Commande Optimale

Hasnaa Zidani[1]

1. ENSTA ParisTech, UMA, 32 Boulevard Victor, 75739 Paris Cedex 15, France. Hasnaa.zidani@ensta.fr

Table des matières

1 Introduction **5**

1.1 Quelques exemples de problèmes de commande optimale 5

1.2 Forme générale d'un problème de commande optimale 8

2 Conditions d'optimalité du premier ordre. **11**

2.1 Equation d'tat. Existence de solution optimale 11

2.2 Cas de temps final t_f fixe 13

2.2.1 Conditions d'optimalité : Paramétrisation par le contrôle 13

2.2.2 Principe de Pontryagin 17

2.2.3 Problme de Mayer-Lagrange 20

2.2.4 Système Hamiltonien 22

2.3 Cas de temps final libre 23

3 Commande des systèmes linéaires **29**

3.1 Commandabilité 29

3.2 Critère linéaire sur l'état final 31

3.3 Problème de transfert en temps minimal 32

3.3.1 Exemples et classes particulières 33

3.3.1.1 Contraintes de bornes sur la commande 34

3.4 Commande des systèmes linéaires à coût quadratique 38

3.4.1 Définition du problème 38

3.4.2 Conditions d'optimalité 38

3.4.3 Equation de Riccati. Loi de feedback 39

3.5 Annexe 42

Les technologies actuelles cherchent de plus en plus à traiter des systèmes complexes, constitués par un grand nombre de paramètres liés les uns aux autres par une structure bien déterminée. Un autre aspect de l'évolution générale est aussi la recherche de *performances évoluées* (notion de productivité, de coût, de qualité des produits, ...) et des *performances optimales* (aller sur la lune en consommant le minimum de carburant, planifier une économie de façon optimale, etc).

La théorie de la commande optimale propose des méthodes mathématiques permettant d'étudier ces systèmes complexes. Cette théorie s'applique dans des domaines variés : conquête de l'espace, trafic urbain, contrôle de l'environnement, et bien d'autres domaines comme nous le verrons dans de nombreux exemples.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Quelques exemples de problèmes de commande optimale

Les exemples présentés ci-dessous ont pour but de faire saisir le type de questions qui sont du ressort de la *commande optimale*.

Exemple 1. *On considère un véhicule de masse m, on note $y(t)$ sa position et $u(t)$ une force appliquée au véhicule permettant de contrôler son mouvement à l'instant $t > 0$. La position y et la force u sont liées par l'équation différentielle :*

$$m\ddot{y}(t) = u(t), \quad t > 0.$$

On suppose la position et la vitesse du véhicule connues à l'instant 0 :

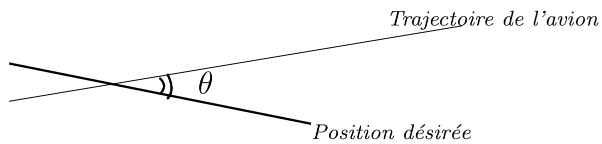
$$y(0) = x^0, \qquad \dot{y}(0) = x^1.$$

On souhaite choisir u de sorte que le véhicule rejoigne l'origine (et reste ensuite à l'origine) en un temps minimum. La force u doit satisfaire une contrainte du type $|u(t)| \leq M$. Posons $x_1 = y$, $x_2 = \dot{x}_1$ ($x_1(t)$, $x_2(t)$ représentent la position et la vitesse du véhicule à l'instant t). L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Le problème de commande optimale consiste à trouver une fonction u de manière à ce que la solution de (1.1) associée à u atteigne $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ en un temps T minimal.

Exemple 2. *[Contrôle de la déviation d'un avion]*



On note θ la déviation d'un avion par rapport à la position désirée. On peut contrôler cette déviation par un terme force u. La déviation θ et la force u sont alors liées par l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta}(t) + a\dot{\theta}(t) + \omega^2\theta(t) = u(t), \quad t > 0.$$

La position $\theta(0) = \theta_0$ étant connue ainsi que la vitesse de déviation $\dot{\theta}(0) = \theta_1$, on souhaite retourner à l'état $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ (déviation nulle, vitesse de déviation nulle) en un temps minimum. On suppose $|u| \leq 1$. Ici, encore, en posant $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, on a :

$$\dot{x} = Ax + bu, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix},$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -a \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Le problème de temps optimal consiste à choisir u et T de sorte que

$$J(u, T) = \int_0^T dt$$

soit minimal. La commande (ou le contrôle) u et le temps T doivent être tels que :

$$\dot{x} = Ax + bu \text{ sur } (0, T) \qquad x(0) = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}, \qquad x(T) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exemple 3. *On note $x(t)$ la quantité d'acier produite, au temps t, par une unité de production. La quantité d'acier produite est répartie entre la consommation et l'investissement. La quantité d'acier allouée à l'investissement est utilisée pour accroître la capacité de production. Soit $0 \leq u(t) \leq 1$ la fraction d'acier produite à l'instant t et allouée à l'investissement.*

L'hypothèse selon laquelle l'acier réinvesti est utilisé pour accroître la capacité de production peut être décrite par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}(t) = ku(t)x(t),$$

où $x(0) = c$ est la production initiale, et k le coefficient d'accroissement de la production.

Le problème de commande optimale consiste ici à choisir u de façon à maximiser la production allouée à la consommation durant une période de temps fixé. On doit ainsi maximiser

$$J(u,x) = \int_0^T (1-u(t))x(t)dt,$$

où x et u sont liés par $\dot{x} = kux$, $x(0) = c$.

Exemple 4. *[Problème de l'alunissage en douceur.]*

Un engin spatial doit alunir en douceur en utilisant le minimum de carburant. Pour un modèle simplifié, m désigne la masse, h la hauteur, v la vitesse verticale et u la poussée de l'engin spatial. M désigne la masse de l'engin sans fuel, h_0 la hauteur initiale, v_0 la vitesse initiale, F la quantité initiale de fuel, α la poussée maximum de l'engin, k une constante reliant la poussée et la perte de masse, g est l'accélération de la gravité sur la lune.

Les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= v(t),\\ \dot{v}(t) &= -g + [m(t)]^{-1}u(t),\\ \dot{m}(t) &= -ku(t),\end{aligned}$$

les contraintes sont $0 \leq u(t) \leq \alpha$ (la poussée est de sens opposé à la gravité, ce qui est suffisant pour freiner le véhicule étant donné que l'on recherche une consommation de fuel minimum).

Les conditions initiales et finales sont :

$$\begin{aligned}h(0) = h_0, \quad v(0) = v_0, \quad m(0) = M+F,\\ h(t_1) = 0, \quad v(t_1) = 0,\end{aligned}$$

t_1 étant l'instant de l'alunissage.

On pose $x_1 = h$, $x_2 = v$, $x_3 = m$, et $x = (x_1, x_2, x_3)^t$. Les équations du mouvement s'écrivent donc :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -g + x_3^{-1}u \\ -ku \end{bmatrix} = f(x,u), \qquad 0 \leq u(t) \leq \alpha,$$

ici f est une fonction non linéaire, et on a les contraintes :

$$\begin{aligned}x(0) &= [x_1(0), x_2(0), x_3(0)]^t = [h_0, v_0, M+F]^t,\\ x(t_1) &= [0, 0, x_3(t_1)]^t.\end{aligned}$$

Le problème consiste à déterminer u et t_1 de sorte que $m(t_1)$ soit maximale, ou encore que :

$$J(u, t_1) = -M - F - k \int_0^{t_1} u(\tau)\, d\tau \quad (= -m(t_1))$$

soit minimum, et $x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0$ avec $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, $x(0) = [h_0, v_0, M+F]^t$, et $0 \leq u(t) \leq \alpha$.

1.2 Forme générale d'un problème de commande optimale des systèmes dynamiques

Un système dynamique (modélisant un système physique, économique, ...) est caractérisé à chaque instant t (avec $t \in I\!R$) par un ensemble de paramètres (ou de variables) noté $(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = x(t)$ et appelé *état du système* (ou *variables d'état*). Il est possible de faire évoluer l'état du système en agissant sur des variables :

$$u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$$

appelées *variables de commande* (ou *de contrôle*). Il est naturel de considérer des commandes éventuellement discontinues en temps et de restreindre leurs valeurs à un ensemble U fermé non vide de $I\!R^m$, ce qui conduit à introduire la classe des *commandes admissibles* :

$$\mathcal{U} := \{u \in V \mid u(t) \in U \text{ p.p}\}, \tag{1.2}$$

où V est un espace fonctionnel convenablement choisi (par exemple $V = L^2(0, T; I\!R^m)$).

Les variables d'état et de commande sont liées par une équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in (t_0, t_f). \tag{1.3}$$

La *commandabilité* du système (1.3) consiste à trouver une variable de commande qui permet à la trajectoire d'aller d'un point x^0 en $t = 0$ à un point x^d en $t = t_f$, les états x^0 et x^d étant fixés par avance.

Lorsque le système est commandable, on dispose, en général, d'une infinité de trajectoires et donc de commandes pour réaliser cette transition. Se pose alors le problème du choix entre ces diverses trajectoires : c'est en autre l'objet de la commande optimale qui sélectionne la trajectoire qui minimise un certain *critère*.

Ce critère peut être, par exemple, le temps t_f qui permet d'atteindre la *cible* x^d (le problème est alors d'atteindre un objectif en un temps minimum), ou une fonction représentant la puissance consommée.

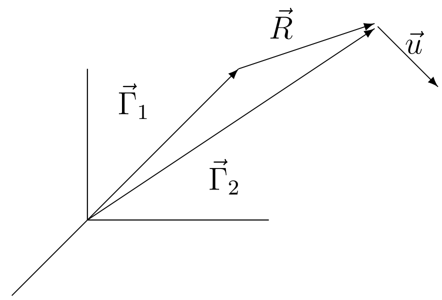
Lorsque le système n'est pas commandable, la commande optimale permet de déterminer la commande qui permet à la trajectoire de s'approcher le plus possible de la cible x^d : Il s'agirait encore de trouver une commande qui minimise (le *critère*) $|x(t_f) - x^d|$, ou $\displaystyle\int_0^{t_f} |x(t) - z^d(t)|\, dt$ si l'on souhaite que la trajectoire reste la plus proche d'une trajectoire de référence z^d durant tout l'intervalle $(0, t_f)$.

Dans les problèmes que nous étudierons, le critère à minimiser, noté J, sera de la forme :

$$J(x, u, t_f) = \Phi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t))dt.$$

Nous allons illustrer divers choix possibles du critère J sur un nouvel exemple.

Exemple 5 (Rendez-vous spatial.)**.** *On considère deux véhicules spatiaux en orbite autour de la terre. On note $\vec{\Gamma}_1$ la position du véhicule 1, $\vec{\Gamma}_2$ la position du véhicule 2 (dans un repère inertiel d'origine le centre de la terre), et $\vec{u}$ la poussée des moteurs du véhicule 2. On note $\vec{R} = \vec{\Gamma}_2 - \vec{\Gamma}_1$*



$\vec{R} = \vec{\Gamma}_2 - \vec{\Gamma}_1$

Si $\|\vec{R}\| \ll \|\vec{\Gamma}_1\|$, les équations linéarisées de la mécanique s'écrivent :

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \tag{1.4}$$

avec $y = (y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, y_3, \dot{y}_3)^t$, $u = (u_1, u_2, u_3)^t$ et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -w^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où (y_1, y_2, y_3) sont les coordonnées du véhicule 2 dans un repère mobile du véhicule 1 (l'axe y_1 a pour direction Γ_1 ; l'axe y_2 est tangent à la trajectoire du véhicule 1 ; l'axe y_3

est orthogonal à la trajectoire du véhicule 1), $\omega = \dfrac{2\pi}{T_1}$*,* T_1 *est la période de révolution du véhicule 1.*

En général la commande doit satisfaire certaines contraintes (comme celles de tenir compte de la limite de la puissance du moteur). Ici on supposera que $|u| \leq 1$*. Nous voulons effectuer un rendez-vous spatial, c'est à dire en une durée finie* T*, annuler le vecteur* $(\vec{R}, \vec{R}')$*, ou de manière équivalente annuler l'état* y *solution du système (1.4). Plusieurs approches sont possibles :*

- *Le problème en temps minimum : Il consiste à déterminer* u *et* $T = t_f$ *tel que* $y(T) = 0$ *et tel que* T *soit minimum. Ici on aura* $J(T) = \int_0^T 1dt$*.*
- *Le problème de consommation minimum à temps final* t_f *fixe : Il consiste à fixer* $t_f > T$ *solution du problème de temps minimum de sorte que la consommation totale*
$$J(u) = \int_0^{t_f} \{|u_1(t)| + |u_2(t)| + |u_3(t)|\}dt$$
soit minimale (la consommation est proportionnelle à la valeur absolue de la poussée).
- *On peut choisir un critère qui fait le compromis entre plusieurs points de vue et plusieurs objectifs. Par exemple avec le critère*
$$J(u, y) = \int_0^{t_f} \|u\|^2 dt + |y(t_f)|^2,$$
le terme $\|u\|^2$ *est proportionnel à l'énergie (ou la puissance), et le terme* $|y(t_f)|^2$ *indique que l'on souhaite être proche de l'état final* $y(t_f) = 0$*.*

Chapitre 2

Conditions d'optimalité du premier ordre.

Dans tout ce chapitre, nous désignerons par $(\mathcal{P})$ le problème de commande optimale suivant :

$$\text{Minimiser } \ J(x,u) = \Phi(x(t_f)) + \int_0^{t_f} L(x(t),u(t))\,dt \tag{2.1}$$

Sous les contraintes

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)) \text{ sur } (0,t_f), \quad x(0) = x^o, \qquad \text{(équation d'état)}$$

$$u \in \mathcal{U} := \{u \in L^2(0,t_f\ ;\ I\!R^m), \quad u(t) \in U \text{ p.p. } t \in (0,T)\},$$

$$\Psi(x(t_f)) = 0.$$

Le temps final t_f peut tre fixe ou libre.

Dans toute la suite, on notera par $\langle \cdot,\cdot \rangle_r$ le produit scalaire euclidien dans $I\!R^r$ (pour $r \geq 1$) et par $|\cdot|_r$ sa norme induite.

Nous supposerons aussi toujours que l'ensemble U est un convexe non vide de $I\!R^m$.

2.1 Equation d'tat. Existence de solution optimale

Pour donner un sens l'quation d'tat et assurer l'existence d'une solution sur $[0,+\infty[$, nous supposerons que la fonction f vrifie l'hypothèse suivante :

(A1) On suppose que $f : I\!R^n \times I\!R^m \longrightarrow I\!R^n$ est continue, que f est de classe C^1 par rapport à la première variable, et que

$$|f(y,v)| \leq C(1+|y|_n) \ \ \forall (y,v) \in I\!R^n \times I\!R^m,$$

$$|f'_y(y,v)| \leq C_M \ \ \forall |y|_n \leq M, \forall v \in I\!R^m.$$

(f'_y désigne la dérivée de f par rapport à la première variable).

Définition 1. *Soit $u \in L^2(0, t_f; I\!R^m)$. On appelle solution de l'équation d'état, la fonction continue $x(\cdot)$ vérifiant :*

$$x(t) = x^o + \int_0^t f(x(\tau), u(\tau))\, d\tau, \qquad p.p\ t \in (0, t_f).$$

Théorème 1. *Si l'hypothèse (A1) est vérifiée, alors pour chaque variable de commande $u \in \mathcal{U}$, il existe une unique solution de l'équation d'état, notée $x_u(\cdot)$, fonction continue sur $[0, t_f]$ à valeur dans $I\!R^n$. De plus x_u appartient à $H^1(0, t_f; I\!R^n)$, et l'application $u \longmapsto x_u$ est continue de $L^2(0, t_f; I\!R^m)$ dans $H^1(0, t_f; I\!R^n)$.*

Démonstration.

■

Nous supposerons aussi vrifies les hypothses suivantes sur Φ, Ψ et L :

(A2) La fonction $\Phi : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ est de classe C^1 et il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $y \in I\!R^n$, on a :

$$|\Phi(y)| \leq C(1 + |y|_n^2).$$

(A3) La fonction $\Psi : I\!R^n \longrightarrow I\!R^p$ est de classe C^1, et il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $y \in I\!R^n$, on a :

$$|\Phi(y)| \leq C(1 + |y|_n^2).$$

(A4) La fonction $L : I\!R^n \times I\!R^m \longrightarrow I\!R$ est continue, et L est de classe C^1 par rapport à sa première variable. Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|L(y, v)| \leq C(1 + |y|_n^2),$$
$$|L'_y(y, v)| \leq C(1 + |y|_n).$$

Notons que si f, L, f'_y et L'_y sont Lipschitziennes et bornées, alors f et L satisfont les estimations des hypothèses (A1), (A4). Notons aussi que (A1)-(A4) sont satisfaites si f est linéaire et L, Φ sont quadratiques.

♠ Afin de simplifier l'analyse, nous avons supposé que les fonctions f, L, et Φ ne dépendent pas explicitement du temps. Le cas général peut être traité avec les mêmes idées que celles développées dans ce chapitre.

Dans tout le chapitre, nous supposons qu'*il existe une commande optimale* $\bar{u} \in \mathcal{U}$, solution du problème $(\mathcal{P})$. Nous désirons caractériser cette commande $\bar{u}$.

2.2 Cas de temps final t_f fixe

Dans cette section, nous traiterons d'abord le cas de temps final fix $t_f = T > 0$.

Pour simplifier l'expose des ides essentielles, nous supposons que le *cot distribu* est nul, i.e $L \equiv 0$. Le problme $(\mathcal{P})$ s'crit alors :

$$\text{Minimiser} \quad J(x,u) = \Phi(x(t_f)) \tag{2.2}$$

Sous les contraintes

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \text{ sur } (0, t_f), \quad x(0) = x^o, \qquad \text{(équation d'état)}$$

$$u \in \mathcal{U} := \{u \in L^2(0, t_f \,;\, \mathbb{R}^m), \quad u(t) \in U \text{ p.p. } t \in (0,T)\},$$

$$\Psi(x(t_f)) = 0.$$

Ce problme (sans cot distribu) est dit de *Mayer*. Nous reviendrons au problme avec cot distribu la section 2.2.3.

2.2.1 Conditions d'optimalité : Paramétrisation par le contrôle

Dans le théorème 1, nous avons vu que sous l'hypothèse (A1), l'application $\mathcal{T} : u \longmapsto x_u$ est bien définie de manière univoque. Nous pouvons donc rcrire le problème de contrôle optimal $(\mathcal{P})$ sous la forme suivante :

$$\underset{\substack{u\in\mathcal{U} \\ [\Psi\circ\mathcal{T}](u)(T)=0}}{\text{Min}} \quad J(\mathcal{T}(u), u) \qquad \text{ou encore} \qquad \underset{\substack{u\in\mathcal{U} \\ [\Psi\circ\mathcal{T}](u)(T)=0}}{\text{Min}} \quad \mathcal{F}(u),$$

où $\mathcal{F}(u) := J(\mathcal{T}(u), u) = J(x_u, u)$ pour tout $u \in L^2(0,T; \mathbb{R}^m)$. Dans la première écriture du problème $(\mathcal{P})$ on minimise par rapport au couple $(x,u) \in H^1(0,T;\mathbb{R}^n) \times L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ et on considère l'équation d'état comme une contrainte dans l'espace $H^1(0,T;\mathbb{R}^n) \times L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$. Ici on ne minimise que par rapport à la variable de commande u, la variable d'état étant déterminée de manière (implicite et) unique en fonction de u.

D'après les résultats classiques de l'optimisation, si le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution $\bar{u} \in \mathcal{U}$ et si les fonction $\mathcal{F}, \Psi$ sont dérivables alors les conditions d'optimalité s'écrivent simplement :

(i) $\exists \lambda_o \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^p$ avec $(\lambda_o, \lambda) \neq 0$ et tels que :

$$\boxed{\Big[\lambda_o \mathcal{F}'(\bar{u}) + \lambda[\Psi \circ \mathcal{T}]'(\bar{u})(T)\Big] \cdot (u - \bar{u}) \geq 0 \quad \text{for all } u \in \mathcal{U}.} \tag{2.3}$$

(ii) De plus, dans le cas o $\Psi \equiv 0$, on a $\lambda_o = 1$ et $\lambda = 0$.

Il nous reste maintenant à vérifier si $\mathcal{F}$ est dérivable et à déterminer sa dérivée. Pour cela nous avons besoin d'introduire l'hypothèse suivante :

(A1') La fonction f est de classe C^1 par rapport à sa deuxième variable, et pour tout $M > 0$ il existe une constante $C_M > 0$ telle que :

$$|f'_u(y,u)| \le C_M, \quad \forall |y| + |u| \le M.$$

Théorème 2. *Si les hypothèses (A1) et (A1') sont satisfaites, alors l'application $\mathcal{T}$ est dérivable en tout $u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$. De plus on a :*

$$\mathcal{T}'(u) \cdot v = z_v^u \qquad \textit{pour tout } u, v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m);$$

où z_v^u est l'état linéarisé solution de l'équation :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = f'_x(x_u,u)z + f'_u(x_u,u)v & \textit{sur } (0,T), \\ z(0) = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

avec $x_u := \mathcal{T}(u)$ désigne l'état associé à u.

Démonstration.
Il suffit de vérifier que

$$\|\mathcal{T}(u+v) - \mathcal{T}(u) - z_v^u\|_{H^1(0,T)} = \|x_{u+v} - x_v - z_v^u\|_{H^1(0,T)} \to 0, \text{ lorsque } \; v \to 0.$$

Pour cela, il suffirait de considérer l'équation différentielle vérifiée par $x_{u+v} - x_v - z_v^u$ et d'utiliser les estimations qui en découle. ∎

On introduit la définition suivante :

Définition 2. *Soit $(\lambda_o, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$. Soit $u \in \mathcal{U}$ et x_u l'tat associ u. On appelle* état adjoint *associé à $(u, x_u, \lambda_o, \lambda)$, la solution p du problème de Cauchy pour le système différentiel rétrograde*

$$\begin{cases} -\dot{p}(t) &=& \left[f'_x(x_u(t),u(t))\right]^t p(t) & \textit{p.p. } t \in (0,T) \\ p(T) &=& \lambda_o \Phi'(x_u(T)) + \lambda \Psi'(x_u(T)). \end{cases} \tag{2.5}$$

Remarque 1. Notons que si les hypothèses (A1)-(A3) et (A1') sur f, Φ et Ψ sont satisfaites alors pour tout $(\lambda_o, \lambda, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathcal{U}$, l'état adjoint p, solution de (2.5), appartient à $H^1(0,T;\mathbb{R}^n)$ et par conséquent p est une fonction continue sur $(0,T)$.

Théorème 3. *Supposons que les hypothèses (A1)-(A3) et (A1') sont vérifiées. Alors l'application $\mathcal{F}$ est dérivable sur $L^2(0,T;I\!R^m)$. De plus, on a :*

$$\begin{aligned}\Big[\lambda_o \mathcal{F}'(u) + \lambda[\Psi\circ\mathcal{T}]'(u)(T)\Big]\cdot v &= \int_0^T \langle p_u(t), f'_u(x_u(t),u(t))v(t)\rangle_n\,dt,\\ &= \int_0^T \langle \big[f'_u(x_u(t),u(t))\big]^t p_u(t), v(t)\rangle_m\,dt, \quad (2.6)\end{aligned}$$

pour tout $(\lambda_o,\lambda)\in I\!R\times I\!R^p$ et pour tout $u,v\in L^2(0,T;I\!R^m)$ avec x_u dsigne l'tat associ u et p_u désigne l'état adjoint associé à $(u,x_u,\lambda_o,\lambda)$.

Démonstration.
Rappelons d'abord que la fonction $\mathcal{F}$ est définie par :

$$\mathcal{F}(u) = J(\mathcal{T}(u),u) = J(x_u,u), \qquad \text{pour tout } u\in L^2(0,T;I\!R^m).$$

En utilisant la formule de dérivabilité de fonctions composées, et tenant compte du théorème 2, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'(u)\cdot v &= \frac{\partial J}{\partial u}(\mathcal{T}(u),u)\cdot v + \frac{\partial J}{\partial x}(\mathcal{T}(u),u)\cdot\mathcal{T}'(u)\cdot v\\ &= \frac{\partial J}{\partial u}(\mathcal{T}(u),u)\cdot v + \frac{\partial J}{\partial x}(\mathcal{T}(u),u)\cdot z_v^u,\\ \big[\Psi\circ\mathcal{T}\big]'(u)(T) &= \Psi'(\mathcal{T}(u)(T))\cdot z_v^u(T),\end{aligned}$$

où z_v^u est l'état linéarisé solution de

$$\dot z(t) = f'_x(x_u(t),u(t))\cdot z(t) + f'_u(x_u(t),u(t))\cdot v(t), \qquad z(0)=0. \quad (2.7)$$

Par conséquent, on a :

$$\Big[\lambda_o\mathcal{F}'(u) + \lambda[\Psi\circ\mathcal{T}]'(u)(T)\Big]\cdot v = [\lambda_o\Phi'(x_u(T)) + \lambda\Psi'(x_u(T))]\cdot z_v^u(T). \quad (2.8)$$

On utilise maintenant l'équation de l'état adjoint pour exprimer le terme $\lambda_o\Phi'(x_u(T)) + \lambda\Psi'(x_u(T))$ par :

$$\lambda_o\Phi'(x_u(T)) + \lambda\Psi'(x_u(T)) = p_u(T).$$

En substituant ce terme dans (2.8), on arrive à :

$$\Big[\lambda_o\mathcal{F}'(u) + \lambda[\Psi\circ\mathcal{T}]'(u)(T)\Big]\cdot v = \langle p_u(T), z_v^u(T)\rangle_n, \quad (2.9)$$

On utilise maintenant la formule d'intégration par parties :

$$-\int_0^T \langle \dot p_u(t), z_v^u(t)\rangle_n\,dt = \int_0^T \langle p_u(t), \dot z_v^u(t)\rangle_n\,dt - \langle p_u(T), z_v^u(T)\rangle_n + \langle p_u(0), z_v^u(0)\rangle_n.$$

En remplaçant dans (2.9) et utilisant le fait que z_v^u vérifie (2.7), il vient que :

$$\Big[\lambda_o \mathcal{F}'(u) + \lambda[\Psi \circ \mathcal{T}]'(u)(T)\Big] \cdot v \;=\; \int_0^T \Big[\big[f'_u(x_u(t), u(t))\big]^t p_u(t)\Big] \cdot v(t)\, dt.$$

pour tout $u, v \in L^2(0,T; I\!R^m)$. ■

On introduit l'hamiltonien $H : I\!R^n \times I\!R^m \times I\!R^n \longrightarrow I\!R$ défini par

$$H(y, v, p) = \langle p, f(y, v)\rangle_n. \tag{2.10}$$

Théorème 4. *Supposons que les hypothèses (A1)-(A3) et (A1') sont satisfaites. Soit $\bar{u} \in \mathcal{U}$ une solution optimale du problme de Mayer (2.2) , et soit $\bar{x}$ la trajectoire associe $\bar{u}$.*

Alors $\exists \lambda_o \in I\!R, \lambda \in I\!R^p$ avec $(\lambda_o, \lambda) \neq 0$, et il existe $\bar{p}$ l'état adjoint associé à $(\bar{u}, \bar{x}, \lambda_o, \lambda)$ tels que :

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \qquad \bar{x}(0) = x^o, \tag{2.11a}$$

$$-\dot{\bar{p}}(t) = \big[f'_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\big]^t \bar{p}(t), \qquad \bar{p}(T) = \lambda_o \Phi'(\bar{x}(T)) + \lambda \Psi'(x_u(T)), \tag{2.11b}$$

$$\partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \cdot (v - \bar{u}(t)) \geq 0 \quad \forall v \in U, \;\; p.p.\ t \in (0,T), \tag{2.11c}$$

$$\Psi(\bar{x}(T)) = 0. \tag{2.11d}$$

De plus, si $\Psi \equiv 0$ alors $\lambda_o = 1$ et $\lambda = 0$.

♠ Remarquons que le multiplicateur λ est dans $I\!R^p$, cela vient du fait qu'il y a p contraintes sur l'tat final. En effet, la fonction Ψ est suppose prendre ses valeurs dans $I\!R^p$ (voir (A3)).

Démonstration. Les équations (2.11a) et (2.11b) ne sont autres que les équations d'état et d'état adjoint. Il reste juste à justifier l'assertion (2.11c).

Etape 1 : Nous avons déjà vu que $\bar{u}$ satisfait la condition d'optimalité (2.3). D'après le théorème 3, et tenant compte de la définition de H, on a :

$$0 \leq \Big[\lambda_o \mathcal{F}'(\bar{u}) + \lambda[\Psi \circ \mathcal{T}]'(u)(T)\Big] \cdot (u - \bar{u}) = \int_0^T \partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \cdot (u(t) - \bar{u}(t))\, dt \tag{2.12}$$

pour tout $u \in \mathcal{U}$.

Etape 2 : On pose $u = u_k$ où u_k est une perturbation "en aiguille" de $\bar{u}$ autour d'un instant donné t_o :

$$u_k(t) = \begin{cases} \bar{u}(t) & \text{si } t \in (0, t_o - \frac{1}{k}) \cup (t_o + \frac{1}{k}, T) \\ v & \text{si } t \in (t_o - \frac{1}{k}, t_o + \frac{1}{k}) \end{cases} \qquad k \geq 1$$

avec v une constante quelconque dans U. D'après l'Etape 1, on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T \partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \cdot (u(t) - \bar{u}(t))\, dt, \\ 0 &\leq k \int_{t_o - \frac{1}{k}}^{t_o + \frac{1}{k}} \partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \cdot (v - \bar{u}(t))\, dt. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Si t_0 est un point de Lebesgue (voir Annexe, page 42) de la fonction :

$$t \longmapsto \partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \cdot (v - \bar{u}(t)); \qquad t > 0,$$

par passage à la limite dans (2.13), il résulte :

$$0 \leq \partial_u H(\bar{x}(t_o), \bar{u}(t_o), \bar{p}(t_o)) \cdot (v - \bar{u}(t_o))$$

et ceci pour tout $v \in U$.

Pour conclure, il suffit de remarquer (voir Annexe, page 42) que presque tous les points t de $[0, T]$ sont des points de Lebesgue de la fonction :

$$t \longmapsto \partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \cdot (v - \bar{u}(t)).$$

■

Définition 3. *Nous appelons une extrmale du problme de contrle optimal, un quadruplet* $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \lambda_o)$ *vrifiant le systme* (2.11)*. Cette extrmale est dite normale si* $\lambda_o \neq 0$*, et anormale si* $\lambda_o = 0$.

Remarque 2. *Le thorme prcdent donne une condition* ncessaire *d'optimalit. Cette condition devient* ncessaire et suffisante *dans le cas o les fonction* Φ, f *et* Ψ *sont convexes.*

2.2.2 Principe de Pontryagin

Les conditions d'optimalité établies dans le paragraphe précédent ont conduit à introduire un *état adjoint*. Elles suggèrent aussi un résultat plus fort que la condition (2.11) de la stationnarité de l'hamiltonien par rapport à la commande :

> "à chaque instant $t \in (0, T)$ la commande optimale $\bar{u}(t)$ réalise le minimum sur $U \subset \mathbb{R}^m$ de l'Hamiltonien instantané $H(\bar{x}(t), \cdot, \bar{p}(t))$."

Ce résultat s'énonce rigoureusement ainsi :

Théorème 5 (Principe de Pontryagin)**.**
Supposons que les hypothèses (A1)-(A3) sont vérifiées. Soit $\bar{u} \in \mathcal{U}$ *une commande optimale (locale) du problème* $(\mathcal{P})$*, soit* $\bar{x}$ *l'état correspondante, i.e. la solution de :*

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \qquad \bar{x}(0) = x^o.$$

Alors, $\Psi(\bar{x}(T)) = 0$, *et ils existent* $(\lambda_o, \lambda) \in I\!R \times I\!R^p$ *avec* $(\lambda_o, \lambda) \neq 0$, *un tat adjoint* $\bar{p}$ *associé à* $(\bar{u}, \bar{x}, \lambda_o, \lambda)$, *tels que :*

$$-\dot{\bar{p}}(t) = \left[f'_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\right]^t \bar{p}(t), \qquad \bar{p}(T) = \lambda_o \Phi'(\bar{x}(T)) + \lambda \Psi'(\bar{x}(T)),$$

et pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) = \min_{v \in U} H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)). \tag{2.14}$$

De plus si $\Psi \equiv 0$, *alors* $\lambda_o = 1$ *et* $\lambda = 0$.

Démonstration. Nous allons prouver le principe de Pontryagin dans le cas o $\Psi \equiv 0$. La preuve de ce principe dans le cas gnral, dpassant le cadre de ce poly, sera admise.
Etape 1 : <u>Exprimer la variation du critère en fonction de celle de l'hamiltonien</u>. Soit u et v deux commandes admissibles. On a :

$$\begin{aligned} J(x_u, u) - J(x_v, v) &= [\Phi(x_u(T)) - \Phi(x_v(T)] \\ &= \int_0^1 \langle \Phi'(x_u(T) + \theta(x_v(T) - x_u(T))), x_u(T) - x_v(T)\rangle_n \, d\theta \end{aligned}$$

On introduit maintenant *l'état adjoint intermédiaire*, associé à (x_u, x_v, u), solution de l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\dot{p}_{uv}(t) &=& \left[\tilde{f}_x(x_u(t), x_v(t), u(t))\right]^t p_{uv}(t) \\ \\ p_{uv}(T) &=& \tilde{\Phi}(x_u(T), x_v(T)) \end{array} \right.$$

où $\quad \tilde{f}_x(x_1, x_2, u) = \displaystyle\int_0^1 f'_x(x_1 + \theta(x_2 - x_1), u)\, d\theta,$

$$\tilde{\Phi}'(x_1, x_2) = \int_0^1 \Phi'(x_1 + \theta(x_2 - x_1))\, d\theta.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} J(x_u, u) - J(x_v, v) = {}& \langle p_{uv}(T), x_u(T) - x_v(T)\rangle_n \\ &+ \int_0^T \langle -\dot{p}_{uv} - \left[\tilde{f}_x(x_u(t), x_v(t), u(t))\right]^t p_{uv}(t), x_u(t) - x_v(t)\rangle_n \, dt. \end{aligned}$$

Par une intégration par partie, il vient que :

$$\begin{aligned} J(x_u, u) - J(x_v, v) &= \int_0^T \langle \dot{x}_u(t) - \dot{x}_v(t), p_{uv}(t)\rangle_n \\ &\quad - \int_0^T [f(x_u(t), u(t)) - f(x_v(t), u(t))]\, dt \\ &= \int_0^T [H(x_v(t), u(t), p_{uv}(t)) - H(x_v(t), v(t), p_{uv}(t))]\, dt. \end{aligned}$$

Etape 2 : Perturbations de la commande. On pose $u = \bar{u}$ et $v = u_k$ où u_k est une perturbation "en aiguille" de $\bar{u}$ autour d'un instant donné t_o :

$$u_k(t) = \begin{cases} \bar{u}(t) & \text{si } t \in (0, t_0 - \frac{1}{k}) \cup (t_o + \frac{1}{k}, T) \\ u_o & \text{si } t \in (t_o - \frac{1}{k}, t_o + \frac{1}{k}) \end{cases} \qquad k \geq 1$$

avec u_o une constante quelconque dans U. D'après l'Etape 1, on a :

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{J(\bar{x}, \bar{u}) - J(x_k, u_k)}{\frac{1}{k}} \\ &\geq \frac{1}{\frac{1}{k}} \int_{t_o - \frac{1}{k}}^{t_o + \frac{1}{k}} \left[H(x_k(t), \bar{u}(t), p_k(t)) - H(x_k(t), u_o, p_k(t))\right] dt, \end{aligned} \tag{2.15}$$

où x_k est l'état associé à u_k, et p_k est l'état adjoint intermédiaire associé à $(\bar{x}, x_k, \bar{u})$. Il est clair que lorsque k tend vers l'infini, u_k converge vers $\bar{u}$, et tenant compte de la continuité de l'état par rapport à la variable de commande, on a x_k converge vers $\bar{x}$. Vu la continuité de f et Φ, on établit aussi que p_k converge vers $\bar{p}$.

Si t_o est un point de Lebesgue (voir Annexe, page 42) de la fonction :

$$t \longmapsto H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) - H(\bar{x}(t), u_o, \bar{p}(t)); \qquad t > 0,$$

par passage à la limite dans (2.15), il résulte :

$$H(\bar{x}(t_o), \bar{u}(t_o), \bar{p}(t_o)) \leq H(\bar{x}(t_o), u_o, \bar{p}(t_o)),$$

et ceci pour tout $u_o \in U$.

Pour conclure, il suffit de remarquer (voir Annexe, page 42) que presque tous les points t de $[0, T]$ sont des points de Lebesgue de la fonction :

$$t \longmapsto H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) - H(\bar{x}(t), u_o, \bar{p}(t)).$$

■

Remarque. Le principe de Pontryagin permet de se ramener, à partir d'un problème en dimension infinie, à un ensemble de problèmes en dimension finie :

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) = \min_{v \in U} H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)) \quad t \in (0, T).$$

Pour presque tout instant $t \in (0, T)$, la valeur $\bar{u}(t)$ minimise la fonction $H(\bar{x}(t), \cdot, \bar{p}(t))$ sur U. D'après les résultats sur les problèmes d'optimisation en dimension finie, on conclut que si f (et par suite H) est différentiable par rapport à la variable de commande, et la commande optimale vérifie aussi :

$$H'_u(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \cdot (v - \bar{u}(t)) \geq 0 \qquad \text{p.p. } t \in (0, T). \tag{2.16}$$

Ce qui montre que le principe de Pontryagin est une condition nécessaire d'optimalité plus forte (puisqu'elle l'implique) que celle donnée au théorème 4. De plus notons que le principe de Pontryagin ne nécessite que les hypothèses (A1)-(A3), tandis que les assertions du théorème 4 ne sont vraies que si on a en plus (A1') vérifiée.

2.2.3 Problme de Mayer-Lagrange

Revenons maintenant au cas du problme de contrle optimal avec un cot distribu L non ncessairement nul, i.e problme $(\mathcal{P})$ de la forme prcise en page 11. Pour ce problme, on introduit le Hamiltonien $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par :

$$H(y, v, p, \lambda_o) = \lambda_o L(y, v) + \langle p, f(y, v) \rangle_n. \tag{2.17}$$

♠ Cette dfinition gnralise celle donne, dans le cas o $L \equiv 0$, en (2.10).

Il est facile de voir que le problme (2.1) peut encore se mettre sous la forme d'un problme de Mayer en introduisant un tat supplmentaire z vrifiant l'quation diffrentielle suivante :

$$\dot{z}(t) = L(x(t), u(t)) \quad t > 0, \qquad \text{et } z(0) = 0.$$

Ainsi le problme $(\mathcal{P})$ est quivalent :

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimiser} & J(x, u) = \Phi(x(T)) + z(T) \\
\text{avec} & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \text{ sur } (0, T), \quad x(0) = x^o \\
& \dot{z}(t) = L(x(t), u(t)) \text{ sur } (0, T), \quad z(0) = 0 \\
& u \in \mathcal{U} = \{u \in L^2(0, t_f\,;\, \mathbb{R}^m), \quad u(t) \in U \text{ p.p. } t \in (0, T)\}, \\
& \Psi(x(T)) = 0.
\end{array}$$

En crivant les conditions d'optimalit pour ce problme quivalent, nous obtenons le rsultat suivant :

Théorème 6 (Principe de Pontryagin)**.** *Supposons que les hypothèses (A1)-(A4) sont vérifiées.*
Soit $\bar{u} \in \mathcal{U}$ une commande optimale (locale) du problème $(\mathcal{P})$, soit $\bar{x}$ la trajectoire correspondante :

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \qquad \bar{x}(0) = x^o.$$

Alors, il existe $(\lambda_o, \lambda) \in I\!R \times I\!R^p$ *avec* $(\lambda_o, \lambda) \neq 0$ *et il existe un tat adjoint* $\bar{p}$ *associé à* $(\bar{u}, \bar{x}, \lambda_o, \lambda)$*, tels que :*

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \qquad \bar{x}(0) = x^o,$$

$$\Psi(\bar{x}(T)) = 0,$$

$$-\dot{\bar{p}}(t) = \left[f'_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\right]^t \bar{p}(t) + \lambda_o L'_y(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad \bar{p}(T) = \lambda_o \Phi'(\bar{x}(T)) + \lambda \Psi'(\bar{x}(T)),$$

et pour presque tout $t \in [0, T]$*,*

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) = \min_{v \in U} H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t), \lambda_o). \tag{2.18}$$

De plus si $\Psi \equiv 0$*, alors* $\lambda_o = 1$ *et* $\lambda = 0$*.*

Exemple 6. *On cherche à déterminer la commande optimale* $\bar{u}$ *solution du problème suivant :*

$$\begin{aligned} &\text{Min} -x_u(T) + \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\, dt \\ &\textit{avec } \dot{x}_u = -x_u + u, \quad x_u(0) = x^o \\ &\qquad u(t) \in I\!R. \end{aligned}$$

Le hamiltonien de ce problème est défini par :

$$H(x, u, p) = \frac{1}{2}u^2 + p(-x + u).$$

Les conditions d'optimalité s'écrivent :

$$\begin{aligned} &-\dot{\bar{p}} = -\bar{p}, \quad \bar{p}(T) = -1, \\ &0 = \partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) = \bar{p} + \bar{u}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\bar{p}(t) = -e^{(t-T)}, \quad \bar{u}(t) = e^{(t-T)}.$$

Remarque 3.

♠ *Avec la dfinition du Hamiltonien, le systme tat-tat adjoint peut aussi se rcrire :*

$$\dot{\bar{x}}(t) = \partial_p H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) \qquad \bar{x}(0) = x^o, \tag{2.19a}$$

$$-\dot{\bar{p}}(t) = \partial_x H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) \quad \bar{p}(T) = \lambda_o \Phi'(\bar{x}(T)) + \lambda \Psi'(\bar{x}(T)). \tag{2.19b}$$

2.2.4 Système Hamiltonien

Par analogie avec la mécanique, on définit l'Hamiltonien minimisé $\mathcal{H}$ sur $I\!R^n \times I\!R^n$ par :

$$\mathcal{H}(y,p) = \inf_{v \in U} H(y,u,p).$$

D'après le principe de Pontryagin, si $\bar{u}$ est solution optimale de $(\mathcal{P})$ et si $\bar{x}$ et $\bar{p}$ sont respectivement l'état et l'état adjoint associés à $\bar{u}$, alors l'Hamiltonien minimisé vérifie :

$$\mathcal{H}(\bar{x}(t), \bar{p}(t)) = H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)).$$

Théorème 7. *L'Hamiltonien minimisé $\mathcal{H}$ reste constant le long de la trajectoire optimale :*

$$\mathcal{H}(\bar{x}(t), \bar{p}(t)) = cste \qquad p.p.\ t \in (0,T)$$

Démonstration. L'argument est basé sur la notion de *dérivée directionnelle* :

$$h'(t,d) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{h(t+\epsilon d) - h(t))}{\epsilon}. \tag{2.20}$$

On appelle $h'(t,1)$ (resp. $h'(t,-1)$) la dérivée à droite (resp. gauche) de h en t.

Notons

$$h : t \longmapsto h(t) := \mathcal{H}(\bar{x}(t), \bar{p}(t)) \quad \text{et} \quad U_H(t) := \arg\min_v \{H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t))\}. \tag{2.21}$$

D'après le lemme de Danskin (Annexe, page 42), la fonction $h(\cdot)$ a des dérivées directionnelles données par la formule

$$h'(t,d) = \inf_{v \in U_H(t)} \left(\partial_x H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)) \dot{\bar{x}}(t) d + \partial_p H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)) \dot{\bar{p}}(t) d \right), \tag{2.22}$$

et donc des dérivées directionnelles à droite sur $[0,T[$ et à gauche sur $]0,T]$, d'expression

$$h'(t,1) = \inf_{v \in U_H(t)} \left[\partial_x H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)) \dot{\bar{x}}(t) + \partial_p H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)) \dot{\bar{p}}(t) \right], \tag{2.23a}$$

$$h'(t,-1) = \inf_{v \in U_H(t)} \left[-\partial_x H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)) \dot{\bar{x}}(t) - \partial_p H(\bar{x}(t), v, \bar{p}(t)) \dot{\bar{p}}(t) \right]. \tag{2.23b}$$

Or $\bar{u}(t) \in U_H(t)$, et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\bar{x}}(t) & = & \partial_p H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)); \\ -\dot{\bar{p}}(t) & = & \partial_x H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)). \end{array} \right.$$

Donc,

$$\partial_x H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \dot{\bar{x}}(t) + \partial_p H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \dot{\bar{p}}(t) = -\dot{\bar{p}}(t) \cdot \dot{\bar{x}}(t) + \dot{\bar{p}}(t) \cdot \dot{\bar{x}}(t) \tag{2.24}$$

est nul ; et par conséquent :

$$h'(t,1) \leq 0, \quad t \in [0,\bar{T}[; \quad h'(t,-1) \leq 0, \quad t \in]0,\bar{T}]. \tag{2.25}$$

On en déduit par un résultat classique d'analyse que h est constante. ∎

Dans beaucoup de cas les conditions d'optimalité permettent de donner des renseignements sur le problème de commande optimale qu'on se pose et sur son éventuelle solution. Cependant dans le cas général, ces conditions d'optimalité ne sont pas simples à exploiter et leur résolution fait appel à des méthodes numériques [2, 3].

Enfin, notons que les conditions d'optimalité, présentées dans cette section ne présentent qu'une condition *nécessaire* qui doit être satisfaite par la commande optimale *quand elle existe*.

2.3 Cas de temps final libre

On considère maintenant le cas où le temps final t_f est une variable du problème $(\mathcal{P})$. Pour étudier les conditions d'optimalité de $(\mathcal{P})$, nous commençons d'abord par remarquer que $(\mathcal{P})$ est équivalent à un problème de commande optimale à temps final fixe. En effet, considérons le changement de variable suivant :

$$\begin{array}{rcll} t(s) & = & t_f \cdot s & s \in [0,1], \\ y(s) & = & x(t_f \cdot s) & (= x(t)), \\ v(s) & = & u(t_f \cdot s) & (= u(t)). \end{array} \tag{2.26}$$

Si $u \in \mathcal{U}$ et si $x = x_u$ est l'état associé à u sur l'intervalle $(0, t_f)$, alors $v \in \mathcal{V} = \{v \in L^2(0,1; I\!R^m) \mid v(s) \in U\}$, et (v, y, t_f) sont liés par l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dot{y}(s) & = & t_f f(y(s), v(s)) & s \in (0,1) \\ y(0) & = & x^o \end{array} \right. \tag{2.27}$$

Cette équation peut être interprétée comme une nouvelle équation d'état sur un intervalle fixe $(0,1)$, la variable y étant une nouvelle variable d'état, et v, t_f étant des nouvelles variables de commande.
D'autre part, on a :

$$\begin{array}{rcl} J(x,u,t_f) & = & \Phi(y(1)) + \displaystyle\int_0^1 t_f L(y(s), v(s))\, ds \\ & =: & \widetilde{J}(y, v, t_f). \end{array}$$

Ceci nous amène à considérer le problème $(\widetilde{\mathcal{P}})$ défini par :

$$\inf \left\{ \widetilde{J}(y,v,t_f) \mid (v,t_f) \in \mathcal{V} \times I\!R_+^*, \ (y,v,t_f) \text{ vérifie } (2.27) \right\}. \tag{$\widetilde{\mathcal{P}}$}$$

Remarque 4. Dans le problème $(\mathcal{P})$, le temps final t_f est considéré comme une variable de contrôle.

Il est clair que le problème $(\mathcal{P})$ est équivalent au problème $(\widetilde{\mathcal{P}})$ dans le sens qu'à chaque triplet (x, u, t_f) admissible pour $(\mathcal{P})$ on peut associer un triplet (y, v, t_f) admissible pour $(\widetilde{\mathcal{P}})$ et vice-versa. Le problème de commande optimale $(\widetilde{\mathcal{P}})$ a l'avantage d'être à temps final fixe, mais il a l'inconvénient d'avoir un ensemble de commandes admissibles qui n'est ni fermé ni borné, et donc les résultats de la section 3.1 ne peuvent pas être appliqués sur $(\mathcal{P})$. Pour contourner cette difficulté, nous allons restreindre l'ensemble des commandes admissibles à $\mathcal{V} \times [\frac{M}{2}, 2M]$ pour $M > 0$ (M est pour le moment une constante quelconque, on précisera ultérieurement sa valeur). On considère alors le problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_M)$:

$$\inf \left\{ \widetilde{J}(y, v, t_f) \mid (v, t_f) \in \mathcal{V} \times [\frac{M}{2}, 2M],\ (y, v, t_f) \text{ vérifie } (2.27) \right\}. \qquad (\widetilde{\mathcal{P}}_M)$$

Nous commencerons par établir les conditions d'optimalité de $(\widetilde{\mathcal{P}}_M)$ en utilisant le thorme 6. Notons que, pour tout $M > 0$, l' hamiltonien du problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_M)$ est défini sur $I\!R^n \times I\!R^m \times I\!R^+ \times I\!R^n \times I\!R$ par :

$$\widetilde{H}(y, (v, t_f), q, \lambda_o) = \lambda_o t_f L(y, v) + t_f \langle p, f(y, v) \rangle_n.$$

Proposition 1. *Supposons que les hypothèses (A1)-(A4) sont satisfaites. Soit M un réel de $I\!R_+^*$ quelconque et $(\bar{y}, \bar{v}, \bar{t}_f)$ une solution optimale de $(\widetilde{\mathcal{P}}_M)$. Ils existent $(\lambda_o, \lambda) \in I\!R \times I\!R^p$ avec $(\lambda_o, \lambda) \neq 0$, $\bar{q} \in H^1(0, 1; I\!R^n)$ tels que :*

$$\begin{cases} \dot{\bar{y}}(s) &= \bar{t}_f f(\bar{y}(s), \bar{v}(s)) \quad s \in (0,1) \\ \bar{y}(0) &= x^o \end{cases} \qquad (\text{\textit{équation d'état}})$$

$$\begin{cases} -\dot{\bar{q}}(s) &= \bar{t}_f \left[f_y'(\bar{y}(s), \bar{v}(s)) \right]^t \bar{q}(s) + \lambda_o \bar{t}_f L_y'(\bar{y}(s), \bar{v}(s)) \\ \bar{q}(1) &= \lambda_o \Phi'(\bar{y}(1)) + [\Psi'(\bar{y}(1))]^t \lambda \end{cases} \qquad (\text{\textit{équation adjointe}})$$

$$\widetilde{H}(\bar{y}(s), (\bar{v}(s), \bar{t}_f), \bar{q}(s), \lambda_o) = \min_{\substack{v \in U \\ t_f \in [M/2, 2M]}} \widetilde{H}(\bar{y}(s), (v, t_f), \bar{q}(s), \lambda_o) \qquad (\text{\textit{Principe Pontryagin}})$$

$$\Psi(\bar{y}(1)) = 0 \qquad (\text{\textit{Contrainte sur l'tat final}})$$

On énonce maintenant les conditions d'optimalité du problème de départ $(\mathcal{P})$.

Théorème 8. *Supposons que les hypothèses (A1)-(A4) sont satisfaites. Soit* $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{t}_f)$ *une solution optimale du problme de temps optimal* $(\mathcal{P})$. *Ils existent* $(\lambda_o, \lambda) \in I\!R \times I\!R^p$ *avec* $(\lambda_o, \lambda) \neq 0$, *et* $\bar{p} \in H^1(0, \bar{t}_f; I\!R^n)$ *tels que :*

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) &= f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \quad t \in (0, \bar{t}_f), \\ \bar{x}(0) &= x^o, \end{cases} \qquad \textit{(équation d'état)}$$

$$\begin{cases} -\dot{\bar{p}}(t) &= \left[f'_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\right]^t \bar{p}(t) + \lambda_o L'_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \\ \bar{p}(\bar{t}_f) &= \lambda_o \Phi'(\bar{x}(\bar{t}_f)) + [\Psi'(\bar{y}(\bar{t}_f))]^t \lambda, \end{cases} \qquad \textit{(équation adjointe)}$$

$$\Psi(\bar{x}(\bar{t}_f)) = 0 \qquad \textit{(contrainte sur l'tat)}$$

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) = \min_{u \in U} H(\bar{x}(t), u, \bar{p}(t), \lambda_o) \qquad \textit{p.p. sur } (0, \bar{t}_f), \qquad \textit{(Principe de Pontryagin)}$$

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) = 0 \quad \textit{p.p. sur } (0, \bar{t}_f). \qquad \textit{(condition d'optimalité sur } \bar{t}_f\textit{)}$$

Démonstration. L'idée de la preuve consiste simplement à se ramener à un problème à temps final fixe et à travailler avec des temps $t_f \in [\bar{t}_f/2, 2\bar{t}_f]$ (puisque $t_f = \bar{t}_f$ est bien dans cet intervalle).

Considérons à nouveau le changement de variable :

$$\begin{array}{rcll} t(s) &=& \bar{t}_f \cdot s & s \in [0,1], \\ \bar{y}(s) &=& \bar{x}(\bar{t}_f \cdot s) & (= \bar{x}(t)), \\ \bar{v}(s) &=& \bar{u}(\bar{t}_f \cdot s) & (= \bar{u}(t)). \end{array} \tag{2.28}$$

Par les arguments cités au début de ce paragraphe, on montre aisément que le triplet $(\bar{y}, \bar{v}, \bar{t}_f)$ est solution du problème à temps final fixe $(\widetilde{\mathcal{P}})$. Notons que $(\bar{y}, \bar{v}, \bar{t}_f)$ est aussi solution de $(\widetilde{\mathcal{P}}_{\bar{t}_f})$, où $(\widetilde{\mathcal{P}}_{\bar{t}_f})$ est le problème $(\widetilde{\mathcal{P}}_M)$ pour $M = \bar{t}_f$. La Proposition 1 implique alors qu'il existe $\bar{q} \in H^1(0, 1; I\!R^n)$ tel que :

$$\begin{cases} -\dot{\bar{q}}(s) &= \bar{t}_f \left[f'_y(\bar{y}(s), \bar{v}(s))\right]^t \bar{q}(s) + \lambda_o \bar{t}_f L'_y(\bar{y}(s), \bar{v}(s)) \\ \bar{q}(1) &= \lambda_o \Phi'(\bar{y}(1)) + [\Psi'(\bar{y}(1))]^t \lambda \end{cases} \tag{2.29}$$

et

$$\widetilde{H}(\bar{y}(s), (\bar{v}(s), \bar{t}_f), \bar{q}(s), \lambda_o) = \min_{\substack{v \in U \\ t_f \in [\bar{t}_f/2, 2\bar{t}_f]}} \widetilde{H}(\bar{y}(s), (v, t_f), \bar{q}(s), \lambda_o) \qquad \text{p.p. sur } (0,1). \tag{2.30}$$

On introduit la fonction $\bar{p}$ définie par :

$$\bar{q}(s) = \bar{p}(t) \quad (= \bar{p}(\bar{t}_f \cdot s)), \quad pour\, s \in [0,1].$$

La fonction $\bar{p}$ vérifie l'équation adjointe donnée dans le théorème. D'autre part, remarquons que $\widetilde{H}(y,(v,t_f),q,\lambda_o) = t_f\, H(y,v,q,\lambda_o)$, où $H(y,v,q) = \lambda_o L(y,v) + \langle p, f(y,v)\rangle_n$ est l'hamiltonien associé au problème $(\mathcal{P})$. De ce fait, le principe (2.30) implique que :

$$\begin{aligned} H(\bar{y}(s),\bar{v}(s),\bar{q}(s),\lambda_o) &= \min_{v\in U} H(\bar{y}(s),v,\bar{q}(s),\lambda_o), && \text{(2.31a)}\\ \bar{t}_f H(\bar{y}(s),\bar{v}(s),\bar{q}(s),\lambda_o) &= \min_{t_f\in[\bar{t}_f/2,2\bar{t}_f]} t_f H(\bar{y}(s),\bar{v}(s),\bar{q}(s),\lambda_o), && \text{(2.31b)}\end{aligned}$$

pour presque tout $s \in [0,1]$. Puisque $\bar{t}_f$ est strictement positif, on conclut alors que :

$$\begin{cases} H(\bar{y}(s),\bar{v}(s),\bar{q}(s),\lambda_o) = \min_{v\in U} H(\bar{y}(s),v,\bar{q}(s),\lambda_o) & \text{p.p. sur } (0,1)\\ H(\bar{y}(s),\bar{v}(s),\bar{q}(s),\lambda_o) = 0 & \text{p.p. sur } (0,1).\end{cases}$$

ou encore,

$$\begin{cases} H(\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{p}(t),\lambda_o) = \min_{v\in U} H(\bar{x}(t),v,\bar{p}(t),\lambda_o) & \text{p.p. sur } (0,\bar{t}_f)\\ H(\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{p}(t),\lambda_o) = 0 & \text{p.p. sur } (0,\bar{t}_f).\end{cases}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

♠ Le théorème ci-dessus nous donne donc les conditions d'optimalité, d'un problème de temps optimal sans contraintes finales sur l'état. Et une fois de plus, rappelons que lorsque f et L vérifient aussi les hypothèses (A1') et (A2'), alors le principe de Pontryagin implique que :

$$\partial_u H(\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{p}(t),\lambda_o)\cdot(v-\bar{u}(t)) \geq 0 \qquad \forall v\in U, \text{ p.p } t\in(0,\bar{t}_f).$$

Nous allons voir sur un exemple de conduite de bateau, comment utiliser ces conditions d'optimalité pour déterminer la commande optimale.

Exemple 7 (Conduite d'un bateau)**.** *Dans la conduite d'un bateau les équations du mouvement sont*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t),\ \dot{x}_2(t) = -qx_2(t) + u(t) \qquad t\in(0,t_f),\\ \\ x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = 0, \end{cases} \tag{2.32}$$

où u désigne une accélération angulaire et $q, x_{10} > 0$ sont des paramètres connus (x_1 désigne la position du bateau et x_2 désigne sa vitesse). Le problème consiste à passer *de la position* $(x_{10}, 0)$ *à* $(0,0)$ *en temps minimum. Nous supposons que les contraintes sur la commande* u *sont :* $-1 \leq u(t) \leq 1$*. Le problème de commande optimale s'écrit alors :*

$$\inf\{\int_0^{t_f} 1\,dt \mid (x,u,t_f) \text{vérifie } (2.32), x(t_f) = (0,0).\}.$$

Pour ce problème, l'hamiltonien est :

$$H(x,u,p,\lambda_o) = \lambda_o + p_1 x_2 + p_2(-q x_2 + u).$$

Si on note $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{t}_f)$ *la solution de ce problème, alors ils existent* $\lambda_o, \lambda_1, \lambda_2 \in I\!R$*, avec* $(\lambda_o, \lambda_1, \lambda_2) \neq 0$*, tels qu'on a :*

– *Les équations adjointes :*

$$\begin{cases} \dot{\bar{p}}_1(t) = 0, \quad \dot{\bar{p}}_2(t) = q\bar{p}_2(t) - \bar{p}_1(t) \quad t \in (0, \bar{t}_f) \\ \\ \bar{p}_1(\bar{t}_f) = \lambda_1, \quad \bar{p}_2(\bar{t}_f) = \lambda_2. \end{cases}$$

– *Le principe de Pontryagin :*

$$\partial_u H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) \cdot (u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall v \in [-1,1], \ p.p.\ t \in (0, \bar{t}_f).$$

– *La condition d'optimalité sur* $\bar{t}_f$ *:*

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) = 0 \quad t \in (0, \bar{t}_f).$$

Une résolution directe des équations adjointes conduit à :

$$\bar{p}_1(t) = c_1, \qquad \bar{p}_2(t) = c e^{qt} + \frac{c_1}{q},$$

avec $c_1 = \lambda_1$ *et* $c = \frac{q\lambda_2 - \lambda_1}{q} e^{-q\bar{t}_f}$*. Montrons que* $c \neq 0$*. Raisonnons par l'absurde : Si* $c = 0$*, alors* $\bar{p}_2 \equiv \frac{c_1}{q}$ *et*

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \lambda_o) = \lambda_o + c_1 \bar{x}_2 + \frac{c_1}{q}(-q\bar{x}_2 + \bar{u}) = \lambda_o + \frac{c_1}{q}\bar{u}(t) = 0. \qquad (2.33)$$

Remarquons que c_1 *ne peut pas tre nul, car sinon du fait que* c *est suppos gal 0 et tenant compte de* (2.33)*, on obtiendrait :* $\lambda_o = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$*, ce qui est impossible (non trivialit du multiplicateur). De mme,* λ_o *ne peut tre nul. Ceci implique que* $\bar{u} \equiv -\frac{q\lambda_o}{c_1}$*. Or cette commande ne permet pas de réaliser la condition finale* $\bar{x}(\bar{t}_f) = (0,0)$*. En effet, en résolvant l'équation d'état associée à cette commande, il vient :*

$$\bar{x}_2(t) = \frac{\lambda_o}{c_1}[e^{-qt} - 1],$$

et puisque $q > 0$, alors $\bar{x}_2(t) \neq 0$ pour tout $t > 0$. On conclut alors que $c \neq 0$, et donc la fonction $\bar{p}_2$ est strictement monotone.

D'autre part, le principe de Pontryagin implique que

$$\begin{cases} \bar{u}(t) = -1 & si \quad \bar{p}_2(t) > 0 \\ \bar{u}(t) = 1 & si \quad \bar{p}_2(t) < 0 \end{cases}$$

Tenant compte des conditions limites, nous pouvons montrer que $\bar{u}$ ne peut pas être constant. De plus, puisque $\bar{p}_2$ est monotone alors $\bar{p}_2$ change de signe au plus une fois. Par suite, nous n'avons que deux cas possibles pour la commande optimale :

- *Cas 1 : Il existe $t_1 > 0$, tel que $\bar{u} \equiv -1$ sur $(0, t_1)$ et $\bar{u} \equiv 1$ sur $(t_1, \bar{t}_f)$.*
- *Cas 2 : Il existe $t_1 > 0$, tel que $\bar{u} \equiv 1$ sur $(0, t_1)$ et $\bar{u} \equiv -1$ sur $(t_1, \bar{t}_f)$.*

Nous allons analyser chacun de ces deux cas. Dans le premier cas, la résolution de l'équation d'état sur $[0, t_1]$ avec la condition initiale $\bar{x}(0) = (x_{10}, 0)$ donne

$$\bar{x}_2(t) = \frac{e^{-qt} - 1}{q}, \quad \bar{x}_1(t) = x_{10} + \frac{1 - e^{-qt}}{q^2} - \frac{t}{q} \qquad sur\ [0, t_1].$$

Et la résolution de l'équation d'état sur $[t_1, \bar{t}_f]$ avec la condition finale $\bar{x}(\bar{t}_f) = (0, 0)$ donne

$$\bar{x}_2(t) = \frac{1 - e^{-q(t-\bar{t}_f)}}{q}, \quad \bar{x}_1(t) = \frac{e^{-q(t-\bar{t}_f)} - 1 - q(\bar{t}_f - t)}{q^2} \qquad sur\ [t_1, \bar{t}_f].$$

Rappelons que l'état $\bar{x}$ est une fonction continue. Donc les conditions de raccordement suivantes, en t_1, doivent être vérifiées :

$$\begin{cases} \dfrac{e^{-qt_1} - 1}{q} = \dfrac{1 - e^{-q(t_1 - \bar{t}_f)}}{q} \\ \\ x_{10} + \dfrac{1 - e^{-qt_1}}{q^2} - \dfrac{t_1}{q} = \dfrac{e^{-q(t_1 - \bar{t}_f)} - 1 - q(\bar{t}_f - t_1)}{q^2}. \end{cases}$$

La résolution de ce système implique finalement que : $t_1 = \dfrac{qx_{10} + \bar{t}_f}{2}$ et $\bar{t}_f$ vérifie l'équation :

$$q^2 x_{10} = 2ln(\frac{e^{q\bar{t}_f} + 1}{2}) - \bar{t}_f.$$

Reste maintenant à prouver que le Cas 2 ne peut pas se produire. En effet, si $\bar{u} \equiv 1$ sur $(0, t_1)$ et $\bar{u} \equiv -1$ sur $(t_1, \bar{t}_f)$, on obtient :

$$\bar{x}_2(t) = \frac{1 - e^{-qt}}{q}, \quad \bar{x}_1(t) = x_{10} + \frac{-1 + e^{-qt}}{q^2} + \frac{t}{q} \qquad sur\ [0, t_1]$$
$$\bar{x}_2(t) = \frac{e^{-q(t-\bar{t}_f)} - 1}{q}, \quad \bar{x}_1(t) = \frac{-e^{-q(t-\bar{t}_f)} + 1 - q(t - \bar{t}_f)}{q^2} \qquad sur\ [t_1, \bar{t}_f].$$

Les conditions de raccordement conduisent à des équations sans solution.

Chapitre 3

Commande des systèmes linéaires

3.1 Commandabilité

Considérons le système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x^o, \tag{3.1}$$

où A est une matrice $n \times n$ et B une matrice $n \times m$. On suppose que A et B sont à coefficients constants.

Définition 4. *On dit que le système (3.1) est* commandable *si*

$\forall x^o, x^d \in \mathbb{R}^n, \exists u \in L^2(0,T)$ *tel que la solution* x_u *de* (3.1) *satisfait* $x_u(T) = x^d$.

Notons que pour $u \in L^2(0,T)$, la solution x_u de (3.1) satisfait :

$$x_u(T) = e^{AT}x^o + \int_0^T e^{A(T-t)}Bu(t)\,dt.$$

On conclut alors que le système (3.1) est commandable si et seulement si l'opérateur

$$\mathcal{L} : v \longmapsto \int_0^T e^{A(T-t)}Bv(t)\,dt$$

est surjectif de $L^2(0,T)$ dans $\mathbb{R}^n$.

Revoyons d'abord un petit **rappel sur les espaces de Hilbert.** Soient X et H deux espaces de Hilbert et $\mathcal{L}$ un opérateur linéaire continu de X dans H. Alors $\mathcal{L}$ est surjectif si et seulement si $\mathcal{L}^*$ (l'adjoint de $\mathcal{L}$) est injectif, en effet $Ker\mathcal{L}^* = (Im\mathcal{L})^\perp$.

Appliquons ce résultat à notre problème. Soit $v \in L^2(0,T)$ et soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\langle \int_0^T e^{A(T-t)}Bv(t)\,dt, x\rangle_n = \int_0^T \langle e^{A(T-t)}Bv(t), x\rangle_n\,dt = \int_0^T \langle v(t), B^* e^{A^*(T-t)}x\rangle_n\,dt.$$

On en déduit que $\mathcal{L}^*$ est l'opérateur de $I\!R^n$ à valeurs dans $L^2(0,T)$ défini par :

$$\mathcal{L}^* x = B^* e^{A^*(T-\cdot)} x \quad \forall x \in I\!R^n$$

où $B^* e^{A^*(T-\cdot)} x$ désigne la fonction $t \longmapsto B^* e^{A^*(T-t)} x$.

Lemme 1. *Soit $x \in I\!R^n$. On a :*

$$\mathcal{L}^* x = 0 \Longleftrightarrow [B^* x = B^* A^* x = \cdots = B^* {A^*}^{n-1} x = 0].$$

Démonstration. Si $\mathcal{L}^* x = 0$ alors $B^* e^{A^*(T-t)} x = 0$ pour tout $t \in [0,T]$. En dérivant $(n-1)$ fois par rapport à t et en posant $t = T$, on obtient

$$B^* x = 0, \cdots, B^* {A^*}^{n-1} x = 0.$$

Réciproquement, si $B^* x = 0, \cdots, B^* {A^*}^{n-1} x = 0$, à l'aide du Théorème de Cayley-Hamilton, on peut écrire

$$e^{A^*(T-t)} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha_i (T-t)^i {A^*}^i$$

avec $\alpha_i \in I\!R$, on aura donc $B^* e^{A^*(T-t)} x = \sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha_i (T-t)^i B^* {A^*}^i = 0$. ∎

Tenant compte du Lemme précédent, il vient que $\mathcal{L}^*$ est injective si et seulement si

$$[B^* x = 0, \cdots, B^* {A^*}^{n-1} x = 0] \Longleftrightarrow x = 0,$$

ou encore,

$$\mathrm{Ker}[B^* | B^* A^* | \cdots | B^* {A^*}^{n-1}] = \emptyset.$$

D'après les résultats de l'analyse matricielle, on conclut alors que $\mathcal{L}^*$ est injectif (et donc $\mathcal{L}$ est surjectif) si et seulement si la matrice $[B|AB|\cdots|A^{n-1}B]$ est de rang n. D'où le théorème suivant.

Théorème 9. *Le système (3.1) est commandable si et seulement si*

$$rg[B|AB|\cdots|A^{n-1}B] = n.$$

3.2 Critère linéaire sur l'état final

Analysons de plus près les propriétés de la solution d'un problème de contrôle optimal ($\mathcal{P}_{\text{linéaire}}$) avec un horizon T, optimal ou non :

$$\begin{aligned} &\text{Inf } q \cdot x(T); \\ &\text{avec } \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x^o \qquad (3.2a) \\ &\qquad u(t) \in U \quad \text{p.p } t \geq 0. \qquad (3.2b) \end{aligned}$$

On supposera dans toute cette section que l'ensemble U est convexe. Dans ce cas, le problème ($\mathcal{P}_{\text{linéaire}}$) est convexe : il posséde un critère linéaire et des contraintes convexes (ponctuelles) sur la commande. Donc les conditions nécessaires d'optimalité sont aussi des conditions suffisantes. D'après le théorème 4, on peut caractériser les solutions de ($\mathcal{P}_{\text{linéaire}}$) par le système d'optimalité suivant, faisant intervenir l'*état adjoint* $p \in C([0,T], I\!\!R^n)$, solution de

$$-\dot{p}(t) = A^t p(t), \quad t \in [0,T], \qquad p(T) = q, \tag{3.3}$$

et l' *hamiltonien* $H : I\!\!R^n \times I\!\!R^m \times I\!\!R^n \longrightarrow I\!\!R$ défini par

$$H(x,u,p) := p \cdot (Ax + Bu). \tag{3.4}$$

Théorème 10. *La commande u, fonction mesurable de $[0,T]$ vers U, est solution de ($\mathcal{P}_{linéaire}$)* **ssi** *elle vérifie*

$$B^t p(t)(v - u(t)) \geq 0 \quad \textit{pour tout } v \in U, \qquad \textit{p.p.} \quad t \in [0,T], \tag{3.5a}$$

$$\inf_{v \in U} H(x(t), v, p(t)) = cste \tag{3.5b}$$

Soit $p(t)$ solution de (3.3). Alors $B^t p(t)$ est une fonction analytique de t, donc soit est identiquement nulle, soit a un nombre fini de zéros sur $[0,T]$. Dans ce dernier cas on déduit de (3.5) nombre de renseignements sur la commande optimale.

Définition 5. *On dit que U est* strictement convexe *si, étant donné deux points* distincts *u_1 et u_2 de U, le segment*[1] *$]u_1, u_2[$ appartient à l'intérieur de U.*

Exemple 8. *Dans $I\!\!R^n$, la boule unité fermée pour la norme ℓ^p est strictement convexe si $1 < p < \infty$, mais pas si $p = 1$ ou $p = \infty$.*

1. Ce segment est par définition $\{\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2;\ \alpha \in]0,1[\}$.

Théorème 11. *Soit p solution de (3.3), avec $q \neq 0$. Alors*
(i) *Si le système est commandable, alors l'application $t \longrightarrow B^t p(t)$ n'est pas identiquement nulle.*
(ii) *Si $B^t p(t)$ n'est pas identiquement nulle, toute solution u du problème à coût linéaire ($\mathcal{P}_{linéaire}$) est telle que $u(t) \in \partial U$ pour tout $t \in [0,T]$, sauf au plus en un nombre fini de points.*
(iii) *Si de plus l'ensemble U est strictement convexe, alors ($\mathcal{P}_{linéaire}$) a une solution unique, continue en tout instant t, sauf peut-être ceux (en nombre fini) où $B^t p(t)$ est nul.*

Démonstration. (i) Supposons au contraire $B^t p(t)$ identiquement nulle. Alors en dérivant $n-1$ fois l'application $B^t p(\cdot)$ en T, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= B^t p(T) = B^t \dot{p}(T) = \cdots \\ &= B^t q = B^t A^t q = \cdots = B^t {A^t}^{n-1} q, \end{aligned}$$

autrement dit, q appartient au noyau de la matrice de commandabilité

$$[B^t | B^t A^t | B^t {A^t}^2 | \cdots | B^t {A^t}^{n-1}].$$

Si le système est commandable, ceci implique $q = 0$, ce qui est impossible.
(ii) D'après (3.5a), $u(t)$ doit minimiser la forme linéaire $v \longrightarrow p(t) \cdot Bv$ sur U à tout instant. Sauf en un nombre fini de points, cette forme linéaire est non nulle, ce qui implique que $u(t)$ est point frontière de U.
(iii) Le minimum d'une forme linéaire sur un ensemble strictement convexe est unique. Il est facile de vérifier qu'il dépend continûment de la forme linéaire si cette dernière n'est pas nulle, ce qui assure le point (iii). ■

3.3 Problème de transfert en temps minimal

Considérons maintenant un problème ($\mathcal{P}_{\text{transfert}}$) de transfert en temps minimal :

$$\begin{aligned} &\text{Inf } T; \\ &\text{avec } \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x^o, && (3.6a) \\ &\quad x(T) = x^d, && (3.6b) \\ &\quad u(t) \in U \quad \text{p.p } t \geq 0. && (3.6c) \end{aligned}$$

Des résultats de la section 2.3, on déduit que, sous l'hypothèse de commandabilité du système (3.6a), si (u,T) est solution de ($\mathcal{P}_{\text{transfert}}$), alors il existe $(\lambda_0, \lambda) \in I\!R \times I\!R^n$ tel que $(\lambda_o, \lambda) \neq 0$ et :

$$-\dot{p}(t) = A^t p(t), \quad p(T) = \lambda \tag{3.7a}$$

$$B^t p(t) \cdot (v - u(t)) \geq 0 \quad \forall v \in U, \text{ p.p } t \in (0,T) \tag{3.7b}$$

$$\lambda_o + \langle p(t), Ax_u(t) + Bu(t)\rangle_n = 0 \quad \text{p.p } t \in (0,T) \tag{3.7c}$$

Remarquons que $\lambda \neq 0$. En effet, si $\lambda = 0$, alors p serait nul sur tout l'intervalle (0,T) et l'équation (3.7c) s'écrirait $\lambda_o = 0$, ce qui contredirait le fait que $(\lambda_o, \lambda) \neq 0$.

On peut donc utiliser le théorème 11 (avec $q = \lambda$), et établir ainsi le *résultat principal de cette section* :

Théorème 12. *Soit u solution du problème de temps minimal ($\mathcal{P}_{transfert}$). Alors*
(i) *Si le système est commandable, alors $u(t) \in \partial U$ pour tout $t \in [0,T]$, sauf au plus en un nombre fini de points.*
(iii) *Si de plus l'ensemble U est strictement convexe, alors le problème ($\mathcal{P}_{transfert}$) a une solution unique, continue en tout instant t, sauf peut-être ceux (en nombre fini) où $B^t p(t)$ est nul.*

Exemple 9. *Etudions le cas où U est la boule unité euclidienne fermée, qui est strictement convexe. Le minimum de $v \longrightarrow r \cdot v$ sur U, pour $r \neq 0$, est atteint en $-r/\|r\|$. Donc si $B^t p(t)$ n'est pas identiquement nulle, la commande en temps minimal vaut $u(t) = -B^t p(t)/\|B^t p(t)\|$.*

Dans certains cas on peut montrer que le principe du minimum est une condition suffisante (donc une CNS) d'optimalité. En voici un exemple.

Théorème 13. *On suppose U strictement convexe, le système commandable, et $x^d = 0$. Alors une commande transfère le système de x^o à 0 en temps minimal T si et seulement si les conditions (3.7) sont satisfaites, pour un certain $\lambda \neq 0$.*

Démonstration. Les conditions (3.7) sont nécessaires et ont une solution unique pour λ fixé (d'après le théorème 11), qui est aussi d'après le théorème 10 la solution unique du problème de minimisation de $\lambda \cdot x(T)$ sur l'horizon fixé T.

S'il existe une autre commande u^* transférant x^o à $x^d = 0$ en un temps $T^* < T$, prolongeant cette commande par 0 sur $[T^*, T]$, on obtient une solution différente du problème de minimisation de $\lambda \cdot x(T)$, ce qui est impossible. ■

3.3.1 Exemples et classes particulières

Nous allons voir que les résultats précédents permettent de résoudre complètement le problème de commande en temps optimal dans quelques cas particuliers importants.

3.3.1.1 Contraintes de bornes sur la commande

Nous reprenons dans cette section le problème de temps minimal, dans le cas où l'ensemble U est la boule unité de $\mathbb{R}^m$ muni de la norme infinie :

$$U = \{u \in \mathbb{R}^m; \ \ |u_i| \le 1, \ i = 1, \dots, m\}. \tag{3.8}$$

Cet ensemble est convexe et compact, d'intérieur contenant 0. Il n'est en revanche pas strictement convexe si $m > 1$. Le principe du minimum implique

$$u_i(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } (B^t p(t))_i > 0, \\ ? & \text{si } (B^t p(t))_i = 0, \\ 1 & \text{si } (B^t p(t))_i < 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Si $(B^t p(t))_i = 0$, le principe du minimum ne donne pas d'informations sur $u_i(t)$.

Puisque p est solution de l'équation linéaire homogène (sans second membre) (3.7a) de dimension n, il est de la forme

$$\pi_1(t)e^{\alpha_1 t} + \dots + \pi_r(t)e^{\alpha_r t}, \tag{3.10}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les valeurs propres *distinctes* de A (donc $r \le n$) de multiplicité μ_i, et $\pi_i(t)$ est un polynôme de degré d_i, avec $d_i \le \mu_i - 1$. Les fonctions $(B^t p(t))_i$ sont également de la forme (3.10). Elles sont donc, sur $[0, T]$, soit identiquement nulles, soit nulles en un nombre fini de points, et dans ce dernier cas le principe du minimum détermine u_i (sauf en ces points).

Lemme 2. *Soit u une commande amenant x^o à x^d en un temps minimal T, et p un état adjoint associé. Soit $i \in \{1, \dots, m\}$. Alors, soit $(B^t p(t))_i$ est identiquement nul, soit u_i change de signe un nombre fini de fois. Dans ce dernier cas, toutes les commandes transférant l'état de x^o à x^d en temps minimal ont même composante i, sauf peut-être aux instants de changement de signe.*

Si les valeurs propres de A sont réelles, on peut donner une estimation du nombre des points de changement de signe :

Lemme 3. *Toute fonction $\psi(t)$ non nulle, de la forme (3.10), avec $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ réels distincts et $\pi_i(t)$ polynôme réels de degré d_i, a au plus $d_1 + \dots + d_r + r - 1$ zéros.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur r. Si $r = 1$, $\psi(t) = \pi_1(t)e^{\alpha_1 t}$ a les mêmes zéros que π_1 ; ce dernier étant un polynôme de degré d_1, a au plus $d_1 = d_1 + r - 1$

racines sur $[0,T]$. Supposons maintenant le résultat vrai pour $r-1$. Alors $\psi(t)$ a les même zéros que la fonction

$$e^{-\alpha_1 t}\psi(t) = \pi_1(t) + \pi_2(t)e^{(\alpha_2-\alpha_1)t} + \cdots + \pi_r(t)e^{(\alpha_r-\alpha_r)t}. \tag{3.11}$$

La dérivée d'ordre d_1+1 de cette fonction est de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^{(\mathrm{d}_1+1)}\left[\mathrm{e}^{-\alpha_1 \mathrm{t}}\psi(\mathrm{t})\right]}{\mathrm{d}t^{(d_1+1)}} = \bar{\pi}_2(t)e^{(\alpha_2-\alpha_1)t} + \cdots + \bar{\pi}_r(t)e^{(\alpha_r-\alpha_1)t}, \tag{3.12}$$

avec $\bar{\pi}_2(t), \ldots, \bar{\pi}_n(t)$ polynômes de degré d_i. D'après notre construction par récurrence, elle a au plus $d_2+\cdots+d_r+r-2$ zéros. Or, entre deux zéros d'une fonction se trouve au moins un zéro de sa dérivée. Si la fonction ψ avait plus de $d_1+\cdots+d_r+r-1$ zéros, sa dérivée d'ordre d_1+1 aurait donc plus de $d_2+\cdots+d_r+r-2$ zéros, d'où une contradiction. ■

Proposition 2. *Supposons les valeurs propres de A réelles. Soit u une commande amenant x^o à x^d en un temps minimal T, et p un état adjoint associé. Soit $i \in \{1,\ldots,m\}$. Alors, soit $(B^t p(t))_i$ est identiquement nul, soit u_i change de signe au plus $n-1$ fois.*

Démonstration. Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ les valeurs propres *distinctes* de A de multiplicité μ_i. Alors $(B^t p(t))_i$ est de la forme (3.10), avec $d_i \le \mu_i - 1$, et a donc au plus $d_1+\cdots+d_r+r-1$ zéros. Mais

$$d_1+\cdots+d_r+r-1 \le \mu_1+\cdots+\mu_r-1 = n-1. \tag{3.13}$$

■

Discutons quelques exemples qui éclairciront les résultats ci-dessus.

Exemple 10. *Considérons le problème de transfert en temps minimal de $x^o = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ à $x^d = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, avec la dynamique*

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = 2u_2, \tag{3.14}$$

et les contraintes $|u_i(t)| \le 1$, $t\in[0,T]$, $i=1,2$. Il est clair que le temps minimal de transfert est $T=1$; toute commande optimale u est telle que $u_1(t)=-1$ sur $[0,T]$; par contre on n'a pas d'unicité de $u_2(t)$. Comment cela se traduit-il sur le système d'optimalité ?

D'abord notons que le système est bien commandable Les conditions d'optimalité disent qu'il existe $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^t \neq (0,0)^t$ *tel que*

$$p_1(t) = \lambda_1, \quad p_2(t) = \lambda_2, \qquad p.p\ t \in (0,T)$$
$$u_1(t) = \begin{cases} -1 & si\ \lambda_1 > 0, \\ ? & si\ \lambda_1 = 0, \\ 1 & si\ \lambda_1 < 0, \end{cases} \qquad et \quad u_2(t) = \begin{cases} -1 & si\ \lambda_2 > 0, \\ ? & si\ \lambda_2 = 0, \\ 1 & si\ \lambda_2 < 0, \end{cases}$$
$$1 + \lambda_1 u_1 + 2\lambda_2 u_2 = 0.$$

Supposons que $\lambda_2 \neq 0$ *donc soit qu'on a* $\lambda_2 > 0$ *et* $u_2 = -1$ *ou qu'on a* $\lambda_2 < 0$ *et* $u_2 = 1$ *et dans les deux cas (en intégrant l'équation de* x_2*) on s'aperçoit qu'on ne pourra pas atteindre la cible* $x_2 = 0$*. Par conséquent* $\lambda_2 = 0$ *et* $\lambda_1 \neq 0$*. Le principe du minimum impose donc* $u_1(t) = -1$ *sur* $[0,1]$*, mais n'impose rien sur* u_2*, sinon d'être à valeurs dans* $[-1,1]$*, et tel que* $x_2(T) = 0$*.*

Exemple 11. *Soit le système dynamique*

$$\ddot{z}(t) = u(t), \quad t \in [0,T]; \qquad z(0) = h,\ \dot{z}(0) = v. \tag{3.15}$$

Considérons le problème de transfert en temps minimal vers la position de repos $((z(t_f), \dot{z}(t_f)) = (0,0))$*, sous la contrainte* $|u(t)| \leq 1$*. En posant* $V(t) := \dot{z}(t)$*, l'équation (3.15) se réecrit :*

$$\dot{z}(t) = V(t), \qquad \dot{V}(t) = u(t).$$

La dynamique de l'état adjoint est

$$-\dot{p}_1(t) = 0, \quad -\dot{p}_2(t) = p_1(t), \quad t \in [0, t_f]. \tag{3.16}$$

Le système est commandable, et U *est strictement convexe, donc (théorème 11)* $B^t p(t) = p_2(t)$ *n'est pas identiquement nulle et la commande optimale est unique. La dynamique a pour seule valeur propre 0. La proposition 2 implique que cette commande optimale change de signe au plus 1 fois.*

Réciproquement, toute commande amenant x^o *à 0 (en un temps* T *a priori quelconque) et changeant de signe au plus 1 fois est optimale (théorème 13).*
Lorsque u *est constant, on a* $z(t) = vt + u\frac{t^2}{2} + h$*. Atteindre la cible au temps* t_f *signifie que*

$$z(t_f) = 0, \quad et\ \dot{z}(t_f) = 0.$$

Ou encore,

$$v + ut_f = 0, \qquad vt_f + u\frac{t_f^2}{2} + h = 0. \tag{3.17}$$

Ce qui conduit à

$$h = u\frac{v^2}{2}, \quad et\ \frac{v}{u} \leq 0.$$

Ainsi l'ensemble des points (h, v) pouvant atteindre la cible avec un contrôle constant valant ± 1, est la réunion des courbes $C_1 := \{(h, v) \mid h = v^2/2,\ v \leq 0\}$ et $C_2 := \{(h, v) \mid h = -v^2/2,\ v \geq 0\}$.

Maintenant d'un point quelconque $(h_o, v_o) \in I\!R^2 \setminus (C_1 \cup C_2)$, la trajectoire commençant avec un contrôle $u = -1$ (resp. $u = 1$) ne peut atteindre la cible que si elle rencontre la courbe C_1 (resp. C_2). Or cette trajectoire est décallée par rapport C_2 de $h_o + \frac{v_o^2}{2}$, elle ne pourra rencontrer C_1 que si

$$h_o + \frac{v_o^2}{2} \geq 0.$$

Il est facile alors de vrifier que le moment de transition (l'instant o on passe de $u = -1$ $u = 1$) est donn par :

$$t_{trans} = v_o + \sqrt{\frac{v_o^2}{2} + h_o}.$$

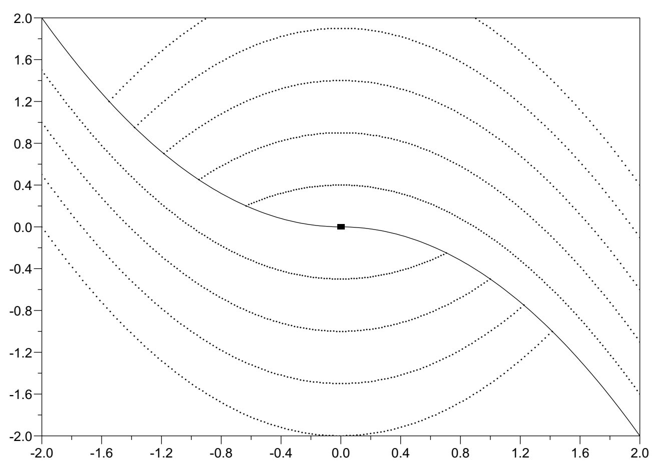


FIGURE 3.1 – Synthèse des trajectoires en temps minimal : exemple 11

Dans fig. 3.1, on se place dans le repre (h, v). On a tra en trait plein la courbe $C_1 \cup C_2$, et en pointill les trajectoires en temps minimal avec un changement de signe pour le contrle.

3.4 Commande des systèmes linéaires à coût quadratique

3.4.1 Définition du problème

Considérons le *système* linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) & = x^o. \end{cases} \tag{3.18}$$

où A est une matrice $n \times n$ dont les coefficients dépendent éventuellement de t, B est une matrice $n \times m$, $u(t) \in I\!R^m$.

Nous cherchons à déterminer la commande u qui permet de :

1. stabiliser le système au voisinage d'une trajectoire de référence $(\tilde{x}(\cdot))$connue,
2. stabiliser plus particulièrement l'instant terminal $x(T)$ au voisinage de $\tilde{x}(T)$,
3. réaliser 1. et 2. avec un coût énergétique raisonnable.

Ceci s'interprète comme un problème de commande optimale $(\mathcal{P}_{quad})$ où on cherche à minimiser le critère suivant :

$$\begin{aligned} J(x_u, u) = & \frac{1}{2}(x_u(T) - \tilde{x}(T))^t F(x_u(T) - \tilde{x}(T)) \\ & + \frac{1}{2}\int_0^T u^t G u dt + \frac{1}{2}\int_0^T (x_u - \tilde{x})^t Q (x_u - \tilde{x}) dt, \end{aligned}$$

où x_u est la solution de (3.18) associée à u. Les matrices F, G, Q sont symétriques définies positives, l'application $u \longmapsto J(x_u, u)$ est donc une forme quadratique continue sur V ; l'hypothèse sur G implique de plus que cette application est coercive sur V :

$$J(x_u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2,$$

où $\alpha > 0$ est la plus petite valeur propre de G. On en déduit donc l'existence et l'unicité de la commande optimale $\bar{u}$. Notons $\bar{x}$ son état associé.

3.4.2 Conditions d'optimalité

En appliquant le principe de Pontryagin, nous obtenons la caractérisation suivante de $\bar{u}$. Il existe un état adjoint $\bar{p}$ solution de l'équation différentielle rétrograde :

$$\begin{cases} -\dot{\bar{p}}(t) & = A^t \bar{p}(t) + Q(\bar{x}(t) - \tilde{x}(t)) \text{ sur }]0, T[, \\ \bar{p}(T) & = F(\bar{x}(T) - \tilde{x}(T)), \end{cases}$$

tel que

$$H(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t)) = \min_{u \in I\!R} H(\bar{x}(t), u, \bar{p}(t))$$

où $H(x, u, p) = \frac{1}{2}\langle x - \tilde{x}, Q(x - \tilde{x})\rangle_n + \frac{1}{2}\langle u, Gu\rangle_m + \langle p, Bu\rangle_n$. On en déduit que la commande optimale du problème est définie par :

$$\bar{u}(t) = -G^{-1}B^t\bar{p}(t) \qquad t \in (0, T). \tag{3.19}$$

Pour déterminer la commande optimale il faut donc intégrer le système couplé *équation d'état-équation adjointe* :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} & = A\bar{x} - BG^{-1}B^t\bar{p} \qquad \bar{x}(0) = x^o \\ -\dot{\bar{p}} & = A^t\bar{p} + Q(\bar{x} - \tilde{x}) \qquad \bar{p}(T) = F(\bar{x}(T) - \tilde{x}(T)). \end{cases} \tag{3.20}$$

C'est un système de $2n$ équations différentielles avec des conditions aux deux extrémités de l'intervalle $[0, T]$. Ce type de problèmes est appelé "*problème aux deux bouts.*"

Remarque 5. La loi (3.19) donnant la commande optimale montre que $\bar{u}$ hérite de la régularité de l'état adjoint $\bar{p}$ dont on sait déjà que, comme l'état $\bar{x}$, il appartient à $H^1(0, T; I\!R^n)$ et donc est continu sur $[0, T]$. Par récurrence sur le système (3.20) on établit que $\bar{x}$, $\bar{p}$ sont infiniment dérivables sur $[0, T]$ et donc aussi la commande optimale : $\bar{u} \in C^\infty(0, T)$.

3.4.3 Equation de Riccati. Loi de feedback

La loi (3.19) montre que la commande optimale est une fonction de l'état adjoint. En fait, nous pouvons aussi démontrer que la commande optimale permettant de stabiliser le système (3.18) est une fonction qui dépend à chaque instant t de l'état $\bar{x}(t)$ dans lequel se trouve le système à cet instant. Plus précisément, nous avons le théorème ci-dessous. (Pour simplifier l'analyse, nous supposons dans toute la suite de cette section que $\tilde{x} \equiv 0$)

Théorème 14. *Le problème de commande optimale linéaire-quadratique* ($\mathcal{P}_{quad}$) *admet une solution unique donnée par*

$$\bar{u}(t) = -G^{-1}B^tS(t)\bar{x}(t), \tag{3.21}$$

où la matrice $S(t)$ est l'unique solution de l'équation :

$$\begin{cases} -\dot{S} = SA + A^tS + Q - SBG^{-1}B^tS \qquad \text{sur } (0, T) \\ S(T) = F \end{cases} \tag{3.22}$$

De plus, pour tout $t \in [0,T]$, la matrice $S(t)$ est symétrique semi-définie positive, et même définie positive si F l'est.

Remarque 6. L'équation (3.22) est appelée *équation de Riccati*. La commande $\bar{u}$ est une fonction de l'état $\bar{x}$. Ce type de commande est appelé "*commande feedback*" ou "*contrôle feedback*".

Pour prouver le théorème, on observe d'abord que les équations différentielles décrivant l'évolution de l'état et de l'état adjoint étant linéaires, la solution $(x(t), p(t))$ dépend linéairement de la condition initiale x^o ; il existe donc deux applications linéaires X et Π de classe C^∞ à valeurs dans l'ensemble des matrices $n \times n$ telles que :

$$\begin{array}{ll} x(t) = X(t)x^o & , \quad \text{avec } X(0) = I_n \text{ (matrice identité d'ordre } n) \\ p(t) = \Pi(t)x^o & . \end{array}$$

Montrons que $X(t)$ est inversible pour tout $t \in [0,T]$.

Lemme 4. *Supposons qu'il existe un instant $t_0 \in [0,T]$ tel que la solution du système (3.20) vérifie $\bar{x}(t_0) = 0$; alors*

$$\bar{x}(t) \equiv \bar{p}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [t_0, T]$$

Démonstration. On établit l'identité

$$\frac{d}{dt}\langle \bar{x}(t), \bar{p}(t)\rangle_n = \langle \dot{\bar{x}}(t), \bar{p}(t)\rangle_n + \langle \bar{x}(t), \dot{\bar{p}}(t)\rangle_n = -\langle BG^{-1}B^t\bar{p}(t), \bar{p}(t)\rangle_n - \langle \bar{x}(t), Q\bar{x}(t)\rangle_n$$

d'où, en intégrant entre t_0 et T, on déduit

$$\langle \bar{x}(t_0), \bar{p}(t_0)\rangle_n = \langle \bar{x}(T), F\bar{x}(T)\rangle_n + \int_0^T [\langle G^{-1}B^t\bar{p}(t), B^t\bar{p}(t)\rangle_n + \langle \bar{x}(t), Q\bar{x}(t)\rangle_n]\, dt. \quad (3.23)$$

Puisque tous les termes du second membre sont positifs ou nuls d'après les hypothèses faites sur les matrices F, G et Q, il est clair que, si $\bar{x}(t_0) = 0$,

$$\bar{p}(T) = F\bar{x}(T) = 0 \ \text{ et } \ B^t\bar{p}(t) = Q\bar{x}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Le système d'optimalité se réduit alors à

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} & = A\bar{x}, \qquad \bar{x}(t_0) = 0 \\ \dot{\bar{p}} & = -A^t\bar{p}, \qquad \bar{p}(T) = 0 \end{cases}$$

Ce qui implique que $\bar{x} \equiv \bar{p} \equiv 0$ sur $[t_0, T]$. ■

On vient de montrer que s'il existe $t_0 \in [0, T]$ tel que la solution de (3.20) vérifie $\bar{x}(t_0) = X(t_0)x^o = 0$ alors $\bar{x}(T) = 0$ et $\bar{p}(T) = 0$. D'après l'unicité de la solution du système différentiel linéaire gouvernant $(\bar{x}, \bar{p})$ avec cette condition finale homogène (il s'agit cette fois-ci d'un problème de Cauchy rétrograde), cela entraîne que $\bar{x} \equiv \bar{p} \equiv 0$ sur tout l'intervalle $[0, T]$ et en particulier que $x^o = 0$, ce qui établit la non singularité de $X(t)$ sur $[0, T]$. Par conséquent, on a

$$\bar{p}(t) = S(t)\bar{x}(t), \qquad \text{où } S(t) = \Pi(t)X(t)^{-1}.$$

S est une matrice $n \times n$ de classe C^∞ sur $[0, T]$, avec $S(T) = F$. On peut écrire :

$$\dot{\bar{p}} = \dot{S}\bar{x} + S\dot{\bar{x}} = (\dot{S} + SA - SBG^{-1}B^tS)\bar{x} = -A^tS\bar{x} - Q\bar{x}$$

d'où

$$(\dot{S}(t) + S(t)A + A^tS(t) + Q - S(t)BG^{-1}B^tS(t))\bar{x}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Cette relation est vérifiée quelque soit la condition initiale $x^o \in I\!R^n$. Comme $X(t)$ est inversible, pour tout t fixé, $\bar{x}(t)$ décrit tout $I\!R^n$ lorsque x^o décrit $I\!R^n$. On en déduit que S satisfait l'équation différentielle matricielle rétrograde :

$$-\dot{S} = SA + A^tS + Q - SBG^{-1}B^tS \quad \text{sur } (0, T)$$

avec la condition finale $S(T) = F$. ■

Théorème 15. *Soit $S(t)$ la solution symétrique de l'équation de Riccati et $(\bar{u}, \bar{x})$ la solution optimale du problème $(\mathcal{P})$. On a :*

$$J(\bar{x}, \bar{u}) = \frac{1}{2}\langle x^o, S(0)x^o\rangle_n,$$

où x^o est la condition initiale de l'état.

Démonstration. Tenant compte de la définition de J, de (3.21) et de (3.22), on obtient :

$$\begin{aligned}
J(\bar{x}, \bar{u}) &= \frac{1}{2}\langle \bar{x}(T), S(T)\bar{x}(T)\rangle_n + \frac{1}{2}\int_0^T [\langle \bar{x}, Q\bar{x}\rangle_n + \langle G^{-1}B^tS\bar{x}, B^tS\bar{x}\rangle_n]\, dt \\
&= \frac{1}{2}\langle \bar{x}(T), S(T)\bar{x}(T)\rangle_n + \frac{1}{2}\int_0^T \langle \bar{x}, (SBG^{-1}B^tS + Q)\bar{x}\rangle_n\, dt \\
&= \frac{1}{2}\langle \bar{x}(T), S(T)\bar{x}(T)\rangle_n + \frac{1}{2}\int_0^T \langle \bar{x}, (\dot{S} + SA + A^tS + 2Q)\bar{x}\rangle_n\, dt \\
&= \frac{1}{2}\langle \bar{x}(T), S(T)\bar{x}(T)\rangle_n + \frac{1}{2}\int_0^T [\langle \bar{x}, \dot{S}\bar{x}\rangle_n + 2\langle A^tS\bar{x} + H\bar{x}, \bar{x}\rangle_n]\, dt.
\end{aligned}$$

Rappelons que $\bar{p} \equiv S\bar{x}$ et $-\dot{\bar{p}} = A^t\bar{p} + Q\bar{x} = A^tS\bar{x} + Q\bar{x}$. Donc, on a :

$$\begin{aligned}
J(\bar{x}, \bar{u}) &= \frac{1}{2}\langle \bar{x}(T), S(T)\bar{x}(T)\rangle_n + \frac{1}{2}\int_0^T [\langle \bar{x}, \dot{S}\bar{x}\rangle_n - 2\langle \bar{x}, \dot{\overline{S\bar{x}}}]\, dt \\
&= \frac{1}{2}\langle \bar{x}(T), S(T)\bar{x}(T)\rangle_n + \frac{1}{2}\int_0^T [-\langle \bar{x}, \dot{S}\bar{x}\rangle_n - \langle \bar{x}, S\dot{\bar{x}}\rangle_n - \langle \dot{\bar{x}}, S\bar{x}\rangle_n]\, dt \\
&= \frac{1}{2}\langle \bar{x}(T), S(T)\bar{x}(T)\rangle_n - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\langle \bar{x}, S\bar{x}\rangle_n
\end{aligned}$$

On conclut alors, en remarquant que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\langle \bar{x}, S\bar{x}\rangle_n = \langle \bar{x}(T), S(T)\bar{x}(T)\rangle_n - \langle \bar{x}(0), S(0)\bar{x}(0)\rangle_n,$$

et que $\bar{x}(0) = x^o$. ■

3.5 Annexe

Rappel sur les points de Lebesgue.

Soit L une fonction dans $L^1(0, T)$ (fonction intégrable sur $(0, T)$). On appelle point de Lebesgue de L, tout point $t_o \in (0, T)$ vérifiant :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t_o - \varepsilon}^{t_o + \varepsilon} L(t)\, dt = L(t_o).$$

Cette relation traduit une sorte de *continuité moyenne* des fonctions intégrables. Signalons que tous les points de $(0, T)$ ne sont pas forcément des points de Lebesgue de la fonction L, par contre on a :

Théorème 16. *Supposons $L \in L^1(0, T)$, alors* presque *tous les points de $(0, T)$ sont des points de Lebesgue pour la fonction L.*

La preuve de ce théorème peut être trouvée dans [4, p. 151]

Lemme de Danskin *Soit $F : (x, u) \longmapsto F(x, u)$ continue de $I\!R^n \times I\!R^m$ dans $I\!R$, et ayant une dérivée partielle F'_u continue sur $I\!R^n \times I\!R^m$. Soit un compact C de $I\!R^m$. Posons*

$$v(x) = min_{u \in C} F(x, u).$$

Notons l'ensemble où le minimum est atteint par

$$X(x) := \{u \in C; F(x, u) = v(x)\}.$$

Alors v a des dérivées directionnelles d'expression

$$v'(x, d) := min_{u \in X(x)} F'_u(x, u) \cdot d.$$

Bibliographie

[1] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Systems and Control : Foundations and Applications. Birkhäuser, Boston, 1997.

[2] R. Bulirsch and J. Stoer. *Introduction to numerical analysis*. Springer, New York, 1980.

[3] S.P. Park and S.R. Vadali. Touch points in optimal ascent trajectories with first-order state inequality constraints. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 21 :603–610, 1998.

[4] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson,Paris, 1987.