
Thermoélasticité linéaire
 Correction travaux dirigés n°1
 Thermodynamique des milieux continus

A. Modèles élémentaires

1. L'énergie libre est par définition l'énergie stockée dans le ressort. Elle est restituable. Par conséquent, l'énergie libre des différents modèles rhéologiques élémentaires est :

$$\text{Ressort : } w = \frac{1}{2}E\epsilon^2. \quad \text{Amortisseur : } w(\epsilon) = 0. \quad \text{Patin : } w(\epsilon) = 0.$$

2. A partir de la loi d'état, la contrainte réversible est donnée par ($\sigma^{rev} = \frac{\partial w}{\partial \epsilon}$). Il s'agit de la variable duale de la déformation. Les contraintes réversibles des différents modèles rhéologiques élémentaires sont données pas :

$$\text{Ressort : } \sigma^{rev} = E\epsilon. \quad \text{Amortisseur : } \sigma^{rev} = 0. \quad \text{Patin : } \sigma^{rev} = 0.$$

3. Par définition, la contrainte irréversible est donnée par : $\sigma^{irr} = \sigma - \sigma^{rev}$ et la dissipation intrinsèque est donnée pour les modèles élémentaires par $\mathcal{D} = \sigma^{irr}\dot{\epsilon}$. Les contraintes irréversibles et la dissipation relatives à chaque modèle rhéologique élémentaires sont données pas :

$$\begin{aligned} \text{Ressort : } \quad & \sigma^{irr} = 0, \quad \mathcal{D} = 0. \\ \text{Amortisseur : } \quad & \sigma^{irr} = \mu\dot{\epsilon}, \quad \mathcal{D} = \mu\dot{\epsilon}^2 \geq 0. \\ \text{Patin : } \quad & \sigma^{irr} = \sigma_0, \quad \mathcal{D} = \sigma_0|\dot{\epsilon}| \geq 0. \end{aligned}$$

B. Modèles obtenus par assemblage de modèles élémentaires

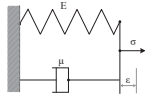


Figure 1 – *Modèle de Kelvin-Voigt*

- L'énergie libre associée au modèle est celle stockée dans le ressort. Elle est donnée par :

$$w = \frac{1}{2}E\epsilon^2$$

Dans ce cas, la seule déformation totale ϵ ne suffit pas à définir l'état du système puisqu'elle ne fixe pas l'extension du ressort. Il faut une variable supplémentaire α que nous prenons égale à la déformation de l'amortisseur (on la note ϵ^v pour déformation visqueuse).

- La déformation élastique est par construction du modèle : $\epsilon^e = \epsilon - \epsilon^v$.
- L'énergie libre est celle stockée dans le ressort. Elle est donnée par :

$$w = \frac{1}{2}E(\epsilon - \epsilon^v)^2$$

- Par conséquent, la contrainte réversible est donnée par : $\sigma^{rev} = E(\epsilon - \epsilon^v)$. Soit A la force thermodynamique associée à la variable α : $A = -\frac{\partial w}{\partial \alpha}$. Ici $\alpha = \epsilon^v$, d'où $A = E(\epsilon - \epsilon^v)$. On remarque que $A = \sigma^{rev}$; la force thermodynamique associée à la déformation viscoplastique est la contrainte elle-même.
- D'après le modèle rhéologique, $\sigma = \sigma^{rev}$. Par conséquent $\sigma^{irr} = 0$. La dissipation intrinsèque est donnée par $\mathcal{D} = \sigma^{irr}\dot{\epsilon} + A\dot{\alpha}$, d'où, en remarquant que $A = \sigma = \mu\dot{\alpha}$, on obtient $\mathcal{D} = \mu\dot{\alpha}^2$.

- La relation est obtenue en remarquant que $\dot{\sigma} = E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^v)$ et $\dot{\epsilon}^v = \frac{\sigma}{\mu}$, on en déduit

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu}$$

- Il suffit de résoudre l'équation différentielle de la question précédente avec comme second membre $\epsilon(t) = H(t)\epsilon_0$. Par définition de la fonction de Heaviside, on a

$$\begin{cases} t < 0 & \epsilon(t) = 0 \\ t \geq 0 & \epsilon(t) = \epsilon_0 \end{cases}$$

Par conséquent, $\dot{\epsilon}(t) = 0$ et $\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu} = 0 \Rightarrow \dot{\sigma}(t) + \frac{E}{\mu}\sigma(t) = 0$ On trouve

$$\sigma(t) = E\epsilon_0 e^{-\frac{E}{\mu}t}$$

B.3 Modèle élasto-plastique : Ce modèle consiste en l'assemblage en série d'un ressort de raideur E et d'un patin dont le seuil de glissement est noté σ_0 (cf. figure 4).

A nouveau, la seule déformation totale ϵ ne suffit pas à définir l'état du système et on adopte une variable supplémentaire α qui est la déformation du patin (on la note ϵ^p pour déformation plastique).

- $\epsilon^e = \epsilon - \epsilon^p$.

- En utilisant la loi d'état, la contrainte réversible est donnée par $\sigma^{rev} = \frac{\partial w}{\partial \epsilon} = E\epsilon$. Cette contrainte est appliquée au ressort de rigidité E .

- La contrainte irréversible est celle appliquée à l'amortisseur. Par définition du modèle rhéologique, elle est donnée par $\sigma^{irr} = \mu\dot{\epsilon}$.

- Dans la mesure où il n'y a pas de variable interne, la dissipation intrinsèque du modèle est

$$\mathcal{D} = \sigma^{irr}\dot{\epsilon} = \mu\dot{\epsilon}^2.$$

- La relation est obtenue en calculant la contrainte totale comme somme de la contrainte réversible et de la contrainte irréversible :

$$\sigma = E\epsilon + \mu\dot{\epsilon}$$

- Expérience de fluage. Il suffit de résoudre l'équation différentielle de la question précédente avec second membre $\sigma = \sigma_0 H(t)$. Par définition de la fonction de Heaviside : $\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sigma_0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

La résolution de l'équation différentielle sans second membre donne :

$$E\epsilon + \mu\dot{\epsilon} = 0, \text{ d'où } \epsilon(t) = A e^{-\frac{E}{\mu}t} + B, \text{ et } \dot{\epsilon}(t) = -A \frac{E}{\mu} e^{-\frac{E}{\mu}t}$$

En remplaçant dans l'équation du modèle, on obtient :

$$E(A e^{-\frac{E}{\mu}t} + B) + \mu(-A \frac{E}{\mu} e^{-\frac{E}{\mu}t}) = \sigma_0 \text{ d'où } EB = \sigma_0 \quad \text{soit} \quad B = \frac{\sigma_0}{E}$$

Enfin, la condition initiale en $t = 0$ donne :

$$\epsilon(0) = A e^0 + \frac{\sigma_0}{E} = 0 \Rightarrow A = -\frac{\sigma_0}{E}$$

d'où :

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\mu}t})$$

B.2 Modèle de Maxwell : ce modèle consiste en l'assemblage en série d'un ressort de raideur E et d'un amortisseur de viscosité μ (cf. figure 3).

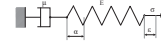


Figure 2 – *Modèle de Maxwell*



Figure 3 – *Modèle élastoplastique*

- $w = \frac{1}{2}E(\epsilon - \epsilon^p)^2$. Cette énergie est stockée dans le ressort.
- $\sigma^{rev} = E(\epsilon - \epsilon^p)$. Soit A la force thermodynamique associée à la variable α : $A = -\frac{\partial w}{\partial \alpha}$. Ici $\alpha = \epsilon^p$, d'où $A = E(\epsilon - \epsilon^p)$. On remarque que $A = \sigma^{rev}$; la force thermodynamique associée à la déformation plastique est la contrainte elle-même.
- D'après le modèle rhéologique, $\sigma = \sigma^{rev}$. Par conséquent $\sigma^{irr} = 0$. La dissipation intrinsèque est donnée par $\mathcal{D} = \sigma^{irr}\dot{\epsilon} + A\dot{\alpha}$, d'où, en remarquant que $A = \sigma$, on a $\mathcal{D} = \sigma|\dot{\epsilon}^p| = \sigma|\dot{\epsilon}^p|$.
- $\dot{\sigma} = E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p)$, on en déduit que la loi de comportement du modèle élastoplastique est donnée par :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\epsilon}^p$$

Exercice 2 : Modélisation du changement de phase solide-solide

- Liaisons internes existant entre les variables d'état

Les variables d'état sont liées par des liaisons internes évidentes :

$$(1-z)e + zf - \epsilon = 0, \quad (1)$$

$$z \geq 0, \quad (2)$$

$$1-z \geq 0. \quad (3)$$

Par conséquent, il faut tenir compte de ces liaisons dans l'écriture du potentiel thermodynamique.

- Potentiel thermodynamique (lagrangien)

Puisque le milieu possède deux phases, il est naturel d'écrire que l'énergie de déformation emmagasinée est constituée par l'énergie relative à chacune d'elle :

$$\mathcal{W}_{def} = (1-z)U(e) + zV(f) \quad (4)$$

Pour fixer les idées, on se place en petites perturbations et on admet que :

$$U(e) = \frac{1}{2}K_1 e^2, \quad V(f) = \frac{1}{2}K_2 f^2 + \ell, \quad \text{on pose } r = \frac{K_1}{K_2} > 1. \quad (5)$$

K_α ($\alpha = 1, 2$) étant les modules de rigidité respectifs de chacune des phases. ℓ est une constante positive, caractéristique du matériau représentant l'énergie de changement de phase.

Pour tenir compte des liaisons existant entre les variables d'état, on introduit les multiplicateurs λ , $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$ associés respectivement à la liaison bilatérale et aux deux liaisons unilatérales. La positivité des multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions unilatérales impose des restrictions que l'on interprétera physiquement.

Le lagrangien associé s'écrit :

$$\mathcal{L}(\epsilon, e, f, z, \lambda, \lambda_1, \lambda_2) = (1-z)U(e) + zV(f) - \lambda((1-z)e + zf - \epsilon) - \lambda_1(1-z) - \lambda_2 z.$$

3. Lois d'état

Les lois d'état écrites en terme du lagrangien s'écrivent :

$$\mathcal{L}_\sigma = \sigma \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_{\sigma e} = (1-z)[U'(e) - \lambda] = 0 \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_{zf} = z[V'(f) - \lambda] = 0 \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_z = V(f) - U(e) - \lambda(f - e) + U'(z) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad (9)$$

$$\mathcal{L}_{\lambda} = (1-z)e + zf - \epsilon = 0 \quad (10)$$

auxquelles s'ajoutent les liaisons et les relations associées :

$$\lambda_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1(1-z) = 0 \quad (11)$$

$$\lambda_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 z = 0 \quad (12)$$

L'interprétation physique de (6), (7) et (8) est immédiate ; du fait que l'on adopte un modèle en série, et d'après la figure 4 de l'énoncé, on obtient :

$$\text{Si } z \neq 1 \quad \text{et} \quad z \neq 0 \implies \sigma = U'(e) = V'(f)$$

Ceci montre que le multiplicateur λ est la contrainte σ .

La loi de comportement s'obtient par la positivité des multiplicateurs de la manière suivante :

- **Si** $z = 0$.

La résolution du système formé, par les équations (6)-(12), donne dans ce cas :

$$\lambda = \sigma, \quad \lambda = K_1 \epsilon, \quad e = \epsilon, \quad \lambda_1 = 0, \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} K_2 f^2 - \frac{1}{2} K_1 \epsilon^2 + \ell - K_1 \epsilon(f - \epsilon). \quad (13)$$

La valeur de f est arbitraire : dans les équations f est toujours multipliée par z et le fait que z soit nulle rend cette quantité indéterminée. Ceci est en accord logique avec la physique du phénomène. En effet, il est tout à fait normal de ne pas avoir

d'information sur la déformation locale de la phase-produit ; par hypothèse, cette dernière n'existe pas ($z = 0$).

D'après la méthode de Lagrange, les multiplicateurs doivent être positifs. C'est pourquoi le signe de λ_2 doit être discuté : λ_2 dépend de la valeur arbitraire f . Il suffit donc que son minimum par rapport à f soit positif pour que λ_2 soit positif, quelle que soit f . Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \lambda_{2,f} &= K_2 f - K_1 \epsilon, \\ \text{d'où} \\ \lambda_{2,f} = 0 &\implies f = \frac{K_1}{K_2} \epsilon = r \epsilon \\ \text{et} \\ \lambda_{2,ff} &= K_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, le minimum de λ_2 est :

$$\begin{aligned} \lambda_2^* &= \frac{1}{2} K_2 r^2 \epsilon^2 - \frac{1}{2} K_1 \epsilon^2 + \ell - K_1 \epsilon^2 (r - 1) \\ &= \frac{1}{2} K_1 \epsilon^2 + \ell - \frac{1}{2} K_1 r \epsilon^2 \end{aligned}$$

La condition $\lambda_2 \geq 0$ exige alors que l'état $z = 0$ ne soit physiquement admissible que si :

$$\epsilon^2 \leq \frac{2\ell}{K_1(r-1)} = E^2$$

- **Si** $z = 1$.

Les calculs sont similaires à ceux du cas précédent :

$$\lambda = \sigma, \quad \lambda = K_2 \epsilon, \quad f = \epsilon, \quad \lambda_2 = 0, \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} K_1 e^2 - \frac{1}{2} K_2 \epsilon^2 - \ell + K_2 \epsilon(e - \epsilon); \quad (14)$$

Ici aussi, le signe de λ_1 sera discuté : λ_1 dépend de la valeur arbitraire e . Il suffit alors que son minimum par rapport à e soit positif pour que λ_1 soit toujours positif. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,e} &= K_1 e - K_1 \epsilon, \\ \text{d'où} \\ \lambda_{1,e} = 0 &\implies e = \frac{K_2}{K_1} \epsilon = \frac{1}{r} \epsilon \\ \text{et} \\ \lambda_{1,ee} &= K_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, λ_1 atteint son minimum pour la valeur :

$$\begin{aligned} \lambda_1^* &= -\frac{1}{2} \frac{K_1}{r^2} \epsilon^2 + \frac{1}{2} K_2 \epsilon^2 - \ell + K_2 \epsilon^2 (1 - \frac{1}{r}) \\ &= \frac{1}{2} K_2 \epsilon^2 - \ell - \frac{1}{2} \frac{K_2}{r} \epsilon^2 \end{aligned}$$

La condition $\lambda_1 \geq 0$ exige que l'état $z = 1$ ne soit physiquement admissible que si :

$$\epsilon^2 \geq \frac{2\ell r}{K_2(r-1)} = F^2$$

- **Si** $0 < z < 1$.

Nous aurons, pour ce troisième cas, des calculs encore similaires à ceux des deux autres. On obtient :

$$\lambda = \sigma, \quad \lambda = K_1 e = K_2 f, \quad |e| = E, \quad |f| = F, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \text{et} \quad z = \frac{|e| - E}{F - E}. \quad (15)$$

$$E \leq |e| \leq F$$

Finalement, la loi de comportement s'écrit :

$$|e| \leq E \implies \begin{cases} z = 0 \\ \sigma = K_1 \epsilon \end{cases} \quad (16)$$

$$E \leq |e| \leq F \implies \begin{cases} z = \frac{|e| - E}{F - E} \\ \sigma = \sqrt{\frac{2\ell K_1}{(r-1)}} \end{cases} \quad (17)$$

$$|e| \geq F \implies \begin{cases} z = 1 \\ \sigma = K_2 \epsilon \end{cases} \quad (18)$$

Ce qui conduit à la courbe contrainte-déformation de la figure (1) : nous ne représentons ici que le comportement dans le quadrant ($\sigma \geq 0, \epsilon \geq 0$).

La correspondance $\sigma - \epsilon$ peut être décrite par une énergie convexe $\mathcal{W}(\epsilon)$ qui dérive de $U(\epsilon)$ et $V(\epsilon)$ par une opération de convexification (cf. figure (??)). La condition de positivité des multiplicateurs associés aux liaisons unilatérales peut s'interpréter géométriquement de la façon suivante :

par exemple pour $z = 0$:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -U(e) + V(f) - \lambda(f - e) \\ &= -U(e) + V(f) - U'(e)(f - e) \\ \text{et} \quad \lambda_2 \geq 0 &\implies V(f) \geq U(e) + U'(e)(f - e) \end{aligned} \quad (19)$$

L'équation (19) montre que la courbe V doit se placer au-dessus de la droite \mathcal{D}_ϵ^f d'équation : $U(e) + U'(e)(f - e)$, ce qui exclut une portion de la courbe U . En effet, pour ϵ donné, soit ϵ_0 , on a :

$$\mathcal{D}_{\epsilon_0}^f : y = U(\epsilon_0) + U'(\epsilon_0)(f - \epsilon_0)$$

Il est aisé de remarquer que cette droite a le même coefficient directeur que la tangente à la courbe U au point ϵ_0 , en l'occurrence $U'(\epsilon_0)$. La figure (1) montre que tant

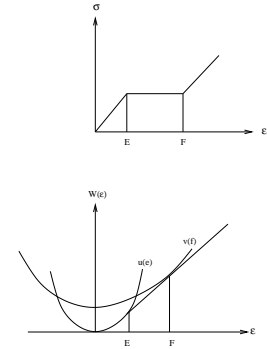


Figure 4 – Courbe contrainte-déformation et convexification de l'énergie

que ϵ_0 est inférieure à E , cette tangente ainsi que la droite $\mathcal{D}_{\epsilon_0}^f$ restent au-dessous de la courbe V . Par contre, dès que ϵ_0 dépasse E , ces deux dernières coupent la courbe V et une portion de celle-ci vient se placer sous $\mathcal{D}_{\epsilon_0}^f$. Ceci contredit la condition de positivité de λ_2 (19). Donc, selon cette condition, seules les ϵ inférieures à E sont admissibles.

Le même raisonnement peut être appliqué au cas $z = 1$, et la condition de positivité de λ_1 exige que la courbe $U(e)$ soit placée au-dessus de la droite d'équation $V(e) + V'(e)(e - \epsilon)$, ce qui exclut une branche de la courbe V .