDS il existe une unique solution Y de (2.3). De plus

$$E(\sup_{t\leq T} |Y_t|^2) < \infty. \tag{2.4}$$

(iv) Déduire que Y est alors une $\mathcal{F}$-martingale.

Corrections. Nous avons

$$Y_t = h(x) + \int_0^t \tilde{\sigma}(Y_s)dW_s.$$

Pour montrer que Y est une martingale (de carré intégrable) nous allons montrer que

$$E\left(\int_0^T \tilde{\sigma}^2(Y_s)ds\right) < \infty.$$

Or, si C est une constante de croissance linéaire de $\tilde{\sigma}$

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^T \tilde{\sigma}^2(Y_s)ds\right) &\leq 2C^2 E\left(\int_0^T (1+|Y_s|^2)ds\right) \\ &\leq 2C^2 T(1 + E(\sup_{s\leq T}|Y_s|^2) < \infty. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(v) Expliquer si les arguments précédents nous permettent de vérifier l' existence ou l'unicité pour le problème (2.1).

Corrections. Pour le moment nous n'avons montré que l'unicité pour le problème (2.3).

Série 6. PRB203. Introduction au calcul stochastique et applications FR 2020-21 **fin**.