Rappels (non exhaustifs) du cours pour le TD8

I - Oscillateur harmonique 1D

Définition : potentiel de la forme $\hat{V}(\hat{x}) = \frac{1}{2} k \hat{x}^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$

Le Hamiltonien s'écrit $\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + m\omega^2 \frac{\hat{x}^2}{2}$

On définit 3 nouveaux opérateurs :

Pas hermitiens
- Opérateur annihilation $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\,\hat{p}_x$
- Opérateur création $\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\,\hat{p}_x$

Hermitien
- Opérateur nombre : $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$

On a $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$

et $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$ (découle de $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$)

On déduit de ces deux relations les vecteurs propres communs à $\hat{N}$ et $\hat{H}$.

On les note $|n\rangle$ avec $n \in \mathbb{N}$, et on a

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle$$

$$\hat{a}^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

En particulier $\hat{a}|0\rangle = 0$ (vecteur nul)

Note : l'énergie E_n est non-dégénérée.