Série 5

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité sousjacent. Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle (complétée).

1. **Espérance conditionelle**

   Correction. (DISCUSSION CONCERNANT LA SERIE 3)

   Commençons par un lemme qui met en relation l'intégrale de Wiener et l'intégrale d'Itô.

   Lemme 0.1 *Soit $T > 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $f|_{[0,T]} \in L^2([0,T])$ et $f|_{[0,T]^c} \equiv 0$. Alors pour tout $t \geq 0$*

$$\text{Wiener}-\int_0^\infty f 1_{[0,t]} dW = \text{Ito}-\int_0^t f dW. \tag{0.1}$$

Preuve.

- Si $f = 1_{]a,b]}$ alors (0.1) est vraie par définition.
- L'égalité est vraie si f est en escalier, par linéarité.
- Cas général. Soit (f_n) une suite de fonctions en escalier telle que

  $$\|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \to 0.$$

  On a donc

  $$\text{Wiener}-\int_0^\infty f_n 1_{[0,t]} dW = \text{Ito}-\int_0^t f_n dW. \tag{0.2}$$

  Le membre de gauche de (0.2) converge vers Wiener$-\int_0^\infty f 1_{[0,T]} dW$ dans $L^2(\Omega)$ par définition.

  De plus

  $$\begin{aligned} E\left(\text{Ito}-\int_0^T (f_n(s) - f(s))dW_s\right)^2 &= E\left(\int_0^T (f_n(s) - f(s))^2 ds\right) \\ &= \int_0^T (f_n(s) - f(s))^2 ds, \end{aligned}$$

  et le membre de droite de de (0.2) converge également vers Ito$-\int_0^t f dW$ (isométrie).

Remarque 0.2 *En particulier, si $g \in L^2([0,T])$, la v.a. $\int_0^T g dW$ est gaussienne.*

(a) Calculer $E(\int_0^1 e^{-s}dW_s|W_1)$.

Correction. Le vecteur $(\int_0^T e^{-s}dW_s, W_1)$ est gaussien par la remarque précédente. D'où $E(\int_0^1 e^{-s}dW_s|W_1)$ coincide avec la régression linéaire de $\int_0^1 e^{-s}dW_s$ sur W_1. Celle-ci donne bW_1, où

$$\begin{aligned} b &= \frac{\mathrm{Cov}(\int_0^1 e^{-s}dW_s, W_1)}{\mathrm{Var}(W_1)} \\ &= E\left(\int_0^1 e^{-s}dW_s \cdot W_1\right) \\ &= \int_0^1 e^{-s}ds = 1 - e^{-1}. \end{aligned}$$

(b) Calculer $E\{(\int_0^2 e^{-s} dW_s)^3 | \mathcal{F}_1\}$.

Correction. Nous avons par le "freezing lemma"

$$\begin{aligned}
E\left(\left(\int_0^2 e^{-s} dW_s\right)^3 | \mathcal{F}_1\right). &= E\left(\left(\int_0^1 e^{-s} dW_s + \int_1^2 e^{-s} dW_s\right)^3 | \mathcal{F}_1\right) \\
&= \Phi\left(\int_0^1 e^{-s} dW_s\right),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= E\left(x + \int_1^2 e^{-s} dW_s\right)^3 \\
&= x^3 + 3x^2 E\left(\int_1^2 e^{-s} dW_s\right) \\
&+ 3xE\left(\int_1^2 e^{-s} dW_s\right)^2 \\
&+ E\left(\int_1^2 e^{-s} dW_s\right)^3.
\end{aligned}$$

Comme $\int_1^2 e^{-s} dW_s$ est une v.a. gaussienne centrée (intégrale de Wiener) on a

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= x^3 + 3x \int_1^2 e^{-2s} ds \\
&= x^3 + 3x \frac{e^{-2} - e^{-4}}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement

$$E\left(\left(\int_0^2 e^{-s} dW_s\right)^3 | \mathcal{F}_1\right) = \left(\int_0^1 e^{-s} dW_s\right)^3 + \frac{3}{2}(e^{-2} - e^{-4}) \int_0^1 e^{-s} dW_s.$$

2. **Représentation probabiliste de la solution d'une EDP de type elliptique**

   Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)-$mouvement brownien standard n-dimensionnel, $B = (B^1, \ldots, B^n)$. Notons $D(0,1)$ l'hypercube unité dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire

$$D(0,1) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq 1, i = 1, \ldots, n\}$$

   et $\partial D(0,1)$ est sa frontière. Soit $f : \partial D(0,1) \to \mathbb{R}$ continue.

   Considérons une solution $u \in C^2(D[0,1])$, de l'équation

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in int(D(0,1)) \\ u(x) = f(x), & x \in \partial D(0,1). \end{cases} \tag{0.3}$$

   Soit $\tilde{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prolongeant u de sorte que u et ses dérivées soient bornées. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Nous posons

$$M_t = \tilde{u}(B_t + x) - \tilde{u}(x) - \int_0^t \frac{1}{2}\Delta\tilde{u}(B_s + x)\, ds.$$

(a) Vérifier que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

Correction. Par la formule d'Itô nous avons

$$M_t = \int_0^t \nabla\tilde{u}(x+B_s)\cdot dB_s = \left(\sum_{i=1}^n \int_0^t \partial_i \tilde{u}(x+B_s)dB_s^i\right).$$

Comme

$$E\left(\int_0^T |\nabla\tilde{u}^2(x+B_s)|^2 ds\right) \leq T\|\nabla\tilde{u}\|_\infty^2,$$

M est même une martingale de carré integrable.

(b) Pour x appartenant à de $D(0,1)$, posons

$$T^x(\omega) = \begin{cases} \inf\{s | B_s(\omega) + x \in \partial D(0,1)\} & \text{si } \{\ \} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $T > 0$, posons $\tau^x = T^x \wedge T$. Expliquer pourquoi τ^x est un temps d'arrêt.

Correction. Nous avons

$$T^x = T_1^x \wedge \ldots \wedge T_n^x,$$

où

$$T_i^x = \inf\{t \in [0,T] |\ |B^i + x_i| \geq 1\},\ 1 \leq i \leq n.$$

Par le Cours T_i^x est un temps d'arrêt (temps d'atteinte d'une barrière). En plus le minimum de temps d'arrêts est un temps d'arrêt. Ceci implique que T^x et $\tau^x = T^x \wedge T$ sont des temps d'arrêt.

(c) En appliquant le théorème d'arrêt de Doob et le théorème de la convergence dominée, déduire que

$$u(x) = E(f(B_{T^x} + x)), \qquad x \in D(0,1).$$

Correction. On se sert de (a) et du fait que $\Delta u = 0$ à l'intérieur de $D(0,1)$. Par le théorème d'arrêt de Doob (τ^x étant borné) et la remarque qui suit on obtient

$$\begin{aligned} u(x) &= E(\tilde{u}(B_{\tau^x} + x)) \\ &= E(1_{\{T^x > T\}} \tilde{u}(B_{\tau^x} + x)) + E(1_{\{T^x \le T\}} \tilde{u}(B_{\tau^x} + x)) \\ &= E(1_{\{T^x > T\}} \tilde{u}(B_T + x)) + E(1_{\{T^x \le T\}} \tilde{f}(B_{T^x} + x)) \\ &:= I_1(T) + I_2(T). \end{aligned}$$

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, nous avons $T_i^x = T_i^1 \wedge T_i^{-1}$ où pour $\ell \in \{-1, 1\}$,

$$T_i^\ell = \inf\{x_i + B_s^i = \ell\} = \inf\{B_s^i = \ell - x_i\}.$$

D'après le Cours

$$T_i^\ell < \infty \text{ .a.s., } \forall \ell \in \{-1, 1\}, i \in \{1, \ldots, n\}.$$

D'où $T^x < \infty$ p.s.

Par conséquent

$$|I_1(T)| \leq \|\tilde{u}\|_\infty P\{T^x > T\} \to_{T \to +\infty} 0.$$

Or, si $T \to +\infty$, $T^x < \infty$ p.s. implique

$$1_{\{T^x \leq T\}} \to 1, \text{ p.s.}$$

et p.s.

$$1_{\{T^x \leq T\}} f(B_{T^x} + x) \to f(B_{T^x} + x),$$

lorsque $T \to \infty$. Par le théorème de la convergence dominée

$$I_2(T) \to_{T \to \infty} E(f(B_{T^x} + x)),$$

et le résultat suit.

3. Posons pour $t \in [0,1]$, $V_t = \displaystyle\int_0^t \frac{W_1 - W_u}{1-u}\, du$,

$$B_t = W_t - V_t,\ t \in [0,1], \quad \mathcal{G}_t = \sigma(W_s, s \le t) \vee \sigma(W_1), \quad t \in [0,1],$$

complétées par les ensembles négligeables.

a) Montrer que le processus B est bien défini.

Correction. B est bien défini si l'on prouve

$$\int_0^t \left| \frac{W_1 - W_u}{1-u} \right| du < \infty \text{ p.s.} \tag{0.4}$$

En prenant l'espérance de l'expression précédente on obtient

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^1 \frac{|W_1 - W_u|}{1-u}\, du \right) &= \int_0^1 E\left(\frac{|W_1 - W_u|}{1-u} \right) du \\ &= \int_0^1 \frac{E(|G|\sqrt{1-u}|)}{1-u}\, du, \end{aligned}$$

où $G \sim N(0,1)$. Comme $E(|G|) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, cela donne

$$E(|G|) \int_0^1 (1-u)^{-1/2} = 2E(|G|) = \sqrt{2\pi} < \infty.$$

b) Calculer $E(W_t|W_1)$ et $E(W_1|W_t)$, $t \in [0,1]$.

Correction.

- $$E(W_1|W_t) = E\left(E(W_1|\mathcal{F}_t)|W_t\right) = E\left(W_t|W_t\right) = W_t,$$

  car W est une martingale.

- $E(W_t|W_1) = tW_1$, car $t = \frac{\mathrm{Cov}(W_t, W_1)}{\mathrm{Var}(W_1)}$, c'à dire la régression linéaire de W_t sur W_1 étant le vecteur (W_t, W_1) gaussien.

c) Vérifier que (W, B) est un processus gaussien continu (à valeurs dans $\mathbb{R}^2$).

Correction. Soient $0 \leq t_1 < \ldots < t_n = 1$ et $0 \leq s_1 < \ldots < s_m = 1$. Soient $0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$. Il suffit de montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_{t_i} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j V_{s_j}, \tag{0.5}$$

est une v.a. gaussienne. Or

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \beta_j V_{s_j} &= \int_0^t \left\{ \sum_{j=1}^{m} \beta_j \frac{W_1 - W_u}{1-u} 1_{[0,s_j]}(u) \right\} du \\
&= \int_0^1 g(u) \frac{W_1 - W_u}{1-u} du,
\end{aligned}$$

où

$$g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j 1_{[0,s_j]},$$

est une fonction en escalier.

Or pour $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^{1-\varepsilon} g(u) \frac{W_1 - W_u}{1-u} du, \tag{0.6}$$

est une intégrale de Riemann, elle est la limite (p.s.) de combinaison linéaires de W_{r_k}. Comme W est un processus gaussien, (0.5) est une v.a. gaussienne (centrée). En passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$, la même propriété reste valable.

d) Montrer que $B_t - B_s$ est indépendant de W_s, $0 \leq s < t \leq 1$ et de W_1.

Correction. Compte tenu du point précédent, $(B_t - B_s, W_s)$ et $(B_t - B_s, W_1)$ sont des vecteurs gaussiens. Par conséquent il suffit de montrer que la covariance des composantes est nulle.

- $$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(B_t - B_s, W_s) &= E((B_t - B_s)W_s) = E((W_t - W_s)W_s) \\ &- \int_s^t \underbrace{E(W_s(W_1 - W_u))}_{=0} \frac{du}{1-u} \\ &= 0.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(B_t - B_s, W_1) &= E((W_t - W_s)W_1) - E((V_t - V_s)W_1) \\ &= t - s - \int_s^t \frac{E(W_1(W_1 - W_u))}{1-u} du = \\ &= t - s - \int_s^t \frac{1-u}{1-u} du = \\ &= (t-s) - (t-s) = 0.\end{aligned}$$

En fait il est possible de voir aussi que $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{G}_s$ (pas demandé).

e) Calculer la loi de $B_t - B_s, 0 \leq s < t \leq 1$ et déduire que $(B_t)_{t\in[0,1]}$ est un $(\mathcal{G}_t)$-mouvement brownien.

Corrections. Comme B est un processus gaussien continu, la loi (gaussienne) de

$$B_t - B_s,\ 0 < s < t < 1,$$

est déterminée par son espérance et sa variance.

- $$\begin{aligned} E(B_t - B_s) &= E(W_t - W_s) \\ &- \int_s^t E\left(\frac{W_1 - W_u}{1-u}\right) du = 0. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \mathrm{Var}(B_t - B_s) &= E(B_t - B_s)^2 \\ &= E(W_t - W_s)^2 + E(V_t - V_s)^2 \\ &- 2E((W_t - W_s)(V_t - V_s)). \end{aligned}$$

Or $E(W_t - W_s)^2 = t - s$.

$$\begin{aligned} E(V_t - V_s)^2 &= E\left(\int_s^t \frac{W_1 - W_u}{1-u} du\right)^2 \\ &= 2\int_s^t \frac{du_1}{1-u_1} \int_{u_1}^t \frac{du_2}{1-u_2} \underbrace{E((W_1 - W_{u_1})(W_1 - W_{u_2}))}_{1-u_2 \text{ si } u_2 \geq u_1} \\ &= 2\int_s^t \frac{t-u_1}{1-u_1} du_1 \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} E((W_t - W_s)(V_t - V_s)) &= \int_s^t \frac{(E(W_t - W_s)(W_1 - W_u))}{1-u} du \\ &= \int_s^t \frac{t-u}{1-u} du. \end{aligned}$$

D'où $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$.

Par conséquent B est un processus continu tel que

- $B_0 = 0$ p.s.
- $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$.
- $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{G}_s$.

Finalement B est un $(\mathcal{G}_t)$-mouvement brownien standard.

f) Vérifier que $(W_t)_{t\geq 0}$ est un $(\mathcal{G}_t)$-processus d'Itô.

Correction. On peut écrire

$$W_t = B_t + \int_0^t K_u du, \ 0 \leq t < 1,$$

où

$$K_u = \frac{W_1 - W_u}{1-u}, \ 0 < u < 1.$$

Or nous avons déjà prouvé

$$\int_0^1 |K_u| du < \infty \text{ p.s}$$

en (0.4).

g) Supposons que $\tau(\omega) = \inf\{s \leq 1 | B_s(\omega) = 2\}$ si $\{\}$ est non vide et 1 sinon. Déterminer $E(B_\tau)$.

Corrections. Par la Remarque qui suit le Théorème d'arrêt de Doob on a

$$E(B_\tau) = E(B_0) = 0.$$

Série 5. PRB203. Introduction au calcul stochastique et applications FR 2020-21 **fin**.