Produit tensoriel d'espaces des états

Définition

Soit $\mathcal{E}_1$ un espace des états, de dimension finie ou non, dont une base est l'ensemble des $|\alpha_n\rangle$. Tout élément $|\psi_1\rangle$ de $\mathcal{E}_1$ peut donc se décomposer sur cette base et s'écrire (dans le cas de dimension finie)

$$|\psi_1\rangle = \sum_n a_n|\alpha_n\rangle$$

avec $a_n \in \mathbb{C}$. En dimension infinie on écrirait $|\psi_1\rangle = \int a(\alpha)|\alpha\rangle d\alpha$.

De même on suppose qu'il existe un espace des états $\mathcal{E}_2$ dont une base est l'ensemble des $|\beta_m\rangle$ tel que tout élément $|\psi_2\rangle$ de $\mathcal{E}_2$ s'écrive

$$|\psi_2\rangle = \sum_m b_m|\beta_m\rangle$$

avec $b_m \in \mathbb{C}$.

On définit alors l'espace $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, espace produit tensoriel de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, comme l'espace des états dont une base est l'ensemble des vecteurs produits tensoriels $|\alpha_n\rangle \otimes |\beta_m\rangle$. Ainsi tout élément $|\psi\rangle$ de $\mathcal{E}$ peut s'écrire

$$|\psi\rangle = \sum_{m,n} c_{m,n}|\alpha_n\rangle \otimes |\beta_m\rangle$$

avec $c_{m,n} \in \mathbb{C}$.

Comment calculer le produit scalaire entre 2 éléments de $\mathcal{E}$?

Il suffit de considérer que le produit scalaire s'écrit comme le produit simple d'un produit scalaire dans $\mathcal{E}_1$ et d'un produit scalaire dans $\mathcal{E}_2$.

Par exemple, la norme de $|\psi\rangle$ au carré s'écrit

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\psi\rangle &= \||\psi\rangle\|^2 \\
&= \left(\sum_{m,n} c^*_{m,n}\langle\alpha_n| \otimes \langle\beta_m|\right)\left(\sum_{m,n} c_{m,n}|\alpha_n\rangle \otimes |\beta_m\rangle\right) \\
&= \left(\sum_{m,n,m',n'} c^*_{m,n}c_{m',n'}\langle\alpha_n|\alpha_{n'}\rangle\langle\beta_m|\beta_{m'}\rangle\right)
\end{aligned}$$

Si la base est othonormée on a

$$\langle\psi|\psi\rangle = \left(\sum_{m,n,m',n'} c^*_{m,n}c_{m',n'}\delta_{nn'}\delta_{mm'}\right) = \sum_{m,n}|c_{m,n}|^2$$

Comment agissent les opérateurs ?

Soit $\hat{A}_1$ un opérateur qui agit dans $\mathcal{E}_1$. On peut alors définir le "plongement" $\hat{A}$ de $\hat{A}_1$ dans $\mathcal{E}$ comme l'opérateur $\hat{A} = \hat{A}_1 \otimes \mathcal{I}_2$, où $\mathcal{I}_2$ est l'opérateur identité de $\mathcal{E}_2$, tel que :

$$\hat{A}|\psi\rangle = \sum_{m,n} c_{m,n}\hat{A}\left(|\alpha_n\rangle \otimes |\beta_m\rangle\right) = \sum_{m,n} c_{m,n}\left(\hat{A}_1|\alpha_n\rangle\right)\otimes|\beta_m\rangle$$

Est-ce que tous les états sont factorisables ?

On peut se demander si tous les états de $\mathcal{E}$ peuvent s'écrire comme produit tensoriel d'un état de $\mathcal{E}_1$ par un état de $\mathcal{E}_2$. Pour être plus concret, plaçons-nous en dimension 2. Tout état de $\mathcal{E}_1$ s'écrit ainsi

$$|\psi_1\rangle = a_1|\alpha_1\rangle + a_2|\alpha_2\rangle.$$

De même tout état de $\mathcal{E}_2$ s'écrit

$$|\psi_2\rangle = b_1|\beta_1\rangle + b_2|\beta_2\rangle.$$

Un état quelconque de $\mathcal{E}$ s'exprime donc comme une superposition linéaire des produits tensoriels des états des bases de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$:

$$|\psi\rangle = c_{11}|\alpha_1\rangle\otimes|\beta_1\rangle + c_{12}|\alpha_1\rangle\otimes|\beta_2\rangle + c_{21}|\alpha_2\rangle\otimes|\beta_1\rangle + c_{22}|\alpha_2\rangle\otimes|\beta_2\rangle.$$

Si tous les états sont factorisables, alors on peut toujours trouver (a_1, a_2, b_1, b_2) tels que :

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = (a_1|\alpha_1\rangle + a_2|\alpha_2\rangle) \otimes (b_1|\beta_1\rangle + b_2|\beta_2\rangle).$$

Cela revient à résoudre :

$$\begin{aligned}
c_{11} &= a_1b_1 \\
c_{12} &= a_1b_2 \\
c_{21} &= a_2b_1 \\
c_{22} &= a_2b_2
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que ce n'est pas toujours possible de trouver des solutions.

Par exemples si

$$|\psi\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes |\beta_2\rangle + |\alpha_2\rangle \otimes |\beta_1\rangle$$

alors le système ci-dessus n'admet pas de solutions !

Ces états particuliers qui ne sont pas factorisables sont appelés "états intriqués" et jouent un rôle majeur en mécanique quantique et dans ses applications possibles en information quantique (cryptographie quantique, téléportation, ...).