ENSTA Paris

(Introduction au calcul stochastique et applications, PRB203, FR) 2020-21

Série 2

1. Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. Posons

$$Y_n = \sum_{i=1}^{2^n} |W_{i2^{-n}} - W_{(i-1)2^{-n}}|.$$

(a) Montrer que $E(Y_n) = 2^{\frac{n}{2}} E(|W_1|)$ et $\mathrm{Var}(Y_n) = \mathrm{Var}(|W_1|)$.

Correction.

— Comme les incréments sont stationnaires nous avons

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \sum_{i=1}^{2^n} E(|W_{i2^{-n}} - W_{(i-1)2^{-n}}|) = \sum_{i=1}^{2^n} E(|W_{2^{-n}}|) \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} E\left(2^{-n/2}|W_1|\right) \\ &= 2^{-n/2} E(|W_1|) \sum_{i=1}^{2^n} 1 \\ &= 2^{n/2} E(|W_1|). \end{aligned}$$

— Comme les incréments sont indépendants et stationnaires nous avons

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y_n) &= \sum_{i=1}^{2^n} \mathrm{Var}(|W_{i2^{-n}} - W_{(i-1)2^{-n}}|) = \sum_{i=1}^{2^n} \mathrm{Var}(|W_{2^{-n}}|) \\
&= \sum_{i=1}^{2^n} \mathrm{Var}\left(2^{-n/2}|W_1|\right) \\
&= 2^{-n} \sum_{i=1}^{2^n} \mathrm{Var}(|W_1|) \\
&= \mathrm{Var}(|W_1|).
\end{aligned}
$$

(b) En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} P\{Y_n < n\} < \infty$.

Corrections. Nous avons

$$P\{Y_n < n\} = P\{Y_n - E(Y_n) < n - 2^{\frac{n}{2}} E(|W_1|)\}. \quad (0.1)$$

Pour n suffisamment grand on a

$$2^{\frac{n}{2}} E(|W_1|) - n > 0.$$

Ainsi pour de tels n,

$$\begin{aligned} P\{Y_n < n\} &= P\{E(Y_n) - Y_n > 2^{\frac{n}{2}} E(|W_1|) - n\} \\ &\leq P\left\{|E(Y_n) - Y_n| > 2^{\frac{n}{2}} \left(E(|W_1|) - n2^{\frac{-n}{2}}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} E(|W_1|) - n2^{\frac{-n}{2}} = E(|W_1|),$$

il existe n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow E(|W_1|) - n2^{\frac{-n}{2}} \geq \frac{E(|W_1|)}{2}.$$

Ainsi pour $n \geq n_0$,

$$P\{Y_n < n\} \leq P\left\{|E(Y_n) - Y_n| > 2^{\frac{n}{2}} \frac{E(|W_1|)}{2}\right\}.$$

Par l'inégalité de Chebyshev on a

$$\begin{aligned} P\{Y_n < n\} &\leq 4\mathrm{Var}(Y_n)\frac{2^{-n}}{(E(|W_1|)^2)} \\ &= 2^{-n}\frac{4\mathrm{Var}(|W_1|)}{(E(|W_1|)^2)}, \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.

2. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale, telle que pour tout t,

$$E(M_t^2) < +\infty.$$

Démontrer que si $s \leq t$, alors

$$E((M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s) = E(M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s).$$

Corrections.

Nous avons

$$\begin{aligned} E((M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s) &= E(M_t^2 + M_s^2 - 2M_sM_t|\mathcal{F}_s) \\ &= E(M_t^2|\mathcal{F}_s) - M_s^2 \\ &= E(M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s). \end{aligned}$$

3. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus à accroissements indépendants et stationnaires nul en l'instant 0 et tel que, pour tout t, $E(X_t^2) < +\infty$. On supposera, de plus, que la fonction $t \mapsto E(X_t^2)$ est continue. Démontrer que $E(X_t) = ct$ et que $\mathrm{Var}(X_t) = c't$, c et c' étant des constantes.

   Indication : Vérifier la propriété suivante. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f(t+s) = f(t)+f(s), \forall s,t \geq 0$ si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ avec $f(t) = ct$.

Corrections.

Lemme 0.1 *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. *Alors*

$$f(t+s) = f(t) + f(s), \ \forall s, t \geq 0,$$

si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R}$ *avec* $f(t) = ct$.

Preuve. L'implication inverse étant triviale, passons à la preuve de l'implication directe.

Posons $c = f(1)$. Il suffit de montrer que

$$f(t) = ct, \ \forall t \in \mathbb{Q}_+,$$

étant donné que f est continue et $\mathbb{Q}_+$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Soit

$$t = \frac{p}{q}, \ p, q \in \mathbb{N}, q > 0.$$

Par hypothèse on a

$$f(1) = qf\left(\frac{1}{q}\right).$$

D'où

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = p\frac{1}{q}f(1) = \frac{p}{q}c,$$

et le résultat suit. ∎

Pour traiter l'exercice on va utiliser le lemme précédent.

Espérance. Posons $m(t) = E(X_t),\ t \geq 0$.

— **m(s+t) = m(s) + m(t).**

En effet, si $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned} E(X_{s+t}) &= E((X_{s+t} - X_t) + X_t) = E(X_{s+t} - X_t) + E(X_t) \\ &= E(X_s) + E(X_t) \end{aligned}$$

— m est **continue**.

En effet, si $t, t+h \geq 0$,

$$\begin{aligned} |m(t+h) - m(t)| &= |m(h)| \\ &= |E(X_h)| \\ &\leq \sqrt{E(X_h^2)} \to_{h \to 0} \sqrt{E(X_0^2)} = 0. \end{aligned}$$

— Par conséquent le lemme implique qu'il existe c tel que $E(X_t) = ct$.

Variance. Posons $V(t) = \mathrm{Var}(X_t)$.

— **V(s+t) = V(s) + V(t).**

Comme le processus X est à accroissements indépendants et stationnaires, si $0 \leq s \leq t$ nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_{s+t}) &= \mathrm{Var}(X_{s+t} - X_t + X_t) = \mathrm{Var}(X_{s+t} - X_t) + \mathrm{Var}(X_t) \\ &= \mathrm{Var}(X_s) + \mathrm{Var}(X_t).\end{aligned}$$

— V **est continue** car

$$\begin{aligned}V(t+h) - V(t) &= V(h) = \mathrm{Var}(X_h) = E(X_h^2) - (E(X_h))^2 \\ &\to E(X_0^2) - (E(X_0))^2 = \mathrm{Var}(X_0) = 0.\end{aligned}$$

— Par conséquent le lemme implique qu'il existe c' tel que $\mathrm{Var}(X_t) = c't$.

4. Démontrer que, si τ est un temps d'arrêt

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} | \text{pour tout } t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

définit une tribu et τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.

Corrections.

(a) $\mathcal{F}_\tau$ **est une tribu.**

— $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$ (clair).

— $A \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_\tau$.

(Comme

$$A \cap \{\mathcal{T} \leq t\} \subset \mathcal{F}_t, \ \forall t,$$

on a

$$A^c \cap \{\mathcal{T} \leq t\} = \{\mathcal{T} \leq t\} \cap (A \cap \{\mathcal{T} \leq t\})^c \in \mathcal{F}_t,$$

pour tout t.

— Supposons $A_n \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}, \forall n$ et posons $A = \cup A_n$. Cela donne

$$A \cap \{\mathcal{T} \leq t\} = \cup_n (A_n \cap \{\mathcal{T} \leq t\}) \in \mathcal{F}_t.$$

D'où $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$.

(b) **$\mathcal{T}$ est $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$-mesurable.** En effet si $s \geq 0$, on montre que $\{\mathcal{T} \leq s\} \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$. En effet

$$\{\mathcal{T} \leq s\} \cap \{\mathcal{T} \leq t\} = \{\mathcal{T} \leq s \wedge t\} \in \mathcal{F}_{s \wedge t} \subset \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0.$$

5. Démontrer que si $\mathcal{S}$ est un temps d'arrêt déterministe s alors $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}_s$.

   Correction.

   — $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$.

     En effet, soit $t \geq 0$. Si $A \in \mathcal{F}_s$ on a

$$A \cap \{\mathcal{S} \leq t\} = A \cap \{s \leq t\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F}_t & : \quad t < s \\ A \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t & : \quad t \geq s. \end{cases} \tag{0.2}$$

     D'où $A \in \mathcal{S}$.

   — $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{F}_s$. car

$$A \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \Rightarrow A = A \cap (\underbrace{\{\mathcal{S} \leq s\}}_{\Omega} \in \mathcal{F}_s.$$

6. Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ deux temps d'arrêt, tels que $\mathcal{S} \leq \mathcal{T}$. Démontrer que $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{T}}$.

   Correction. Soit $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$. A voir :

$$A \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}, \text{ i.e. } A \cap \{\mathcal{T} \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \geq 0.$$

   Or

$$A \cap \{\mathcal{T} \leq t\} = (A \cap \{\mathcal{S} \leq t\}) \cap \{\mathcal{T} \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

7. Soient T, λ des réels positifs et $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ une $(\mathcal{F}_t)$-martingale continue. On suppose que $\mathbf{E}(M_T^2)$ est fini. Posons $M_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|$.

   (a) Démontrer que $(|M_t|)_{0 \leq s \leq T}$ une sous-martingale.

   Corrections.

$$E(|M_t||\mathcal{F}_s) \geq |E(M_t|\mathcal{F}_s)| = |M_s|, \; t \geq s \geq 0,$$

   par l'inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle.

(b) Montrer que

$$\lambda \mathbf{P}\{M_T^* \geq \lambda\} \leq \mathbf{E}(|M_T|\, \mathbf{1}_{\{M_T^* \geq \lambda\}})$$

(Utiliser le théorème d'arrêt pour la sous-martingale $|M_t|$ entre $\tau \wedge T$ où $\tau = \inf\{t \leq T, |M_t| \geq \lambda\}$ (si cet ensemble est non vide, $+\infty$ sinon) et T).

Corrections.

Remarque 0.2 *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) $M^*_{T\wedge\tau} \geq \lambda$.

ii) $M^*_T \geq \lambda$.

iii) $\tau \leq T$.

En effet

$$i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii).$$

De plus, si iii) est vérifié on a

$$M^*_{T\wedge\tau} = M^*_\tau = \lambda.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} E\left(|M_T| 1_{\{M_T^* \geq \lambda\}}\right) &= E\left(|M_T| 1_{\{M_{T\wedge\tau}^* \geq \lambda\}}\right) \\ &= E\left(1_{\{M_{T\wedge\tau}^* \geq \lambda\}} E(|M_T||\mathcal{F}_{T\wedge\tau})\right). \end{aligned}$$

Par le théorème d'arrêt de Doob cela majore

$$E\left(1_{\{M_{T\wedge\tau}^* \geq \lambda\}} |M_{T\wedge\tau}|\right).$$

Par la Remarque cela donne

$$E\left(1_{\{M_T^* \geq \lambda\}} |\underbrace{M_{T\wedge\tau}}_{M_\tau}|\right) = \lambda P\{M_T^* \geq \lambda\}.$$

(c) Déduire du résultat précédent que, si A est positif

$$\mathbf{E}((M_T^* \wedge A)^2) \leq 2\mathbf{E}((M_T^* \wedge A)|M_T|).$$

Correction.

Rappel. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ à variation finie (par exemple différentiable par morceaux et bornée) telle que $f(0) = 0$. Soit Y une v.a. non-négative dont la loi a comme fonction de répartition F. En particulier $F(y) = P\{Y \leq y\}, y \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$E(f(Y)) = \int_0^\infty (1 - F(y)) df(y). \tag{0.3}$$

(Si f était différentiable par morceaux on aurait

$$E(f(Y)) = \int_0^\infty (1 - F(y)) f'(y) dy.)$$

Preuve. En effet le membre de gauche de (**??**) vaut

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(y) dF(y) &= -\int_0^\infty f(y) d(1 - F(y)) \\ &= \int_0^\infty (1 - F(y)) df(y). \end{aligned}$$

Dans notre cas, posons

$$Y := M_T^*,\ f(y) = (y \wedge A)^2.$$

Le Rappel précédent donne

$$\begin{aligned}
E((M_T^* \wedge A)^2) &= 2\int_0^A yP\{M_T^* > y\}dy \\
&\leq 2\int_0^A yP\{M_T^* \geq y\}dy \\
\text{(b)} \ &\leq 2 \int_0^A E(|M_T| 1_{\{M_T^* \geq y\}})dy \\
&= 2E\left(|M_T| \int_0^A 1_{\{M_T^* \geq y\}}dy\right) \\
&= 2E(|M_T|(M_T^* \wedge A)).
\end{aligned}$$

(d) Démontrer que, $\mathbf{E}(M_T^*)$ est fini et que

$$\mathbf{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|M_t|^2\right)\leq 4\mathbf{E}(|M_T|^2).$$

Corrections. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$E(M_T^*\wedge A)^2)\leq 2\sqrt{E(M_T^2)E(M_T^*\wedge A)^2}$$

et en simplifiant

$$E(M_T^*\wedge A)^2)\leq 4E(M_T^2).$$

En faisant tendre $A\to\infty$, par le théorème de la convergence monotone, nous obtenons le résultat.

Série 2. Introduction au calcul stochastique et applications, PRB203 FR 2020-21 **fin**.