**PA102 - Séance 4/4 (Gaz parfait de fermions)**
**Résumé de cours**

jean-baptiste.moree@cea.fr

## Fermions en nombre déterminé

### Distribution à l'équilibre (Fermi-Dirac)

$$n_i^0 = \frac{g_i}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1}$$

où $\mu$ est le potentiel chimique (cf. résumé de cours n.1), reliable au multiplicateur de Lagrange associé à la conservation du nombre de particules. On note

$$\chi = \beta\mu$$

### Fonction de Fermi, énergie et température de Fermi

La fonction de Fermi est définie par

$$\bar{n^0}(\epsilon_i) = \frac{n_i^0}{g_i} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \quad \in [0, 1]$$

À $T = 0$, on a

$$\bar{n^0}(\epsilon_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } \epsilon_i < \mu \\ 0 \text{ si } \epsilon_i > \mu \end{cases}$$

et tous les niveaux d'énergie inférieure à $\mu$ sont occupés par 1 seule particule (au facteur de dégénérescence près), tous les autres sont inoccupés.

L'énergie de Fermi $\epsilon_f$ est la valeur du potentiel chimique $\mu$ à $T = 0$. On définit la température de Fermi comme

$$\theta_f = \frac{\epsilon_f}{k}$$

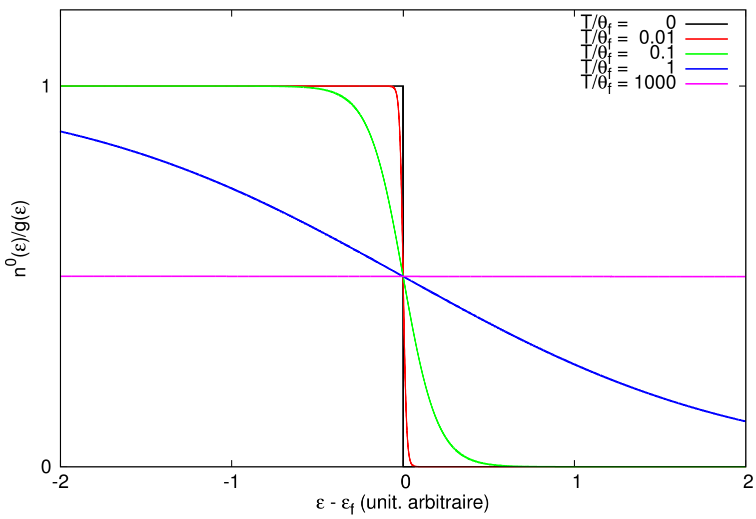


Figure 1 – Fonction de Fermi (dans la limite continue) pour différentes températures

2 possibilités

— $T \ll \theta_f$ (la densité est haute) : les effets quantiques sont importants, le principe d'exclusion de Pauli a un effet notable à l'échelle macroscopique. Le gaz est dit dégénéré. Contrairement aux bosons (qui se regroupent tous dans le même état en formant un condensat de Bose-Einstein), les $N$ fermions s'empilent sur les $N$ états de plus basse énergie. Cela crée une pression de dégénérescence quantique, qui empêche la densité d'augmenter encore plus.

— $T \gg \theta_f$ (la densité est basse) : les effets quantiques sont négligeables, le volume disponible permet aux particules de se répartir sans trop de contraintes. On se retrouve dans la limite classique : le système devient un gaz parfait dans la statistique de Maxwell-Boltzmann.

**Densité d'états et énergie de Fermi (limite continue, gaz parfait de fermions non relativistes)**
Pour les fermions non relativistes, on a

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m}$$

On note $g_s$ la dégénérescence interne. La densité d'états s'obtient par un calcul similaire à celui pour le gaz parfait monoatomique. On obtient le nombre d'états d'énergie $\in [\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$

$$\boxed{g(\epsilon)d\epsilon = g_s \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{\epsilon}d\epsilon} \tag{1}$$

On en déduit l'énergie de Fermi, en remarquant qu'à $T = 0$

$$N = \int_0^{+\infty} n^0(\epsilon)d\epsilon = \int_0^{\epsilon_f} g(\epsilon)d\epsilon \qquad \boxed{\epsilon_f = \left(\frac{3N}{g_s 4\pi V}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}}$$

*Remarque* Pour un type de fermions donné, $\epsilon_f$ ne dépend que de la densité $n = \frac{N}{V}$

**Grandeurs thermodynamiques (limite continue)**
L'entropie $S$ (et donc beaucoup d'autres grandeurs thermodynamiques), hors limite continue, s'expriment en fonction de la somme

$$\sum_i g_i \ln[1 + e^{\chi - \beta\epsilon_i}]$$

En général, il n'est pas possible de calculer cette somme. Il faut donc passer à la limite continue.
En utilisant l'expression 1 de $g(\epsilon)d\epsilon$, on met en évidence une fonction permettant d'exprimer les grandeurs thermodynamiques

$$\boxed{h(\chi) = g_s \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{x}\ \ln[1 + e^{\chi - x}]dx} \quad h'(\chi) = \frac{N}{Z_{\text{GPCM}}} = \alpha$$

On obtient

$$\boxed{U = \frac{3}{2}NkT\left[\frac{h(\chi)}{h'(\chi)}\right] \qquad S = Nk\left[\frac{5}{2}\frac{h(\chi)}{h'(\chi)} - \chi\right]}$$

$$\boxed{C_V = \frac{3}{2}Nk\left[\frac{h(\chi)}{h'(\chi)} - \frac{3}{2}\frac{h'(\chi)}{h''(\chi)}\right] \qquad F = NkT\left[\chi - \frac{h(\chi)}{h'(\chi)}\right] \qquad P = \frac{NkT}{V}\left[\frac{h(\chi)}{h'(\chi)}\right]}$$

*Remarque* Les expressions des grandeurs thermodynamiques ci-dessus sont les mêmes que pour le gaz parfait de bosons en nombre déterminé dans la limite continue, en remplaçant la fonction $f$ par la fonction $h$.

**Grandeurs thermodynamiques à $T = 0$** On peut calculer explicitement les grandeurs thermodynamiques à $T = 0$.

$$\boxed{U_0 = \frac{3}{5}N\epsilon_f \qquad S_0 = 0}$$

$$\boxed{C_{V0} = 0 \qquad F_0 = \frac{3}{5}N\epsilon_f \qquad P_0 = \frac{2}{5}\frac{N}{V}\epsilon_f}$$

**Grandeurs thermodynamiques à $T$ basse ($T \ll \theta_f$)**
Pour $T \ll \theta_f$, on pose $x_f = \frac{T}{\theta_f}$. Lorsque $T \to 0$, on a $\chi = \beta\mu \to +\infty$. On fait donc tendre $\chi$ vers $+\infty$ dans $h, h', h''$. On y fait un développement limité en $\chi^{-1}$, on trouve

$$\boxed{U = U_0\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}x_f^2 + o(x_f^2)\right] \qquad S = Nk\frac{\pi^2}{2}\left[x_f + o(x_f)\right]}$$

$$\boxed{C_V = Nk\frac{\pi^2}{2}\left[x_f + o(x_f)\right] \qquad F = F_0\left[1 - \frac{5\pi^2}{12}x_f^2 + o(x_f^2)\right] \qquad P = P_0\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}x_f^2 + o(x_f^2)\right]}$$