$f: U \subset E \to F$ (U ouvert). f diff en $a \Leftrightarrow$ $\forall v$, avec $f(a+v) = f(a) + Df(a).v + o(\|v\|)$ ①

appli différentiable en $a \Rightarrow$ continue en a

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f'(t_0) = \frac{f(t_0+h) - f(t_0) + o(h)}{h}$

$f: \mathbb{R} \to F$: $f'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(t_0+h) - f(t_0)) \in F$

$Df(t_0).h = hf'(t_0)$.

$\Phi: M \mapsto M^{-1}$: $D\Phi(M).H = -M^{-1}HM^{-1}$

$Df(a).v = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$

$Df(a).v = \frac{d}{dt}(f(a+tv))_{/t=0}$ dérivée suivant v en a.

$i=1,\dots,n$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = Df(a).e_i = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_i+t,\dots,a_n) - f(a)}{t}$

$Df(a).v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).v_i \in F$ $\quad Df(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{ij}$

$D^2f(a) \in L(E, L(E,F))$, mais on peut la voir comme un él de $L(E \times L(E,F))$ (bilinéaire). ③

↳ schwarz : $D^2f(a).(h_1,h_2) = D^2f(a)(h_2,h_1)$

Taylor ordre 1 : $f(a+h) = f(a) + \sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(\|h\|)$

(f non classe C^1, mais les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent continues)

Tay. od 2 : C^2

$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o(\|h\|^2)$

Pb? résoudre $y = f(x)$

Inv. Locale : $f: E \to F$ de classe C^k sur un $v(a)$.

Hyp : $Df(a) \in L(E,F)$ inversible.

$\Rightarrow$ Il existe V ouvert $\subset E$ contenant a, $W \subset F$ ouvert contenant $f(a)$

tq f bij de V dans $W = f(V)$ dont l'inverse $f^{-1}: W \to V$

de classe C^k ie. $(x \in V \wedge y = f(x)) \Leftrightarrow (y \in W \wedge x = f^{-1}(y))$

$f(x) = y$ admet un unique $x \in V$ solution (! il peut y en avoir en dehors de V)

$D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a)$ / $Dg\circ f(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$ / $\frac{\partial (g\circ f)^i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$

f classe C^1 en a, Diff sur $V \in v(a)$ + $Df: V \to L(E,F)$ continue en a ②

T.A.F. $f: U \to F$ diff. sur U, $a,b \in U$ tq $[a,b] \subset U$.

On a : $\|f(b) - f(a)\| \leq \left(\sup_{x\in[a,b]} \|Df(x)\|\right) \|b-a\|$

avec $\|.\|$ ici pour $Df(x)$: $\|Df(x)\| = \sup_{v\in E\setminus\{0\}} \frac{\|Df(x).v\|_F}{\|v\|_E}$

Conséq : Si $f: U \subset E \to F$ classe C^1, alors f lipschitz sur toute boule fermée contenue ds U.

Prop : $f: U \subset \mathbb{R}^n \to F$, $a \in U$: pse :

(1) : f est C^1 en $a \in U$

(2) : les dériv. partielles en a def existent / contin.

• f 2 fois diff en a si, f diff sur $U \in v(a)$ + Df diff en a : $D^2f(a) = D(Df)(a)$

$D(f^{-1})(y) = Df(x)^{-1}$ pour $x \in V$ et $y = f(x)$ ④

$\det Df(a) = \det Jac(f)(a)$.

Fct implicite : f de classe C^k tq $f(a,b) = 0$ et $D_y f(a,b) \in L(F,G)$ inversible. ($f: U \subset E \times F \to G$, $D_y f(a,b)$ diff en b de $y \mapsto f(a,y)$)

Pb? résoudre $f(x,y) = 0$

$\Rightarrow$ Il existe $V \subset E$ vois ouvert de a, $W \subset F$ voisin de b avec $V \times W \subset U$, une unique $\varphi: V \to W$ C^k tq :

$(x \in V, y \in W, f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V, y = \varphi(x))$

↳ $\forall x \in V$: $f(x,\varphi(x)) = 0 \underset{\text{Diff}}{\Rightarrow} D_x f(x,\varphi(x)) + D_y f(x,\varphi(x)) \circ D\varphi(x) = 0$

$D_y f(x,\varphi(x))$ inv $\Rightarrow D\varphi(x) = -[D_y f(x,\varphi(x))]^{-1} \circ D_x f(x,\varphi(x))$

Réduction Jordan - Chevalley : $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$: $J_i = \lambda_i I_{p_i} + N_i$ (N_i nilp, $p_i = \dim \Gamma_i$) ⑥

$A = D + N$ avec $DN = ND$ (Dunford).

$e^{tJ_i} = e^{t\lambda_i} \sum_{p=0}^{m_i-1} \frac{(tN_i)^p}{p!}$, $A = P \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_r} \end{pmatrix} P^{-1}$

$x'(t) = \alpha x(t) \Rightarrow x(t) = x_0 e^{(t-t_0)\alpha}$ ⑤

Sol pour A diagonale $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$: $x(t) = \begin{pmatrix} x_{10} e^{\alpha_1 t} \\ \vdots \\ x_{n0} e^{\alpha_n t} \end{pmatrix}$

Comp asympt. $\alpha_i < 0$ $\forall i \Rightarrow$ CV $\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

$\alpha_i \leq 0$: bornée

$\exists \alpha_i > 0$: $\|x\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ $\quad (x_{i0} \neq 0)$

• $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} = e^{tA}A$ / $AB = BA \Leftrightarrow e^{A+B} = e^A e^B$

• $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ / $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$ $\quad e^A = \text{diag}(e\dots)$

Th. $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$: unique sol de $x' = Ax$ tq $x(t_0) = x_0$: $x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0$.

Cayley-Hamilton : $\chi_A(A) = 0$.

$\mathbb{C}^n = \bigoplus_i \Gamma_i$ avec $\Gamma_i = \text{Ker}_{\mathbb{C}}(A - \lambda_i I)^{p_i}$

$A|_{\Gamma_i} = \lambda_i I_{\Gamma_i} + N_i$ nilp d'ordre $\leq p_i$ $\quad N_i^{p_i} = 0$ multiplicité

A Diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\dim \Gamma_i = \dim \Pi_i = p_i$

Sol : $x' = Ax$:

$\mathbb{C}^n$ $\quad x(t) = \sum_{1\leq i\leq r} e^{t\lambda_i} \left(\sum_{0\leq k\leq m_i-1} t^k v_{i,k} \right)$, $v_{ik} \in \Gamma_i$ ($v_{i,k} = 1/k!\, N_i^k . x_i$; m_i indice nilpotence.)

$\mathbb{R}^n$: $x(t) = \sum_{1\leq j\leq q} e^{t\alpha_j} \left(\sum_{0\leq k\leq m_j-1} t^k (\cos(\beta_j t) a_{jk} + \sin(\beta_j t) b_{jk}) \right)$

$\alpha_j = \text{Re}(\lambda_j)$ $\beta_j = \text{Im}(\lambda_j)$, $a_{jk}, b_{jk} \in E_j$

Avec $E_j = \Gamma_{\lambda_j} \cap \mathbb{R}^n$, réels et $(\Gamma_{\lambda_j} \oplus \Gamma_{\bar\lambda_j}) \cap \mathbb{R}^n$ cplx.

Si $x(t) = x^j(t)$, $j = 1,\dots,q$:

$x^j(t) = e^{\alpha_j t} \left(\sum_{0\leq k\leq m_j-1} t^k (\cos(\beta_j t) a_{jk} + \sin(\beta_j t) b_{jk}) \right)$

Si $x^j(0) = 0$ / $x^j(.) \equiv 0$.

$E^s = \left[\bigoplus_{\text{Re}(\lambda_j)<0} \Gamma_j \right] \cap \mathbb{R}^n = \bigoplus_{\text{Re}(\lambda_j)} E_j$ stable ⑦

$E^u = \bigoplus_{\text{Re}(\lambda_j)>0} E_j$ instable / $E^c = \bigoplus_{\text{Re}=0} E_j$ indifférent.

$\mathbb{R}^n = E^u \oplus E^s \oplus E^c$.

Si $x_0 \in E^u$, $x(t) \in E^u$ $\forall t$ (de même pr E^s, E^c)

$E^s = \{v \in \mathbb{R}^n / \|x_v(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0\}$

$E^u = \{v \in \mathbb{R}^n / \|x_v(t)\| \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0\}$

$E^c = \{v \in \mathbb{R}^n / \exists c > 0, \forall |t|$ suff. grand : $\|x_v(t)\| \leq C|t|^n \|v\|\}$

(De m pour $\mathbb{C}^n$). (Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ dz dans $\mathbb{C}$: E_c contient des sols bornées)

Prop : $x' = Ax$: sols tendent tous vers 0 en $+\infty$ si vp(A) ont des p.R. négatives. ie $E^s = \mathbb{R}^n \Rightarrow 0$ éq asymp stable.

• Toutes les sols de $x' = Ax$ sont bornées pr $t \geq 0$ ⑧ ssi vp(A) ont p.R ≤ 0 : ($E^u = \{0\}$ et $A_{/E_c}$ diagonalisable.

Dans $\mathbb{R}^2$: • $\det A < 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ réelles de signes opp (elles ne peuvent être cplxes, sinon $\det = |\lambda_1|^2 > 0$)

• $\det A > 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \text{ réelles de m signe} \\ \lambda_1, \lambda_2 \text{ cplxes conjuguées} \end{cases}$ PR de m signe

↳ $tr(A)$ a le m signe que λ_1 et λ_2 ou leur P.R.

si $trA = 0$, alors λ_1 et λ_2 imaginaires purs

• $\det A = 0 \Rightarrow$ une vp est nulle, l'autre $= tr(A)$.

Donc on peut obtenir les dims de E^s, E^u, E^c

Th : $A \in M_n(\mathbb{R})$ dz dans $\mathbb{C}$, $x' = Ax$: Solutions : $x(t) = \sum_{1\leq j\leq q} e^{\alpha_j t}(\cos(\beta_j t) a_j + \sin(\beta_j t) b_j)$ $\begin{cases} a_j + ib_j \text{ V.P} \\ \text{asso à } \lambda_j \end{cases}$

III) $x'(t) = A(t)x(t)$: $t \in J$. A de classe C^k (9)

Existence-unicité globales : $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times J$. $\exists ! x(\cdot)$ tq $x(t_0) = x_0$

- Sol : $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)x(s) + b(s))\, ds$ pour $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$.

* Résolvante : $t, s \in J$: $R_A(t,s) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \mapsto x(t)$

avec $x_0 = x(s)$. $R_A(t,s)$ lin. bij et est une mat inversible de $M_n(\mathbb{R})$.

$$x(t) = R_A(t, t_0)\, x(t_0).$$

Si $A(\cdot) \equiv A$: $R_A(t,t_0) = e^{(t-t_0)A}$

Proposition : $\forall t_0 \in J$; $R_A(\cdot, t_0)$ sol de EDMatricielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} R_A(t,t_0) = A(t) R_A(t,t_0) \\ R_A(t_0,t_0) = I \end{cases}$$

$\forall t_0, t_1, t_2 \in J$: $R_A(t_2, t_0) = R_A(t_2, t_1) R_A(t_1, t_0)$

$A(\cdot)$ C^k $\Rightarrow$ $t \mapsto R_A(t,t_0)$ C^{k+1}.

$R_A(t,s)^{-1} = R_A(s,t)$

Les colonnes de $R_A(t,t_0)$ forment une base de l'ev de solutions $\Rightarrow$ sys fond. solutions.

$t_0 \in \mathbb{R}$; $\Delta(t) = \det R_A(t,t_0)$ sol du pb Cauchy :

$$\begin{cases} \Delta'(t) = tr(A(t))\Delta(t) \\ \Delta(t_0) = 1 \end{cases}$$

Donc : $\det R_A(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} tr(A(u))\, du\right)$

Si $\forall t, tr(A) = 0$, alors $R_A(t,s)$ de det égal à 1.

Si $\forall t$, $A(t)$ réelle antisym $\Rightarrow \forall t,s$ $R_A(t,s)$ rotation (11)

$\Rightarrow$ toute sol est bornée car R_A conserve la norme $\rightarrow \|x(t)\| = \|R_A(t,t_0)x(t_0)\| = \|x(t_0)\|$

Éqs affines : $x(t) = R_A(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R_A(t,s)\, b(s)\, ds$

de tt compact contenu ds Ω, ie $\forall K \subset \Omega$ compact, $\exists t_K$ tq $x(t_K) \notin K$. (13)

↳ Corollaire. Si tts les valeurs de $x(\cdot)$ sol maxi sont contenues ds un compact de Ω, alors $x(\cdot)$ déf sur tout $\mathbb{R}$.

Déf : on dit que f est complet (ou l'équation est complète) si toute sol maximale est définie sur $\mathbb{R}$ entier.

↳ Tout champ f tq : $\|f(x)\| \leq \alpha\|x\| + \beta$ est complet

↳ Flots / Portraits de phase : $x'(t) = f(x(t))$ autonome

Flot. $\phi_t : v \mapsto \phi_t(v) = x_v(t)$

si f linéaire, ie $f(x) = Ax$, alors $\phi_t(x) = e^{tA}x$.

- $\phi_{t_1+t_2}(v) = \phi_{t_2} \circ \phi_{t_1}(v) = \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}(v)$
- $\phi_t \circ \phi_{-t} = Id$
- $x(t) = \phi_{t-t_0}(x(t_0))$
- $\phi_0 = id$ et $\frac{\partial}{\partial t}\phi_t = f \circ \phi_t$

Domaine dif Flot : $D_{\phi_t} = \{ v \in \Omega / t \in I_v \}$

$O_v = \{ \phi_t(v) / t \in I_v \} = \{ x_v(t) / t \in I_v \}$

Cauchy-Lipschitz. $\forall x_0 \in \Omega$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\exists \delta > 0$ tq (12)
$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ possède une unique sol définie sur $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$

Déf sol maximale : $x(\cdot) : I \to \Omega$ est maximale ssi elle n'est pas restriction, à I d'une sol déf sur $I' \supsetneq I$.

Prop : si $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ solutions définies sur I ∋ int et coïncident en t_0, alors elles sont égales.

Th. Pour toute donnée initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$ il existe une unique sol maxi : $]t_-, t_+[\to \Omega$ tq $x(t_0) = x_0$

Prop. $x(\cdot) :]t_-, t_+[\to \Omega$ sol maxi, si $t_+ < +\infty$, $x(t)$ sort

Portrait de phase = tracé de toutes les orbites. Les orbites ne se croisent pas (14)

- orbite réduite à un pt $v \Rightarrow f(v) = 0$ pt d'équilibre
- Courbe ayant un pt double : $x_v(\cdot)$ T. périodique
- Courbe ouverte sans pts doubles.

Linéarisation - perturbation du flot : ϕ_t est de classe C^1 et sur V

$D\phi_t(v).\delta v = y(t)$ où $y(\cdot)$ sol de $\begin{cases} y' = Df(x_v(s)).y(s) \\ y(0) = \delta v \end{cases}$

avec $s \in [0,t]$ (avec ϕ_t définie sur un voisinage V de v, de sorte que $\phi_t : V \to \phi_t(V)$ bij c. continue)

Éq linéarisée autour d'une sol $x(\cdot)$: $y'(t) = Df(x(t)).y(t)$

$\Rightarrow$ Forme : $y'(t) = A(t)y(t)$

$R(t,s)$ = résolvante de cette EDL : $D\phi_t(v) = R(t,0)$

Éq-stabilité - $x'(t) = f(x(t))$, f C^1. (15)

Déf : x_0 équilibre si $x(\cdot) \equiv x_0$ solution ou $f(x_0) = 0$ (⇔)

Autrement : $\phi_t(x_0) = x_0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow O_{x_0} = \{x_0\}$

Notation : $x_v(\cdot)$ = sol maxi tq $x_v(0) = v$

x_0 est stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq : $\|v - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x_v(t) - x_0\| < \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$.

- x_0 asymp-stable si stable et il existe V vois de x_0 tq $v \in V \Rightarrow x_v(t) \to x_0$ qd $t \to +\infty$.

Cas linéaire. $f(x) = Ax$: 0 équilibre

- 0 asymp-stable ⇔ $Re\, \lambda < 0$ pour tte val. propre λ de A.
- $\exists$ vp de A tq $Re\, \lambda > 0 \Rightarrow$ 0 non stable.

Si vp(A) de $Re \leq 0$ 0 peut être :
- Stable, mais pas asymptotiquement (A/E_c diag)
- Non stable (A/E_c non diag)

Éq linéarisé autour de $x(\cdot) \equiv x_0$: $y'(t) = Df(x_0).y(t)$ (16)

$\Rightarrow$ stabilité caractérisée par les vp de $Df(x_0)$.

Th. • Si $Re(\lambda) < 0$ $\forall \lambda$ vp de $Df(x_0)$, x_0 asymp. stable.

- S'il existe λ vp de $Df(x_0)$ tq $Re(\lambda) > 0$, x_0 non stable

Déf : x_0 éq hyperbolique si tts les vp de $Df(x_0)$ ont une partie réelle non nulle.

éq hyperbolique ou
- asymp stable $Re(\lambda) < 0, \forall \lambda$
- non stable $\exists \lambda, Re(\lambda) > 0$

x_0 hyperbolique stable (resp asymp st) si 0 éq stable (resp asymp st) pour l'équation linéarisée en x_0.

Portraits de phase du système ≃ son linéarisé.

Th de Hartman - Grobmann : x_0 éq hyperbolique. Alors

Portrait de phase de $x' = f(x)$ au $V(x_0)$ C^0 éq à Portrait de phase de $y' = Df(x_0).y$ au vois de 0

Principe : Au 1er ordre : comportement de ED en x_0 ~ comportement du linéarisé en 0.

Hart-Grob pour dénombrer les orbites stables : (17)

orbite stable en un éq x_0 si $\forall x \in O$, $\phi_t(x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x_0$

" instable " " "" " " " $\phi_t(x) \xrightarrow[t \to -\infty]{} x_0$

Champs de gradient : $f(x) = -\nabla V(x)$ avec $\nabla V(x)$ tq : $DV(x).v = \langle \nabla V(x), v \rangle$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$. $\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \dots \frac{\partial V}{\partial x_n}(x)\right)$

Équilibre de ce champ $\Rightarrow$ pt critique de V ie $\nabla V(x_0) = 0$

Prop. L Lyapunov stricte en x_0. $B(x_0) = \{ v \in \Omega / x_v(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x_0 \}$

- Si $\phi_t(U) \subset U$ $\forall t \geq 0$ et $U \subset \Omega$ compact, $U \subset B(x_0)$
- Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^n$, $\lim L(x) = +\infty$ qd $\|x\| \to +\infty$, alors $B(x_0) = \mathbb{R}^n$

Lyapunov : $x_0 \in \Omega$ éq, U = vois$(x_0) \subset \Omega$, $L : U \to \mathbb{R}$ continue

L fct Lyapunov en x_0 si : (a) : $L(x) > L(x_0)$ $\forall x \neq x_0$ ds U et

(b) : $\forall x(\cdot)$ sol, $t \mapsto L(x(t))$ décroissante.

L Lyapunov stricte si de plus : (c) : $\forall x(\cdot) \neq x_0$, $t \mapsto L(x(t))$ strict déc.

Th : x_0 éq : • S'il existe une Lyapunov en x_0, x_0 stable. si cette Lyapun stricte, x_0 asymp stable.

Si L diff : $\frac{d}{dt} L(x(t)) = \langle \nabla L(x(t)), f(x(t)) \rangle$. Remplacer :

(b) → (b)' : $\langle \nabla L(x(t)), f(x(t)) \rangle \leq 0$, $\forall x \in U$ (c) → (c)' : $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle <$