Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées ParisTech
PRB202 - Martingales et Algorithmes Stochastiques
Corrigé PC2 - 7 décembre 2017

Exercice 1 : 1. Pour tout $n \geq 1$, considérons la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ par :

$$f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n .$$

$f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ -mesurable, où $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$.
On remarque par ailleurs que pour tout $n \geq 1$, $(S_1, S_2, \cdots, S_n) = f_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.
f_n^{-1} est bijective de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ et quel que soit $n \geq 1$:

$$f_n^{-1}(s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n) = (s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, \cdots, s_n - s_{n-1}), \quad (s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n) \in \mathbb{R}^n .$$

Comme $f_n^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue sur $\mathbb{R}^n$, elle est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ -mesurable.
Rappel : **Tribu engendrée par une v.a. X et fonctions $\sigma(X)$-mesurables.**

- Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(E, \mathcal{E})$ deux espaces mesurables. On appelle variable aléatoire (en abrégé v.a.) définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ toute application mesurable X de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{E})$, soit, on doit avoir :
$$\forall C \in \mathcal{E}, X^{-1}(C) = \{X \in C\} = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in C\} \in \mathcal{F} .$$
- Pour une telle v.a. X, la tribu engendrée par X, notée $\sigma(X)$, est la plus petite sous-tribu sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui rend X mesurable. En fait, on a : $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{E}) = \{\{X \in C\} ; C \in \mathcal{E}\}$.
- Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux sous-tribus de $\mathcal{F}$, en général $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ n'est pas une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On note alors $\mathcal{G} \vee \mathcal{H}$ ou $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, la sous-tribu $\sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})$. $\mathcal{G} \vee \mathcal{H}$ est la plus petite sous-tribu sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui contient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$.
- Considérons n v.a. X_i, $1 \leq i \leq n$, définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et à valeurs dans les espaces mesurables $(E_i, \mathcal{E}_i)$. La tribu engendrée par $X_1, \cdots, X_n$, notée $\sigma(X_1, \cdots, X_n)$, est définie comme étant la plus petite sous-tribu sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui rend chaque v.a. X_i, $1 \leq i \leq n$, mesurable, soit :
$$\sigma(X_1, \cdots, X_n) = \sigma(\{\{X_1 \in C_1\} \cap \cdots \cap \{X_n \in C_n\} ; C_1 \in \mathcal{E}_1, \cdots, C_n \in \mathcal{E}_n\}) .$$
$\sigma(X_1, \cdots, X_n)$ est aussi la plus petite sous-tribu sur $(\Omega, \mathcal{F})$ contenant toutes les $\sigma(X_i)$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, de sorte que :
$$\sigma(X_1, \cdots, X_n) = \sigma\left(\cup_{i=1}^n \sigma(X_i)\right) = \sigma(X_1) \vee \cdots \vee \sigma(X_n) .$$
- Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et à valeurs dans les espaces mesurables $(E_n, \mathcal{E}_n)$, $n \in \mathbb{N}$.
La tribu engendrée par $(X_n)_{n \geq 1}$ est définie comme suit :
$$\begin{aligned} \sigma(X_1, \cdots, X_n, \cdots) &= \sigma\left(\cup_{n \geq 1} \sigma(X_n)\right) \\ &= \sigma\left(\cup_{n \geq 1} \sigma(X_1, \cdots, X_n)\right) \\ &= \sigma(\{\cap_{i=1}^n \{X_i \in C_i\} ; n \geq 1, C_i \in \mathcal{E}_i, 1 \leq i \leq n\}) . \end{aligned}$$
- Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, une variable aléatoire. Une variable aléatoire $U : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ est $\sigma(X)$ -mesurable si et seulement si il existe une application $g : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \to (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ mesurable telle que : $U = g(X)$.

$\square$

Compte tenu du rappel précédent et puisque pour tout $n \geq 1$, $(S_1, S_2, \cdots, S_n) = f_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, avec f_n $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ -mesurable, on en déduit que $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ est $\sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ -mesurable.
Or, $\sigma(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ est la plus petite tribu sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui rende $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ mesurable donc $\sigma(S_1, S_2, \cdots, S_n) \subset \sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, quel que soit $n \geq 1$.
Par le même argument et comme $(X_1, X_2, \cdots, X_n) = f_n^{-1}(S_1, S_2, \cdots, S_n)$, pour tout $n \geq 1$ avec f_n^{-1} qui est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ -mesurable, il vient : $\sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n) \subset \sigma(S_1, S_2, \cdots, S_n)$.
On conclut que $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \cdots, S_n)$, quel que soit $n \geq 1$.

2. Pour tout $n \geq 1\,, \mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \cdots, S_n)$, d'après la question **1.**. Or $\sigma(S_1, \cdots, S_n)\,, n \geq 1$, est la plus petite sous-tribu sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui rend les variables aléatoires $(S_1, \cdots, S_n)$ mesurables; en particulier, quel que soit $n \geq 1, S_n$ est alors $\mathcal{F}_n$ -mesurable. Comme $S_0 = 0\,, S_n$ est $\mathcal{F}_n$ -mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Par ailleurs, $S_n\,, n \geq 1$, est une variable aléatoire intégrable.

   En effet, $\forall n \geq 1\,, \mathbb{E}[|S_n|] \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|X_i|] = n\,\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$, puisque les v.a. $X_1, \cdots, X_n$ sont intégrables et identiquement distribuées.

   Rappel : **Indépendance d'évènements, de tribus et de variables aléatoires**.

   Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et I un ensemble d'indices.

   - Une famille quelconque $(A_i)_{i \in I}$ d'évènements est dite (mutuellement) indépendante pour $\mathbb{P}$ si, pour toute sous-famille $(A_j)_{j \in J}\,, J \subset I\,, J$ fini, on a :

   $$\mathbb{P}(\cap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)\,.$$

   - Une famille quelconque $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ est dite (mutuellement) indépendante pour $\mathbb{P}$ si toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'évènements vérifiant, pour tout $i \in I\,, A_i \in \mathcal{F}_i$ est indépendante pour $\mathbb{P}$.
   - Une famille quelconque $(X_i)_{i \in I}$ de variables aléatoires X_i à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_i}, d_i \in \mathbb{N}^*, i \in I$, est (mutuellement) indépendante pour $\mathbb{P}$ si la famille de sous-tribus $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ est indépendante pour $\mathbb{P}$.
   On dit aussi plus simplement que les évènements $(A_i)_{i \in I}$, (resp. les sous-tribus $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$, les variables aléatoires $(X_i)_{i \in I}$) sont indépendants.
   - Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d\,, d \in \mathbb{N}^*$ est indépendante d'une sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ si et seulement si $\sigma(X)$ est indépendante de $\mathcal{G}$ soit, si et seulement si :
   $\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \forall B \in \mathcal{G},\ \mathbb{P}(\{X \in C\} \cap B) = \mathbb{P}(X \in C)\,\mathbb{P}(B)\,.$
   - La famille d'évènements $(A_i)_{i \in I}$ est indépendante si et seulement si, la famille des sous-tribus $(\sigma(A_i))_{i \in I}$ est indépendante.
   - La famille d'évènements $(A_i)_{i \in I}$ est indépendante si et seulement si, la famille des v.a. $(\mathbf{1}_{A_i})_{i \in I}$ est indépendante.
   - Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux sous-tribus de $\mathcal{F}$ indépendantes, X et Y deux variables aléatoires respectivement $\mathcal{G}$-mesurable et $\mathcal{H}$-mesurable, alors les v.a. X et Y sont indépendantes.
   - **Lemme de regroupement** :
     - (Forme 1) Soit $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$ une famille indépendante de sous-tribus de $\mathcal{F}$. Si $I_1\,, I_2\,, \cdots, I_n$ sont des parties disjointes et non vides de I telle que $I = \cup_{i=1}^{n} I_i$ alors les tribus $\sigma(\cup_{i \in I_1} \mathcal{G}_i)\,, \sigma(\cup_{i \in I_2} \mathcal{G}_i)\,, \cdots,$ $\sigma(\cup_{i \in I_n} \mathcal{G}_i)$ sont indépendantes.
     - (Forme 2) Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs réelles.
     Alors, si $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_p = n$, les variables aléatoires $f_1(X_1, \cdots, X_{n_1})\,, f_2(X_{n_1+1}, \cdots, X_{n_2})\,,$ $\cdots, f_p(X_{n_{p-1}+1}, \cdots, X_{n_p})$ sont indépendantes, pour toute application $f_1\ : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}\,, \cdots,$ $f_p\ : \mathbb{R}^{n_p - n_{p-1}} \to \mathbb{R}$, mesurables.
     Par exemple, si $X_1, \cdots, X_4$ sont des v.a. réelles indépendantes, les variables aléatoires $X_1 + X_2$ et $X_3 X_4$ sont indépendantes.
   - Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires telles que $X_i\,, 1 \leq i \leq n$, soit à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_i}$.
   $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si, pour toutes applications $f_i\,, 1 \leq i \leq n$ boréliennes bornées (ou à valeurs positives) de $\mathbb{R}^{d_i}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

   $$\mathbb{E}[f_1(X_1) f_2(X_2) \cdots f_n(X_n)] = \mathbb{E}[f_1(X_1)]\mathbb{E}[f_2(X_2)] \cdots \mathbb{E}[f_n(X_n)]\,.$$

   On notera que si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes et intégrables, la relation suivante est valide :

   $$\mathbb{E}[X_1 X_2 \cdots X_n] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] \cdots \mathbb{E}[X_n]\,.$$

   Cependant, la réciproque est fausse.

   □

   Comme la famille ou suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est indépendante, la famille des sous-tribus $(\sigma(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est indépendante.

   Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}$, les sous-tribus $\sigma(X_1)\,, \cdots, \sigma(X_m)$ sont indépendantes.

   En prenant $I = \{1, \cdots, n+1\}, I_1 = \{1, \cdots, n\}, I_2 = \{n+1\}, \mathcal{G}_i = \sigma(X_i), i \in I$, dans la forme 1 du lemme de regroupement, on obtient que les sous-tribus $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n) = \sigma\left(\cup_{i=1}^{n} \sigma(X_i)\right) = \sigma(X_1) \vee \cdots \vee \sigma(X_n)$ et $\sigma(X_{n+1})$ sont indépendantes, soit que la variable aléatoire X_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n\,, n \geq 1$.

De plus, quel que soit $n \in \mathbb{N}\,, S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\,, \text{ en utilisant la linéarité de l'espérance conditionnelle,}\\
&= S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\,, \text{ car } S_n \text{ est } \mathcal{F}_n \text{ -mesurable,}\\
&= S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}]\,, \text{ vu que } X_{n+1} \text{ est indépendante de } \mathcal{F}_n\,,\\
&= S_n\,,
\end{aligned}$$

puisque $\mathbb{E}[X_{n+1}] = \mathbb{E}[X_1] = 0$.
On en déduit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale.

3. Pour tout $n \geq 1\,, S_n$ est $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable et la fonction $x \mapsto x^2$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ -mesurable. On en déduit que S_n^2 est une variable aléatoire $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ -mesurable comme étant la composée de deux fonctions $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ - et $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ -mesurables.
Ainsi, le processus $(S_n^2 - n\,\sigma^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - adapté.
Par ailleurs, en utilisant l'inégalité vectorielle :

$$|x_1 + \ldots + x_l|^2 \leq l^2(|x_1|^2 + \ldots + |x_l|^2)\,,$$

valide quel que soit $l \geq 1$ et $(x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l$, on obtient, pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}[S_n^2] \leq n^2 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k^2] < +\infty\,,$$

puisque quel que soit $k \in \{1, \ldots, n\}\,, \mathbb{E}[X_k^2] = \mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2$.
Le processus $(S_n^2 - n\,\sigma^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors intégrable.
De plus, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_{n+1}^2 - (n+1)\sigma^2|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(S_n + X_{n+1})^2 - (n+1)\sigma^2|\mathcal{F}_n]\,,\\
&= \mathbb{E}[S_n^2|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] + 2\mathbb{E}[S_n X_{n+1}|\mathcal{F}_n] - (n+1)\sigma^2\,, \qquad (1)
\end{aligned}$$

en utilisant la linéarité de l'espérance conditionnelle.
Or, S_n^2 étant $\mathcal{F}_n$ -mesurable, on a, quel que soit $n \geq 1$

$$\mathbb{E}[S_n^2|\mathcal{F}_n] = S_n^2\,, \text{p.s.}\,, \qquad (2)$$

Comme X_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$, X_{n+1}^2 est encore une variable aléatoire indépendante de $\mathcal{F}_n$ et :

$$\mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}^2] = \mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2\,, \qquad (3)$$

pour tout $n \geq 1$.
Puisque S_n est $\mathcal{F}_n$ -mesurable et de carré intégrable, il vient, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n X_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= S_n \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\,,\\
&= S_n \mathbb{E}[X_{n+1}]\,, \text{ car } X_{n+1} \text{ est indépendante de } \mathcal{F}_n\,,\\
&= S_n \mathbb{E}[X_1]\,,\\
&= 0 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Ainsi combinant les résultats obtenus dans (2), (3) et (4) pour terminer le calcul dans (1), on obtient que, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_{n+1}^2 - (n+1)\sigma^2|\mathcal{F}_n] &= S_n^2 + \sigma^2 - (n+1)\sigma^2\,,\\
&= S_n^2 - n\,\sigma^2\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, $(S_n^2 - n\,\sigma^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale.

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}\,, Y_n = g_n(S_n)$, où g_n est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $g_n(x) = \exp(\alpha x - n\log(\mathbb{E}[e^{\alpha X_1}])$.
$g_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ -mesurable et S_n est $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (respectivement, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$) désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ (respectivement, la tribu borélienne de $\mathbb{R}^+$). Y_n est alors $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ -mesurable, pour tout $n \in \mathbb{N}$ comme étant la composée de deux fonctions $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ -mesurables.

Rappel : Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}[\exp(u\,X)]$$

de la variable réelle u soit définie dans un voisinage ouvert de l'origine. ϕ_X est appelée *la transformée de Laplace* de (la loi de) X.
Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires indépendantes dont chacune admet une transformée de Laplace, alors la somme $X + Y$ admet une transformée de Laplace et l'on a :

$$\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y \,.$$

Le résultat précédent se généralise au cas de n variables aléatoires indépendantes $X_1\,, \ldots, X_n\,.$

$\square$

Ainsi, pour tout $n \geq 1\,, \phi_{S_n}(\alpha) = (\phi_{X_1}(\alpha))^n = (\phi(\alpha))^n$, puisque $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, et les variables aléatoires $X_1\,, \ldots, X_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées.
Il vient alors :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1\,,\ \mathbb{E}[Y_n] &= \phi(\alpha)^{-n}\mathbb{E}[\exp(\alpha S_n)]\,, \\ &= \phi(\alpha)^{-n}\phi_{S_n}(\alpha)\,, \\ &= \phi(\alpha)^{-n}\phi(\alpha)^n\,, \\ &= 1 < +\infty\,. \end{aligned}$$

$Y_0 = 1$ et Y_n est donc une variable aléatoire intégrable, pour tout $n \in \mathbb{N}\,.$
De plus, quel que soit $n \in \mathbb{N}\,,$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \phi(\alpha)^{-(n+1)}\mathbb{E}[\exp(\alpha(S_n + X_{n+1}))|\mathcal{F}_n]\,, \\ &= \phi(\alpha)^{-(n+1)}\exp(\alpha S_n)\mathbb{E}[\exp(\alpha X_{n+1})|\mathcal{F}_n]\,, \text{car } S_n \text{ donc } \exp(\alpha S_n) \text{ est } \mathcal{F}_n \text{ -mesurable et de carré intégrable,} \\ &= Y_n\,\phi(\alpha)^{-1}\mathbb{E}[\exp(\alpha X_{n+1})]\,,\ \text{puisque } X_{n+1} \text{ donc } \exp(\alpha X_{n+1}) \text{ est indépendante de } \mathcal{F}_n\,, \\ &= Y_n\,\phi(\alpha)^{-1}\mathbb{E}[\exp(\alpha X_1)]\,, \\ &= Y_n\,\phi(\alpha)^{-1}\phi(\alpha)\,, \\ &= Y_n\,. \end{aligned}$$

On en déduit que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale.
Lorsque X_1 suit une loi normale centrée réduite,

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= \mathbb{E}[e^{\alpha X_1}]\,, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\,, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2-2\alpha x}{2}}\,dx\,, \\ &= \frac{e^{\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2}}\,dx\,, \\ &= e^{\frac{\alpha^2}{2}}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, $\phi(\alpha)$ est définie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(e^{\alpha S_n - n\frac{\alpha^2}{2}})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale pour tout $\alpha \in \mathbb{R}\,.$

Exercice 2 : Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est naturellement adapté par rapport à sa filtration naturelle $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire intégrable puisque, par hypothèse, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, donc un processus intégrable.

De plus, remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}\,, \mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$. En effet, fixons un entier naturel $n \in \mathbb{N}$; comme $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est adapté à $(\mathcal{F}_m)_{m\in\mathbb{N}}$, toute variable aléatoire X_p, pour $0 \leq p \leq n$, est $\mathcal{F}_p$ - mesurable donc $\mathcal{F}_n$ - mesurable puisque $\mathcal{F}_p \subset \mathcal{F}_n$ lorsque $0 \leq p \leq n$. Mais, par définition, $\mathcal{G}_n = \sigma(X_p\,, 0 \leq p \leq n)$ est la plus petite tribu sur $(\Omega, \mathcal{F})$ (au sens de l'inclusion) qui rend mesurable toutes les variables aléatoires X_p, pour $0 \leq p \leq n$; on en déduit que $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}\,, \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{G}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]|\mathcal{G}_n]$, d'après la propriété d'emboîtement des espérances conditionnelles. Par ailleurs, puisque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - sur-martingale, $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, de sorte que $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{G}_n] \leq \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}_n]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la propriété de croissance de l'espérance conditionnelle.

Enfin, comme X_n est $\mathcal{G}_n$ - mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}_n] = X_n$.

En conclusion, on a bien que $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{G}_n] \leq X_n$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : Comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - sur-martingale, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus intégrable et adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n$, p.s..

Introduisons la variable aléatoire U_n, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $U_n = X_n - \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$. Alors, $U_n \geq 0$, p.s., quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Or, $\mathbb{E}[U_n] = \mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X_{n+1}] = 0$, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[X_n]$ est constante d'après l'énoncé.

Ainsi U_n est une variable aléatoire positive $\mathbb{P}$ – presque-sûrement telle que $\mathbb{E}[U_n] = 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$; on en déduit que : $U_n = 0$, p.s., pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit : $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$, p.s..

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale.

Exercice 4 :

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale de carré intégrable, X_m est une variable aléatoire $\mathcal{F}_m$ - mesurable, de carré intégrable, pour tout $m \in \mathbb{N}$.
   Ainsi, quel que soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m \leq n$,
   $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_m Y_n|\mathcal{F}_m] &= X_m \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_m] \text{, p.s.,} \\ &= X_m Y_m \text{, p.s.,} \end{aligned} \tag{5}$$
   puisque $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale.
   On montre, de la même façon, que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m \leq n$,
   $$\mathbb{E}[Y_m X_n|\mathcal{F}_m] = Y_m X_m \text{ p.s.}.$$
2. En prenant l'espérance dans l'égalité (5), il vient pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m \leq n$:
   $$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_m Y_n|\mathcal{F}_m]] = \mathbb{E}[X_m Y_m],$$
   soit :
   $$\mathbb{E}[X_m Y_n] = \mathbb{E}[X_m Y_m].$$
   Choisissant $m = k - 1, n = k$, quel que soit $k \geq 1$, on obtient :
   $$E[X_{k-1} Y_k] = \mathbb{E}[X_{k-1} Y_{k-1}]. \tag{6}$$
   pour tout $k \geq 1$.
   A la question **1.**, nous avons obtenu que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m \leq n$,
   $$\mathbb{E}[Y_m X_n|\mathcal{F}_m] = Y_m X_m \text{ p.s.}.$$
   En utilisant alors une démarche analogue à celle suivie précédemment, on a alors quel que soit $k \geq 1$,
   $$E[Y_{k-1} X_k] = \mathbb{E}[Y_{k-1} X_{k-1}]. \tag{7}$$
   Or, pour tout $k \geq 1$,
   $$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})] &= \mathbb{E}[X_k Y_k] - E[X_k Y_{k-1}] - E[X_{k-1} Y_k] + \mathbb{E}[X_{k-1} Y_{k-1}], \\ &= \mathbb{E}[X_k Y_k] - \mathbb{E}[X_{k-1} Y_{k-1}], \end{aligned} \tag{8}$$
   d'après (6) et (7).
   En sommant alors pour k allant de 1 à n dans l'égalité (8), il vient pour tout entier naturel $n \geq 1$,
   $$\mathbb{E}[X_n Y_n] - \mathbb{E}[X_0 Y_0] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})]. \tag{9}$$

3. En prenant $X_n = Y_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, dans (9), on obtient :

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[X_0^2] + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2]\,, \tag{10}$$

quel que soit $n \geq 1$.
Or, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale, $\mathbb{E}[X_k|\mathcal{F}_{k-1}] = X_{k-1}$, p.s., pour tout $k \geq 1$, de sorte que $\mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}[X_{k-1}]$, quel que soit $k \geq 1$.
On en déduit que les variables aléatoires $X_k - X_{k-1}\,, 1 \leq k \leq n$ sont centrées et :

$$\mathrm{Var}(X_k - X_{k-1}) = \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2]\,, \tag{11}$$

pour tout $k \geq 1$.
Par ailleurs, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X_n) &= \mathbb{E}[X_n^2] - (\mathbb{E}[X_n])^2\,, \\ &= \mathbb{E}[X_n^2] - (\mathbb{E}[X_0])^2\,, \end{aligned} \tag{12}$$

puisque $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Finalement, combinant (10), (11) et (12), on en déduit la relation recherchée :

$$\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{Var}(X_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k - X_{k-1})\,,$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

4. $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $<.,.>$ défini par : $< X, Y >= \mathbb{E}[XY]$, pour tout $(X, Y) \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \times \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Or, pour toute variable aléatoire Z , $\mathcal{F}_{n-1}$ - mesurable, $n \geq 1$, et de carré intégrable, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z(X_n - X_{n-1})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z(X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}]]\,, \\ &= \mathbb{E}[Z\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}]]\,, \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

puisque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale.
Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $X_n - X_{n-1}$ est orthogonale à toute variable aléatoire Z , $\mathcal{F}_{n-1}$ - mesurable, de carré intégrable.
C'est ainsi que $X_n - X_{n-1}, n \geq 1$, est orthogonale à X_0.
Aussi, pour tout $(j, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $j < k, X_k - X_{k-1}$ est orthogonale à $X_j - X_{j-1}$, car $X_j - X_{j-1}$ est une variable aléatoire de carré intégrable, $\mathcal{F}_j$ donc $\mathcal{F}_{k-1}$- mesurable.

<u>Exercice 5</u> : 1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - sous-martingale, pour tout $k \in \mathbb{N}$, X_k est $\mathcal{F}_k$ - mesurable, en fait X_k est $(\mathcal{F}_k, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ -mesurable puisque $X_k > 0$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$; ainsi la fonction $x \to \frac{1}{x}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{X_k}$ est $(\mathcal{F}_k, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ -mesurable comme étant la composée de deux fonctions $(\mathcal{F}_k, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ -mesurable et $(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ -mesurable.
Par ailleurs, $\mathbb{E}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k]$ est, par définition, une variable aléatoire $\mathcal{F}_k$ - mesurable, pour tout $k \in \mathbb{N}$; comme $\forall k \in \mathbb{N}, X_k > 0$, il résulte de la positivité de l'opérateur espérance conditionnelle que $\mathbb{E}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k]$ est $(\mathcal{F}_k, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ -mesurable.
Ainsi, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $\frac{\mathbb{E}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k]}{X_k}$ est $(\mathcal{F}_k, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ -mesurable comme étant le produit de deux fonctions $(\mathcal{F}_k, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ -mesurables.
Comme $0 \leq k \leq n-1$, $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{n-1}$ et $\frac{\mathbb{E}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k]}{X_k}$ est $(\mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ -mesurable; enfin, pour tout $n \geq 1$, $C_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k]}{X_k}$ est $(\mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ -mesurable comme étant le produit de n fonctions $(\mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ - mesurables.
$C_0 = 1$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien un processus $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - prévisible.
La propriété de sous-martingale pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet d'écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$, p.s., soit : $\frac{\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]}{X_n} \geq 1$, p.s..
Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $C_{n+1} = \prod_{k=0}^{n} \frac{\mathbb{E}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k]}{X_k} = \frac{\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]}{X_n} C_n \geq C_n$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite croissante.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, C_n \geq C_0$ et $\frac{1}{C_n} \leq \frac{1}{C_0} = 1$.
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - sous-martingale, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus intégrable et quel que soit $n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[\frac{X_n}{C_n}] \leq \mathbb{E}[X_n] < +\infty$.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}, \frac{X_n}{C_n}$ est $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ -mesurable puisque C_n est $(\mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ -mesurable donc $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ -mesurable.
Enfin,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{X_{n+1}}{C_{n+1}}\middle|\mathcal{F}_n\right] &= \frac{1}{C_{n+1}}\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\,, \text{ car } C_{n+1} \text{ donc } \tfrac{1}{C_{n+1}} \text{ est } \mathcal{F}_n\text{ - mesurable}\,, \\
&= \frac{1}{C_n}\,\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]}\,\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\,, \\
&= \frac{X_n}{C_n}\,,
\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$\left(\dfrac{X_n}{C_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien alors une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale.
Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus croissant prévisible avec $D_0 = 1$ tel que $\left(\dfrac{X_n}{D_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale.
On aurait alors nécessairement : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}\left[\frac{X_{k+1}}{D_{k+1}}\middle|\mathcal{F}_k\right] = \frac{X_k}{D_k}$, soit, comme $D_{k+1}, k \in \mathbb{N}$ est $\mathcal{F}_k$ -mesurable, $\frac{D_{k+1}}{D_k} = \frac{\mathbb{E}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k]}{X_k}$.
Il vient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{D_n}{D_0} = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\frac{D_{k+1}}{D_k} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{\mathbb{E}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k]}{X_k}$ et $\forall n \geq 1, D_n = C_n$.

2. Considérons le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $X_n = e^{M_n}$.
Comme $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale, M_n est $\mathcal{F}_n$ -mesurable, pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, la fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ -mesurable. Ainsi, quel que soit $n \in \mathbb{N}, X_n$ est $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ - mesurable comme étant la composée de deux fonctions $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ - et $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ - mesurables.
De plus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus intégrable puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[e^{M_n}] < +\infty$, d'après l'énoncé.
Par ailleurs, $X_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La fonction $x \mapsto e^x$ étant convexe et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - sous-martingale, d'après l'inégalité de Jensen conditionnelle.
D'après la question **1.**, il existe alors un unique processus croissant prévisible $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\left(\dfrac{X_n}{C_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale.
$C_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1, C_n$ est donné par : $C_n = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{\mathbb{E}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k]}{X_k}$.
Introduisons le processus $(C_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ défini par : $C_n^{'} = \ln(C_n)$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
Comme la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $(C_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
$C_0^{'} = \ln(C_0) = \ln(1) = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
C_n^{'} = \ln(C_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\mathbb{E}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k]}{X_k}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\frac{\mathbb{E}[X_{k+1}|\mathcal{F}_k]}{X_k}\right)\,, \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\ln(\mathbb{E}[e^{M_{k+1}-M_k}|\mathcal{F}_k])\,,
\end{aligned}$$

car $X_k = e^{M_k}$ est $\mathcal{F}_k$ - mesurable.
On déduit alors du développement précédent qu'il existe un unique processus croissant prévisible $(C_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $(e^{M_n - C_n^{'}})_{n\in\mathbb{N}}$ soit une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale avec $C_0^{'} = 0$ et $C_n^{'} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\ln(\mathbb{E}[e^{M_{k+1}-M_k}|\mathcal{F}_k])$, pour tout $n \geq 1$.

<u>**Exercice 6**</u> **:** 1. Soit $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$, deux sous-tribus de $\mathcal{F}$.
On consultera à nouveau avec profit le rappel de cours apparaissant dans le corrigé de la question 1. de l'Exercice 1 de cette même PC.

Montrons tout d'abord que $\sigma(\mathcal{G},\mathcal{H})=\sigma(\mathcal{G}\cup\mathcal{H})=\sigma(\mathcal{G})\vee\sigma(\mathcal{H})=\sigma(\mathcal{J})$,
où $\mathcal{J}=\{G\cap H\,;G\in\mathcal{G}\,,H\in\mathcal{H}\}$.
$\sigma(\mathcal{G},\mathcal{H})\,,\sigma(\mathcal{G}\cup\mathcal{H})$ et $\sigma(\mathcal{G})\vee\sigma(\mathcal{H})$ ne sont que trois notations distinctes mais usuelles pour désigner la plus petite sous-tribu sur $(\Omega,\mathcal{F})$ contenant $\mathcal{G}\cup\mathcal{H}$.
Soit $J\in\mathcal{J}$ quelconque; il existe $G\in\mathcal{G}$ et $H\in\mathcal{H}$ tels que $J=G\cap H$. Ainsi, $J^c=(G\cap H)^c=G^c\cup H^c$. Comme une tribu est stable par passage au complémentaire, $G^c\in\mathcal{G}$ et $H^c\in\mathcal{H}$, de sorte que $J^c\in\mathcal{G}\cup\mathcal{H}$.
Naturellement, $\mathcal{G}\cup\mathcal{H}\subset\sigma(\mathcal{G}\cup\mathcal{H})$, ainsi si $J\in\mathcal{J}\,,J^c\in\sigma(\mathcal{G}\cup\mathcal{H})$, soit $J\in\sigma(\mathcal{G}\cup\mathcal{H})$, car $\sigma(\mathcal{G}\cup\mathcal{H})$ étant une sous-tribu sur $(\Omega,\mathcal{F})$, elle est stable par complémentation.
Mais, $\sigma(\mathcal{J})$ est, par définition, la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ contenant la famille d'évènements $\mathcal{J}$; on en déduit que $\sigma(\mathcal{J})\subset\sigma(\mathcal{G}\cup\mathcal{H})$. L'inclusion réciproque se prouve en utilisant un argument analogue.
On a ainsi l'égalité : $\sigma(\mathcal{G}\cup\mathcal{H})=\sigma(\{G\cap H\,;G\in\mathcal{G}\,,H\in\mathcal{H}\})$.
Remarquons tout de suite que $\mathcal{J}$ est stable par intersection finie et contient Ω.
En effet, comme $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux sous-tribus de $\mathcal{F}\,,\Omega\in\mathcal{G}$ et $\Omega\in\mathcal{H}$, de sorte que $\Omega\cap\Omega=\Omega\in\mathcal{J}$.
Par ailleurs, soit $(J_i)_{1\le i\le n}\,,n\ge 1$, une famille finie d'évènements de $\mathcal{J}$.
Il existe $G_i\in\mathcal{G}$ et $H_i\in\mathcal{H}$ tels que $\forall i\in\{1\,,\cdots,n\}\,,J_i=G_i\cap H_i$; ainsi, $\cap_{i=1}^n J_i=(\cap_{i=1}^n G_i)\cap(\cap_{i=1}^n H_i)$.
Une tribu étant stable par intersection dénombrable donc finie, $\cap_{i=1}^n G_i\in\mathcal{G}$ et $\cap_{i=1}^n H_i\in\mathcal{H}$.
On en déduit que $\cap_{i=1}^n J_i\in\mathcal{J}$, pour tout $n\ge 1$.
Rappel : **Caractérisation de l'espérance conditionnelle**.
Etant donné un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\,,\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et $X\in\mathbb{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.
L'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$, notée $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$, est l'unique (à une égalité presque-sûre près) variable aléatoire $Y,\mathcal{G}$ −mesurable et intégrable telle que :

$$\forall\,A\in\mathcal{G}\,,\mathbb{E}[\mathbf{1}_A Y]=\mathbb{E}[\mathbf{1}_A X]\,.$$

□

Posons $Y=\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ et montrons que $Y=\mathbb{E}[X|\sigma(\mathcal{G},\mathcal{H})]$.
Y est $\mathcal{G}$-mesurable donc $\sigma(\mathcal{G},\mathcal{H})$-mesurable, puisque $\mathcal{G}\subset\sigma(\mathcal{G},\mathcal{H})$. Par ailleurs, Y est une variable aléatoire intégrable.
Soit $G\in\mathcal{G}$ et $H\in\mathcal{H}$ quelconques. On a toujours : $\mathbf{1}_{G\cap H}=\mathbf{1}_G\,\mathbf{1}_H$.
$\mathbf{1}_H$ est $\mathcal{H}$-mesurable et $\mathbf{1}_G\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ est $\mathcal{G}$-mesurable donc $\sigma(\sigma(X),\mathcal{G})$-mesurable. Comme les tribus $\mathcal{H}$ et $\sigma(\sigma(X),\mathcal{G})$ sont indépendantes d'après l'énoncé, on en déduit que les variables aléatoires $\mathbf{1}_H$ et $\mathbf{1}_G\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ sont indépendantes.
Il vient alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{G\cap H}Y]&=\mathbb{E}[\mathbf{1}_H\,\mathbf{1}_G\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]]\,,\\&=\mathbb{E}[\mathbf{1}_H]\mathbb{E}[\mathbf{1}_G\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]]\,,\\&=\mathbb{E}[\mathbf{1}_H]\mathbb{E}[\mathbf{1}_G X]\,,\text{d'après la caractérisation de l'espérance conditionnelle }\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\,,\\&=\mathbb{E}[\mathbf{1}_H\mathbf{1}_G X]\,,\\&\text{car les v.a. }\mathbf{1}_H\text{ et }\mathbf{1}_G X\text{ sont respectivement }\mathcal{H}\text{- et }\sigma(\sigma(X),\mathcal{G})\text{-mesurables donc indépendantes,}\\&=\mathbb{E}[\mathbf{1}_{G\cap H}X]\,.\end{aligned}$$

Complément : **Théorème d'unicité des mesures**.
Soit μ_1 et μ_2 deux mesures positives sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$ et $\mathcal{C}$ une famille de parties de Ω vérifiant :

(i) $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie,
(ii) $\Omega\in\mathcal{C}$,
(iii) $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{A}$,
(iv) Pour tout $C\in\mathcal{C}\,,\mu_1(C)=\mu_2(C)<+\infty$.

Alors les mesures μ_1 et μ_2 sont égales sur $\mathcal{A}$.

□

Les mesures $A\mapsto\mathbb{E}[\mathbf{1}_A X]$ et $B\mapsto\mathbb{E}[\mathbf{1}_B Y]$ définies sur $(\Omega,\mathcal{F})$ vérifient :

$$\forall\,(G,H)\in\mathcal{G}\times\mathcal{H}\,,\mathbb{E}[\mathbf{1}_{G\cap H}Y]=\mathbb{E}[\mathbf{1}_{G\cap H}X]\,,$$

soit :

$$\forall\,J\in\mathcal{J}\,,\mathbb{E}[\mathbf{1}_J Y]=\mathbb{E}[\mathbf{1}_J X]<+\infty\,,$$

puisque X et Y sont intégrables.
$\mathcal{J}$ contient Ω, est stable par intersection finie et $\sigma(\mathcal{J}) = \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$.
D'après le lemme d'unicité des mesures, on a alors :

$$\forall A \in \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H}), \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Y] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A X].$$

Mais $Z = \mathbb{E}[X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})]$ est l'unique variable aléatoire $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$-mesurable et intégrable vérifiant :

$$\forall A \in \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H}), \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Z] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A X].$$

On conclut que : $\mathbb{E}[X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$, p.s..

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, de même loi et intégrables.

(a) Rappel :

- Soit un vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_d)$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d, d \geq 1$.
La fonction caractéristique de X est donnée pour tout $u = (u_1, \cdots, u_d) \in \mathbb{R}^d$ par :

$$\psi_X(u) = \mathbb{E}[\exp(i < u, X >)] = \mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{i=1}^{d} u_i\, X_i\right)\right].$$

- Si $X = (X_1, \cdots, X_d)$ et $Y = (Y_1, \cdots, Y_d)$ sont deux vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d, d \geq 1$, X et Y ont même loi si et seulement si pour tout $u = (u_1, \cdots, u_d) \in \mathbb{R}^d, \psi_X(u) = \psi_Y(u)$.
- Si $X_1, \cdots, X_d, d \geq 1$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\psi_{\sum_{i=1}^d X_i}(u) = \prod_{i=1}^{d} \psi_{X_i}(u).$$

- $X_1, \cdots, X_d, d \geq 1$ sont des variables aléatoires indépendantes si et seulement si :

$$\forall t = (t_1, \cdots, t_d) \in \mathbb{R}^d, \psi_{(X_1,\cdots,X_d)}(t) = \prod_{i=1}^{d} \psi_{X_i}(t_i),$$

□

Pour tout $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\psi_{(X_1,X_1+X_2)}(u) &= \mathbb{E}[\exp(i < (u_1, u_2), (X_1, X_1 + X_2) >)],\\
&= \mathbb{E}[\exp(i((u_1 + u_2)X_1 + u_2X_2))],\\
&= \psi_{(X_1,X_2)}(u_1 + u_2, u_2),\\
&= \psi_{X_1}(u_1 + u_2)\, \psi_{X_2}(u_2), \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes,}\\
&= \psi_{X_2}(u_1 + u_2)\, \psi_{X_1}(u_2), \text{ puisque } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont même loi,}\\
&= \psi_{(X_2,X_1)}(u_1 + u_2, u_2), \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes,}\\
&= \mathbb{E}[\exp(i((u_1 + u_2)X_2 + u_2X_1))],\\
&= \mathbb{E}[\exp(i < (u_1, u_2), (X_2, X_1 + X_2) >)],\\
&= \psi_{(X_2,X_1+X_2)}(u).
\end{aligned}$$

On en déduit que les couples $(X_1, X_1 + X_2)$ et $(X_2, X_1 + X_2)$ suivent la même loi.

(b) Rappel : Etant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et X une variable aléatoire intégrable.

- Il existe une unique (à une égalité presque-sûre près) variable aléatoire $Y, \mathcal{G}-$mesurable et intégrable telle que :

$$\text{Pour toute variable aléatoire } Z, \mathcal{G} - \text{mesurable et bornée, } \mathbb{E}[ZY] = \mathbb{E}[ZX].$$

$Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ est appelée l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$.
- Si T est une variable aléatoire à valeurs réelles, on note $\mathbb{E}[X|T] = \mathbb{E}[X|\sigma(T)]$.

□

Soit Z une variable aléatoire quelconque $\sigma(X_1 + X_2)$-mesurable et bornée; Z s'écrit sous la forme $f(X_1 + X_2)$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et bornée.

Ainsi, $Y_1 = \mathbb{E}[X_1|X_1+X_2]$ vérifie $\mathbb{E}[f(X_1+X_2)Y_1] = \mathbb{E}[f(X_1+X_2)X_1]$.
Or, les couples (X_1, X_1+X_2) et (X_2, X_1+X_2) suivent la même loi, donc pour toute fonction $g\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, (\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ - mesurable à valeurs positives ou bornée,

$$\mathbb{E}[g(X_1, X_1+X_2)] = \mathbb{E}[g(X_2, X_1+X_2)]\,.$$

En prenant $g\ : (x,y) \mapsto f(y)\,x$, on en déduit que $\mathbb{E}[f(X_1+X_2)X_1] = \mathbb{E}[f(X_1+X_2)X_2]$.
(Ci-dessus, f étant bornée et les v.a. $X_1\,, X_2$ intégrables, les quantités $\mathbb{E}[f(X_1+X_2)X_1]$ et $\mathbb{E}[f(X_1+X_2)X_2]$ sont bien définies)
Il apparaît alors que Y_1 est une variable aléatoire $\sigma(X_1+X_2)$ - mesurable et intégrable telle que :

$$\mathbb{E}[f(X_1+X_2)Y_1] = \mathbb{E}[f(X_1+X_2)X_2]\,.$$

Mais, $Y_2 = \mathbb{E}[X_2|X_1+X_2]$ est, par définition, l'unique variable aléatoire $\sigma(X_1+X_2)$ - mesurable et intégrable vérifiant :

$$\mathbb{E}[f(X_1+X_2)Y_2] = \mathbb{E}[f(X_1+X_2)X_2]\,.$$

On en conclut que :

$$\mathbb{E}[X_1|X_1+X_2] = \mathbb{E}[X_2|X_1+X_2]\,, \text{p.s.}\,. \tag{13}$$

Or, d'après la linéarité de l'espérance conditionnelle, il vient :

$$\mathbb{E}[X_1+X_2|X_1+X_2] = \mathbb{E}[X_1|X_1+X_2] + \mathbb{E}[X_2|X_1+X_2]\,, \tag{14}$$

et X_1+X_2 étant $\sigma(X_1+X_2)$ - mesurable,

$$\mathbb{E}[X_1+X_2|X_1+X_2] = X_1+X_2\,, \tag{15}$$

de sorte que, combinant (13), (14) et (15), on obtient :

$$\mathbb{E}[X_1|X_1+X_2] = \mathbb{E}[X_2|X_1+X_2] = \frac{X_1+X_2}{2}\,, \text{p.s.}\,. \tag{16}$$

(c) On pose $S_0 = 0\,, S_n = X_1 + \cdots + X_n\,, T_n = \frac{S_n}{n}\,, \mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \cdots)$, quel que soit $n \geq 1$.
Montrons tout d'abord que pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, les couples (X_1, S_n) et (X_k, S_n) suivent la même loi.
L'argument est identique à celui de la question **2. (a)**.
Pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\psi_{(X_1,S_n)}((u,v)) &= \mathbb{E}[\exp(i<(u,v),(X_1,S_n)>)]\,,\\
&= \mathbb{E}[\exp(i((u+v)X_1 + v(X_2+\cdots+X_n))]\,,\\
&= \psi_{(X_1, X_2+\cdots+X_n)}(u+v, v)\,,\\
&= \psi_{X_1}(u+v)\,\psi_{X_2+\cdots+X_n}(v)\,,\ \text{car } X_1 \text{ et } X_2+\cdots+X_n \text{ sont indépendantes,}\\
&= \psi_{X_1}(u+v)\prod_{i=2}^{n}\psi_{X_i}(v)\,,\ \text{puisque } X_2, \cdots, X_n \text{ sont indépendantes,}\\
&= \psi_{X_k}(u+v)\prod_{i=1, i\neq k}^{n}\psi_{X_i}(v)\,,\ \text{car } X_1 \text{ et } X_k \text{ ont même loi,}\\
&= \psi_{X_k}(u+v)\,\psi_{\sum_{i=1,i\neq k}^{n} X_i}(v)\,,\ \text{puisque les } X_i, 1\leq i\leq n, i\neq k \text{ sont indépendantes,}\\
&= \psi_{(X_k, \sum_{i=1,i\neq k}^{n} X_i)}(u+v, v)\,,\ \text{car } X_k \text{ et } \textstyle\sum_{i=1,i\neq k}^{n} X_i \text{ sont indépendantes,}\\
&= \mathbb{E}[\exp(i((u+v)X_k + v\sum_{i=1,i\neq k}^{n} X_i))]\,,\\
&= \mathbb{E}[\exp(i<(u,v),(X_k,S_n)>)]\,,\\
&= \psi_{(X_k,S_n)}((u,v))\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que les couples (X_1, S_n) et (X_k, S_n) suivent la même loi, quel que soit $k \in \{1, \cdots, n\}$.
Soit alors Z une variable aléatoire quelconque $\sigma(S_n)$ - mesurable et bornée; il existe une fonction $h\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ - mesurable et bornée telle que $Z = h(S_n)\,, n \geq 1$.
Ainsi, $U_1 = \mathbb{E}[X_1|S_n]$ est une variable aléatoire $\sigma(S_n)$ - mesurable et intégrable vérifiant :

$$\mathbb{E}[h(S_n)U_1] = \mathbb{E}[h(S_n)X_1] = \mathbb{E}[h(S_n)X_k]\,, 1 \leq k \leq n\,,$$

puisque les couples (X_1, S_n) et (X_k, S_n) suivent la même loi, quel que soit $k \in \{1, \cdots, n\}$.
Par unicité (à une classe d'équivalence p.s. près) de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X_k|S_n]\,, 1 \leq k \leq n$, on conclut que pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$:

$$\mathbb{E}[X_k|S_n] = \mathbb{E}[X_1|S_n]\,,\text{p.s.}\,. \tag{17}$$

(d) Comme S_n est $\sigma(S_n)$ - mesurable, il vient, pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}[S_n|S_n] = S_n\,. \tag{18}$$

Par ailleurs, quel que soit $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_n|S_n] &= \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n|S_n]\,,\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k|S_n]\,,\ \text{d'après la linéarité de l'espérance conditionnelle,}\\ &= n\,\mathbb{E}[X_1|S_n]\,,\ \text{d'après l'égalité trouvée en (17).}\end{aligned} \tag{19}$$

Combinant (18) et (19), on obtient alors, pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}[X_1|S_n] = T_n\,,\text{p.s.}\,. \tag{20}$$

(e) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on montre d'abord que : $\sigma(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \cdots, S_{n+m}) = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots, X_{n+m})$.
Il suffit de reprendre une démarche analogue à celle proposée à la question 1. de l'Exercice 1 de cette même PC, soit d'identifier une bijection $f_m\ : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ telle que :

$$f_m(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \cdots, S_{n+m}) = (S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots, X_{n+m})\,,$$

avec f_m et f_m^{-1}, $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+1}), \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+1}))$ -mesurables.
Ainsi, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \cdots) &= \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots)\\ &= \sigma(S_n) \vee \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots)\,.\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots)$ est indépendante de $\sigma(X_1, S_n) = \sigma(\sigma(X_1) \cup \sigma(S_n)) = \sigma(X_1) \vee \sigma(S_n)$.
On est alors très exactement dans le champ d'application de la question 1. avec quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{G} = \sigma(S_n)$, $\mathcal{H} = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{H}) = \mathcal{G} \vee \mathcal{H}$.
On en déduit que, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[X_1|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_1|S_n]$, soit, d'après (20) :

$$\mathbb{E}[X_1|\mathcal{F}_n] = T_n\,,\text{p.s.}\,. \tag{21}$$

(f) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il vient alors :

$$\begin{aligned}T_{n+1} &= \mathbb{E}[X_1|\mathcal{F}_{n+1}]\,,\\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_1|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_{n+1}]\,,\ \text{car } \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n \text{ et d'après la règle des espérances conditionnelles emboîtées,}\\ &= \mathbb{E}[T_n|\mathcal{F}_{n+1}]\,,\text{en utilisant (21).}\end{aligned}$$

$(T_n)_{n\geq 1}$ est appelée une **martingale inverse ou rétrograde**.

Exercice 7 : Soit G une variable aléatoire géométrique définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. G est alors à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(G = k) = p(1-p)^k\,, k \in \mathbb{N}$, où $p \in]0, 1[$. Désignons par $\mathcal{F}_n$, la plus petite sous-tribu sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui rend mesurable la variable aléatoire $G \wedge n\,, n \in \mathbb{N}$.

1. Rappel :
   - Une variable aléatoire réelle X définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dite **discrète** s'il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{E}$ tel que $\mathbb{P}(X \in \mathcal{E}) = 1$.
     Comme $\mathcal{E}$ est dénombrable, on peut en fait écrire $\mathcal{E}$ comme suit : $\mathcal{E} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$, où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de nombres réels distincts.
     La famille d'évènements $(A_n = X^{-1}(x_n) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) = x_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ forme une partition de l'ensemble Ω et on a : $X = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\,\mathbf{1}_{A_n}$.
   - La tribu engendrée par X, $\sigma(X)$, est la plus petite sous-tribu $\mathcal{G}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que X soit $\mathcal{G}$ -mesurable.
     Ainsi, $\sigma(X) = \sigma((A_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

$\square$

Pour tout $n \geq 1\,, G \wedge n = 0\,.\,\mathbf{1}_{\{G=0\}} + 1\,.\,\mathbf{1}_{\{G=1\}} + \cdots + (n-1)\,.\,\mathbf{1}_{\{G=n-1\}} + n\,.\,\mathbf{1}_{\{G\geq n\}}\,.$

Or, $(\{G=0\}, \{G=1\}, \cdots, \{G=n-1\}, \{G \geq n\})\,, n \geq 1$ fixé, constitue une partition sur l'espace $\Omega\,.$

On en déduit que, pour tout $n \geq 1\,, \mathcal{F}_n = \sigma(\{G=0\}, \{G=1\}, \cdots, \{G=n-1\}, \{G \geq n\})\,.$

2. Rappel : Une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille de sous-tribus $\mathcal{F}_n\,, n \in \mathbb{N}$, de $\mathcal{F}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}\,, \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}\,.$

$\square$

Quel que soit $n \in \mathbb{N}\,, \mathcal{F}_n$ a été définie comme la plus petite sous-tribu sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui rend mesurable la variable aléatoire $G \wedge n\,, n \in \mathbb{N}\,.$ A l'évidence, pour chaque $n \in \mathbb{N}\,, \mathcal{F}_n$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}\,.$

Aussi, $\mathcal{F}_0 = \sigma(G \wedge 0)$ et vu que $G \wedge 0 = 0\,$, p.s.$\,, \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, et $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_n$, quel que soit $n \geq 1\,.$

Par ailleurs, on a, par définition, pour tout $n \geq 1$, que :

$$\begin{aligned}&\{\{G=0\}, \{G=1\}, \cdots, \{G=n-1\}, \{G=n\}, \{G \geq n+1\}\}\\ &\qquad\qquad \subset \sigma(\{\{G=0\}, \{G=1\}, \cdots, \{G=n-1\}, \{G=n\}, \{G \geq n+1\}\}) = \mathcal{F}_{n+1}\,.\end{aligned}$$

Comme $\{G \geq n\} = \{G = n\} \cup \{G \geq n+1\}$, quel que soit $n \geq 1$, il vient :

$\{\{G=0\}, \{G=1\}, \cdots, \{G=n-1\}, \{G \geq n\}\} \subset \mathcal{F}_{n+1}\,.$ Mais $\mathcal{F}_n\,, n \geq 1$, est la plus petite sous-tribu sur $(\Omega, \mathcal{F})$ contenant $\{\{G=0\}, \{G=1\}, \cdots, \{G=n-1\}, \{G \geq n\}\}$, ainsi $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ et la famille de sous-tribus $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})\,.$

3. Rappel (cf corrigé Exercice 1 de la PC1) Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs réelles.

Considérons une sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{G} = \sigma((B_n)_{n\in\mathbb{N}})$, où $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une partition de l'ensemble $\Omega\,.$

Alors : $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = \displaystyle\sum_{j\in J^*} \frac{\mathbb{E}[Y\,\mathbf{1}_{B_j}]}{\mathbb{P}(B_j)}\mathbf{1}_{B_j}$, p.s., avec $J^* = \{j \in J; \mathbb{P}(B_j) > 0\}\,.$

$\square$

En appliquant la formule précédente, il vient pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{G\geq n+1\}}|\mathcal{F}_n] = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{G\geq n+1\}}\,\mathbf{1}_{\{G=j\}}]}{\mathbb{P}(G=j)}\mathbf{1}_{\{G=j\}} + \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{G\geq n+1\}}\,\mathbf{1}_{\{G\geq n\}}]}{\mathbb{P}(G\geq n)}\mathbf{1}_{\{G\geq n\}}\,.$$

Or, pour tout $j \in \{0, \cdots, n-1\}\,, n \geq 1\,, \mathbf{1}_{\{G\geq n+1\}}\,\mathbf{1}_{\{G=j\}} = 0$ et $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{G\geq n+1\}}\,\mathbf{1}_{\{G\geq n\}}] = \mathbb{P}(G \geq n+1)$, ainsi, pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{G\geq n+1\}}|\mathcal{F}_n] = \frac{\mathbb{P}(G\geq n+1)}{\mathbb{P}(G\geq n)}\mathbf{1}_{\{G\geq n\}}\,. \tag{22}$$

Par ailleurs, pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G < m) &= \mathbb{P}(\cup_{k=0}^{m-1}\{G=k\})\,,\\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}(G=k)\,,\\ &= \sum_{k=0}^{m-1} p\,(1-p)^k\,,\\ &= p\,\frac{1-(1-p)^m}{1-(1-p)}\,,\\ &= 1-(1-p)^m\,,\end{aligned}$$

et $\mathbb{P}(G \geq m) = 1 - \mathbb{P}(G < m) = (1-p)^m$, quel que soit $m \geq 1\,.$ (la formule est aussi valide pour $m = 0$)

Reprenant le calcul effectué dans l'égalité (22), on conclut que, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{G\geq n+1\}}|\mathcal{F}_n] &= \frac{(1-p)^{n+1}}{(1-p)^n}\mathbf{1}_{\{G\geq n\}}\,, \qquad (23)\\ &= (1-p)\mathbf{1}_{\{G\geq n\}}\,.\end{aligned}$$

4. Quel que soit $n \geq 1$, on remarque :

$$\begin{aligned}G \wedge (n+1) &= (G \wedge (n+1))\mathbf{1}_{\{G\leq n\}} + (G \wedge (n+1))\mathbf{1}_{\{G>n\}}\,,\\ &= (G \wedge n)\mathbf{1}_{\{G\leq n\}} + (n+1)\mathbf{1}_{\{G\geq n+1\}}\,,\end{aligned}$$

puisque sur l'évènement $\{G \leq n\}$, G ne dépassera jamais la valeur n donc $G \wedge (n+1) = G \wedge n$, p.s., et, pour tout $n \geq 1$, on a alors :

$$\begin{aligned} G \wedge (n+1) &= (G \wedge n)(1 - \mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}}) + (n+1)\mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}}\,, \\ &= G \wedge n + ((n+1) - G \wedge n)\mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}}\,, \\ &= G \wedge n + ((n+1) - n)\mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}}\,, \\ &= G \wedge n + \mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}}\,, \end{aligned}$$

car sur l'évènement $\{G \geq n+1\}$, $G \wedge n = n$, p.s..
Ainsi, pour tout $n \geq 1$, il vient, d'après la linéarité de l'espérance conditionnelle et l'égalité démontrée en (23) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G \wedge (n+1)|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(G \wedge n)|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}}|\mathcal{F}_n]\,, \\ &= (G \wedge n) + (1-p)\mathbf{1}_{\{G \geq n\}}\,, \end{aligned} \tag{24}$$

car $\mathcal{F}_n = \sigma(G \wedge n)$, $n \geq 1$ et $G \wedge n$ est $\mathcal{F}_n$ -mesurable.

5. Posons, pour tout $n \geq 1$, $X_n = \alpha(G \wedge n) + \mathbf{1}_{\{G \geq n\}}$, où α est un réel à déterminer.
Quel que soit $n \geq 1$, $G \wedge n$ est $\mathcal{F}_n$ -mesurable de sorte que $\alpha(G \wedge n)$ est encore $\mathcal{F}_n$ -mesurable.
Comme $\{G \geq n\} \in \mathcal{F}_n$, $\mathbf{1}_{\{G \geq n\}}$ est également $\mathcal{F}_n$ -mesurable.
On en déduit que X_n, $n \geq 1$ est alors $\mathcal{F}_n$ -mesurable comme étant la somme de deux fonctions $\mathcal{F}_n$ -mesurables.
Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$,

$$|X_n| \leq |\alpha|(G \wedge n) + \mathbf{1}_{\{G \geq n\}} \leq |\alpha|\, n + 1\,. \tag{25}$$

On en déduit que X_n, $n \geq 1$, est une variable aléatoire intégrable.
De plus, quel que soit $n \geq 1$, il vient:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\alpha(G \wedge (n+1))|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}}|\mathcal{F}_n]\,, \text{ d'après la linéarité de l'espérance conditionnelle}\,, \\ &= \alpha((G \wedge n) + (1-p)\mathbf{1}_{\{G \geq n\}}) + (1-p)\mathbf{1}_{\{G \geq n\}}\,, \text{ d'après les égalités (23) et (24)}\,, \\ &= \alpha(G \wedge n) + (1-p)(1+\alpha)\mathbf{1}_{\{G \geq n\}}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, $(X_n)_{n \geq 1}$ sera une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ - martingale si et seulement $(1-p)(1+\alpha) = 1$, soit : $\alpha = \frac{p}{1-p}$.

6. Pour tout $n \geq 1$, on a : $X_{n+1} - X_n = \alpha((G \wedge (n+1)) - (G \wedge n)) + \mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}} - \mathbf{1}_{\{G \geq n\}}$.
Or, $(G \wedge (n+1)) - (G \wedge n) = (G \wedge (n+1)) - (G \wedge n)\mathbf{1}_{\{G \leq n\}} + (G \wedge (n+1)) - (G \wedge n)\mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}}$ et quel que soit $n \geq 1$,

$$G \wedge (n+1) - G \wedge n = \begin{cases} G \wedge n - G \wedge n = 0\,, & \text{sur l'évènement } \{G \leq n\} \\ (n+1) - n = 1\,, & \text{sur } \{G \geq n+1\} \end{cases}.$$

Par ailleurs, comme $\{G \geq n\} = \{G = n\} \cup \{G \geq n+1\}$, il vient, pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbf{1}_{\{G \geq n\}} = \mathbf{1}_{\{G = n\}} + \mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}}\,,$$

soit :

$$\mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}} - \mathbf{1}_{\{G \geq n\}} = -\mathbf{1}_{\{G = n\}}\,, \tag{26}$$

de sorte que :

$$X_{n+1} - X_n = \alpha\mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}} - \mathbf{1}_{\{G = n\}}\,,$$

et :

$$\begin{aligned} (X_{n+1} - X_n)^2 &= (\alpha\mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}} - \mathbf{1}_{\{G = n\}})^2\,, \\ &= \alpha^2\mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}} - 2\alpha\mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}}\mathbf{1}_{\{G = n\}} + \mathbf{1}_{\{G = n\}}\,, \\ &= \alpha^2\mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}} + \mathbf{1}_{\{G = n\}}\,, \\ &= \alpha^2\mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}} + \mathbf{1}_{\{G \geq n\}} - \mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}}\,, \text{en reprenant l'égalité trouvée en (26)}\,, \\ &= (\alpha^2 - 1)\mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}} + \mathbf{1}_{\{G \geq n\}}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2|\mathcal{F}_n] &= (\alpha^2 - 1)\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{G \geq n+1\}}|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{G \geq n\}}|\mathcal{F}_n]\,,\\ &= (\alpha^2 - 1)(1-p)\mathbf{1}_{\{G \geq n\}} + \mathbf{1}_{\{G \geq n\}}\,,\ \text{d'après (23) et le fait que } \mathbf{1}_{\{G \geq n\}} \text{ soit } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}\,,\\ &= ((\alpha^2 - 1)(1-p) + 1)\mathbf{1}_{\{G \geq n\}}\,.\end{aligned}$$

Avec $\alpha = \frac{p}{1-p}$, on trouve $(\alpha^2 - 1)(1-p) + 1 = \alpha$ et il vient alors :

$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2|\mathcal{F}_n] = \alpha \mathbf{1}_{\{G \geq n\}}\,, \tag{27}$$

quel que soit $n \geq 1$.

7. Posons, pour tout $n \geq 1$, $M_n = X_n^2 - \alpha(G \wedge (n-1))$.
   Quel que soit $n \geq 1$, X_n est $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et comme la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, $X_n^2, n \geq 1$ est alors $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable comme étant la composée de deux fonctions $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.
   De plus, comme $\mathcal{F}_{n-1} = \sigma((G \wedge (n-1))$, pour tout $n \geq 1$, $(G \wedge (n-1))$ est $(\mathcal{F}_{n-1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable donc $(\mathcal{F}_n, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable puisque $\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$.
   Ainsi, $M_n, n \geq 1$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable comme étant la combinaison linéaire de deux variables aléatoires réelles $\mathcal{F}_n$-mesurable.
   Par ailleurs, quel que soit $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}|M_n| &\leq X_n^2 + |\alpha|\,(G \wedge (n-1))\\ &\leq (|\alpha|\,n + 1)^2 + |\alpha|\,(n-1)\,,\ \text{d'après (25)}\,,\end{aligned}$$

de sorte que $M_n, n \geq 1$ est une variable aléatoire intégrable.
De plus, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2 - 2X_{n+1}X_n + X_n^2|\mathcal{F}_n]\,,\\ &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - 2X_n\,\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] + X_n^2\,,\ \text{car } X_n^2 \text{ est intégrable et } \mathcal{F}_n \text{ -mesurable,}\\ &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - 2X_n^2 + X_n^2\,,\ \text{car } (X_n)_{n\geq 1} \text{ est une } (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}\text{-martingale pour } \alpha = \frac{p}{1-p}\,,\\ &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - X_n^2\,.\end{aligned}$$

Il a été démontré en (27) que $\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2|\mathcal{F}_n] = \alpha \mathbf{1}_{\{G \geq n\}}, n \geq 1$, ainsi :

$$\mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = X_n^2 + \alpha \mathbf{1}_{\{G \geq n\}}\,, \tag{28}$$

quel que soit $n \geq 1$.
On obtient alors, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2 - \alpha(G \wedge n)|\mathcal{F}_n]\,,\\ &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - \alpha(G \wedge n)\,,\ \text{car } G \wedge n \text{ est } \mathcal{F}_n \text{ -mesurable,}\\ &= X_n^2 + \alpha \mathbf{1}_{\{G \geq n\}} - \alpha(G \wedge n)\,,\ \text{d'après (28).}\end{aligned}$$

Or, $\alpha(G \wedge n) - \alpha(G \wedge (n-1)) = \alpha \mathbf{1}_{\{G \geq n\}}$, quel que soit $n \geq 1$, puisque :

$$G \wedge n - G \wedge (n-1) = \begin{cases} G \wedge (n-1) - G \wedge (n-1) = 0\,, & \text{sur l'évènement } \{G \leq n-1\}\\ n - (n-1) = 1\,, & \text{sur } \{G \geq n\}\end{cases}.$$

On conclut alors que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$, soit que $(X_n^2 - \alpha(G \wedge (n-1)))_{n\geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$-martingale.