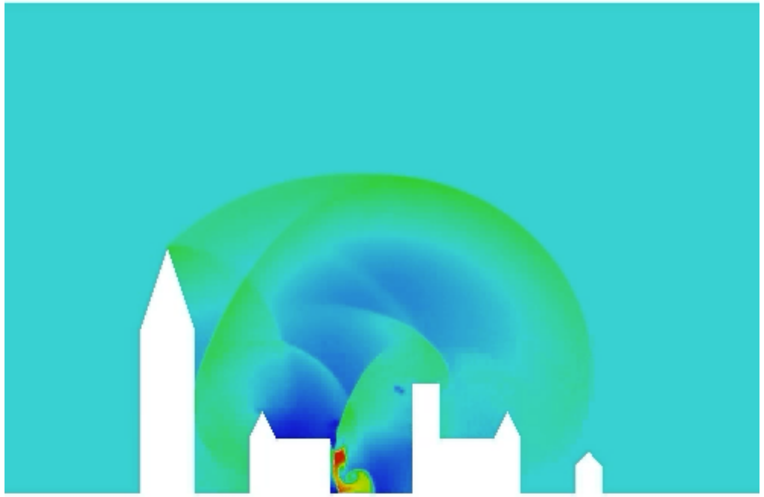
Problèmes hyperboliques non linéaires

Dans le dernier épisode de MA103…

- [x] Lois de conservation scalaire
- [x] Solution classique et Temps d'existence
- [x] Notion de solution faible
- [x] Solution C^1 par morceaux et relation de Rankine Hugoniot

… et dans l'épisode d'aujourd'hui…

- [ ] *Non unicité des solutions faibles*
- [ ] *Notion de solution faible entropique*
- [ ] *Théorème d'existence et d'unicité*
- [ ] *Propriété de monotonie*
- [ ] *Problème de Riemann à 2 états dans les cas f convexe*



Résultats numériques de Frédéric Alauzet

Solution classique

On considère le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + a(u)\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

On appelle solution classique du problème sur $[0,T[$, une fonction $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,T[\,)$ qui satisfait $(\mathcal{P})$ au sens usuel pour $0 \leq t \leq T$.

Théorème : Pour toute donnée initiale $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$, le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ admet une unique solution classique maximale

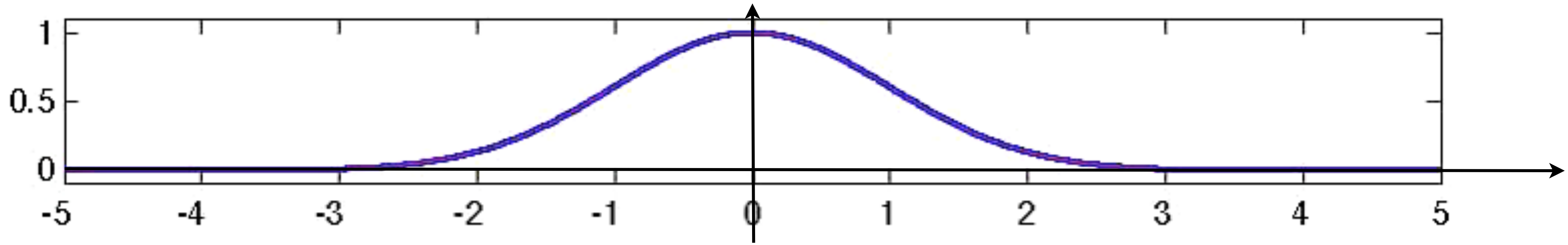
$$u \in C^1(\,\mathbb{R} \times [0,T^*[\,)$$

où

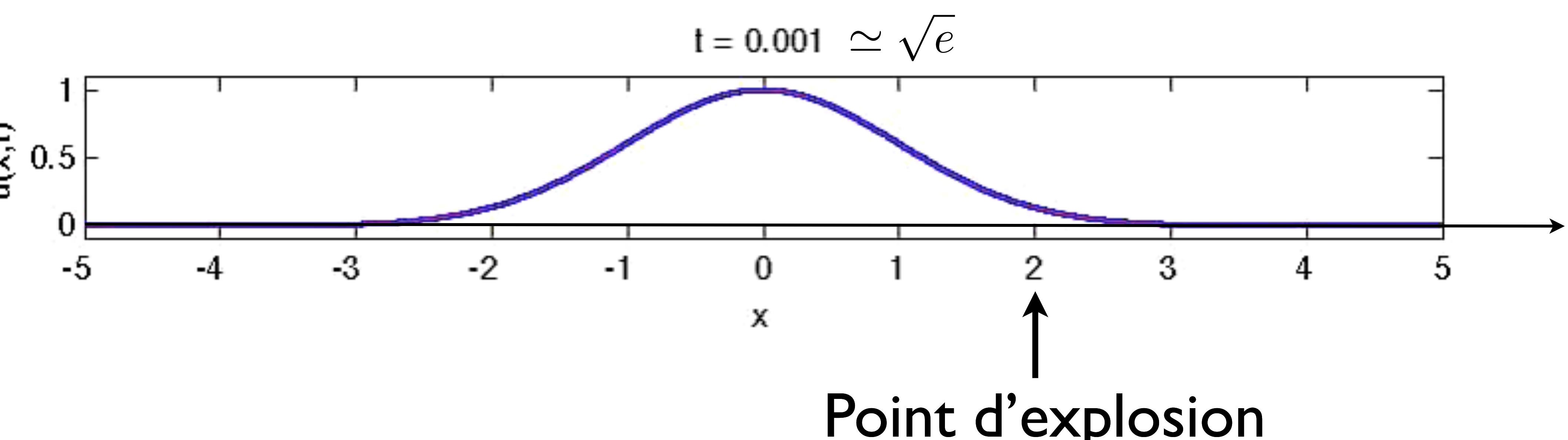
- Si $a \circ u^0$ est croissante $T^* = +\infty$
- Sinon $T^* = -\left(\inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \dfrac{d(a \circ u^0)}{dx}(x_0) \right)^{-1}$

Illustration numérique

Équation de Burgers: $f(u) = u^2/2$ - Donnée initiale $u^0(x) = e^{-x^2/2}$



Question : que se passe-t-il après ce temps T^*? pour le savoir, on doit étendre la notion de solution pour autoriser des discontinuités.



Notion de solution faible

Définition : Étant donné $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, on appelle solution faible de $(\mathcal{P})$ sur $[0,T[,\ T \leq +\infty$ une fonction $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R} \times [0,T[)$ telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{V}_T$

$$\mathcal{V}_T = \{\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \ / \ supp\,\varphi \ \text{ is compact } \subset \mathbb{R} \times [0,T[\,\}$$

$$\iint \left\{ u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} dx\, dt + \int \varphi(x,0)\, u^0(x)\, dx = 0$$

Remarques :

- Par construction, toute solution forte est solution faible.

Inversement, toute solution faible ayant la régularité $\mathcal{C}^1$ est solution forte (exercice).

- Cette définition n'est pas très explicite, on donne dans la suite une caractérisation plus explicite pour les solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

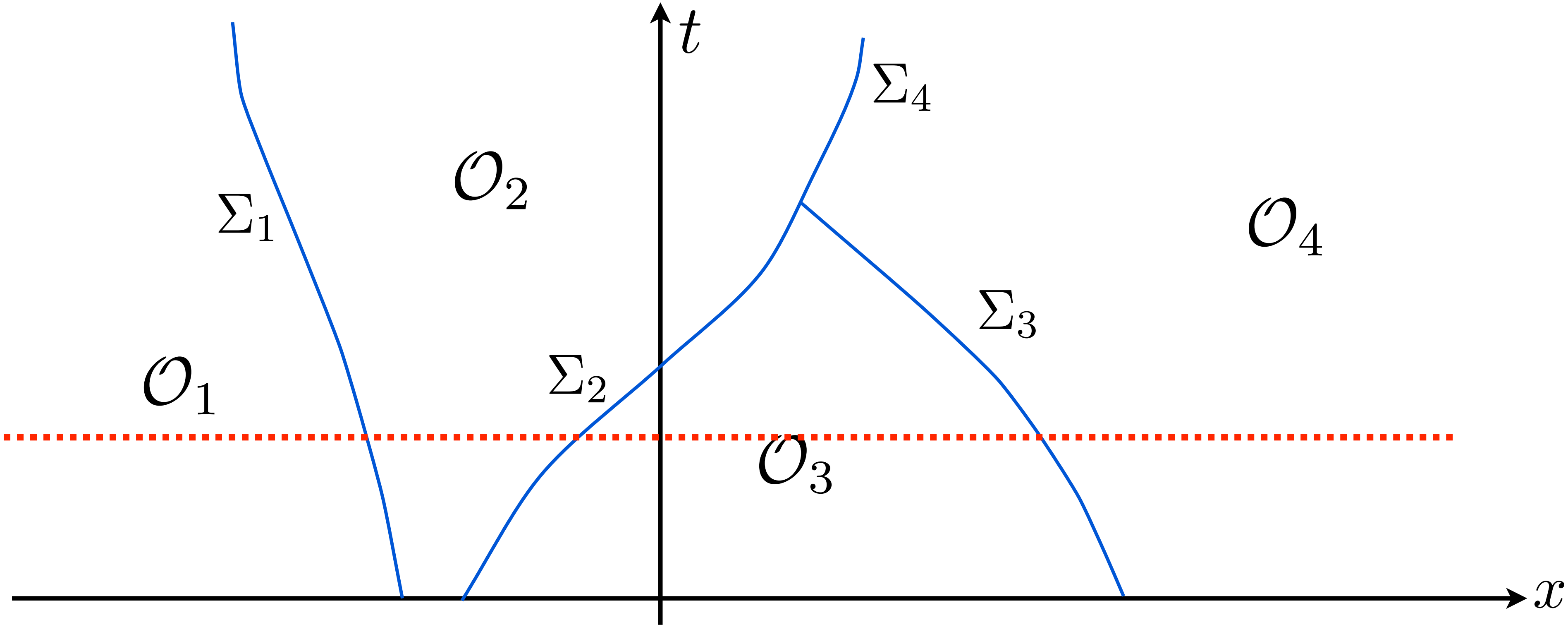
Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Définition : Une solution $\mathcal{C}^1$ par morceaux est une solution faible u telle qu'il existe un nombre fini d'arcs

$$\Sigma_i = \{\, x = \sigma_i(t), \quad t_i^- \leq t \leq t_i^+ \,\}, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

telle que u est de classe $\mathcal{C}^1$ dans chaque composante connexe

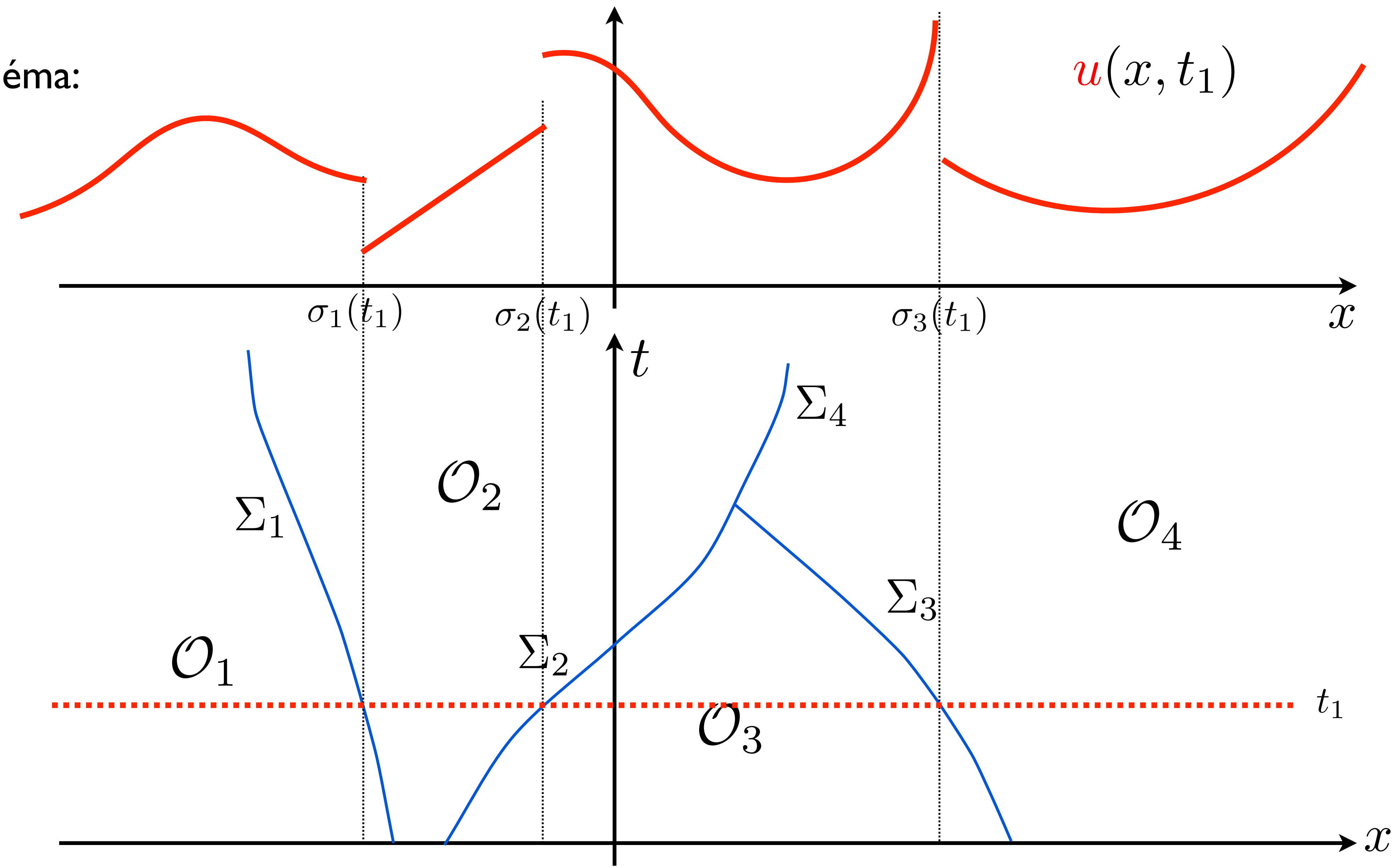
$$\mathcal{O}_j, 1 \leq j \leq M, \quad \text{de} \quad \mathbb{R} \times [0, T[\ \setminus \bigcup_{i=1}^{N} \Sigma_i$$



Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Si u est discontinue à travers Σ, on dit que u présente un choc et que Σ est une ligne de choc.

Schéma:



Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Théorème : Une fonction u, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est une solution faible si et seulement si u est solution classique dans chaque $\mathcal{O}_j$ et si à travers chaque ligne

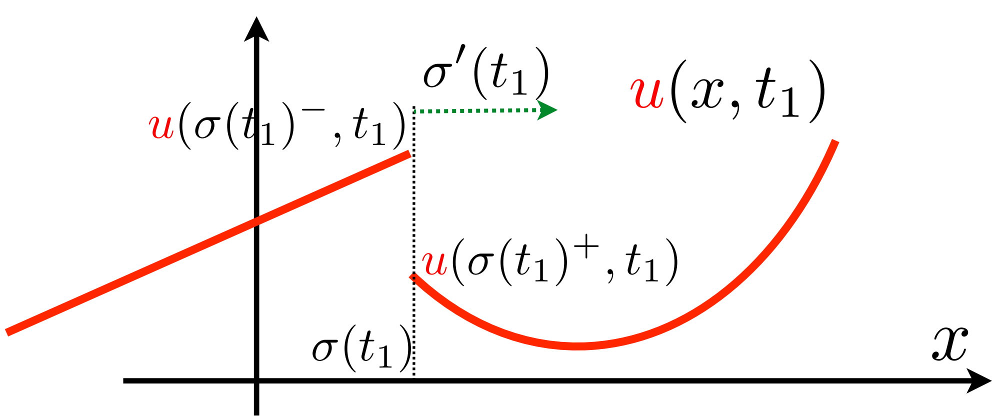
$$\Sigma = \{\, x = \sigma(t),\ t^- \le t \le t^+ \,\},$$

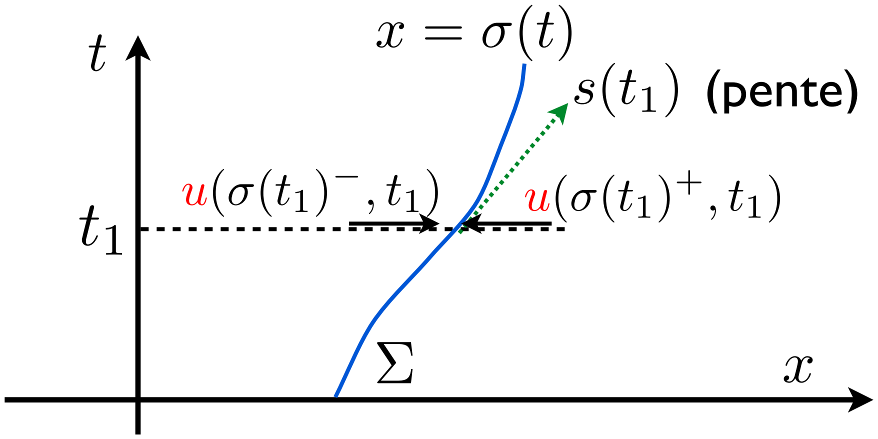
u vérifie la relation de Rankine-Hugoniot pour $t^- \le t \le t^+$

$$\sigma'(t)\,\left[\,u^+(t) - u^-(t)\,\right] = f\big(u^+(t)\big) - f\big(u^-(t)\big)$$

avec $u^\pm(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} u\big(\sigma(t) \pm \varepsilon, t\big)$

Si Σ est une ligne de choc, $s(t) := \sigma'(t)$ est la vitesse de propagation du choc.





Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

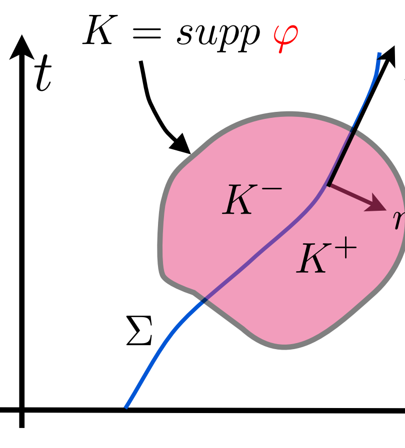
Remarques

- Si $u^+(t) = u^-(t)$ alors la condition de Rankine Hugoniot est satisfaite. Une solution $\mathcal{C}^1$ pm et continue est donc solution faible.
- Si $f(u) = c\,u$, la condition de Rankine Hugoniot s'écrit
$$\sigma'(t) = c$$
Les lignes de discontinuité se propagent donc à la vitesse c.
- Si $f(u) = \frac{u^2}{2}$, la condition de Rankine Hugoniot s'écrit (pour $u^+(t) \neq u^-(t)$)
$$\sigma'(t) = \frac{f(u^+(t)) - f(u^-(t))}{u^+(t) - u^-(t)} \underset{\text{Eq. de Burgers}}{=} \frac{u^+(t) + u^-(t)}{2}$$
- Pour tout choc, on a $s = \frac{[f(u)]}{[u]}$
qui est à rapprocher de $a(u) = f'(u)$

Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Preuve On montre que la relation de Rankine Hugoniot découle de la définition de solution faible

$$\forall \varphi \in \mathcal{V}_T \quad \iint \left\{ u\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} dx\,dt + \int \varphi(x,0)\, u^0(x)\,dx = 0$$



$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_t \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} s(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$n = \begin{pmatrix} n_x \\ n_t \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 1 \\ -s(t) \end{pmatrix}$$

On choisit une fonction test à support dans K (contenant un choc)

$$\iint_{K^+} \left\{ u\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} + \iint_{K^-} \left\{ u\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} = 0$$

Aprés une intégration par partie dans K^+ et dans K^- on trouve

$$-\iint_{K^+} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) \right)}_{0} \varphi - \iint_{K^-} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) \right)}_{0} \varphi - \int_{\Sigma} \left(u^+ n_t + f(u^+)\, n_x \right) \varphi + \int_{\Sigma} \left(u^- n_t + f(u^-)\, n_x \right) \varphi = 0$$

(car u sol. classique)

On en déduit que $\displaystyle\int_{\Sigma} \Big[\underbrace{(u^+ - u^-)\ n_t + \left(f(u^+) - f(u^-) \right)\ n_x}_{0} \Big] \varphi = 0 \qquad \forall \varphi$

Comme $n = \begin{pmatrix} n_x \\ n_t \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 1 \\ -s(t) \end{pmatrix}$, on a $\quad -s(t)\ (u^+ - u^-) + \left(f(u^+) - f(u^-) \right) = 0$

Non unicité des solutions faibles

Trouver $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible de

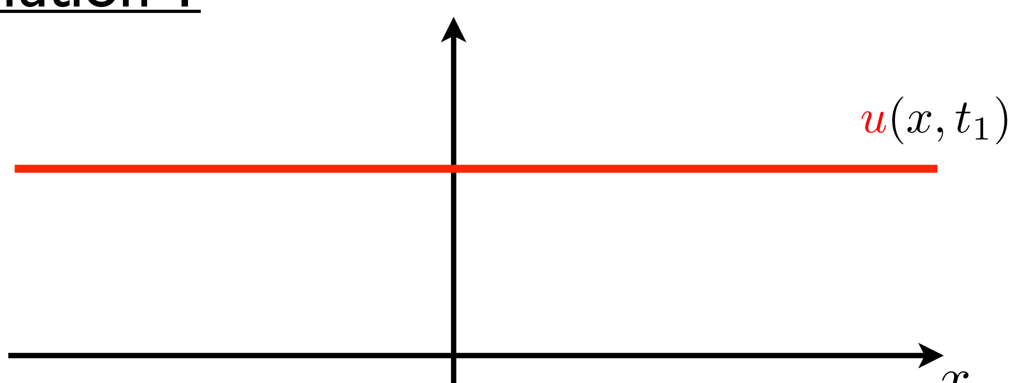
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

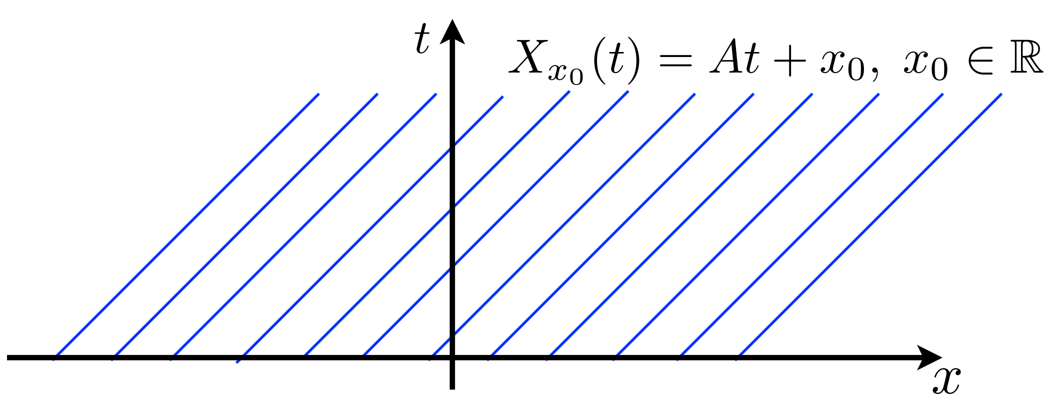
voir Exo4 TD2

$$u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \text{ avec } \quad u^0(x) = A \;\text{ et }\; f(u) = \frac{u^2}{2},\; a(u) = u.$$

Rappel - Equation des caractéristiques : $\forall x_0 \in \mathbb{R} \;\; X_{x_0}(t) = a(u^0(x_0))t + x_0$

<u>Solution 1</u>





$$\forall x \in \mathbb{R},\; \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(x,t) = A$$

est bien solution faible car elle est C^1 et solution classique.

Elle vérifie bien la condition initiale.

Elle n'a pas de discontinuités!

Non unicité des solutions faibles

Trouver $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

voir Exo4 TD2

$$u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \text{ avec } \quad u^0(x) = A \ \text{ et } \ f(u) = \frac{u^2}{2},\ a(u) = u.$$

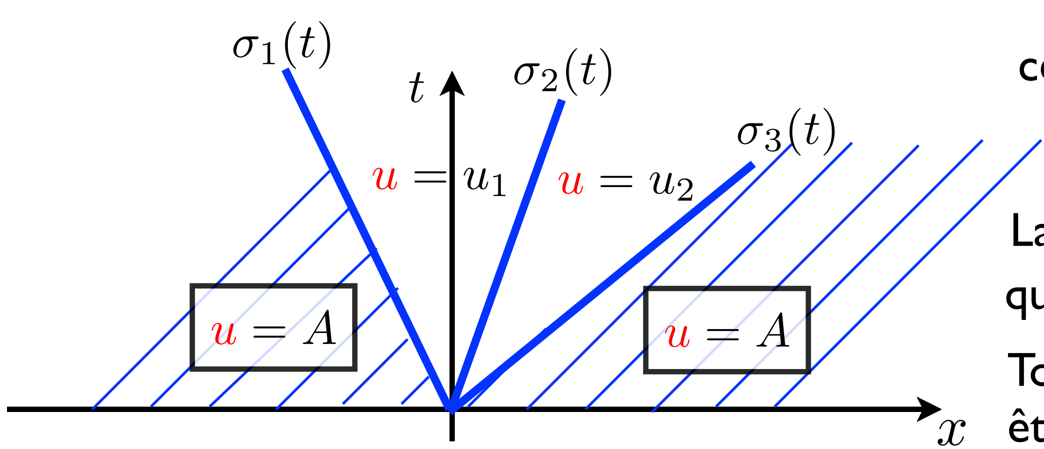
Solution 2

$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}^+,$

$$u(x,t) = \begin{cases} A & \text{si } x < \sigma_1(t) \\ u_1 & \text{si } \sigma_1(t) < x < \sigma_2(t) \\ u_2 & \text{si } \sigma_2(t) < x < \sigma_3(t) \\ A & \text{si } x > \sigma_3(t) \end{cases}$$

est bien solution faible car

- ☑ elle est solution classique là où elle est C^1.
- ☑ elle vérifie la condition initiale.
- ☑ Les lignes de chocs vérifient la relation de Rankine Hugoniot



Eq. de Burgers

$$\sigma'(t) = \frac{f(u^+(t)) - f(u^-(t))}{u^+(t) - u^-(t)} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{u^+(t) + u^-(t)}{2}$$

ce qui ici donne $\sigma_i(t) = \lambda_i\, t$ et

$$\lambda_1 = \frac{u_1 + A}{2},\ \lambda_2 = \frac{u_1 + u_2}{2},\ \lambda_3 = \frac{u_2 + A}{2}$$

La solution a un sens seulement si $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$

qui est assuré dès que $\lambda_1 < A$ et $\lambda_3 > A$

Toutes les autres constantes peuvent ensuite être déterminées!

Non unicité des solutions faibles

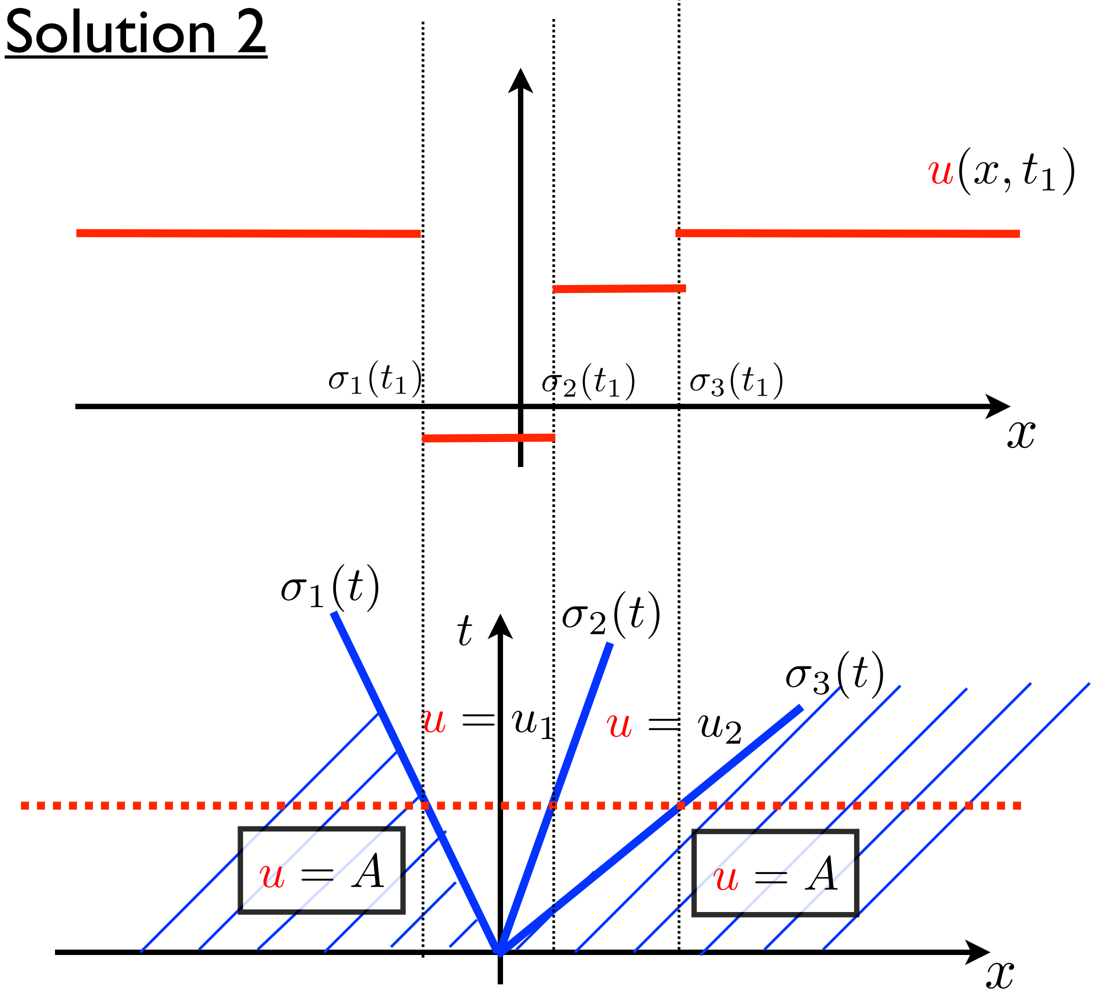
Trouver $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}.\ \text{avec} \quad u^0(x) = A \;\text{ et }\; f(u) = \frac{u^2}{2},\; a(u) = u.$$

voir Exo4 TD2

Solution 2



On aurait pu aussi faire partir les lignes de chocs a un autre point que $x_0 = 0$, introduire plus que 3 lignes de chocs au même point, introduire des lignes de chocs à des temps supérieurs, faire tout à la fois!

Il n'y a donc pas unicité de la solution faible alors qu'il n'y a qu'une seule solution physique. Comment retrouver la solution physique?

Notion de solution faible entropique

Définition : Étant donné $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, on appelle solution entropique de $(\mathcal{P})$ sur $[0,T[,\ T \leq +\infty$ une solution faible telle que pour toute entropie (U,F) i.e. U convexe et $F' = U'\, f'$

$$\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) \leq 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+) \qquad \text{(E)}$$

D'où ca sort? Pour modéliser notre problème non linéaire, on a négligé la dissipation/viscosité. Or quand on remet un peu de dissipation

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} f(u_\varepsilon) - \varepsilon \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u_\varepsilon(x,0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Pour $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, on montre qu'il existe une unique solution $u_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ et qu'elle est très régulière et elle vérifie (E).

On montre également que u_ε a une limite quand $\varepsilon \to 0$. On appelle u sa limite.

Cette fonction u est solution faible du problème de départ et vérifie la condition d'entropie.

Remarque : Cette dernière condition est difficile à vérifier en pratique !

Notion de solution faible entropique

Théorème : Une solution faible u , $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est entropique si et seulement si, pour tout choc $\Sigma\left(\sigma(t), u^-(t), u^+(t)\right)$ et pour toute entropie (U,F) on a

$$\sigma'(t)\,\Big[U\big(u^+(t)\big) - U\big(u^-(t)\big)\Big] \geq F\big(u^+(t)\big) - F\big(u^-(t)\big)$$

Cette condition (de choc entropique) se démontre comme la relation de Rankine-Hugoniot.

Corollaire : Une solution faible $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $\mathcal{C}^0$ est entropique!

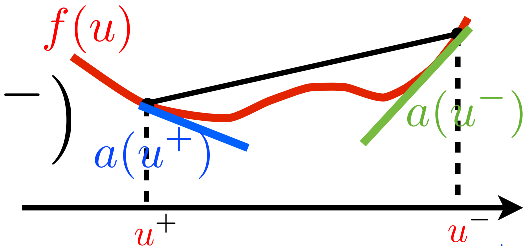
On peut donner une forme encore plus pratique à cette condition de choc entropique, qui s'interprète géométriquement.

Notion de solution faible entropique

Théorème : Une solution faible u , $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est entropique si et seulement si, pour tout choc $\Sigma\,(\sigma(t), u^-(t), u^+(t))$

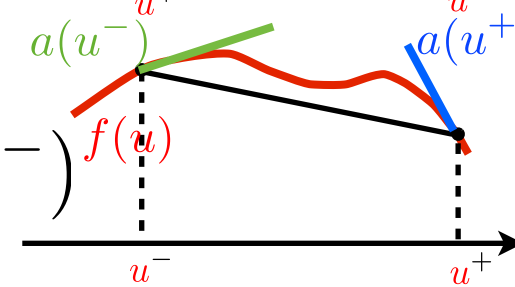
Pour $u^+ < u^-$, le long du choc, on doit avoir

$$f\left(\alpha\, u^+ + (1-\alpha)\, u^-\right) \leq \alpha\, f\left(u^+\right) + (1-\alpha)\, f\left(u^-\right)$$



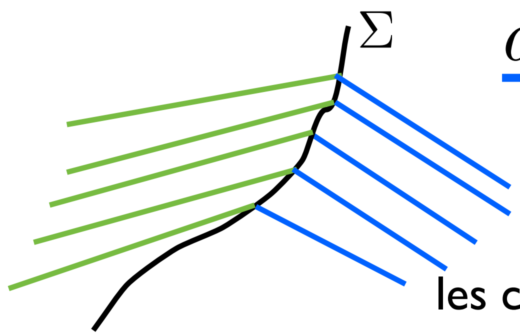
Pour $u^+ > u^-$, le long du choc, on doit avoir

$$f\left(\alpha\, u^+ + (1-\alpha)\, u^-\right) \geq \alpha\, f\left(u^+\right) + (1-\alpha)\, f\left(u^-\right)$$

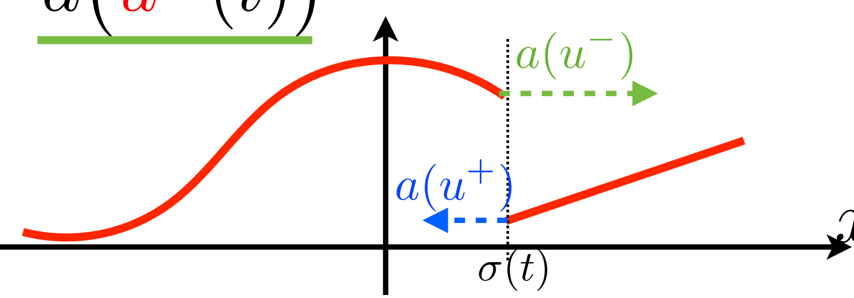


Propriété : le long d'un choc entropique $\Sigma\,(\sigma(t), u^-(t), u^+(t))$

$$\underline{a\left(u^+(t)\right)} \leq \sigma'(t) \leq \underline{a\left(u^-(t)\right)}$$



les caractéristiques se croisent



Corollaire : Si f est convexe, un choc est entropique ssi $u^+ < u^-$
Si f est concave, un choc est entropique ssi $u^+ > u^-$

Théorème d'existence et unicité

Théorème : Pour toute donnée initiale $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, le problème $(\mathcal{P})$ admet une unique solution faible entropique globale

$$u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$$

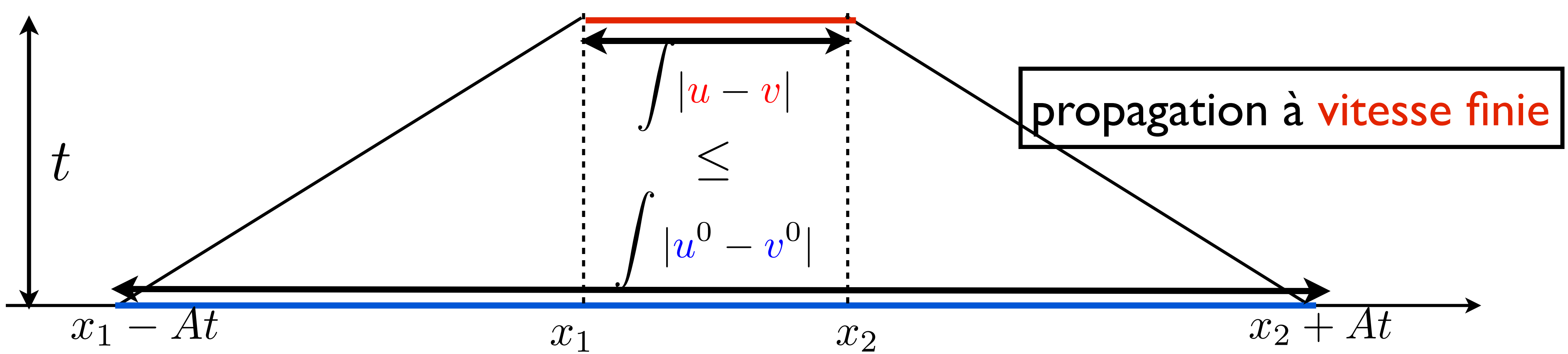
qui vérifie le résultat de stabilité

$$\text{p.p. } t \geq 0, \quad \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

Remarques : on a l'estimation de continuité L^1

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x,t) - v(x,t)|\, dx \leq \int_{x_1 - At}^{x_2 + At} |u^0(x) - v^0(x)|\, dx$$

avec $A = \max \left\{ \, |a(\xi)|, \; |\xi| \leq \max \, \left(\|u^0\|_{L^\infty}, \|v^0\|_{L^\infty} \right) \, \right\}$.



Théorème d'existence et unicité

Théorème : Pour toute donnée initiale $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, le problème admet une unique solution faible entropique globale

$$u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$$

qui vérifie le résultat de stabilité

$$\text{p.p. } t \geq 0, \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

Idées de la preuve (qui dépasse le cadre du cours): ***Godlewski&Raviart, 1991*** *Hyperbolic systems of conservation laws*

Le résultat d'existence se fait par passage à la limite sur les solutions visqueuses

Le résultat d'unicité est une conséquence de l'estimation de continuité L^1.

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x,t) - v(x,t)|\, dx \leq \int_{x_1 - At}^{x_2 + At} |u^0(x) - v^0(x)|\, dx$$

L'estimation de continuité se démontre à l'aide des entropies de Kruzkov.

$$U_\lambda(u) = |u - \lambda|$$

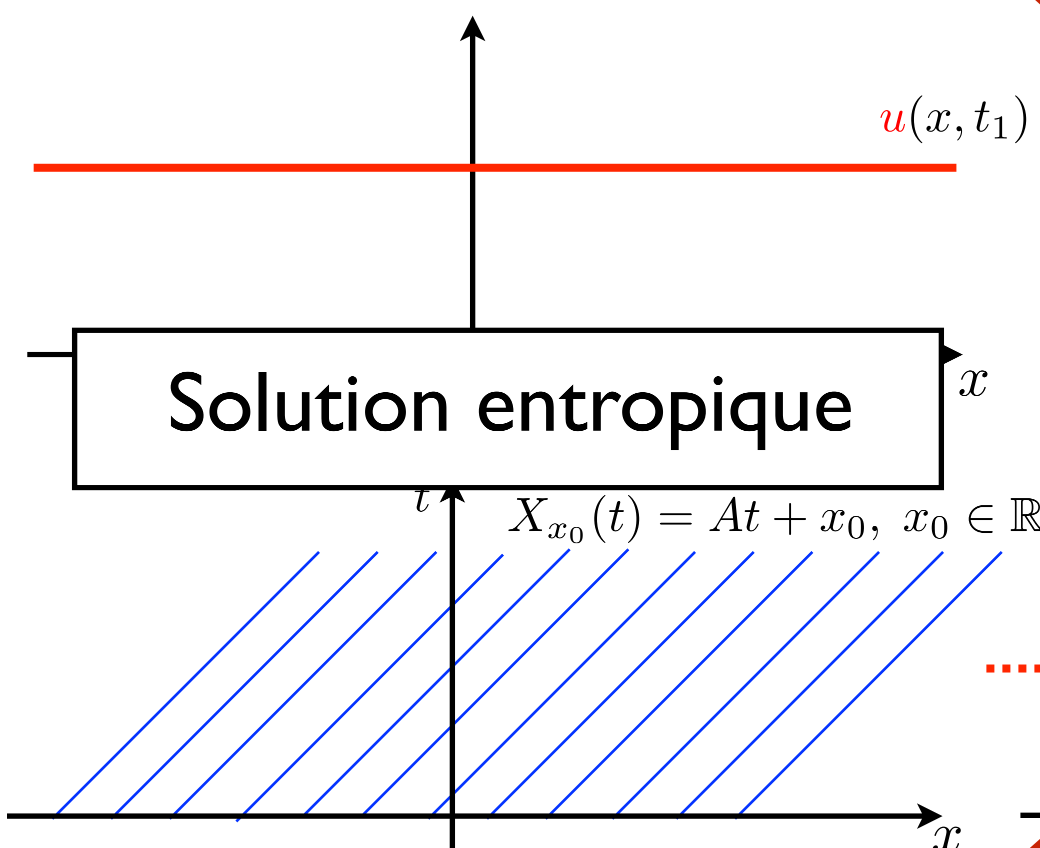
Exemple de solution faible entropique

Trouver $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

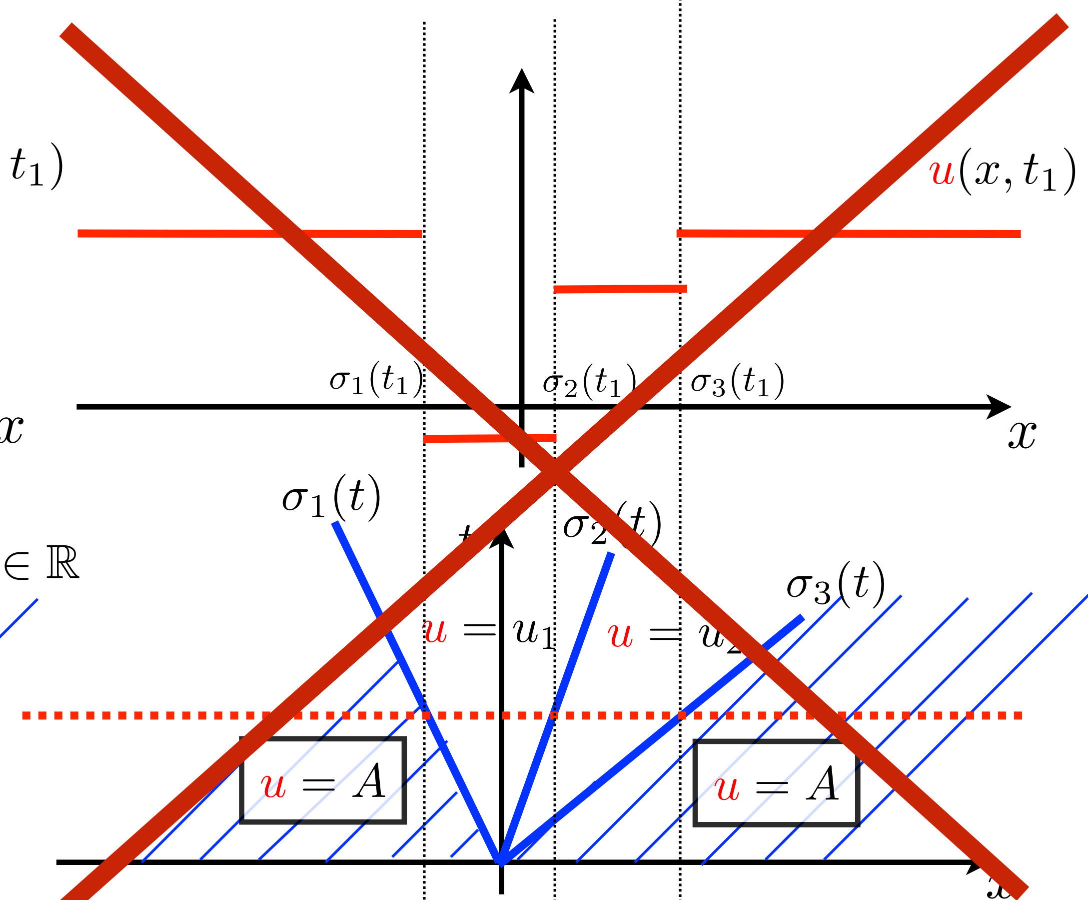
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \ x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}.\ \text{avec} \quad u^0(x) = A \ \text{ et } \ f(u) = \frac{u^2}{2},\ \ a(u) = u.$$

<u>Solution faible 1</u>



<u>Solution faible 2</u>



Propriétés de monotonie

Théorème : On a le résultat de comparaison

$$u^0(x) \leq v^0(x) \quad p.p.\ x \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \quad u(x,t) \leq v(x,t) \quad p.p.\ x \in \mathbb{R}$$

Evident dans le cas où les solutions sont classiques

Corollaire : $a \leq u^0(x) \leq b \quad \Rightarrow \quad a \leq u(\cdot, t) \leq b$

Preuve :

$$v^0(x) = a \quad \Longrightarrow \quad v(x,t) = a$$
$$v^0(x) = b \quad \Longrightarrow \quad v(x,t) = b$$

Par le principe de comparaison $a \leq u(x,t) \leq b$

Corollaire : $x \to u^0(x)$ croissante $\quad \Rightarrow \quad x \to u(x,t)$ croissante

Preuve : *Posons* $u_h^0(x) := u^0(x+h)$

Par invariance par translation en espace de l'EDP $u_h(x,t) = u(x+h,t)$

Par définition u^0 *croissante* $\Longleftrightarrow u_h^0(x) \geq u^0(x), \quad \forall\, h > 0.$

Par le principe de comparaison $u_h(x,t) \geq u(x,t), \quad \forall\, h > 0$

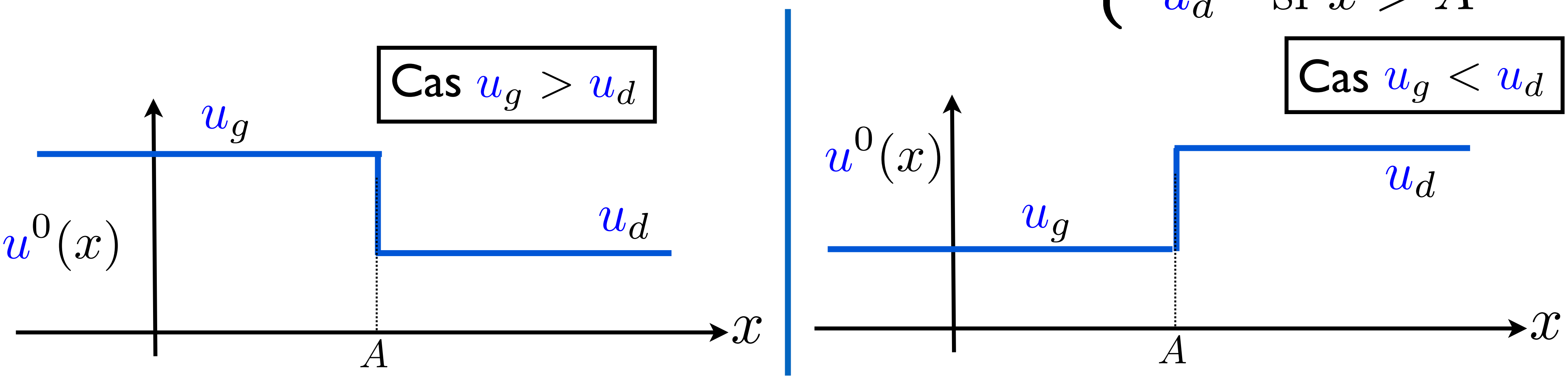
ce qui signifie que $x \to u(x,t)$ est croissante.

Le problème de Riemann

Pour illustrer les résultats précédents, considérons le problème

$$(\mathcal{P}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ solution faible entropique de} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

avec $u^0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < A \\ u_d & \text{si } x > A \end{cases}$



On suppose ici que f est convexe sur (u_g, u_d). L'extension au cas où elle est concave est simple. L'extension au cas général est plus délicate et dépasse le cadre du cours.

Le problème de Riemann

Propriété : La solution faible entropique de $(\mathcal{P})$ est auto-similaire, c'est à dire de la forme

$$u(x,t) = \mathcal{U}\left(\frac{x-A}{t}\right), \quad t > 0$$

Preuve : (1) on commence par montrer le résultat pour $A = 0$

Il suffit de montrer que $\forall\ \lambda > 0, \quad u(\lambda x, \lambda t) = u(x,t)$

Soit donc $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda t)$

u *solution faible de l'équation* $\Rightarrow$ u_λ *solution faible de l'équation*

où on a utilisé le fait que $u^0(x) = u^0(\lambda x)$

u *entropique* $\Rightarrow$ u_λ *entropique*

Par unicité de la solution faible entropique, on a que $u_\lambda = u, \ \forall \lambda > 0$*, soit*

$$u(x,t) = \mathcal{U}(x/t)$$

(2) Pour $A \neq 0$*, il suffit d'appliquer ce qui précède à* $v(x,t) = u(x+A,t)$ *.*

Le problème de Riemann

Propriété : La solution faible entropique de $(\mathcal{P})$ est auto-similaire, c'est à dire de la forme

$$u(x,t) = \mathcal{U}(\frac{x-A}{t}), \quad t > 0$$

Si u est une solution classique de $(\mathcal{P})$ que doit vérifier $\mathcal{U}$?

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(\frac{x-A}{t^2})\,\mathcal{U}'(\frac{x-A}{t}) \quad \text{et} \quad a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{t}\,a\big(\mathcal{U}(\frac{x-A}{t})\big)\,\mathcal{U}'(\frac{x-A}{t})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{t}\mathcal{U}'(\frac{x-A}{t})\Big[-\frac{x-A}{t} + a\big(\mathcal{U}(\frac{x-A}{t})\big)\Big] = 0$$

Propriété : Une fonction de la forme

$$u(x,t) = \mathcal{U}(\frac{x-A}{t}), \quad t > 0$$

est solution classique de $(\mathcal{P})$ dans le domaine $\alpha < \dfrac{x-A}{t} < \beta$ ssi

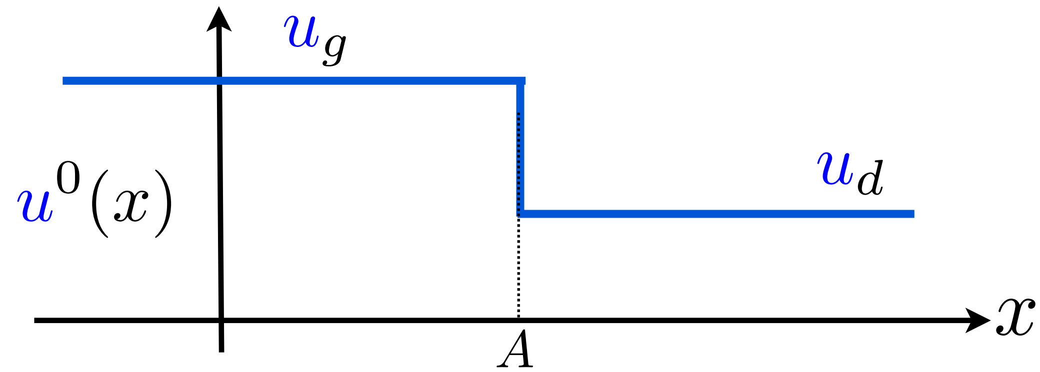
$$\mathcal{U} = cte \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{U}(\xi) = a^{-1}(\xi), \quad \xi \in (\alpha, \beta)$$

Remarque : comme f est convexe, a est croissante et donc inversible

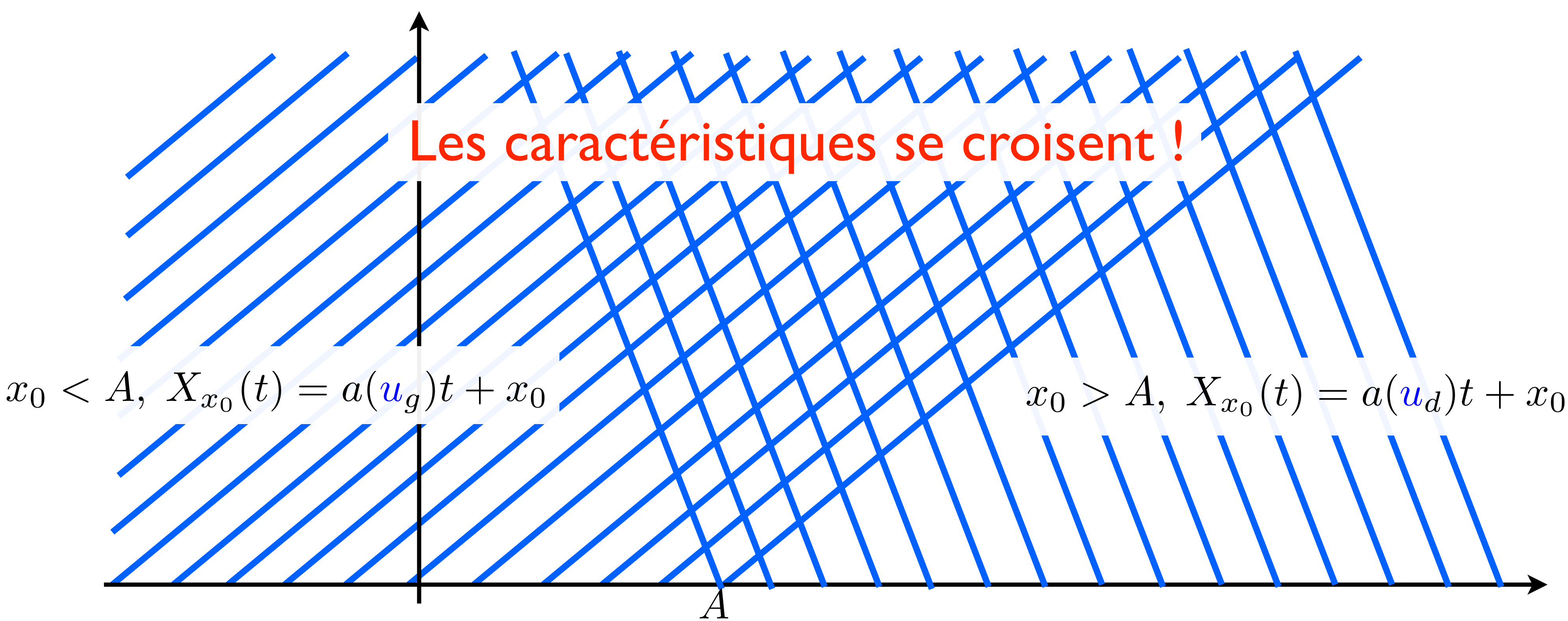
Le problème de Riemann avec $u_g > u_d$

Trouver $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \\ u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



Etape 1: Tracer les droites caractéristiques: $\forall x_0 \in \mathbb{R} \;\; X_{x_0}(t) = a(u^0(x_0))t + x_0$

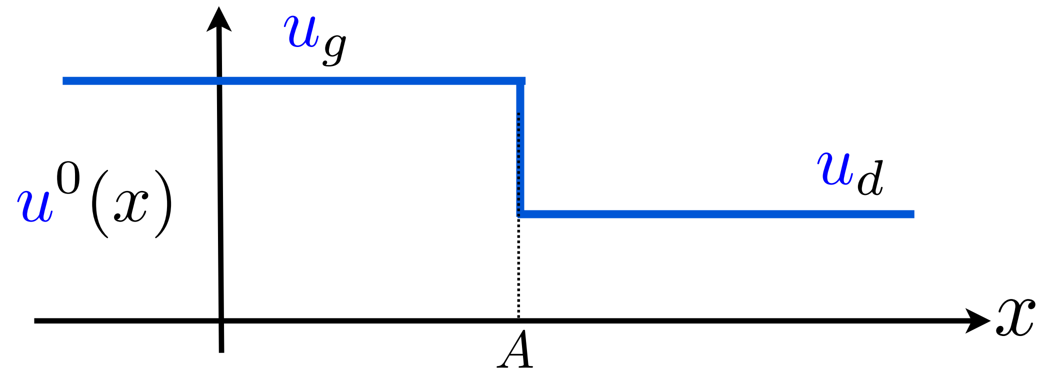


Le problème de Riemann avec $u_g > u_d$

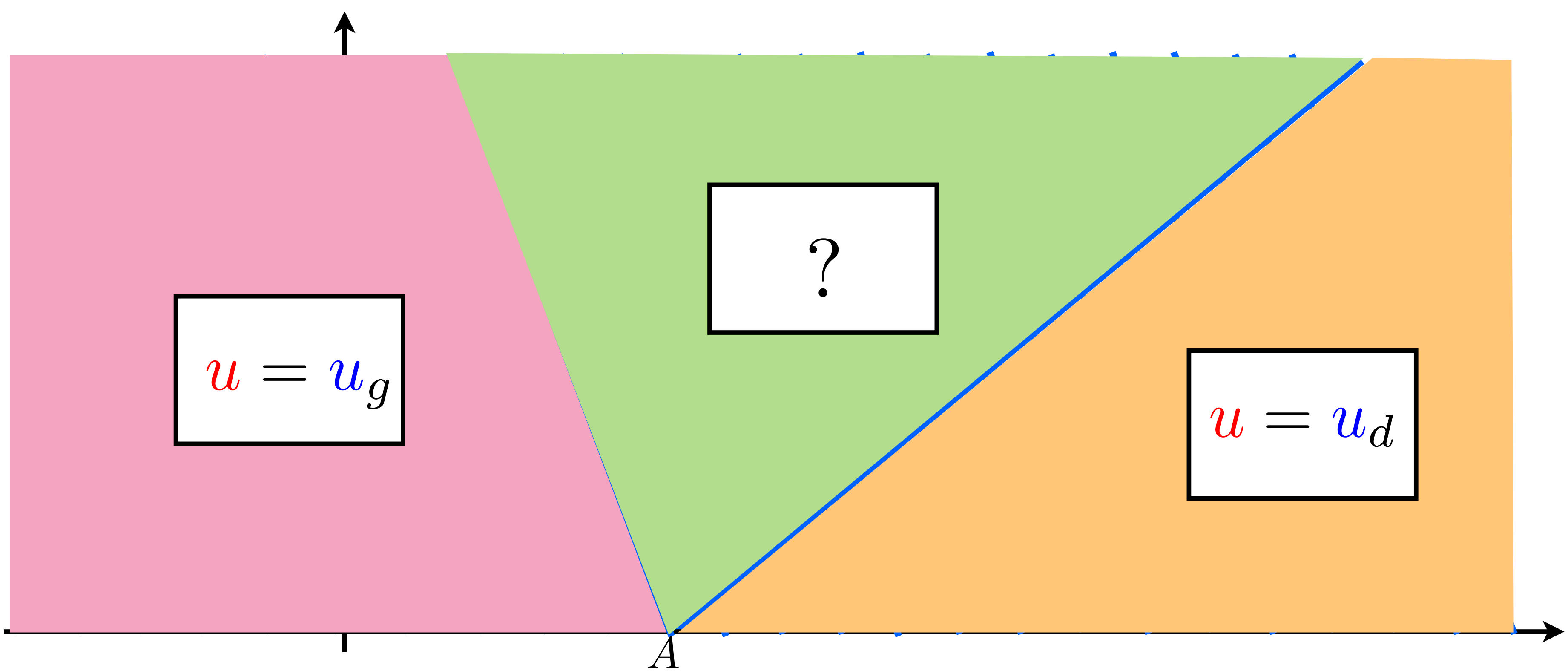
Trouver $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0,$$

$$u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$



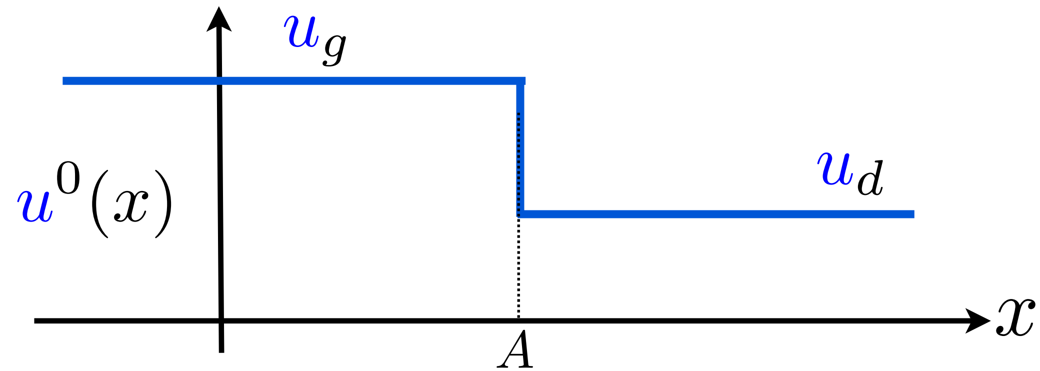
Etape 2: Construire une solution classique dans les régions où cela est possible.



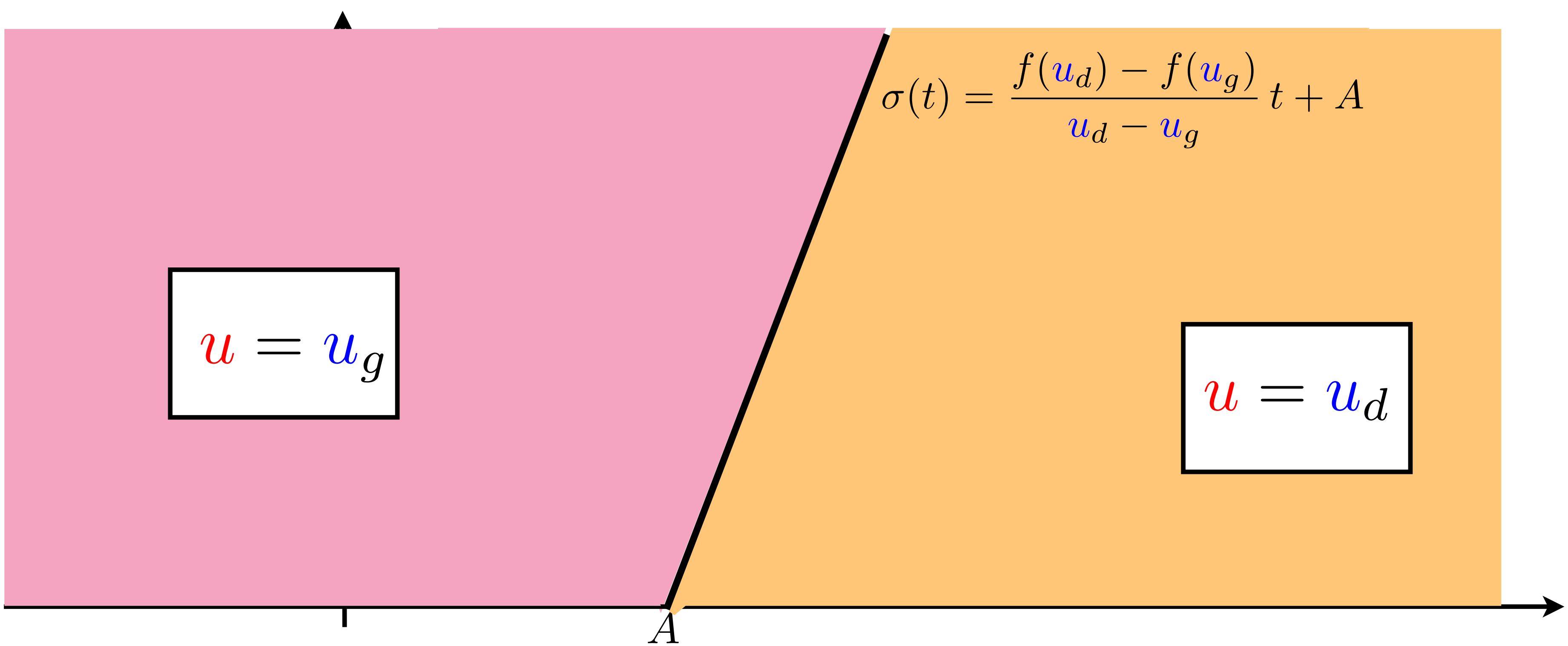
Le problème de Riemann avec $u_g > u_d$

Trouver $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \\ u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



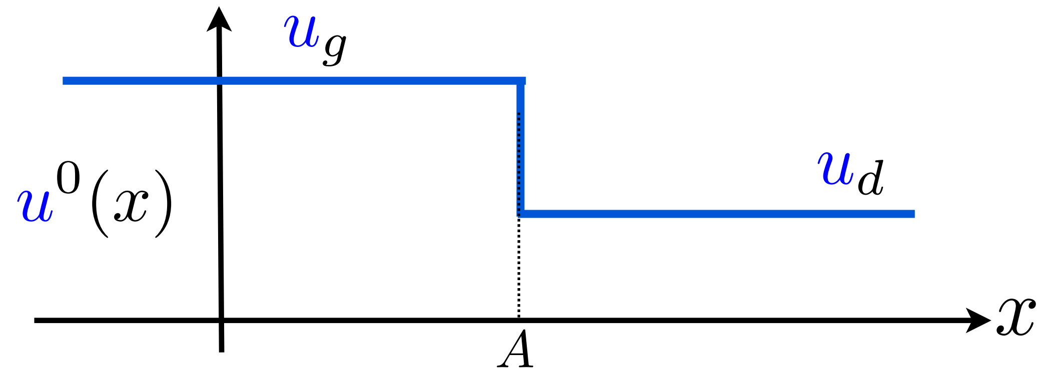
Etape 3: Comme $u_g > u_d$ (ou encore $a(u_g) > a(u_d)$ les caractéristiques se croisent) on peut introduire un choc qui vérifie la relation de Rankine Hugoniot.



Le problème de Riemann avec $u_g > u_d$

Trouver $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \\ u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$



La fonction ainsi construite, définie par

$$u(x,t) = \begin{cases} u_g & \text{si} \quad x < \frac{f(u_d)-f(u_g)}{u_d-u_g} t + A \\ u_d & \text{si} \quad x > \frac{f(u_d)-f(u_g)}{u_d-u_g} t + A \end{cases}$$

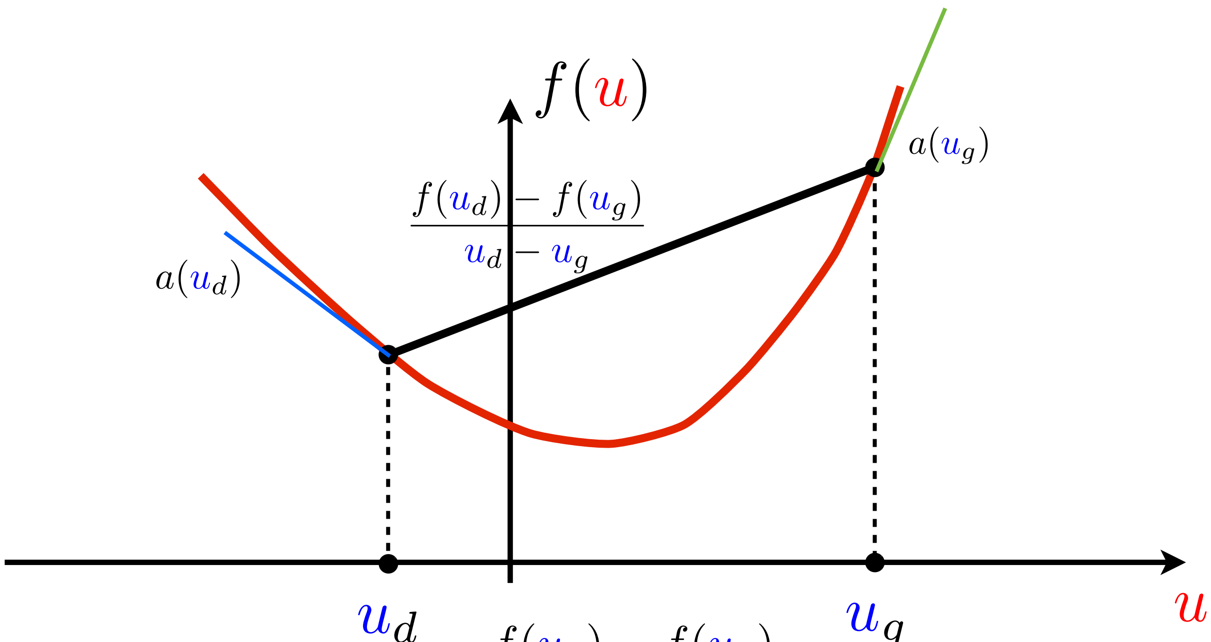
est une solution faible du problème car

- elle satisfait l'équation de manière classique là ou elle est C^1
- l'équation du choc vérifie la relation de Rankine-Hugoniot

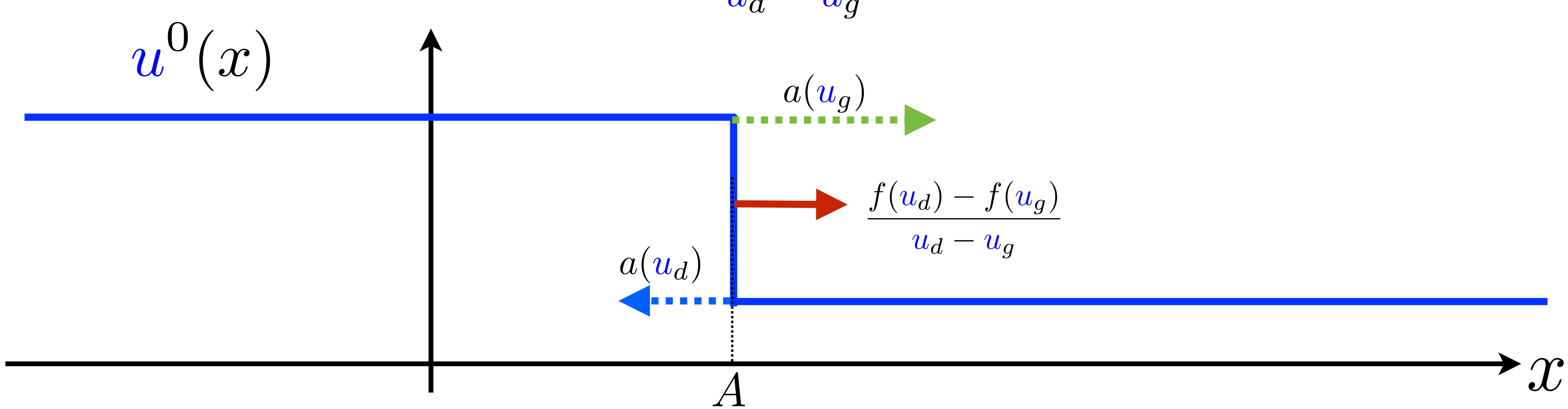
C'est l'unique solution entropique car le long du choc, la condition d'entropie est satisfaite : $u_g > u_d$

Le problème de Riemann avec $u_g > u_d$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_g & \text{si} \quad x < \dfrac{f(u_d)-f(u_g)}{u_d-u_g}\, t \\ u_d & \text{si} \quad x > \dfrac{f(u_d)-f(u_g)}{u_d-u_g}\, t \end{cases}$$

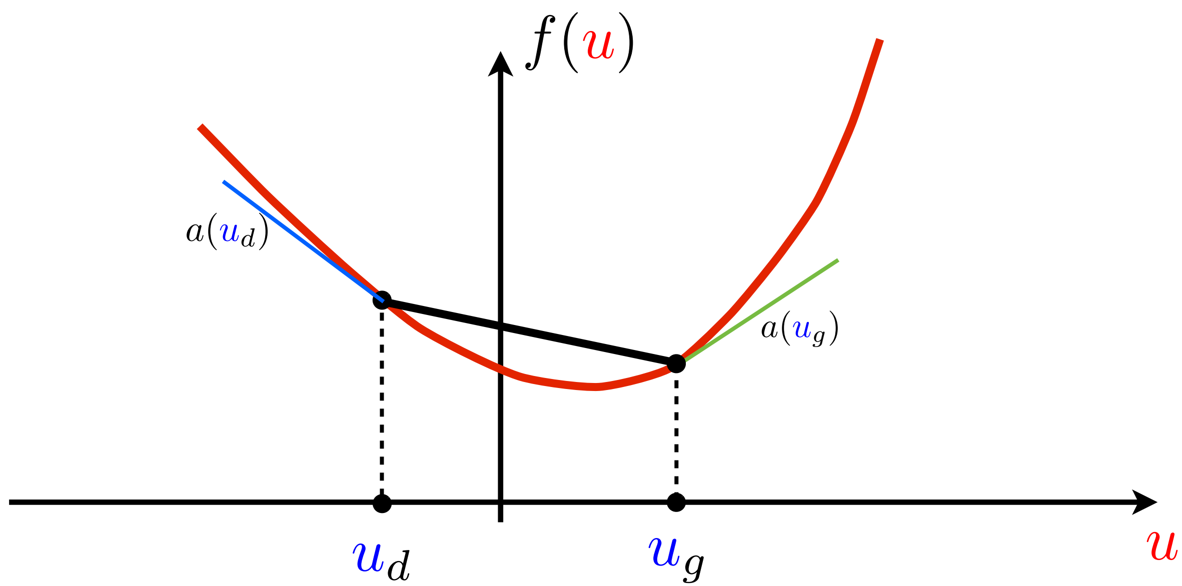


$$a(u_d) < \frac{f(u_d)-f(u_g)}{u_d-u_g} < a(u_g)$$

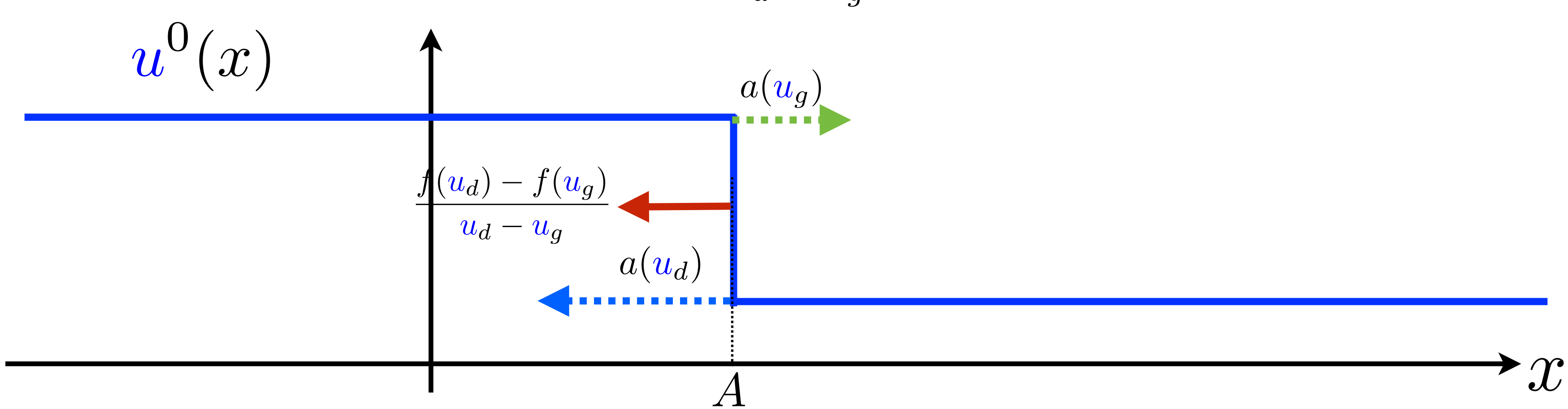


Le problème de Riemann avec $u_g > u_d$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_g & \text{si} \quad x < \frac{f(u_d)-f(u_g)}{u_d-u_g}\, t \\ u_d & \text{si} \quad x > \frac{f(u_d)-f(u_g)}{u_d-u_g}\, t \end{cases}$$



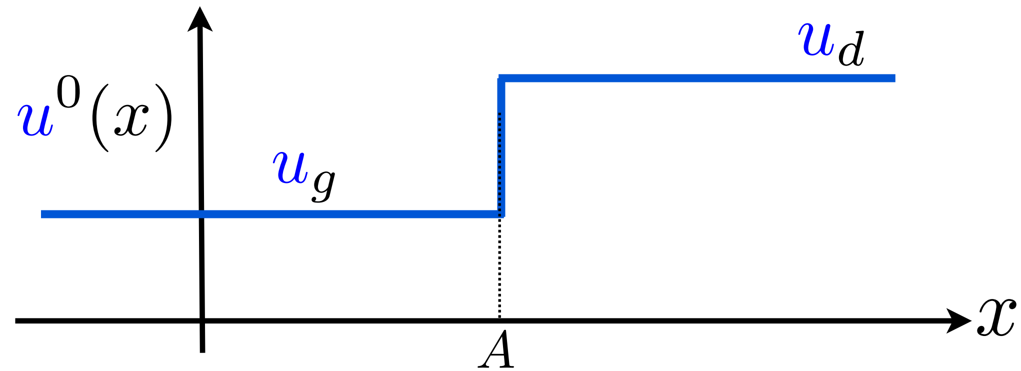
$$a(u_d) < \frac{f(u_d)-f(u_g)}{u_d-u_g} < a(u_g)$$



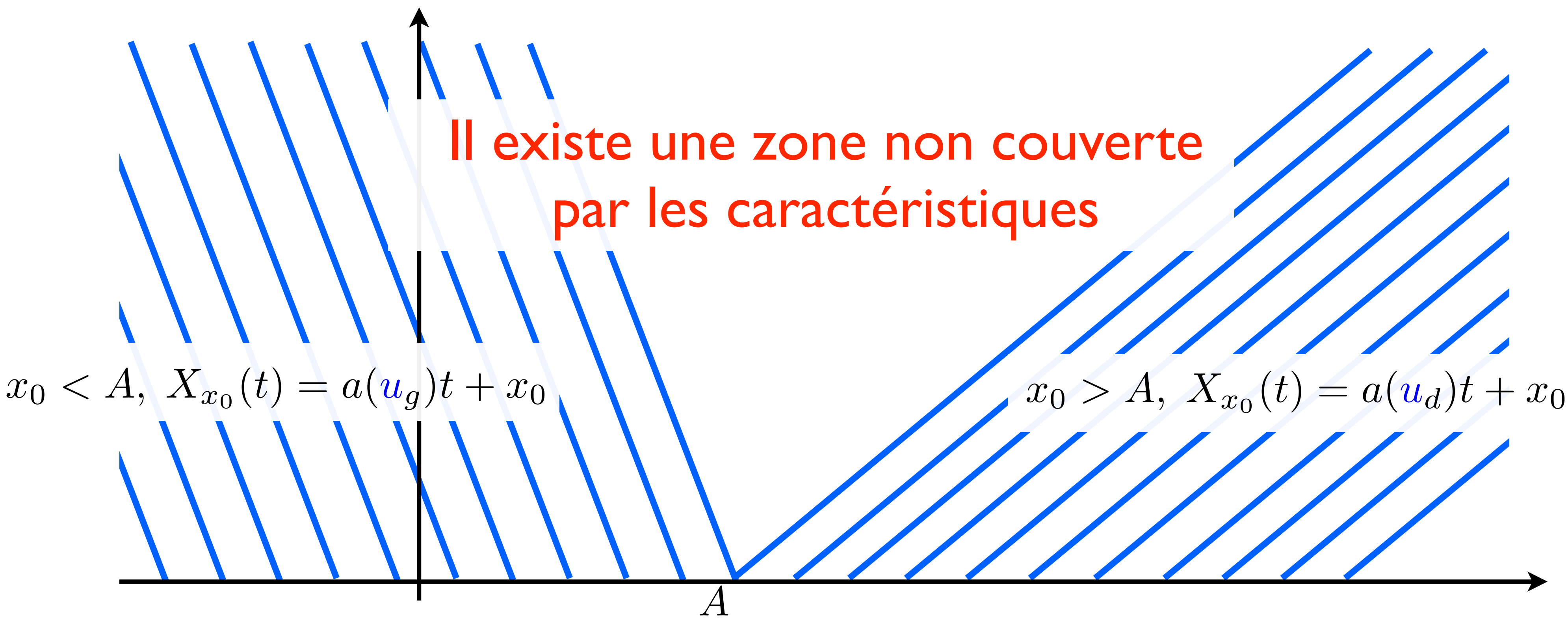
Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

Trouver $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \\ u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



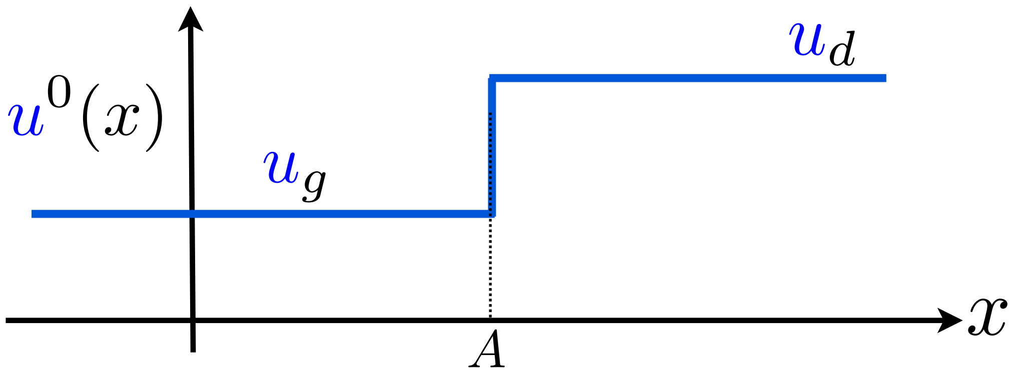
Etape 1: Tracer les droites caractéristiques: $\forall x_0 \in \mathbb{R} \;\; X_{x_0}(t) = a(u^0(x_0))t + x_0$



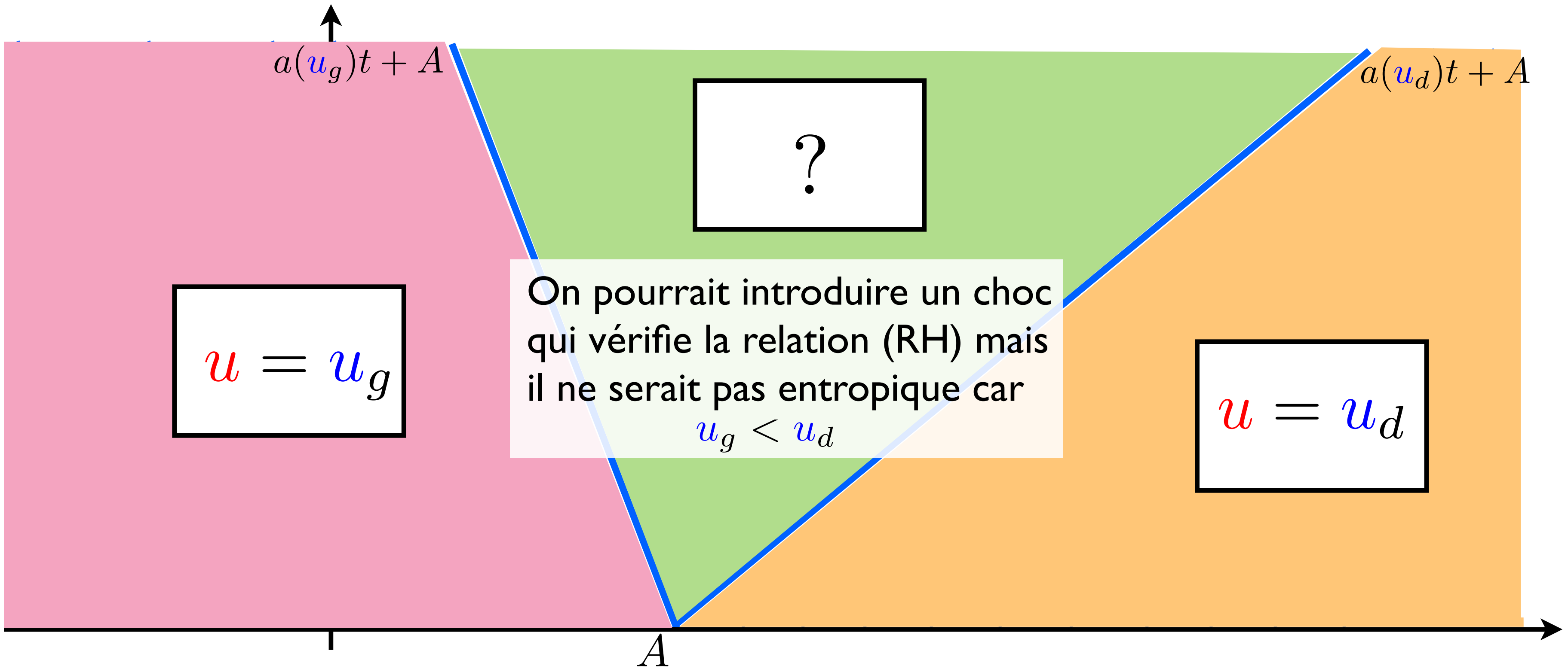
Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

Trouver $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \\ u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



Etape 2: Construire une solution classique dans les régions où cela est possible.

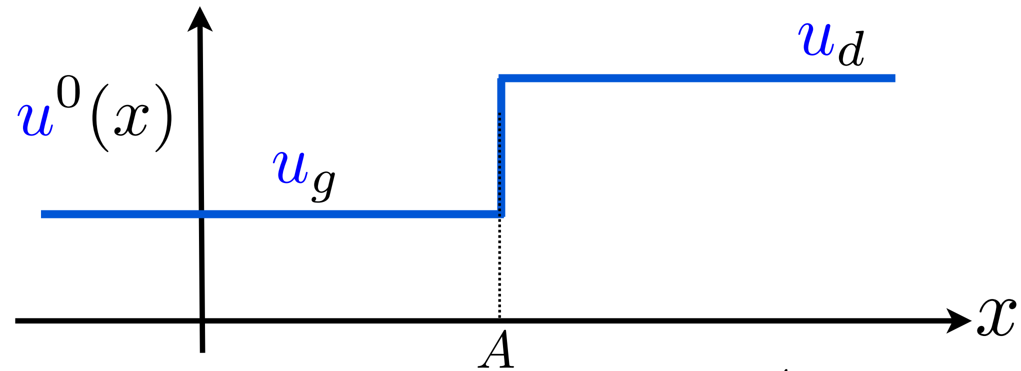


Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

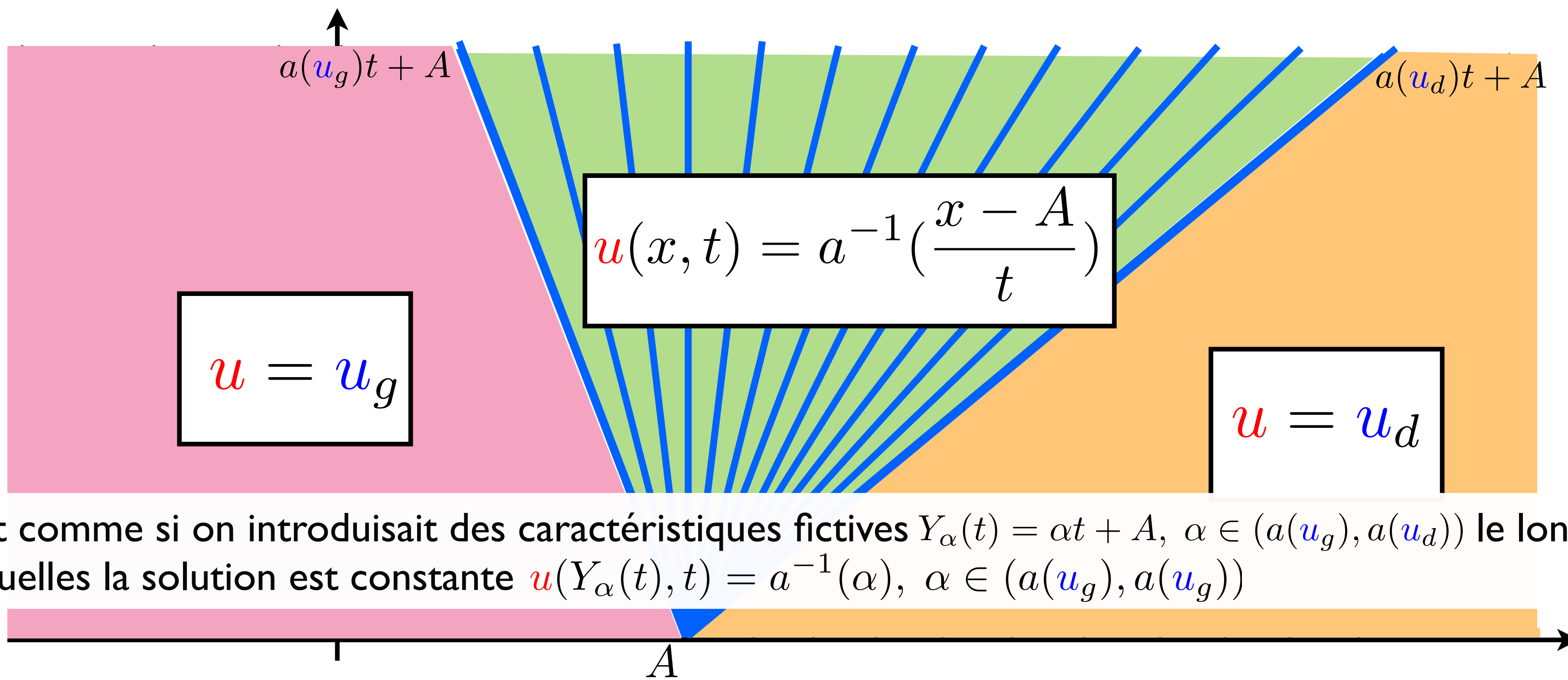
Trouver $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0,$$

$$u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$



Etape 3: Une solution classique dans cette zone est donnée par $\mathcal{U}(\frac{x-A}{t})$, $\mathcal{U} = a^{-1}$

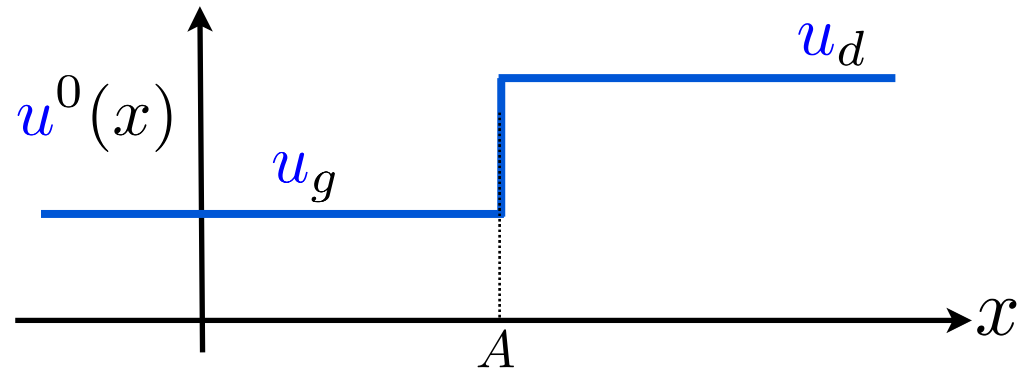


C'est comme si on introduisait des caractéristiques fictives $Y_\alpha(t) = \alpha t + A, \ \alpha \in (a(u_g), a(u_d))$ le long desquelles la solution est constante $u(Y_\alpha(t), t) = a^{-1}(\alpha), \ \alpha \in (a(u_g), a(u_g))$

Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

Trouver $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \\ u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



La fonction ainsi construite, définie par

$$u(x,t) = \begin{cases} u_g & \text{si} \quad x < a(u_g)\,t + A \\ a^{-1}\left(\dfrac{x-A}{t}\right) & \text{si} \quad a(u_g)\,t + A < x < a(u_d)\,t + A \\ u_d & \text{si} \quad x > a(u_d)\,t + A \end{cases}$$

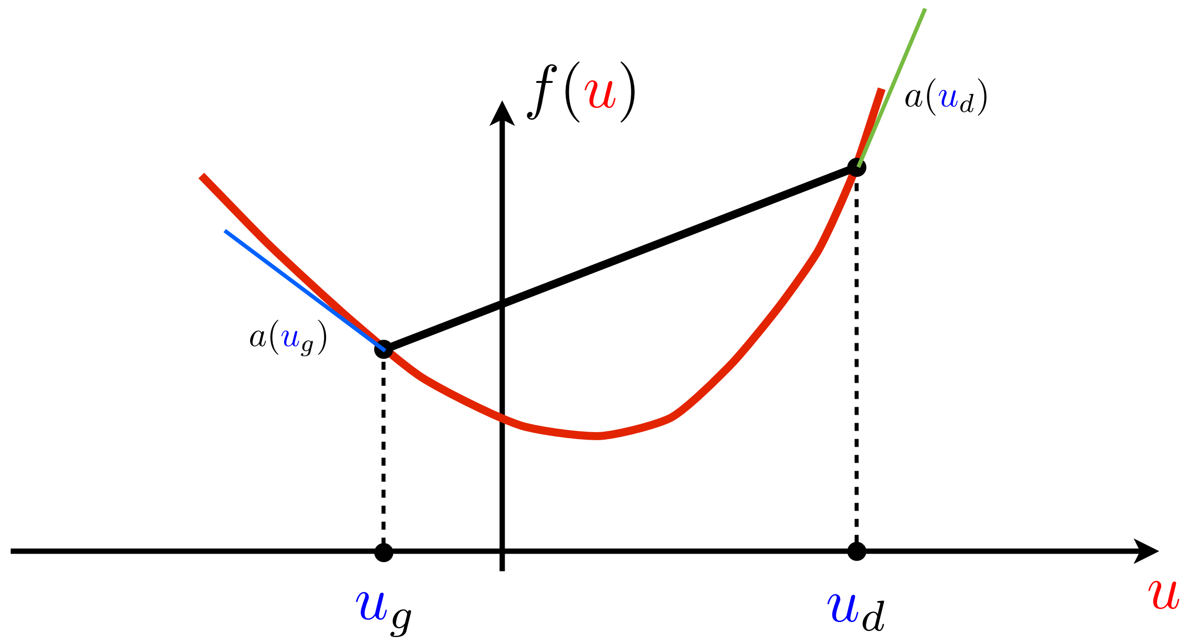
est une solution faible du problème car

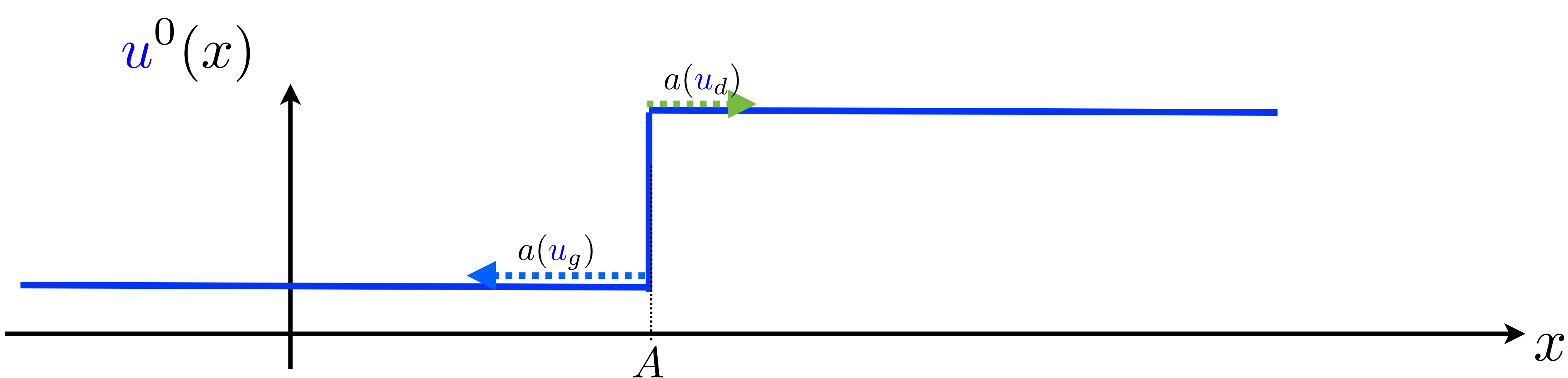
- elle satisfait l'équation là ou elle est C^1
- elle est continue

C'est l'unique solution entropique car elle est continue.

Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_g & \text{si} \quad x < a(u_g)\,t + A \\ a^{-1}\left(\dfrac{x-A}{t}\right) & \text{si} \quad a(u_g)\,t + A < x < a(u_d)\,t + A \\ u_d & \text{si} \quad x > a(u_d)\,t + A \end{cases}$$

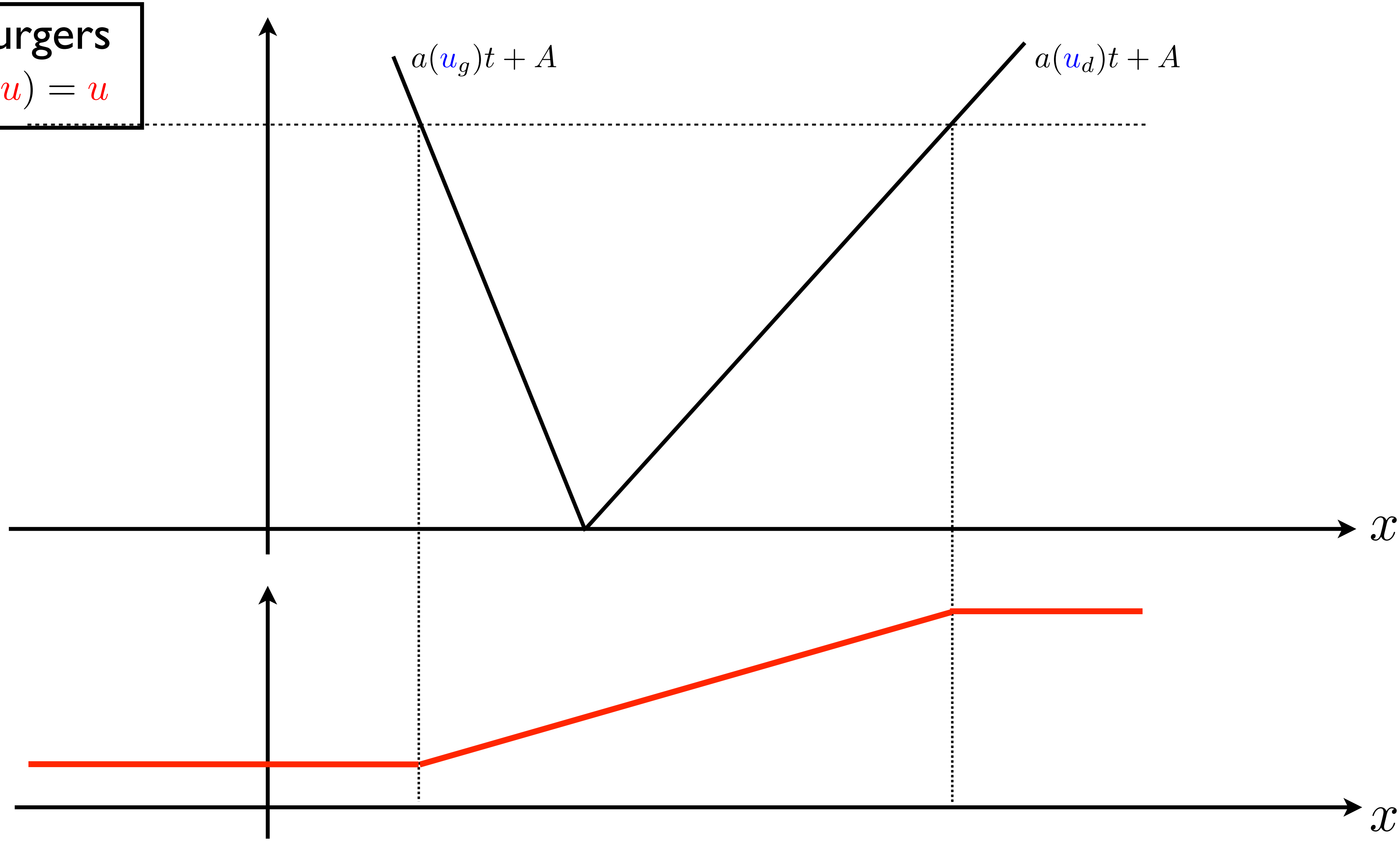




Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_g & \text{si} \quad x < a(u_g)\,t + A \\ a^{-1}\left(\dfrac{x-A}{t}\right) & \text{si} \quad a(u_g)\,t + A < x < a(u_d)\,t + A \\ u_d & \text{si} \quad x > a(u_d)\,t + A \end{cases}$$

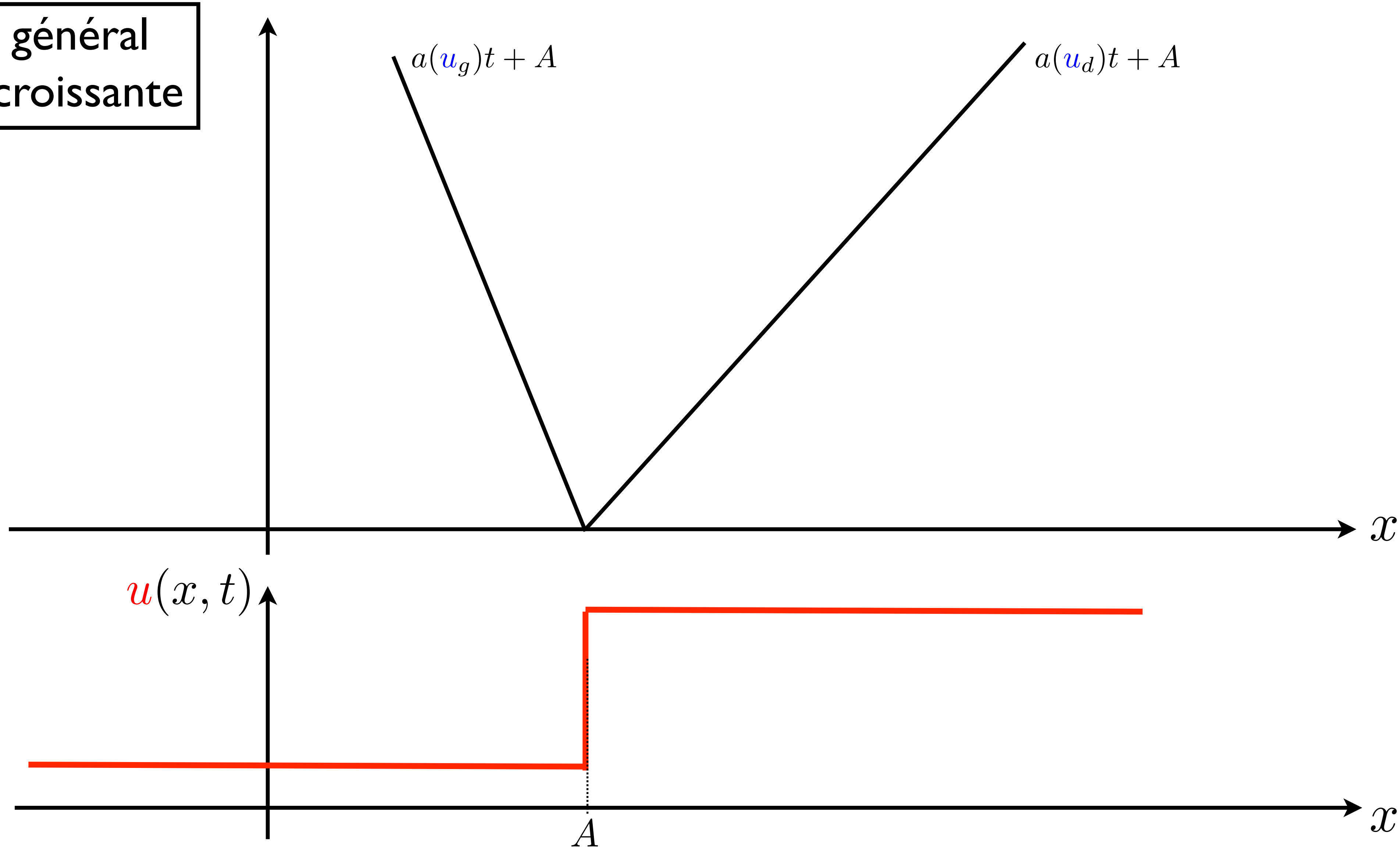
Burgers
$a(u) = u$



Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_g & \text{si} \quad x < a(u_g)\,t + A \\ a^{-1}\left(\dfrac{x-A}{t}\right) & \text{si} \quad a(u_g)\,t + A < x < a(u_d)\,t + A \\ u_d & \text{si} \quad x > a(u_d)\,t + A \end{cases}$$

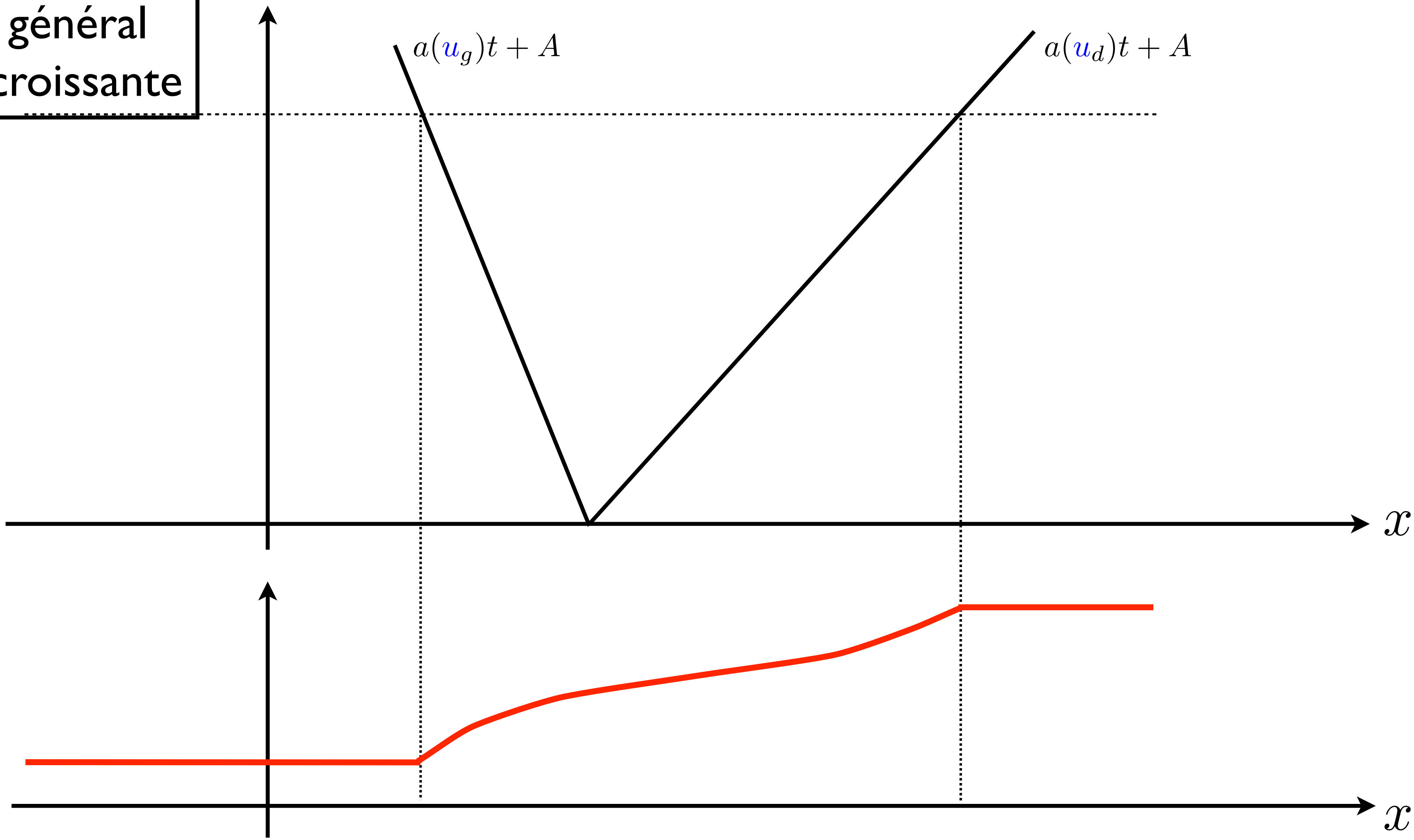
Cas général
$a(u)$ croissante



Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_g & \text{si} \quad x < a(u_g)\,t + A \\ a^{-1}\left(\dfrac{x-A}{t}\right) & \text{si} \quad a(u_g)\,t + A < x < a(u_d)\,t + A \\ u_d & \text{si} \quad x > a(u_d)\,t + A \end{cases}$$

Cas général
$a(u)$ croissante



Comment construire la solution faible entropique?

Etape 1 : On propose une solution en s'inspirant de la méthode des caractéristiques :

- dans les régions où la solution est $\mathcal{C}^1$, elle doit être classique;
- si les caractéristiques se croisent : présence d'un choc;
- si une région est sans caractéristique : présence d'une détente;

Etape 2 : On démontre ensuite que la solution proposée est bien la solution faible entropique:

- elle est une solution faible si les équations des lignes de choc vérifient la relation de Rankine Hugoniot;
- elle est la solution entropique si le long des lignes de chocs, la condition d'entropie est satisfaite (choc descendant si f est convexe et choc ascendant si f est concave).