

ENSTA

ENSTA

ENSTA

ES101

Traitemen^t Numériqu^e du Signal

version 4.1

*Michel Terré
terre@cnam.fr
Décembre 2004*

Table des Matières

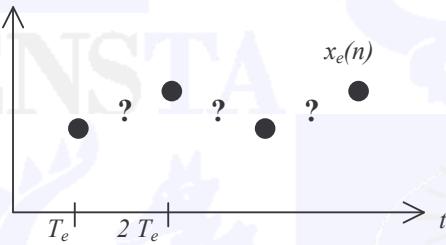
1. ECHANTILLONNAGE	4
1.1 LA PERIODISATION DU SPECTRE	4
1.2 LE THEOREME DE RECONSTRUCTION	10
2. QUANTIFICATION.....	13
3. LES TRANSFORMEES.....	14
3.1 TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE.....	14
3.1.1 Définition	14
3.1.2 Egalité de Parseval	15
3.1.3 Interprétation au sens des moindres carrés	15
3.2 TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE (FFT).....	16
3.3 TRANSFORMEE EN Z.....	20
4. FILTRAGE NUMERIQUE	21
4.1 LES SYSTEMES LINEAIRES DISCRETS INVARIANTS DANS LE TEMPS	21
4.1.1 Définition	21
4.1.2 Conditions de stabilité.....	22
4.2 SYSTEMES LINEAIRES INVARIANTS DANS LE TEMPS REGIS PAR UNE EQUATION AUX DIFFERENCES	22
4.3 FILTRES A REPONSE IMPULSIONNELLE FINIE (RIF)	24
4.3.1 Propriété de phase linéaire	26
4.3.2 Synthèse des filtres à réponse impulsionnelle finie	28
4.3.3 Relations entre le nombre de coefficients et le gabarit	34
4.4 FILTRES A REPONSE IMPULSIONNELLE INFINIE (RII).....	34
4.4.1 Cellule purement récursive	34
4.4.2 Cellule du deuxième ordre	35
4.4.3 Cellule générale du second ordre	36
4.4.4 Synthèse des filtres à réponse impulsionnelle infinie	37
4.5 RELATIONS ENTRE LE NOMBRE DE COEFFICIENTS ET LE GABARIT	39
5. REMARQUE.....	39
6. APPLICATIONS DU FILTRAGE NUMERIQUE.....	42
6.1 DECIMATION	42
6.2 INTERPOLATION	42
6.3 FILTRES DE NYQUIST	44

6.3.1	<i>Filtre en cosinus surélevé.....</i>	45
7.	INTRODUCTION AUX SIGNAUX ALEATOIRES	46
8.	ANALYSE SPECTRALE.....	49
8.1	PROBLEMATIQUE DE L'ANALYSE SPECTRALE	49
8.2	ESTIMATION SPECTRALE NON PARAMETRIQUE	49
8.2.1	<i>Périodogramme, Corrélogramme</i>	49
8.2.2	<i>Méthode du minimum de variance: méthode de Capon.....</i>	54
8.3	ESTIMATION SPECTRALE PAR DECOMPOSITION HARMONIQUE	55
8.3.1	<i>Méthode de Pisarenko:</i>	55
8.3.2	<i>Méthode de Prony:.....</i>	57
8.4	ESTIMATION SPECTRALE PARAMETRIQUE.....	59
8.4.1	<i>Modélisation AR.....</i>	61
8.4.2	<i>Modélisation MA</i>	67
8.4.3	<i>Modélisation ARMA</i>	69
8.5	CONCLUSION.....	70
9.	BIBLIOGRAPHIE.....	71
10.	ANNEXE DERIVATION FORME BILINEAIRE	72

1. Echantillonnage

Si on note $x_a(t)$ les valeurs prises au cours du temps t par un signal analogique, l'échantillonnage de ce dernier au rythme d'une période d'échantillonnage T_e , revient à ne disposer, finalement, des valeurs de ce signal, qu'aux instants multiples de T_e . Le signal numérique se note alors $x_e(nT_e)$.

La première question qui se pose naturellement est de savoir si on n'a pas perdu de l'information en ne disposant plus des valeurs du signal entre deux instants d'échantillonnage.



Une autre façon de formuler cette question serait, est-il possible de reconstruire $x_a(t)$ à partir des échantillons $x_e(n)$? C'est là l'objet du théorème de reconstruction. Très intuitivement on peut se dire que si on était sûr que le signal "varie très lentement", alors entre deux instants d'échantillonnage, il ne pourrait pas faire grand chose d'autre que d'aller "tranquillelement" d'un point à un autre. Après formalisation on arrivera à écrire cette "variation lente" du signal par une contrainte sur son spectre, ce qui va conduire au théorème de l'échantillonnage aussi appelé théorème de Shannon.

1.1 La périodisation du spectre

La formalisation de l'opération d'échantillonnage est malheureusement assez délicate, elle s'effectue de manière simple et concise par l'intermédiaire de la théorie des distributions. En effet, par définition, la distribution de masses unitaires aux points de l'axe réel multiples entiers de la période T_e , associe à la fonction $x_a(t)$ l'ensemble de ses valeurs $x_e(n)=x_a(nT_e)$ où n est un entier. Cette distribution que l'on notera $W_{T_e}(t)$ s'écrit :

$$W_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \quad (1.)$$

Sa transformée de Fourier $W_{T_e}(f)$ s'écrit :

$$W_{T_e}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f nT_e} \quad (2.)$$

On peut le démontrer en considérant le développement en série de Fourier de la fonction $i_p(t)$ constituée par la suite d'impulsions séparées par la durée T_e , de largeur τ et d'amplitude $\frac{I}{\tau}$, centrée sur l'origine des temps. Puis en

faisant tendre cette durée τ vers 0. La propriété la plus importante pour l'échantillonnage est alors la suivante : on démontre que la Transformée de Fourier de la distribution temporelle comportant une masse unitaire en chaque point dont l'abscisse est un multiple de T_e , est une distribution fréquentielle, comportant la masse $\frac{I}{T_e}$ aux points dont

l'abscisse est un multiple entier de $\frac{I}{T_e}$ (cf réf cours de Mathématiques sur les distributions). Ce qui s'écrit plus simplement :

$$W_{T_e}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f n T_e} = \frac{I}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_e}\right) \quad (3.)$$

Dès lors on constate que l'échantillonnage peut être formalisé en introduisant un signal "analogique" fictif $x_e(t)$ qui est nul presque partout et égal à $x_a(t)$ pour $t=nT_e$. Ce signal se formalise de la manière suivante :

$$x_e(t) = x_a(t) \cdot W_{T_e}(t) \quad (4.)$$

ou encore :

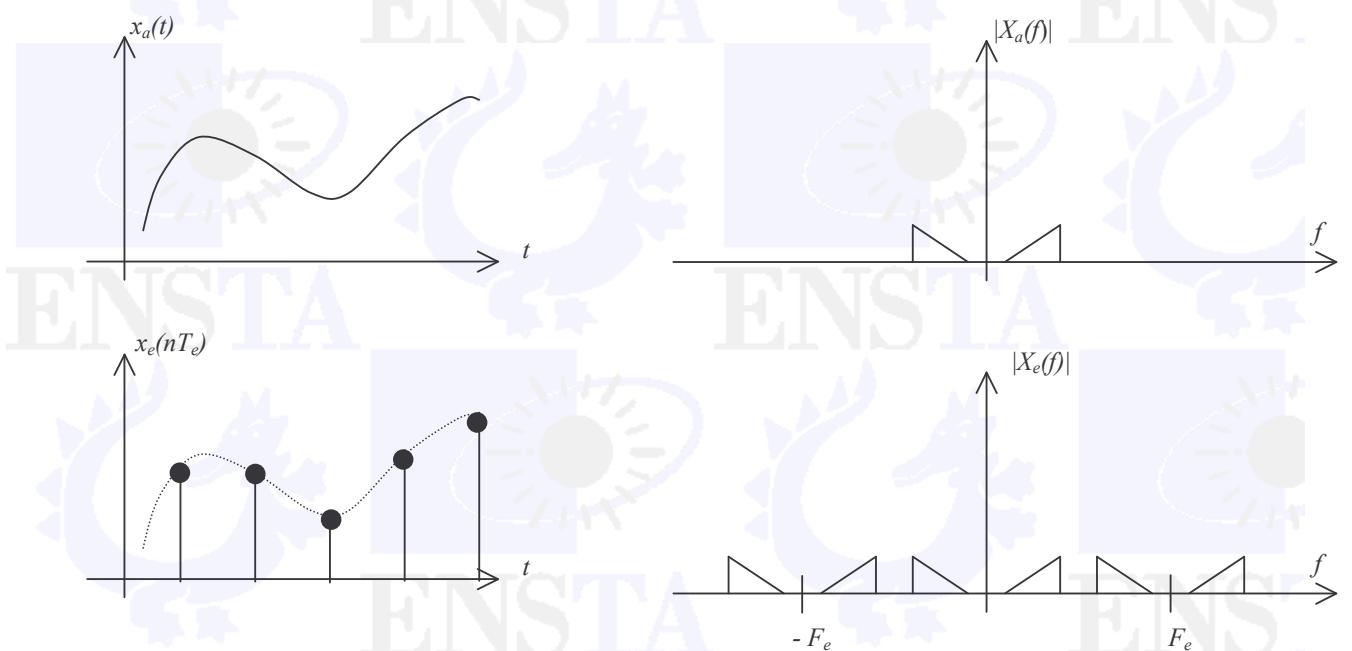
$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(t) \delta(t-nT_e) \quad (5.)$$

ou encore :

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e(n) \delta(t-nT_e) \quad (6.)$$

En utilisant l'équation (4), il vient que le spectre du signal échantillonné $X_e(f)$ est égal au produit de convolution du spectre du signal analogique $X_a(f)$ par $W_{T_e}(f)$, soit :

$$X_e(f) = \frac{I}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a\left(f - \frac{n}{T_e}\right) \quad (7.)$$



Il apparaît donc que l'échantillonnage temporel d'un signal analogique conduit à un signal numérique dont le spectre est la périodisation du spectre d'origine du signal analogique.

Cette propriété est très importante et va être à l'origine de la démonstration du théorème de reconstruction.

Cependant elle est assez abstraite, car elle a demandé un passage par les distributions pour être établie. On peut en proposer une version "imagée" suivante.

Considérons ainsi le cas très simple d'un signal :

$$x_a(t) = \cos(2\pi f_0 t) \quad (8.)$$

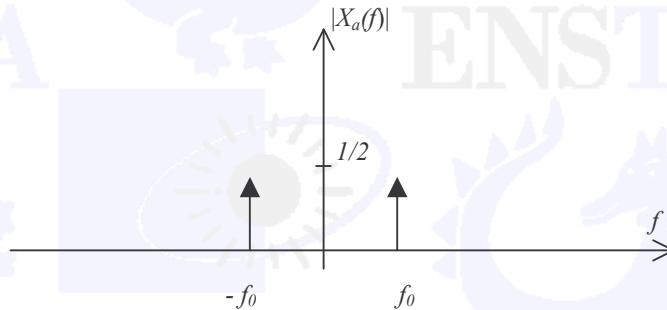
Le spectre de ce signal est alors égal à :

$$X_a(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \quad (9.)$$

Ce qui peut s'interpréter comme le fait que le signal est en fait constitué de la somme de fréquences pures à f_0 et

$$-f_0, \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}).$$

Ce qui se représente spectralement par :



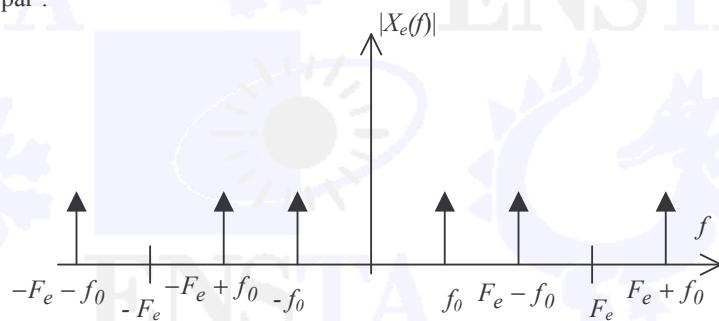
Le signal échantillonné va s'écrire :

$$x_e(nT_e) = \cos(2\pi f_0 nT_e) \quad (10.)$$

et son spectre :

$$X_e(f) = \frac{1}{2T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\delta\left(f - f_0 - \frac{n}{T_e}\right) + \delta\left(f + f_0 - \frac{n}{T_e}\right) \right] \quad (11.)$$

ce qui sera représenté par :



ENSTA

ENSTA

ENSTA

ENSTA

ENSTA

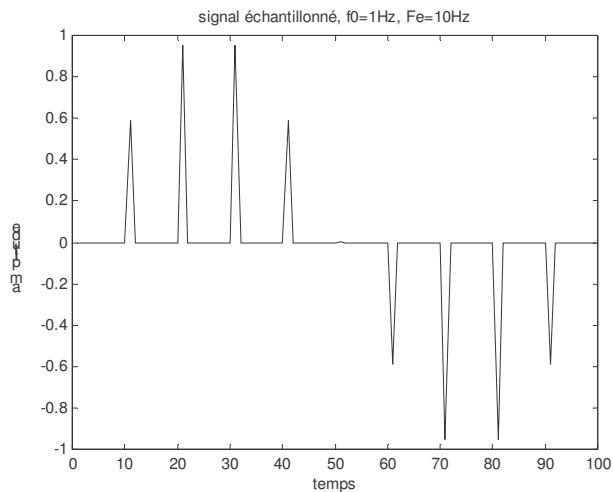
ENSTA

ENSTA

ENSTA

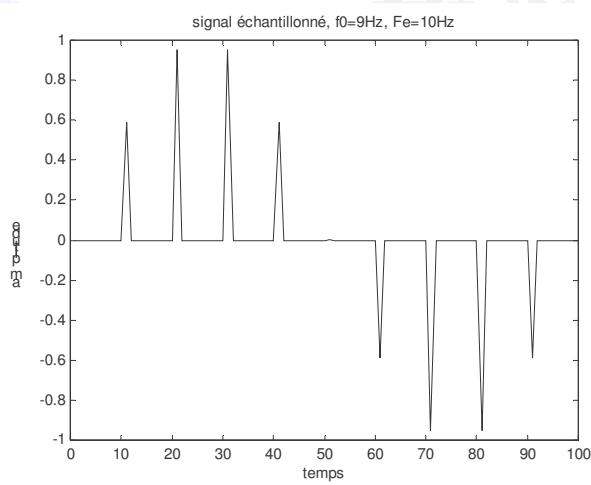
Considérons le cas numérique suivant : $f_0 = 1 \text{ Hz}$ et $F_e = 10 \text{ Hz}$

Le signal échantillonné a alors l'allure suivante :

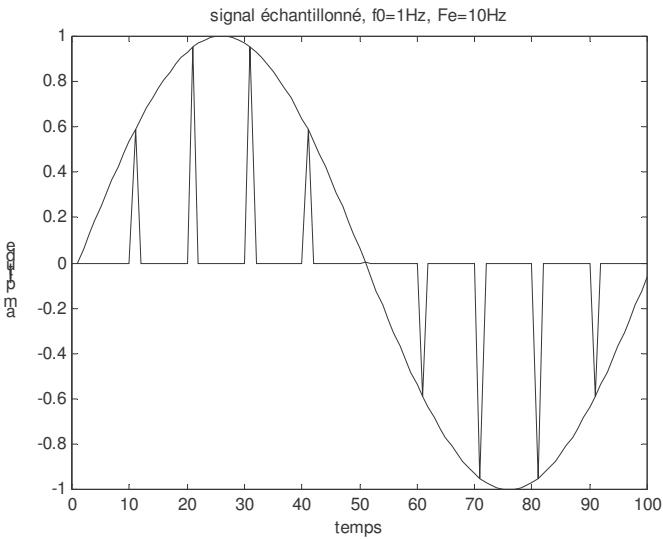


La périodisation nous dit que le spectre de ce signal numérique possède une raie à $f' = F_e - f_0 = 10 - 1 = 9 \text{ Hz}$ et une raie à $f'' = F_e + f_0 = 10 + 1 = 11 \text{ Hz}$.

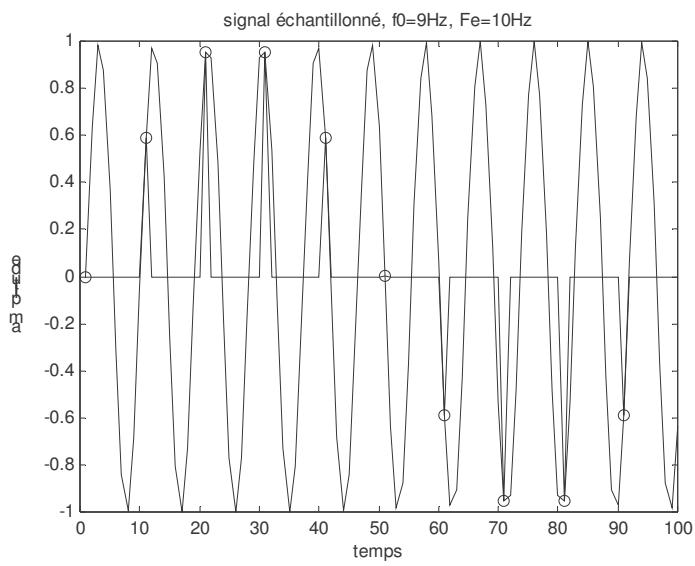
Si on trace le signal temporel $x_a(t) = \sin(2\pi f' n T_e)$ toujours avec $F_e = 10 \text{ Hz}$, on obtient :



On remarque donc que l'on obtient exactement les mêmes échantillons. Si l'on trace les signaux analogiques sur ces points numériques, il vient :



Et pour le signal à 9 Hz :



On peut donc interpréter la périodisation dans le domaine fréquentiel par le fait que tous les signaux analogiques se trouvant à des fréquences du type $f = f_0 \pm kF_e$, donneraient, s'ils étaient échantillonnés à F_e , les mêmes échantillons temporels. On conçoit donc qu'à partir d'un signal numérique, il faudra une condition supplémentaire sur le signal analogique d'origine pour pouvoir le reconstruire et lever cette ambiguïté.

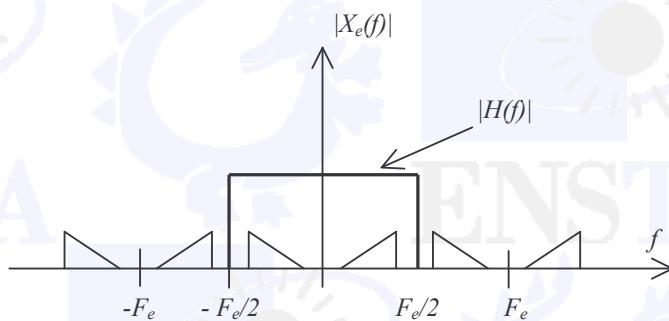
1.2 Le théorème de reconstruction

L'échantillonnage a introduit une périodicité du spectre. Pour reconstituer le signal d'origine on peut "travailler" dans le domaine spectral pour retrouver le spectre du signal analogique. Il ne restera plus alors qu'à effectuer une transformation de Fourier inverse pour reconstituer le signal analogique temporel.

Dans le domaine spectral, il suffit simplement de supprimer les bandes images du signal numérique. En introduisant un filtre idéal $H(f)$, dont la fonction de transfert est définie par :

$$H(f) = \frac{1}{F_e}, \text{ pour } f \in \left[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2} \right]$$

$$H(f) = 0, \text{ pour } f \notin \left[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2} \right]$$



Le signal $\hat{x}_a(t)$ en sortie du filtre correspond au produit de convolution du signal $x_e(t)$ par la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre $H(f)$.

$$\text{or } h(t) = \frac{1}{F_e} \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{+j2\pi ft} df = \frac{1}{F_e} \int_{-F_e/2}^{F_e/2} e^{+j2\pi ft} df = \frac{\sin(\pi F_e t)}{\pi F_e}$$

On a donc :

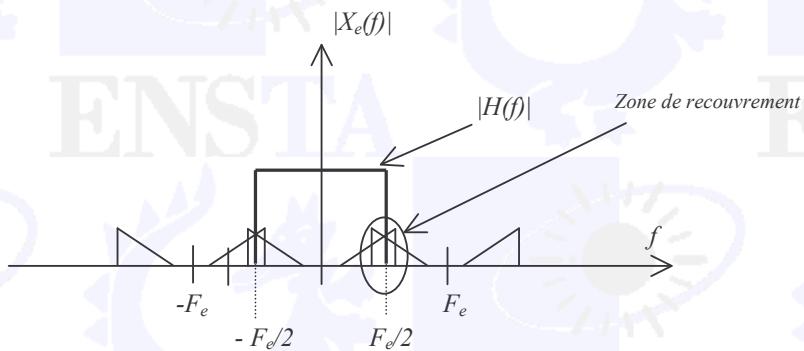
$$\hat{x}_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e(\tau) \delta(\tau - nT_e) \right] \frac{\sin \pi F_e (t - \tau)}{\pi F_e (t - \tau)} d\tau \quad (12.)$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_e(nT_e) \frac{\sin \pi F_e (t - nT_e)}{\pi F_e (t - nT_e)} \quad (13.)$$

On constate donc que la valeur $\hat{x}_a(t)$ du signal analogique, pour un instant quelconque t n'appartenant pas à la "grille d'échantillonnage temporel" $(kT_e)_{k \text{ entier}}$ peut être obtenue par interpolation des valeurs du signal sur la grille

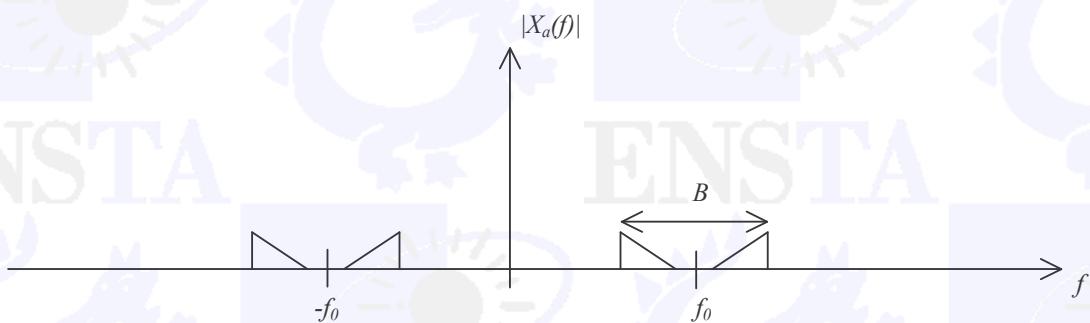
d'échantillonnage. Mais ceci à condition que le raisonnement qui a été proposé dans le domaine spectral soit possible. Pour cela il faut donc s'assurer que l'on peut reconstituer le spectre du signal analogique en filtrant le spectre du signal numérique. Cette condition est vérifiée si et seulement si le spectre d'origine ne contient pas de composantes aux fréquences supérieures ou égales à $\frac{F_e}{2}$. Si ce n'est pas le cas, les bandes images se chevauchent, on dit alors qu'il y a repliement de spectre et le signal reconstitué $\hat{x}_a(t)$ est différent du signal d'origine.



On aboutit finalement au théorème de l'échantillonnage ou théorème de Shannon :

Théorème de Shannon en bande de base : Un signal qui ne comporte pas de composantes à des fréquences supérieures ou égales à une valeur f_{max} est entièrement déterminé par la suite de ses valeurs à des instants régulièrement espacés d'une durée $T_e = \frac{I}{F_e}$ à condition d'avoir $F_e \geq 2 f_{max}$

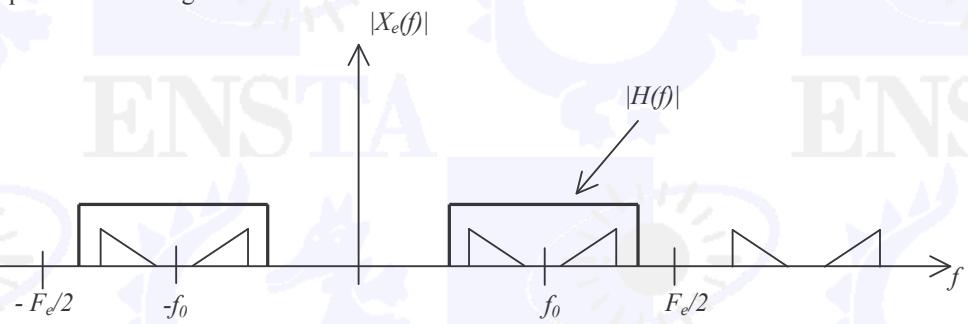
Le raisonnement qui a été mené pour un signal en bande de base, peut être conduit pour un signal dont le spectre se trouverait localisé autour d'un fréquence haute f_0 .



On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème de Shannon en bande transposée : Un signal qui occupe une bande de fréquence de largeur B peut-être entièrement déterminé par la suite de ses valeurs à des instants régulièrement espacés d'une durée $T_e = \frac{1}{F_e}$ à condition d'avoir $F_e \geq 2B$

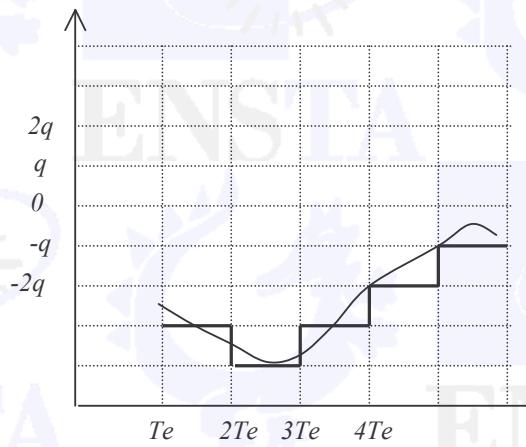
On distingue alors deux cas possibles, le premier appelé suréchantillonnage qui correspond au cas où $F_e > 2B$ et $F_e > f_0$, c'est le cas représenté sur la figure ci-dessous :



Le deuxième cas correspond au sous-échantillonnage pour lequel on $F_e > 2B$ et $F_e < f_0$.

2. Quantification

Dans une chaîne de traitement numérique du signal, l'échantillonnage est en général suivi par une opération de quantification. La quantification est l'approximation de chaque valeur du signal $x_a(t)$ par un multiple entier d'une quantité notée q et appelée "pas de quantification". Si q est constant quelle que soit l'amplitude du signal, la quantification est dite uniforme.



Le signal quantifié $x_q(t)$ diffère du signal d'origine $x_a(t)$ par un terme d'erreur $e(t)$ qui va s'exprimer par :

$$x_a(t) = x_q(t) + e(t) \quad (14.)$$

Ce terme d'erreur est appelé bruit de quantification.

Si l'on fait abstraction de l'échantillonnage temporel, on peut admettre que ce signal d'erreur est en fait une variable aléatoire uniformément répartie entre $-\frac{q}{2}$ et $\frac{q}{2}$. La puissance P_{Bq} de ce bruit de quantification est alors égale à :

$$P_{Bq} = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \frac{1}{q} x^2 dx \quad (15.)$$

L'intégrale donne alors :

$$P_{Bq} = \frac{q^2}{12} \quad (16.)$$

3. Les Transformées

3.1 Transformée de Fourier Discrète

3.1.1 Définition

A partir d'un échantillon de N valeurs du signal numérique: $\{x(nT_e)\}_{n \in \{0,1,2,\dots,N-1\}}$, on peut définir faire une

correspondance entre la Transformée de Fourier "analogique" $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$ et son expression discrète qui

pourrait s'écrire $X(f) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-j2\pi fnT_e}$. Il s'en suit alors immédiatement une discussion sur la convergence

de cette sommation. On peut alors diviser cette Transformée discrète par la durée sur laquelle elle est calculée, on passe ainsi d'une notion "d'énergie" à une notion "de puissance". On arrive ainsi à une écriture du type

$X(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_e} T_e \sum_{n=-N/2}^{N/2} x(nT_e) e^{-j2\pi fnT_e}$. Cependant en pratique on ne dispose en général que d'un nombre fini

d'échantillons, la Transformée de Fourier Discrète (TFD) du signal numérique est donc définie par :

$$X(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_e(nT_e) e^{-j2\pi fnT_e} \quad (17.)$$

On notera que l'on a aussi "recentré" les N échantillons entre les indices 0 et $N-1$ pour éviter d'utiliser la notion de temps négatif. Ces questions de normalisation de la sommation n'ont en général pas une grande importance à moins que l'on ne souhaite absolument faire une correspondance rigoureuse entre le temps continu et le temps discret.

Le calcul de la TFD peut être réalisé pour n'importe quelle valeur de la variable de fréquence f . On peut donc obtenir un spectre $X(f)$ défini pour f variant de manière continue. Ce spectre $X(f)$ peut alors être "échantillonné" au rythme $\frac{F_e}{N}$. On obtient ainsi N valeurs équiréparties de 0 à F_e .

$$X\left(\frac{kF_e}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (18.)$$

D'après le théorème de reconstruction évoqué précédemment, on sait que les valeurs de $X(f)$ aux fréquences f se déduisent de ces N valeurs par interpolation. L'équation précédente devient :

$$\hat{X}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{kF_e}{N}\right) \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{f}{F_e} - k\right)\right)}{\pi\left(\frac{f}{F_e} - k\right)} \quad (19.)$$

On définit aussi la Transformée de Fourier Inverse :

$$x(nT_e) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{kF_e}{N}\right) e^{j2\pi kn}$$

(20.)

3.1.2 Egalité de Parseval

On montre que :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x_e(nT_e)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left| X\left(\frac{kF_e}{N}\right) \right|^2$$

(21.)

Pour cela, il suffit d'écrire :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x_e(nT_e)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_e(nT_e) x_e^*(nT_e)$$

(22.)

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x_e(nT_e)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_e(nT_e) \sum_{k=0}^{N-1} X^*\left(\frac{kF_e}{N}\right) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

(23.)

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x_e(nT_e)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} X^*\left(\frac{kF_e}{N}\right) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_e(nT_e) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

(24.)

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x_e(nT_e)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \left| X\left(\frac{kF_e}{N}\right) \right|^2$$

(25.)

3.1.3 Interprétation au sens des moindres carrés

Si on considère un signal $x_e(nT_e)$, on peut essayer de le prédire au mieux par une exponentielle complexe du type $A e^{j(2\pi f nT_e + \phi)}$. Pour identifier les trois paramètres A, f, ϕ de l'exponentielle, on peut chercher à minimiser l'erreur quadratique entre le signal et l'exponentielle. On doit donc minimiser l'expression suivante :

$$\underset{A, f, \phi}{\text{Min}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(A e^{j(2\pi f nT_e + \phi)} - x(nT_e) \right)^2 \quad (26.)$$

$$\underset{A, f, \phi}{\text{Min}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(A^2 + x^2(nT_e) - 2A \text{Re}\{x(nT_e) e^{-j(2\pi f nT_e + \phi)}\} \right) \quad (27.)$$

$$\underset{A, f, \phi}{\text{Min}} \left(N \cdot A^2 + \sum_{n=0}^{N-1} x^2(nT_e) - 2NA \text{Re}\left\{ e^{-j\phi} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-j(2\pi f nT_e + \phi)} \right\} \right) \quad (28.)$$

On voit donc apparaître la Transformée de Fourier discrète au niveau du troisième terme de cette somme. Si on note cette dernière sous la forme :

$$X(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_e(nT_e) e^{-j2\pi fnT_e} = \rho e^{j\phi} \quad (29.)$$

l'équation à minimiser devient :

$$\underset{A, f, \varphi}{\text{Min}} \left(N.A^2 + \sum_{n=0}^{N-1} x^2(nT_e) - 2NA\rho \cos(\phi - \varphi) \right) \quad (30.)$$

Ce terme est positif et sera donc minimal lorsque $2NA\rho \cos(\phi - \varphi)$ sera maximal. Il faut donc choisir f qui maximise le module ρ de la Transformée de Fourier et $\varphi = \phi$.

Il ne reste plus alors qu'à maximiser en fonction de A :

$$\underset{A}{\text{Min}} \left(N.A^2 + \sum_{n=0}^{N-1} x^2(nT_e) - 2NA\rho_{\max} \right) \quad (31.)$$

En annulant alors la dérivée en fonction de A , il vient :

$$2.N.A - 2N\rho_{\max} = 0 \quad (32.)$$

D'où $A = \rho_{\max}$

Il apparaît en définitive que le triplet A, f, φ s'obtient simplement en considérant la maximisation sur f du module de la Transformée de Fourier discrète du signal $x_e(nT_e)$. Le module de la Transformée à cette fréquence f donne la valeur de A et la phase de la Transformée cette fréquence f donne φ .

3.2 Transformée de Fourier Rapide (FFT)

Si on choisit une formalisation matricielle de la Transformée de Fourier discrète, et en se plaçant dans le cas où elle est calculée pour N valeurs aux fréquences $f = \frac{kF_e}{N}$, l'opération peut être formalisée par le passage d'un vecteur d'échantillons temporels :

$\begin{pmatrix} x(0.T_e) \\ x(1.T_e) \\ \vdots \\ x((N-1).T_e) \end{pmatrix}$ que l'on notera plus simplement $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$, à un vecteur fréquentiel $\begin{pmatrix} X\left(\frac{0.F_e}{N}\right) \\ X\left(\frac{1.F_e}{N}\right) \\ \vdots \\ X\left(\frac{(N-1).F_e}{N}\right) \end{pmatrix}$ que l'on

notera plus simplement $\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix}$ au moyen d'une matrice de passage $P = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} & p_{n,m} \end{pmatrix}$ avec,

$$p_{n,m} = e^{-j2\pi \frac{n.m}{N}}.$$

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

(33.)

En introduisant la racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité :

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

(34.)

L'équation matricielle précédente s'écrit :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W & W^2 & \cdots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

(35.)

Lorsque le nombre N est une puissance de 2, ($N = 2^k$), alors il est possible de mettre à profit certaines particularités de la matrice de passage pour éviter de devoir effectuer les N^2 multiplications que demanderait le produit matriciel direct.

Dans un tel cas de figure, on décompose le vecteur d'échantillons temporels en un vecteur comportant les échantillons d'indice pairs et un vecteur comportant les échantillons d'indice impairs afin d'obtenir les $\frac{N}{2}$ premières valeurs du vecteur fréquentiel.

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N/2-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W^2 & W^4 & \cdots & W^{2(N/2-1)} \\ 1 & W^4 & W^8 & \cdots & W^{4(N/2-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W^{2(N/2-1)} & W^{4(N/2-1)} & \cdots & W^{2(N/2-1)(N/2-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2(N/2-1)} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ W & W^3 & W^5 & \cdots & W^{N-1} \\ W^2 & W^6 & W^{10} & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ W^{N/2-1} & W^{3(N/2-1)} & W^{5(N/2-1)} & \cdots & W^{(N-1)(N/2-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

(36.)

En désignant par $T_{N/2}$ la matrice qui vient en facteur du vecteur colonne des éléments d'indice pair et en décomposant la matrice facteur du vecteur des éléments d'indice impair en un produit d'une matrice diagonale par la matrice $T_{N/2}$, on obtient :

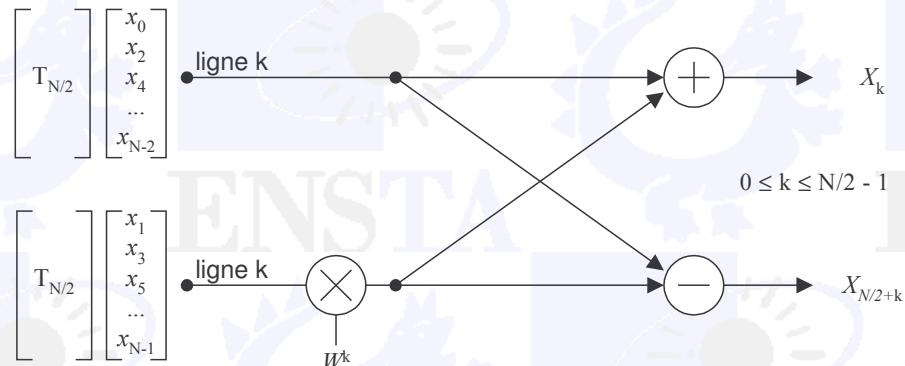
$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N/2-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} T_{N/2} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2(N/2-1)} \end{pmatrix} + \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W^{(N/2-1)} \end{pmatrix} T_{N/2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \quad (37.)$$

Pour les $N/2$ derniers termes du vecteur fréquentiel, on obtient en utilisant la propriété $W^N = 1$:

$$\begin{pmatrix} X_{N/2} \\ X_{N/2+1} \\ X_{N/2+2} \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} T_{N/2} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2(N/2-1)} \end{pmatrix} - \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W^{(N/2-1)} \end{pmatrix} T_{N/2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \quad (38.)$$

Il apparaît ainsi que le calcul de X_k et de $X_{k+N/2}$ met en œuvre les mêmes calculs à un changement de signe près.

Ce calcul peut être représenté par le diagramme suivant :



Il apparaît alors que le calcul d'une Transformée de Fourier d'ordre N revient au calcul de deux Transformées d'ordre $N/2$ auquel s'ajoutent $N/2$ multiplications complexes. En itérant ce principe on "descend" jusqu'aux Transformées de Fourier sur deux valeurs, qui s'effectuent au moyen de la matrice :

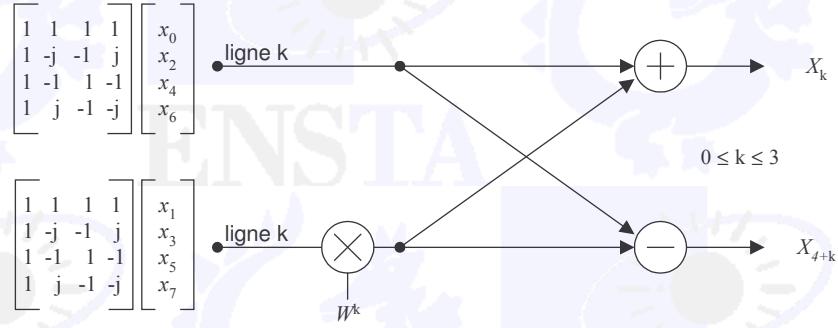
$$T_2 = \begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix} \quad (39.)$$

En énumérant toutes les multiplications à effectuer on constate finalement que l'algorithme de la Transformée de Fourier Rapide (TFR ou FFT en anglais pour Fast Fourier Transform (Cooley and Tukey 1965)) qui vient d'être développé va demander $N \log_2(N)$ multiplications au lieu des N^2 multiplications du calcul direct.

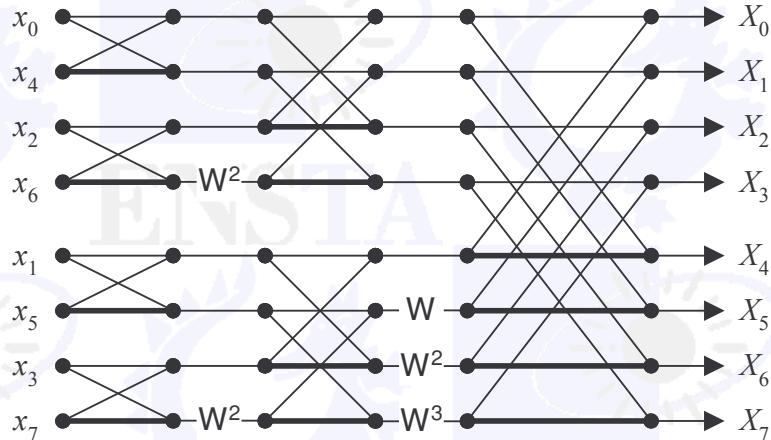
Note : L'introduction du facteur $1/N$ peut se faire à chaque étape en divisant les résultats des additions et soustractions effectuées dans chaque croisillon par $\frac{1}{2}$.

Exemple : FFT d'ordre 8

Une FFT d'ordre 8 aura pour diagramme :

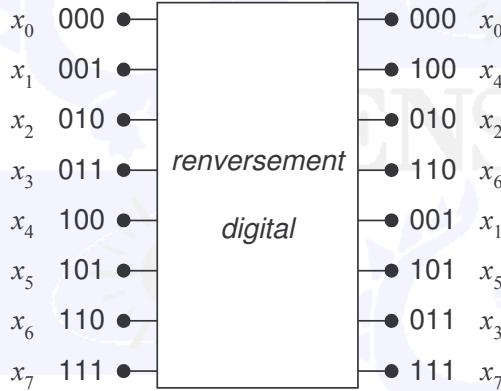


On voit d'après le contenu de T_4 que l'on a intérêt à regrouper x_0 avec x_4 , x_2 avec x_6 , et de même x_1 avec x_5 , et x_3 avec x_7 . Le diagramme a alors la forme suivante (les ronds noirs représentent l'opération d'addition, les traits épais identifient le terme soustrait) :



On constate dans ce diagramme la présence de 4 "papillons FFT" d'ordre 2, 2 "papillons FFT" d'ordre 4 et 1 "papillon FFT" d'ordre 8.

De plus, alors que les termes X_i apparaissent "dans l'ordre", l'ordre des x_i a été modifié. Cette modification appelée renversement digital, consiste à inverser la représentation binaire des indices des x_i avant chaque calcul de FFT.



$$\text{Transformée 2D : } X(f_1, f_2) = \iint x(t_1, t_2) e^{-j2\pi f_1 t_1} e^{-j2\pi f_2 t_2} dt_1 dt_2$$

3.3 Transformée en Z

De la même manière que la Transformée de Laplace est l'outil fondamental pour l'analyse des systèmes continus, la Transformée en Z est l'outil d'analyse pour les systèmes discrets.

On rappelle que la Transformée en Z d'une suite $x(n)$ est définie pour $R_1 < |Z| < R_2$ par l'expression:

$$x(n) \xrightarrow{T(Z)} X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n) Z^{-n} \quad (40.)$$

En considérant l'expression de la Transformée de Fourier discrète :

$$x(n) \xrightarrow{\text{TFD}} X(f) = T_e \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n T_e) e^{-j2\pi f n T_e} \quad (41.)$$

Le passage de la Transformée en Z à la Transformée de Fourier est immédiat:

$$X(Z)|_{Z=e^{j2\pi f T_e}} = X(f) \quad (42.)$$

(Ceci en faisant abstraction du terme de normalisation T_e que l'on considère égal à 1)

Ainsi l'analyse d'un système discret se fera en général au moyen de la Transformée en Z, le passage en Fourier étant immédiat si nécessaire.

4. Filtrage Numérique

4.1 Les systèmes linéaires discrets invariants dans le temps

4.1.1 Définition

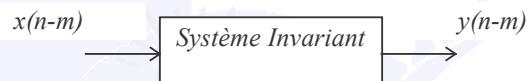
Un système est *discret*, si à la suite d'entrée discrète $x(n)$ correspond une suite de sortie discrète $y(n)$.



Un système est *linéaire*, si à la suite $x_1(n) + a x_2(n)$ correspond la suite $y_1(n) + a y_2(n)$.



Un système est *invariant dans le temps*, si à la suite $x(n-m)$ correspond la suite $y(n-m)$.



Dès lors si $\delta(n)$ est la suite unitaire $\begin{cases} \delta(0) = 1 \\ \delta(n) = 0 \quad \forall n \neq 0 \end{cases}$, alors toute suite $x(n)$ peut s'écrire:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (43.)$$

si $h(n)$ est la réponse d'un système discret linéaire et invariant dans le temps à la suite $\delta(n)$ alors :

$$x(n) \rightarrow y(n) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} h(m)x(n-m) \quad (44.)$$

on reconnaît alors une équation de convolution:

$$y(n) = h(n) * x(n) \quad (45.)$$

Ainsi dès qu'un système peut être considéré comme linéaire, discret et invariant dans le temps, il en découle qu'il est :

1) régi par une équation de convolution

2) entièrement déterminé par la réponse $h(n)$ qu'il fournit lorsqu'il est excité par la suite impulsionnelle $\delta(n)$. Cette suite $h(n)$ constituant la réponse impulsionnelle du système.

4.1.2 Conditions de stabilité

Un système discret, linéaire et invariant dans le temps (LIT) est stable si à toute suite d'entrée bornée correspond une suite de sortie bornée.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit stable est que la somme des valeurs absolues de sa réponse impulsionnelle soit bornée.

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |h(m)| < +\infty \quad (46.)$$

Preuve de la condition nécessaire :

Soit $x(n)$ la suite d'entrée bornée définie par : $x(-n) = sgn(h(n))$ alors, par définition de l'équation de convolution

régissant le système, $y(0) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |h(m)|$. Donc si $y(0) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |h(m)|$ n'est pas $< \infty$ la suite de sortie n'est pas bornée

et la condition de stabilité n'est pas respectée.

Preuve de la condition suffisante :

Soit $x(n)$ une suite d'entrée bornée, c'est à dire:

$$\forall n, \exists M / |x(n)| < M$$

alors:

$$|y(n)| \leq \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |h(m)| |x(n-m)| \leq \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |h(m)| M \quad (47.)$$

et si $\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} |h(m)| < \infty$, la suite $y(n)$ est alors bornée.

4.2 Systèmes linéaires invariants dans le temps régis par une équation aux différences

Parmi les systèmes linéaires discrets invariants dans le temps, les systèmes définis par une équation aux différences sont les plus intéressants car ils modélisent un grand nombre de systèmes naturels. Un système de ce type, ou filtre numérique, est défini par la relation suivante:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i x(n-i) - \sum_{j=1}^M b_j y(n-j) \quad (48.)$$



La Transformée en Z de cette équation donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)Z^{-n} = \sum_{i=0}^N a_i Z^{-i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-i)Z^{-(n-i)} + \sum_{j=1}^M b_j Z^{-j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n-j)Z^{-(n-j)} \quad (49.)$$

d'où :

$$Y(Z) = \sum_{i=0}^N a_i Z^{-i} X(Z) + \sum_{j=1}^M b_j Z^{-j} Y(Z) \quad (50.)$$

ce qui donne la fonction de transfert du système :

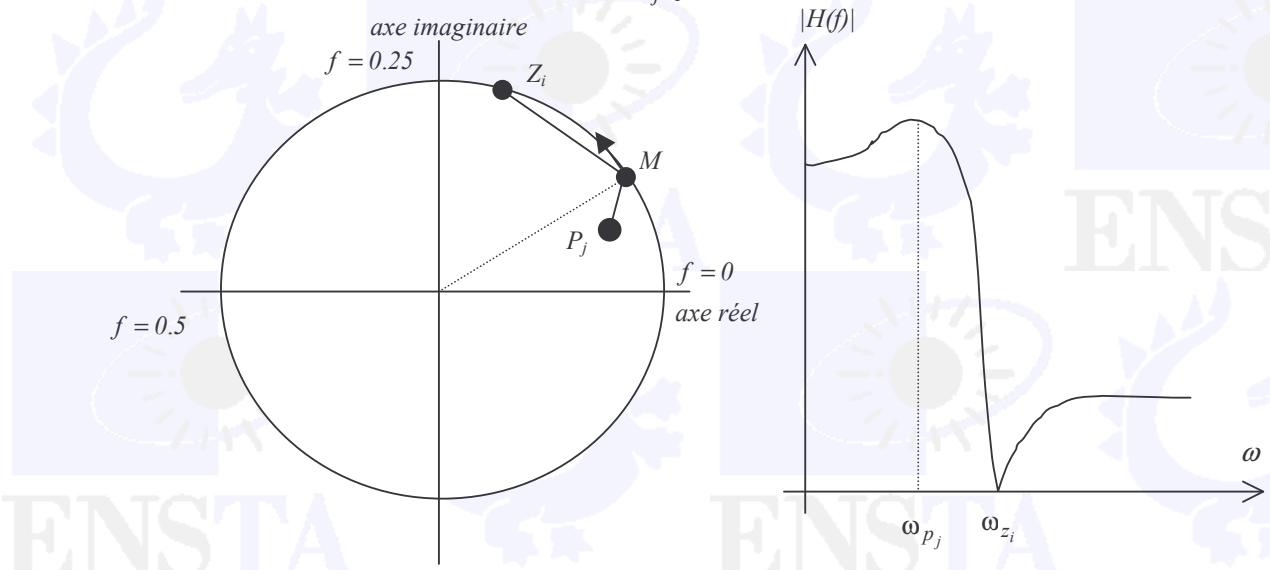
$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^M b_j Z^{-j}} \quad (51.)$$

La fonction de transfert est donc constituée d'un polynôme en Z au numérateur sur un autre polynôme en Z au dénominateur. Ils peuvent tous les deux être exprimés en fonction de leurs racines :

$$H(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)} = \frac{a_0 \prod_{i=1}^N (Z - Z_i)}{\prod_{j=1}^M (Z - P_j)} \quad (52.)$$

A partir de cette expression de la fonction de transfert, une représentation des pôles et des zéros sur le cercle unité s'avère très utile pour caractériser le comportement spectral du système. Comme il a été rappelé brièvement au paragraphe précédent, il est possible d'obtenir la fonction de transfert spectrale de ce système en remplaçant Z par $e^{j2\pi f T_e}$, Z peut donc être vu comme la coordonnée d'un point sur le cercle unité. Z_i sera la coordonnée d'un zéro de transmission dans le plan complexe et P_j d'un pôle dans le plan complexe. La fonction de transfert s'exprime alors simplement comme un ratio de produits de distances.

$$|H(f)| = a_0 \frac{\prod_{i=1}^N MZ_i}{\prod_{j=1}^M MP_j}$$



4.3 Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Un filtre à réponse impulsionnelle finie est un système linéaire invariant dans le temps régi par une équation aux différences pour lequel l'échantillon de sortie $y(n)$ ne dépend que d'un certain nombre d'échantillons d'entrée $x(n)$.

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i x(n-i) \quad (54.)$$

Exemple 1 :

Soit le filtre défini par l'équation suivante:

$$y(n) = \frac{1}{2} x(n) + \frac{1}{2} x(n-1) \quad (55.)$$

L'étude de ce filtre peut être réalisée au moyen de la Transformée en Z:

$$Y(Z) = \frac{1}{2} (X(Z) + Z^{-1} X(Z)) \quad (56.)$$

d'où:

$$H(Z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} Z^{-1} \quad (57.)$$

Le comportement fréquentiel du filtre s'obtient en remplaçant Z par $e^{j2\pi f T_e}$:

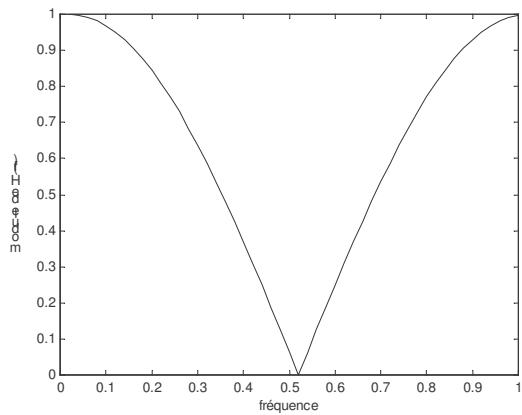
$$H(f) = \frac{1}{2} (I + e^{-j2\pi f T_e})$$

$$= \frac{1}{2} e^{-j\pi f T_e} (e^{j\pi f T_e} + e^{-j\pi f T_e})$$

$$= e^{-j\pi f T_e} \cos(\pi f T_e)$$

Il s'agit finalement d'un filtre passe bas dont le module de la fonction de transfert suit une courbe en cosinus et dont

le déphasage est linéaire en fonction de la fréquence. Ce déphasage est équivalent à retard $\tau = \frac{T_e}{2}$.



Exemple 2 :

Soit le filtre défini par l'équation suivante:

$$y(n) = \frac{1}{4} x(n) + \frac{1}{2} x(n-1) + \frac{1}{4} x(n-2)$$

L'étude de ce filtre peut être réalisée au moyen de la transformée en Z:

$$Y(Z) = \frac{1}{4} X(Z) + \frac{1}{2} Z^{-1} X(Z) + \frac{1}{4} Z^{-2} X(Z)$$

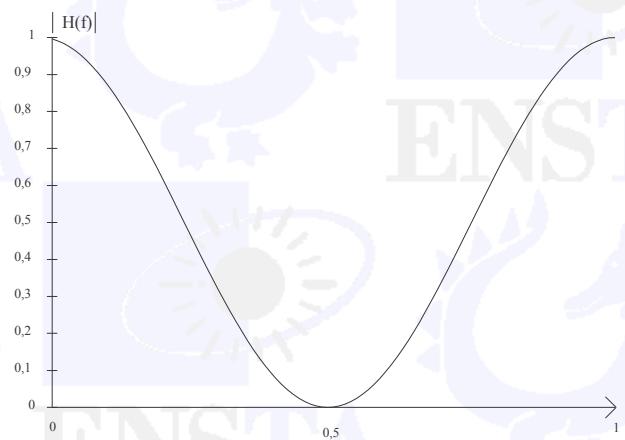
d'où:

$$H(Z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} Z^{-1} + \frac{1}{4} Z^{-2}$$

Le comportement fréquentiel du filtre s'obtient en remplaçant Z par $e^{j2\pi f T_e}$:

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + e^{-j2\pi f T_e} + \frac{1}{2} e^{-j4\pi f T_e} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-j2\pi f T_e} \left(1 + \frac{1}{2} e^{j2\pi f T_e} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f T_e} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-j2\pi f T_e} (1 + \cos 2\pi f T_e) \end{aligned}$$

Il s'agit encore d'un filtre passe bas dont le module de la fonction de transfert suit une courbe en cosinus surélevé et dont le déphasage est linéaire en fonction de la fréquence. Ce déphasage est équivalent à retard $\tau = T_e$.



Dans ces deux exemples il est apparu qu'il était facile d'obtenir la fonction de transfert spectrale d'un filtre numérique à partir de l'équation temporelle régissant ce filtre. Bien entendu, c'est essentiellement l'approche inverse, consistant à trouver l'équation de filtrage qui satisfait un gabarit fréquentiel donné, qui est la plus importante. On parle alors de synthèse de filtre numérique. Avant de présenter ces techniques de synthèse, il est important de remarquer, que dans les deux exemples présentés, les filtres décrits avaient un déphasage linéaire en fonction de la fréquence. Il s'agit d'une propriété particulière des filtres numériques qui a une importance capitale dans les applications où la phase du signal traité est porteuse d'informations.

4.3.1 Propriété de phase linéaire

Si l'on se place dans le cas où l'on recherche un filtre dont la fonction de transfert est du type :

$$H(f) = R(f)e^{-j\varphi(f)}$$

expression dans laquelle $R(f)$ est une fonction réelle de f qui représente le gain du filtre en fonction de la fréquence et où $\varphi(f) = 2\pi f \tau$ est une fonction réelle de f qui représente un terme de déphasage linéaire en fonction de la fréquence, alors on peut exprimer la réponse impulsionnelle d'un tel filtre au moyen de la Transformée de Fourier inverse de $H(f)$ et on obtient :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(f)e^{j2\pi f(t-\tau)} df$$

en décomposant $R(f)$ en une partie paire et une partie impaire:

$$R(f) = P(f) + I(f)$$

il vient:

$$h(t+\tau) = 2 \int_0^{+\infty} P(f) \cos(2\pi f t) df + 2j \int_0^{+\infty} I(f) \sin(2\pi f t) df$$

si on se restreint à des filtres $h(t)$ réel, il vient:

$$h(t+\tau) = 2 \int_0^{+\infty} P(f) \cos(2\pi f t) df = h(\tau - t)$$

$h(t)$ est donc symétrique par rapport à $t = \tau$.

Ainsi tout filtre à réponse impulsionnelle symétrique réel est à phase linéaire.

Le retard équivalent au déphasage est fonction de l'ordre du filtre.

Un filtre RIF symétrique réel à $2p+1$ coefficients entraîne un retard $\tau = pT_e$

Un filtre RIF symétrique réel à $2p$ coefficients entraîne un retard $\tau = (p-1/2)T_e$

preuve :

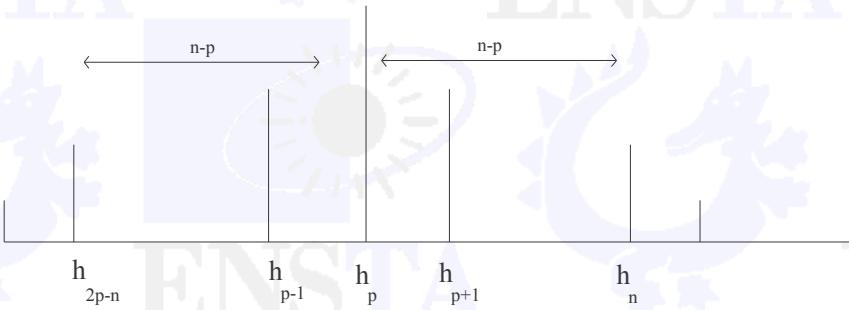
Un filtre RIF symétrique réel à $2p+1$ coefficients entraîne un retard $\tau = pT_e$

La fonction de transfert d'un tel filtre s'écrit:

$$H(f) = \sum_{n=0}^{2p} h(n) e^{-j2\pi f n T_e}$$

Le filtre étant symétrique, on a :

$$\forall n > p, h(n) = h(p - (n - p)) = h(2p - n)$$



en factorisant $e^{-j2\pi f p T_e}$ dans l'expression de $H(f)$, il vient :

$$H(f) = \left(h(p) + \sum_{n=0}^{p-1} h(n) e^{-j2\pi f (n-p) T_e} + \sum_{n=p+1}^{2p} h(n) e^{-j2\pi f (n-p) T_e} \right) e^{-j2\pi f p T_e}$$

or du fait de la symétrie du filtre : $h(n) = h(2p - n)$, d'où:

$$\sum_{n=p+1}^{2p} h(n) e^{-j2\pi f (n-p) T_e} = \sum_{n=p+1}^{2p} h(2p - n) e^{-j2\pi f (n-p) T_e}$$

en effectuant le changement de variable: $i = 2p - n$ ce terme devient égal à:

$$\sum_{i=p-l}^0 h(i) e^{-j2\pi f(p-i)T_e}$$

d'où :

$$H(f) = \left(h(p) + \sum_{n=0}^{p-1} h(n) e^{-j2\pi f(n-p)T_e} + \sum_{n=0}^{p-1} h(n) e^{+j2\pi f(n-p)T_e} \right) e^{-j2\pi f p T_e}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} H(f) &= \left(h(p) + 2 \sum_{n=0}^{p-1} h(n) \cos(2\pi f(n-p)T_e) \right) e^{-j2\pi f p T_e} \\ &= R(f) e^{-j2\pi f \tau} \text{ avec } \tau = p T_e \end{aligned}$$

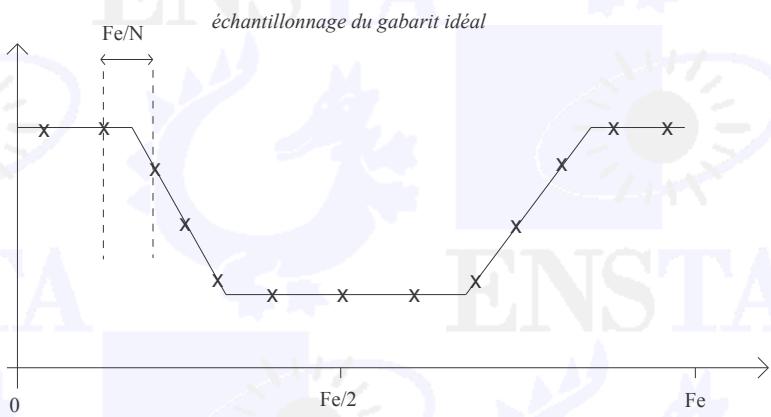
La démonstration pour le cas du filtre à $2p$ coefficients est identique.

4.3.2 Synthèse des filtres à réponse impulsionnelle finie

La synthèse des filtres numériques est un domaine qui a donné lieu à de nombreuses publications et recherches. Seules les bases des principales méthodes seront exposées dans ce chapitre. La bibliographie fournie en annexe comporte les développements complets sur ce sujet.

4.3.2.1 Méthode directe

La méthode la plus directe pour synthétiser le filtre numérique qui correspond à un gabarit fréquentiel donné consiste simplement à échantillonner ce gabarit dans le plan des fréquences et à calculer la Transformée de Fourier inverse de ce gabarit échantillonné. En l'absence de gabarit de phase la méthode la plus simple consiste à considérer que cette dernière est linéaire en fonction de la fréquence.



on a alors les valeurs de:

$H\left(\frac{kF_e}{N}\right)$ pour $k = 0 \rightarrow N - 1$, d'où par Transformée de Fourier inverse:

$$h_i = \sum_{k=0}^{N-1} H\left(\frac{k}{N} F_e\right) e^{j 2 \pi \frac{k}{N} F_e i T_e} \text{ pour } i = 0 \text{ à } N-1, \text{ (} N: \text{ordre du filtre) }$$

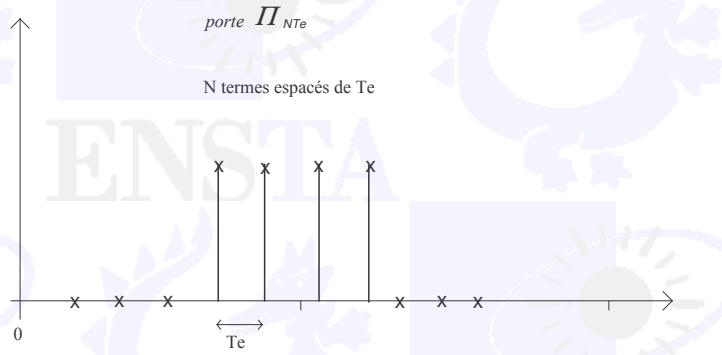
les h_i ainsi obtenus vont bien donner la fonction de transfert idéale aux points $H\left(\frac{kF_e}{N}\right)$, mais ils donneront un spectre avec des ondulations entre ces valeurs.

Pour une fréquence f quelconque, on peut recalculer:

$$H(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} h_i e^{-j 2 \pi f i T_e}$$

mais $H(f)$ peut aussi s'obtenir par interpolation des termes $H\left(\frac{kF_e}{N}\right)$. En effet la transformée de Fourier inverse idéale devrait donner une infinité de termes $(h_i)_{i=-\infty, +\infty}$, or on a considéré uniquement N termes $(h_i)_{i=0, N-1}$. Cela revient à tronquer cette réponse impulsionnelle en la multipliant par une porte $\Pi_{(NTe)}(NTe)$. La fonction de transfert obtenu est donc égale au produit de convolution du gabarit idéal par la transformée de Fourier de la porte $\Pi_{(NTe)}(NTe)$.

Transformée de Fourier de la porte $\Pi_{(NTe)}(NTe)$:



$$\begin{aligned} TF(\Pi_{NTe}) &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} e^{-j 2 \pi f i T_e} \\ &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j 2 \pi f NT_e}}{1 - e^{-j 2 \pi f T_e}} \\ &= \frac{1}{N} \frac{e^{-j \pi f NT_e}}{e^{-j \pi f T_e}} \frac{e^{j \pi f NT_e} - e^{-j \pi f NT_e}}{e^{j \pi f T_e} - e^{-j \pi f T_e}} \end{aligned}$$

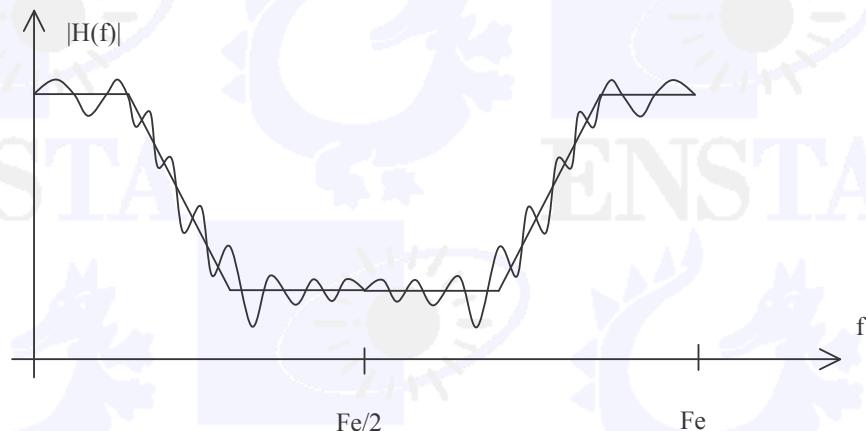
$$TF(f) = \frac{I}{N} e^{-j\pi f(N-I)T_e} \frac{\sin \pi f NT_e}{\sin \pi f T_e}$$

L'écriture du produit de convolution conduit alors à l'expression de $H(f)$ pour une fréquence f quelconque, en

fonction des $H\left(\frac{kF_e}{N}\right)$ (sans avoir besoin de repasser par les $(h_i)_{i=0,N-1}$).

$$H(f) = \sum_{k=0}^{N-1} H\left(\frac{k}{N} F_e\right) \frac{\sin \pi N \left(\frac{f}{F_e} - \frac{k}{N}\right)}{N \sin \pi \left(\frac{f}{F_e} - \frac{k}{N}\right)}$$

Cette équation constitue une formule d'interpolation pour obtenir $H(f)$ à partir des $H\left(\frac{kF_e}{N}\right)$.



Ainsi la méthode par synthèse conduit à une fonction de transfert qui ondule entre les valeurs idéales. L'amplitude des ces ondulations n'est pas contrôlable et n'est pas constante. C'est contre cette inconvénient que vont tenter de lutter les autres méthodes présentées plus loin dans ce chapitre.

4.3.2.2 Méthode pondérée par moindres carrés

Dans cette méthode, on cherche le jeu de coefficients $(h_i)_{i=0,N-1}$ qui donne une fonction de transfert la plus proche possible au sens du minimum d'erreur quadratique du gabarit à réaliser. La méthode, comme pour la méthode directe, va procéder par Transformée de Fourier inverse d'un ensemble de N valeurs $H\left(\frac{kF_e}{N}\right)$. La différence va se

situer dans le fait que les valeurs $H\left(\frac{kF_e}{N}\right)$ ne seront pas forcément sur le gabarit idéal. Il leur sera appliqué à

chacune un déplacement $\Delta H\left(\frac{kF_e}{N}\right)$ afin que la fonction de transfert reconstruite par interpolation approche au mieux le gabarit demandé.

Pour cela la méthode va procéder de la manière suivante :

On choisit, comme dans la méthode directe, N points $H\left(\frac{kF_e}{N}\right)$ sur le gabarit idéal pour $k = 0$ à $N-1$.

On interpole la fonction de transfert correspondante sur N_0 points $N_0 > N$.

$$\begin{cases} H(f) = \sum_{k=0}^{N-1} H\left(\frac{k}{N} F_e\right) \frac{\sin \pi N \left(\frac{f}{F_e} - \frac{k}{N} \right)}{N \sin \pi \left(\frac{f}{F_e} - \frac{k}{N} \right)} \\ f = \frac{k}{N_0} F_e \end{cases}$$

On écrit l'erreur à la fréquence $f = \frac{kF_e}{N_0}$, avec une pondération $p(f)$ à cette fréquence:

$$e\left(f = \frac{kF_e}{N_0}\right) = p\left(f = \frac{kF_e}{N_0}\right) \begin{bmatrix} \sin \pi N \left(\frac{k}{N_0} - \frac{0}{N} \right) & \sin \pi N \left(\frac{k}{N_0} - \frac{1}{N} \right) & \dots & \sin \pi N \left(\frac{k}{N_0} - \frac{N-1}{N} \right) \\ \hline N \sin \pi \left(\frac{k}{N_0} - \frac{0}{N} \right) & N \sin \pi \left(\frac{k}{N_0} - \frac{1}{N} \right) & \dots & N \sin \pi \left(\frac{k}{N_0} - \frac{N-1}{N} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H\left(\frac{0}{N} F_e\right) \\ H\left(\frac{1}{N} F_e\right) \\ \vdots \\ H\left(\frac{N-1}{N} F_e\right) \end{bmatrix} - d\left(f = \frac{kF_e}{N_0}\right)$$

Le vecteur E constitué par les N_0 erreurs aux fréquences $f = kFe/N_0$ pour $k = 0$ à $N_0 - 1$.

$$E = \begin{bmatrix} e\left(\frac{0F_e}{N_0}\right) \\ e\left(\frac{1F_e}{N_0}\right) \\ \vdots \\ e\left(\frac{(N_0-1)F_e}{N_0}\right) \end{bmatrix}$$

s'écrit alors:

$$E = P \begin{bmatrix} \frac{\sin \pi N \left(\frac{\theta}{N_0} - \frac{\theta}{N} \right)}{N \sin \pi \left(\frac{\theta}{N_0} - \frac{\theta}{N} \right)} & \frac{\sin \pi N \left(\frac{\theta}{N_0} - \frac{I}{N} \right)}{N \sin \pi \left(\frac{\theta}{N_0} - \frac{I}{N} \right)} \\ \frac{\sin \pi N \left(\frac{N_0 - I}{N_0} - \frac{\theta}{N} \right)}{N \sin \pi \left(\frac{N_0 - I}{N_0} - \frac{\theta}{N} \right)} & \frac{\sin \pi N \left(\frac{N_0 - I}{N_0} - \frac{I}{N} \right)}{N \sin \pi \left(\frac{N_0 - I}{N_0} - \frac{I}{N} \right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \left(\frac{\theta}{N} F_e \right) \\ H \left(\frac{I}{N} F_e \right) \\ \vdots \\ H \left(\frac{N-I}{N} F_e \right) \end{bmatrix} - D$$

Dans cette expression P représente la matrice de pondération aux différentes fréquences et D le vecteur des valeurs désirées à ces mêmes fréquences.

$$P = \begin{bmatrix} p \left(\frac{0F_e}{N_0} \right) & 0 \\ 0 & p \left(\frac{1F_e}{N_0} \right) \\ & \ddots \\ 0 & p \left(\frac{(N_0-1)F_e}{N_0} \right) \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d \left(\frac{0F_e}{N_0} \right) \\ d \left(\frac{1F_e}{N_0} \right) \\ \vdots \\ d \left(\frac{(N_0-1)F_e}{N_0} \right) \end{bmatrix}$$

L'équation peut s'écrire::

$$E_{N_0 \times I} = P_{N_0 \times N_0} (A_{N_0 \times N} H_{N \times I} - D_{N_0 \times I})$$

On cherche à minimiser $E^T E$, or :

$$E^T E = (H^T A^T P^T - D^T P^T)(PAH - PD)$$

soit en développant :

$$E^T E = H^T A^T P^2 AH - 2H^T A^T P^T PD + D^T P^T PD$$

et en annulant la dérivée par rapport à H :

$$2A^T P^2 AH - 2A^T P^T PD = 0$$

d'où :

$$H = [A^T P^2 A]^{-1} A^T P^T PD$$

On détermine ainsi le vecteur H optimal. Vecteur constitué de N termes aux N fréquences $\frac{kF_e}{N}$, pour $k = 0 \rightarrow N-1$.

Il ne reste plus alors qu'à faire la Transformée de Fourier inverse. Cette méthode permet de contrôler les ondulations mais elle n'assure pas que ces dernières seront toutes de même amplitude. Or il s'agit là d'une contrainte souvent imposée dans les gabarits à respecter. Pour résoudre ce problème il faut procéder de manière itérative.

4.3.2.3 Méthode itérative

Dans cette méthode le filtre $(h_i)_{i=0,N-1}$ synthétisé va donner une fonction de transfert fréquentielle avec des ondulations constantes dans chaque bande. Comme pour les méthodes précédentes le filtre sera finalement obtenu par transformée de Fourier inverse d'un jeu de $H\left(\frac{kF_e}{N}\right)$ optimisé.

Si l'on se place dans le cas des filtres à phase linéaire alors on peut écrire:

$$H_R(f) = \sum_{i=0}^{r-1} h_i \cos(2\pi f_i T_e) \text{ avec } N = 2r - 1$$

Le théorème de Tchebycheff nous dit alors:

Une condition nécessaire et suffisante pour que $H_R(f)$ soit l'unique et meilleure approximation au sens de Tchebycheff d'une fonction donnée $D(f)$ sur un sous-ensemble compact A de l'intervalle $[0, 1/2]$, est que la fonction erreur $e(f) = H_R(f) - D(f)$ présente au moins $(r+1)$ fréquences extrémiales sur A . C'est à dire qu'il existe $r+1$ fréquences (f_0, f_1, \dots, f_r) telles que $e(f_i) = -e(f_{i-1})$ avec $1 \leq i \leq r$ et $|e(f_i)| = \max_{f \in A} |e(f)|$.

Une fois les fréquences $(f_i)_{i=0,r}$ extrémiales déterminées le filtre $(h_i)_{i=0,N-1}$ s'obtient simplement par transformée de Fourier inverse des $H(f_i) = (-1)^i \delta$.

Le problème consiste finalement à trouver les $r + 1$ fréquences extrémales. Ceci est réalisé au moyen d'une procédure itérative appelée algorithme de Remez.

Algorithme itératif de Remez:

- On part d'un jeu de fréquences extrémales f_i (initialement équiréparties)
- On calcule le nouveau terme δ (ce qui est possible à partir des fréquences extrémales):

On peut démontrer que l'amplitude des oscillations aux fréquences extrémales est égale à:

$$\delta = \frac{a_0 D(f_0) + a_1 D(f_1) + \dots + a_r D(f_r)}{a_0 / P_0(f_0) - a_1 / P_0(f_1) + \dots + (-1)^r a_r / P_0(f_r)}$$

avec:

$$a_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^r \frac{1}{\cos(2\pi f_k) - \cos(2\pi f_i)}$$

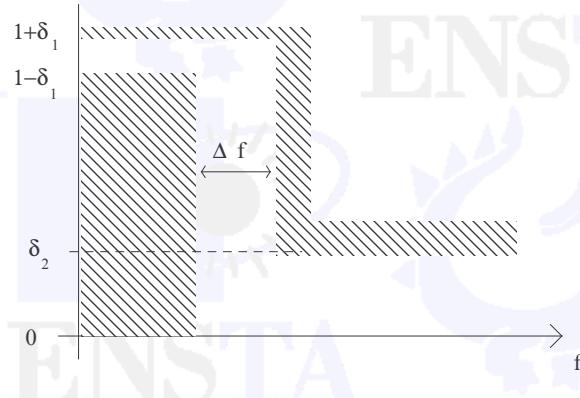
ENSTA

ENSTA

- On recalcule alors les termes $H_R(f_i) = (-1)^i \delta$
- On interpole $H(f)$ entre ces valeurs
- On constate que les fréquences extrémiales choisies n'étaient pas exactes, on détermine alors les nouvelles fréquences extrémales
- On calcule le nouveau terme δ
-
- On s'arrête lorsque la différence entre le nouveau δ et l'ancien devient inférieure à un seuil fixé à l'avance.

4.3.3 Relations entre le nombre de coefficients et le gabarit

A partir d'un gabarit de filtrage désiré du type de celui présenté ci dessous:



il est possible d'estimer le nombre de coefficients dont aura besoin un filtre RIF symétrique réel, au moyen de la formule d'approximation suivante:

$$N \approx \frac{2}{3} \log_{10} \left[\frac{I}{10\delta_1\delta_2} \right] \frac{F_e}{\Delta f}$$

4.4 Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)

4.4.1 Cellule purement récursive

4.4.1.1 Cellule du premier ordre

Soit le filtre défini par l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = x(n) + b y(n-1)$$

Ce filtre est identique à un filtre RIF d'ordre infini. Si l'entrée est la suite unitaire:

$$u_0(n) \begin{cases} u_0(0) = 1 \\ u_0(n) = 0 \quad \forall n \neq 0 \end{cases}, \text{ alors la sortie } y(n) \text{ est telle que:}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y(1) &= b \\ y(2) &= b^2 \\ \vdots \\ y(n) &= b^n \end{aligned}$$

Ce filtre est stable si:

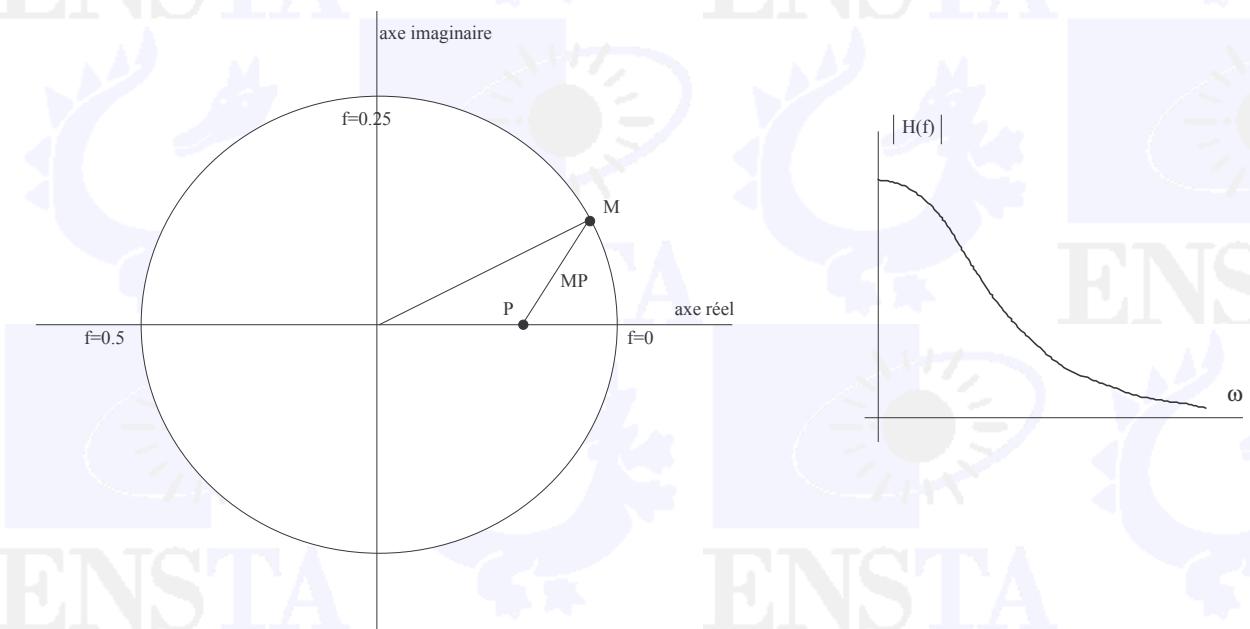
$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |b|^n < \infty, \text{ c'est à dire si } |b| < 1$$

Sa fonction de transfert $H(Z)$ s'écrit:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{I}{1 - bZ^{-1}}$$

ou encore avec une représentation sur le cercle unité:

$$|H(Z)| = \frac{I}{MP}$$



4.4.2 Cellule du deuxième ordre

Soit le filtre défini par l'équation aux différences suivante:

$$y(n) = x(n) - b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2)$$

La transformée en Z donne:

$$Y(Z)(1+b_1Z^{-1}+b_2Z^{-2})=X(Z)$$

d'où:

$$H(Z) = \frac{1}{1+b_1Z^{-1}+b_2Z^{-2}} = \frac{Z^2}{Z^2 + b_1Z + b_2}$$

Deux cas sont alors possibles:

$\Delta = b_1^2 - 4b_2 \geq 0$, la fonction de transfert possède alors deux pôles réels et elle est identique à la mise en cascade de deux cellules du premier ordre. La fonction de transfert globale est donc monotone.

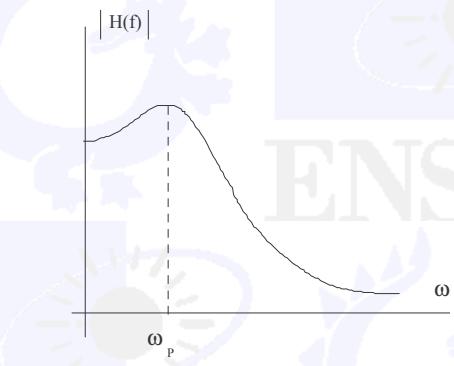
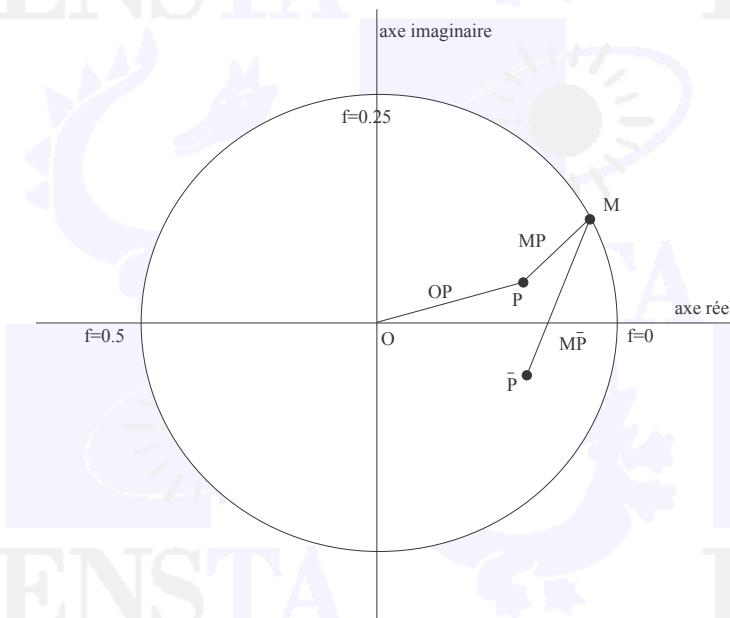
$\Delta = b_1^2 - 4b_2 < 0$, la fonction de transfert possède alors deux pôles complexes conjugués:

$$P = \frac{-b_1}{2} \pm j \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

d'où:

$$b_1 = -2 \operatorname{Re}(P) \text{ et } b_2 = |OP|^2$$

$$H(Z) = \frac{1}{MP \cdot M\bar{P}}$$



La fonction de transfert possède une fréquence de résonance et n'est plus strictement monotone.

4.4.3 Cellule générale du second ordre

$$y(n) = a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2) - b_1y(n-1) - b_2y(n-2)$$

$$H(Z) = \frac{a_0 + a_1Z^{-1} + a_2Z^{-2}}{1 + b_1Z^{-1} + b_2Z^{-2}}$$

Deux cas particuliers méritent d'être détaillés:

- Le filtre fréquentiel:

Si l'objectif de la fonction de transfert est de filtrer certaines fréquences présentes dans un signal, les zéros du numérateur vont se trouver sur le cercle unité. La fonction de transfert s'écrit alors:

$$H(Z) = a_0 \frac{(Z - Z_0)(Z - \bar{Z}_0)}{(Z - P)(Z - \bar{P})}$$

- Le déphaseur pur:

Une cellule du second ordre peut aussi être utilisée pour répondre, non pas à des objectifs de filtrage fréquentiel, mais à des objectifs de déphasage du signal. Ainsi il est possible de réaliser un déphaseur pur avec une cellule de ce type. Pour cela il suffit d'utiliser un numérateur et un dénominateur image l'un de l'autre.

$$H(Z) = \frac{a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}}{a_2 + a_1 Z^{-1} + a_0 Z^{-2}}$$

Il est facile de vérifier que:

$$H(Z) = \frac{Z^{-2} D(Z^{-1})}{D(Z)}$$

d'où:

$$|H(Z)|^2 = H(Z)H(\bar{Z}) = \frac{Z^{-2} D(Z^{-1})}{D(Z)} \frac{Z^2 D(Z)}{D(Z^{-1})} = 1$$

et:

$$\varphi(\omega) = 2\varphi_D(\omega) - 2\omega$$

avec $\varphi_D(\omega)$ égal au déphasage du dénominateur $D(Z^{-1})$.

4.4.4 Synthèse des filtres à réponse impulsionnelle infinie

La synthèse des filtres à réponse impulsionnelle infinie utilise des fonctions modèle définie en p et procède par transformation bilinéaire de ces dernières.

4.4.4.1 Rappel de la transformation bilinéaire:

Soit le filtre analogique défini par l'équation suivante:



$$y'(t) = by(t) + x(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace: $\int_0^{+\infty} y'(t)e^{-pt} dt = pY(p)$

il vient:

$$pY(p) = bY(p) + X(p)$$

d'où:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{p-b}$$

En exprimant la fonction de transfert du même filtre en numérique, il vient:

$$y(nT_e) = y(n-I)T_e + \int_0^{T_e} y'((n-I)T_e + \tau)d\tau$$

Le calcul de l'intégrale par la formule du trapèze conduit alors à:

$$y(nT_e) - y(n-I)T_e = \frac{T_e}{2} (y'(nT_e) + y'(n-I)T_e)$$

d'où:

$$y(nT_e) - y(n-I)T_e = \frac{T_e}{2} (by(nT_e) + x(nT_e) + by(n-I)T_e + x(n-I)T_e)$$

et par transformée en Z:

$$Y(Z) \left(\left(I - Z^{-I} \right) - \frac{bT_e}{2} \left(I + Z^{-I} \right) \right) = \frac{T_e}{2} \left(I + Z^{-I} \right) X(Z)$$

d'où la fonction de transfert en Z:

$$\begin{aligned} H(Z) &= \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\frac{T_e}{2} \left(I + Z^{-I} \right)}{\left(I - Z^{-I} \right) - \frac{bT_e}{2} \left(I + Z^{-I} \right)} \\ H(Z) &= \frac{\frac{I}{2} \left(I - Z^{-I} \right)}{\frac{T_e}{2} \left(I + Z^{-I} \right) - b} \end{aligned}$$

En identifiant avec la fonction de transfert en p:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{I}{p-b}$$

il est possible de faire l'approximation suivante:

$$\begin{aligned} p &\rightarrow Z & Z &\rightarrow p \\ p &= \frac{2}{T_e} \frac{1 - Z^{-I}}{1 + Z^{-I}} & \text{et} & Z = \frac{\frac{2}{T_e} + p}{\frac{2}{T_e} - p} \end{aligned}$$

Cette approximation constitue la transformation bilinéaire.

Propriétés de la transformation bilinéaire:

- Transformation du cercle unité:

$$\text{si } Z = e^{j\omega t} \Rightarrow p = \frac{2}{T_e} \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{1 + e^{-j\omega T_e}} = \frac{2}{T_e} \frac{e^{+j\omega \frac{T_e}{2}} - e^{-j\omega \frac{T_e}{2}}}{e^{+j\omega \frac{T_e}{2}} + e^{-j\omega \frac{T_e}{2}}} = j \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)$$

Le cercle unité est donc transformée en axe imaginaire.

- Déformation fréquentielle:

Au lieu d'obtenir :

$$p = j\omega$$

la transformée bilinéaire a conduit à :

$$p = j \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)$$

en posant f la fréquence vraie et f_d la fréquence déformée par la transformation bilinéaire il vient:

$$f = \frac{1}{\pi T_e} \operatorname{tg}(\pi T_e f_d)$$

La transformation bilinéaire entraîne donc une déformation en fréquence qui est d'autant plus importante que la fréquence est élevée.

Grâce à la transformation bilinéaire la synthèse des filtres numériques de type RII se résume à approcher le gabarit désiré par des fonctions modèles définies en p puis à transformer ces dernières pour obtenir directement les coefficients du filtre.

4.4.4.2 Les fonctions modèle

Plusieurs fonctions modèles permettent d'approcher au mieux un gabarit demandé. Les plus célèbres d'entre elles sont des fonctions de Butterworth, elliptiques ou des polynômes de Tchebycheff.

4.5 Relations entre le nombre de coefficients et le gabarit

Il est possible d'estimer le nombre de coefficients dont aura besoin un filtre RII en fonction du gabarit demandé au moyen de la formule suivante:

$$N \approx 1.08 \log_{10} \left[\frac{2}{\delta_2 \sqrt{\delta_1}} \right] \log_{10} \left[\frac{F_e}{\Delta f} \frac{4}{\pi} \sin \left(2\pi \frac{f_l}{F_e} \right) \right]$$

5. Remarque

Un certain nombre d'écritures en Z vont être présentées dans ce polycopié, on insistera donc sur le point suivant :

Lorsqu'un filtre de type RII est défini par ses pôles et zéros, il faut être prudent au moment de reconstruire les coefficients avec lesquels on va filtrer le signal.

Deux solutions sont possibles :

- soit on reconstruit le polynôme en Z , on développe puis on repasse en Z^{-1} pour bien identifier les coefficients.
- soit on reconstruit directement le polynôme en Z^{-1} .

Mais attention les pôles et zéros concernent Z

Exemple :

Soit le filtre d'ordre 2 défini par deux zéros Z_0 et Z_0^* et par ses deux pôles P_0 et P_0^* .

Reconstruction en Z :

$$H(Z) = \frac{(Z - Z_0)(Z - Z_0^*)}{(Z - P)(Z - P^*)} = \frac{Z^2 - 2\operatorname{Re}(Z_0)Z + Z_0Z_0^*}{Z^2 - 2\operatorname{Re}(P)Z + PP^*} = \frac{1 - 2\operatorname{Re}(Z_0)Z^{-1} + Z_0Z_0^*Z^{-2}}{1 - 2\operatorname{Re}(P)Z^{-1} + PP^*Z^{-2}}$$

D'où l'équation de filtrage :

$$y(n) = x(n) - 2\operatorname{Re}(Z_0)x(n-1) + Z_0Z_0^*x(n-2) + 2\operatorname{Re}(P)y(n-1) - PP^*y(n-2)$$

Ou reconstruction en Z^{-1} :

$$H(Z) = \frac{(1 - Z_0Z^{-1})(1 - Z_0^*Z^{-1})}{(1 - PZ^{-1})(1 - P^*Z^{-1})} = \frac{1 - 2\operatorname{Re}(Z_0)Z^{-1} + Z_0Z_0^*Z^{-2}}{1 - 2\operatorname{Re}(P)Z^{-1} + PP^*Z^{-2}}$$

D'où l'équation de filtrage :

$$y(n) = x(n) - 2\operatorname{Re}(Z_0)x(n-1) + Z_0Z_0^*x(n-2) + 2\operatorname{Re}(P)y(n-1) - PP^*y(n-2)$$

NE MELANGER LES DEUX EN AUCUN CAS

$$H(Z) = \frac{(Z^{-1} - Z_0)(Z^{-1} - Z_0^*)}{(Z^{-1} - P)(Z^{-1} - P^*)}$$

Faux

ENSTA



ENSTA



ENSTA

ENSTA



ENSTA



ENSTA

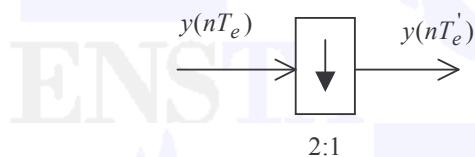


ENSTA

6. Applications du filtrage numérique

6.1 Décimation

Il arrive souvent qu'une chaîne de traitement numérique d'un signal fonctionne avec différents rythmes d'échantillonnage. Lorsque la fréquence d'échantillonnage décroît on parle alors de décimation. L'opération de décimation est triviale, il suffit de supprimer un certain nombre d'échantillons. Elle est en général symbolisée par une flèche orientée de haut en bas.



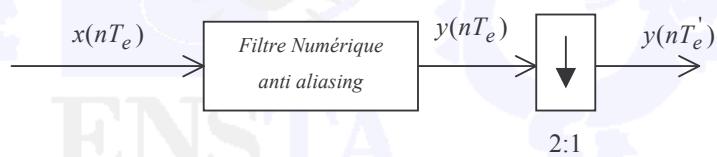
Le schéma ci dessus représente une décimation par 2, pour laquelle il suffira de supprimer un échantillon sur deux.

La fréquence d'échantillonnage passera ainsi de F_e à $F'_e = \frac{F_e}{2}$. Avant d'effectuer une telle opération il faut

s'assurer que le théorème de Shannon reste vérifié. Il est donc nécessaire de restreindre la bande B du signal afin

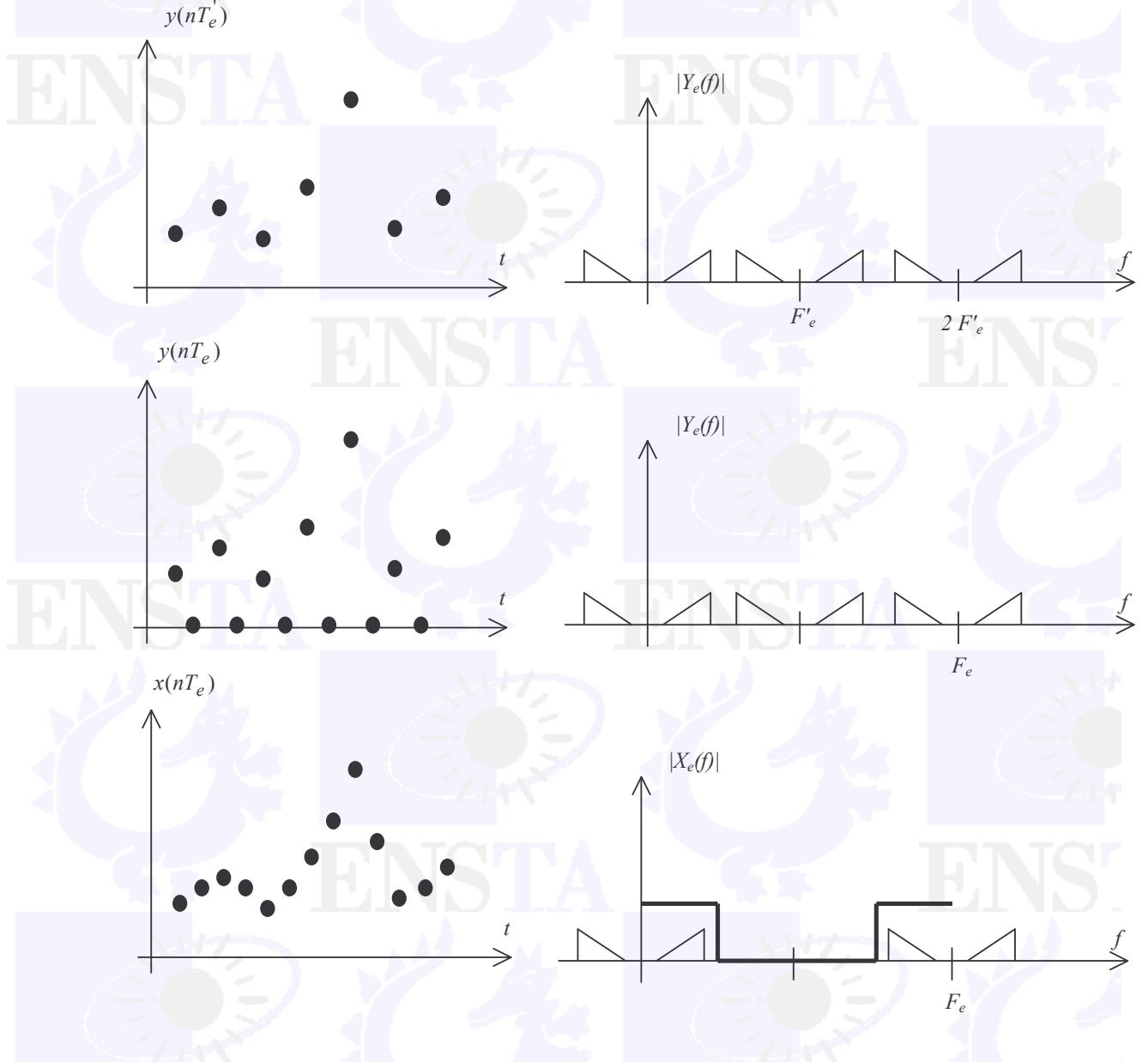
qu'elle ne dépasse pas $B \leq \frac{F'_e}{2} = \frac{F_e}{4}$. Ce filtrage "anti aliasing" est cette fois réalisé en numérique au cœur des

traitements, c'est la différence essentielle avec le filtrage anti aliasing "traditionnel" réalisé en analogique avant l'opération d'échantillonnage.

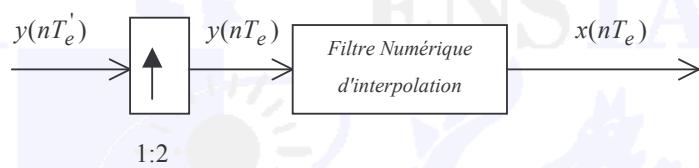


6.2 Interpolation

L'opération duale de la décimation est l'opération d'interpolation. Pour l'effectuer on utilise un filtre numérique et une insertion de zéros au milieu du signal d'origine. Considérons, pour l'exposer, le cas d'une interpolation par un facteur 2 d'un signal $y(nT'_e)$. On commence par insérer un valeur nulle entre chaque valeur du signal $y(nT'_e)$. La fréquence d'échantillonnage est alors doublée, on a maintenant $F_e = 2F'_e$. La forme du spectre du signal est inchangée, les valeurs insérées étant des zéros. Cependant ce spectre ne correspond pas à celui que l'on aurait obtenu en échantillonnant réellement le signal analogique avec F_e . Il y a en effet trop de répétitions du motif au niveau du spectre. Il suffit alors simplement de supprimer ces motifs au moyen d'un filtre numérique pour obtenir le spectre du signal numérique, comme si il avait été échantillé d'entrée à la fréquence F_e . Ce filtrage numérique correspond à une opération d'interpolation des valeurs temporelles du signal.



L'opération d'interpolation va se symboliser par :



En combinant la décimation et l'interpolation il est possible d'effectuer des modifications fractionnaires de la fréquence d'échantillonnage.

6.3 Filtres de Nyquist

Dans le domaine des communications numériques, le filtrage numérique joue un rôle important. C'est en particulier le cas lors d'une transmission numérique où les symboles à transmettre sont mis en forme au moyen d'un filtre numérique H qui ne doit pas créer d'interférence entre symboles (IES). Les conditions que doit satisfaire ce filtre équivalent H pour que l'interférence intersymbole soit nulle, ont été énoncées pour la première fois par Nyquist et constituent le "premier critère de Nyquist". Ces conditions peuvent s'énoncer dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. Dans le domaine temporel, elles s'appliquent à la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre :

$$\begin{cases} h(0) = 1, \\ h(nT_s) = 0, \text{ } n \text{ entier } \neq 0 \end{cases}$$

On considère la réponse impulsionnelle de $h(t)$ aux instants d'échantillonnage T_s dont on fait la Transformée de Fourier :

$$h(t) \sum_n \delta(t - nT_s) = \delta(t)$$

d'où :

$$H(f) \otimes \frac{1}{T_s} \sum_k \delta(f - \frac{k}{T_s}) = 1$$

ou encore :

$$\sum_k H(f - \frac{k}{T_s}) = T_s$$

On considère alors que le filtre H a une fréquence de coupure $\frac{l}{T_s}$ telle que :

$$H(f) = 0 \text{ pour } |f| \geq \frac{l}{T_s}$$

L'expression précédente devient alors :

$$H(f) + H(f - \frac{l}{T_s}) = T_s$$

En considérant que le filtre H est à phase linéaire, l'égalité devient :

$$|H(f)| + \left|H(f - \frac{l}{T_s})\right| = T_s$$

Le premier critère de Nyquist s'exprime donc, dans le domaine temporel de la manière suivante :

Un filtre passe bas H de fréquence de coupure $\leq \frac{l}{T_s}$ n'introduit pas d'interférence intersymbole lors de la

transmission d'un signal $\sum_k a_k \delta(t - kT_s)$ si sa fonction de transfert $H(f)$ satisfait deux conditions :

1° la phase de $H(f)$ est une fonction linéaire de la fréquence;

2° le module de $H(f)$, c'est à dire le gain en amplitude du filtre est symétrique par rapport au point

$$\left(\frac{1}{2T_s}, \frac{T_s}{2} \right) \text{ pour } 0 \leq f \leq \frac{1}{T_s}$$

Le filtre de fréquence de coupure la plus basse satisfaisant le 1^{er} critère de Nyquist est le filtre passe bas

rectangulaire de fréquence de coupure $f_c = \frac{1}{2T_s}$. La réponse impulsionnelle correspondante est de la forme :

$$h(t) = \frac{\sin \pi \frac{t}{T_s}}{\pi \frac{t}{T_s}}$$

6.3.1 Filtre en cosinus surélevé

$$h(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)}{\frac{\pi t}{T_s}} \left[\frac{\sin\left(\beta \frac{\pi t}{T_s}\right)}{1 - 4\left(\frac{\beta t}{T_s}\right)^2} \right]$$

Modem de communications numériques avec N échantillons par symboles et une période d'échantillonnage T_e .

$$h(k T_e) = \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)}{\frac{\pi k}{N}} \left[\frac{\sin\left(\beta \frac{\pi k}{N}\right)}{1 - 4\left(\frac{\beta k}{N}\right)^2} \right]$$

ex: $T_s = 3T_e$



Filtre en racine de cosinus surélevé

$$g(t) = \frac{(1-\beta)}{T_s} \frac{\sin\left(\frac{(1-\beta)\pi t}{T_s}\right)}{\frac{(1-\beta)\pi t}{T_s}} + \frac{4\beta}{\pi T_s} \frac{\cos\left((1+\beta)\frac{\pi t}{T_s}\right) + \frac{4\beta t}{T_s} \sin\left(\frac{(1-\beta)\pi t}{T_s}\right)}{1 - \left(\frac{4\beta t}{T_s}\right)^2}$$

7. Introduction aux signaux aléatoires

La démarche la plus intuitive et naturelle pour représenter un signal consiste à exprimer la valeur de ce dernier au cours du temps. La variable choisie est alors le temps t et le signal s'exprime sous la forme d'une fonction $x(t)$.

Lorsque la fonction $x(t)$ est parfaitement déterminée, on parle de signal déterministe. De tels signaux ont été rencontrés à de nombreuses occasions lors des cours précédents.

On s'est ainsi intéressé aux signaux sinusoïdaux : $x(t) = \sin(\omega t)$ ou à des signaux échelons : $x(t) = U(t)$ ou encore à d'autres types de signaux.

Cependant, lorsque l'on s'intéresse à des signaux réels, comme la valeur d'une tension aux bornes d'une résistance ou à la valeur du courant parcourant une antenne ou à d'autres exemples; On conçoit bien que les valeurs du signal observé vont être fonctions d'une multitude de phénomènes. Si l'on reprend l'exemple de la résistance, la valeur de la tension va varier continuellement autour d'une valeur moyenne en fonction de l'agitation des électrons, pour une antenne l'environnement électromagnétique va être responsable de nombreuses variations et l'on conçoit intuitivement qu'il est impossible de déterminer de manière tout à fait exacte la valeur du signal $x(t)$.

On formalise alors le signal comme étant une variable aléatoire qui évolue dans le temps et l'on parle de processus aléatoire. En formalisant on pourrait introduire la variable aléatoire $X(t)$ et la distinguer de $x(t)$ qui représente la valeur prise par cette variable aléatoire à l'instant t . Dès lors l'ensemble des valeurs du signal $x(t)$ est considéré comme étant une réalisation particulière d'un processus aléatoire.

Dès que l'on introduit cette notion de variable aléatoire on conçoit que l'on va s'intéresser très rapidement aux probabilités liées à cette variable aléatoire, à sa densité de probabilité si la variable est continue et enfin à ses moments statistiques (moyenne, covariance, et éventuellement des moments d'ordres plus élevés).

Un exemple typique, qui sera repris plus en détail dans la suite du cours, est le cas du bruit blanc gaussien que l'on rencontre très souvent dans les problèmes de traitement du signal et de communications numérique. Or ce signal particulier est justement défini par les adjectifs *blanc* et *gaussien* qui caractérisent parfaitement sa densité de probabilité (gaussien) et ses moments d'ordre deux (blanc).

Partant dorénavant de signaux aléatoires, ce qui est le cas le plus général que l'on puisse envisager, nous allons dès maintenant considérer un sous ensemble de ces signaux qui seront les signaux stationnaires.

Définition de la stationnarité :

Un signal aléatoire est défini à chaque instant t par la loi de probabilité de son amplitude $X(t)$. Cette loi de probabilité peut s'exprimer par une densité de probabilité $p_X(x, t)$ définie de la manière suivante :

$$p_X(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Pr ob[x \leq X(t) \leq x + \Delta x]}{\Delta x} \quad (58.)$$

Le signal est stationnaire si ses propriétés statistiques sont indépendantes du temps, c'est à dire, si sa densité de probabilité est indépendante du temps :

$$p_X(x, t) = p_X(x)$$

(59.)

Définition d'un signal du second ordre :

Le signal sera dit du second ordre s'il possède un moment d'ordre 1 appelé valeur moyenne, qui est l'espérance mathématique de $X(t)$, notée $E[X(t)]$ et définie par :

$$m_1(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_X(x, t) dx$$

(60.)

et un moment d'ordre 2, appelé fonction de covariance :

$$m_2(t_1, t_2) = E[X(t_1), X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

(61.)

où $p_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$ est la densité de probabilité du couple de variables aléatoires $[X(t_1), X(t_2)]$.

Définition de la stationnarité à l'ordre 2 :

Le caractère de stationnarité peut être limité aux moments du premier et du second ordre, on dit alors que le signal est stationnaire à l'ordre 2. On a alors :

$$m_1 = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_X(x) dx, \quad m_1 \text{ constante indépendante du temps}$$

Pour l'ordre 2, l'indépendance du temps s'écrit :

$$p_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_X(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) = p_X(x_1, x_2; \tau) \quad \text{avec } \tau = t_2 - t_1$$

(62.)

Seul intervient l'écart entre les deux instants d'observation. On introduit alors la fonction d'autocorrélation $r_{XX}(\tau)$ du signal aléatoire :

$$r_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t - \tau)]$$

(63.)

La réalisation $x(t)$ du signal aléatoire $X(t)$ possède aussi une moyenne temporelle m_T définie par :

$$m_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt$$

(64.)

Définition de l'ergodicité d'un signal stationnaire à l'ordre 2 :

On dira que le signal est ergodique lorsque que l'on peut confondre la moyenne temporelle m_T avec la moyenne m_1 :

$$m_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt$$

(65.)

et lorsque que l'on peut calculer la fonction d'autocorrélation de la même manière, c'est à dire :

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x(t-\tau)dt$$

(66.)

Ce résultat a des conséquences pratiques très importantes car il va permettre d'accéder aux propriétés statistiques du signal à un instant donné à partir de l'observation de ce signal au cours du temps.

Les développements précédents ont essentiellement concerné des signaux à valeurs réelles. Ces signaux correspondent intuitivement et physiquement à la plupart des signaux rencontrés. Lorsque l'on considère une valeur de tension ou de courant et que l'on se place derrière un convertisseur analogique numérique, les signaux sont bien entendu réels. Cependant, dans bien des cas, en particulier en communication numériques, on sera amené à traiter des enveloppes complexes de signaux modulés (voir aussi la définition du signal analytique). Il est donc nécessaire, afin de ne pas restreindre la généralité de la suite des algorithmes et méthodes présentées dans ce cours, de considérer dorénavant des signaux à valeurs complexes.

De plus on a jusqu'alors bien séparé le processus $X(t)$ et sa réalisation $x(t)$. Cependant afin d'éviter de confondre le processus et la Transformée de Fourier $X(f)$ de sa réalisation, on abandonnera à partir de maintenant la notation $X(t)$. Le lecteur avisé sera à même de comprendre les écritures du type $E[x(t)]$ comme l'espérance de la variable aléatoire.

Résumé :

Le signal aléatoire $x(t)$ est une réalisation d'un processus aléatoire.

Le signal sera considéré comme ergodique et stationnaire à l'ordre 2, c'est à dire :

$$E[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)dt = m$$

$$E[x(t)x^*(t-\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x^*(t-\tau)dt = r_{xx}(\tau)$$

8. Analyse Spectrale

8.1 Problématique de l'Analyse spectrale

La représentation du signal sous la forme $x(t)$ est une démarche naturelle mais elle ne correspond pas forcément à la meilleure représentation physique des signaux rencontrés. En effet, l'individu ou les systèmes électroniques sont souvent plus sensibles à la puissance et à la fréquence des signaux et la représentation du signal sous la forme de sa répartition de puissance en fonction de la fréquence permet, dans bien des cas, d'extraire de manière plus immédiate l'information qui réside dans ce dernier. Le signal est alors représenté par une fonction $P(f)$ appelée densité spectrale de puissance. Le passage de $x(t)$ à $P(f)$ constitue l'*Analyse Spectrale*.

Il existe deux grandes classes de méthodes pour estimer la densité spectrale de puissance d'un signal $x(t)$. La première, l'*estimation spectrale non paramétrique*, n'utilise aucune connaissance a priori sur le signal et part uniquement de l'observation de ce dernier. La deuxième, l'*estimation spectrale paramétrique*, utilise un modèle paramétrique décrivant le signal, modèle à partir duquel il est aisément d'obtenir la densité spectrale de puissance. Les paramètres du modèle sont adaptés en fonction du signal observé. Entre ces deux méthodes il existe une troisième classe d'approches qui suppose que le signal est composé d'un certain nombre de raies spectrales dont il convient de trouver les fréquences et les puissances. Ce type de méthodes sera classé dans ce cours sous l'appellation d'*estimation spectrale par décomposition harmonique*.

8.2 Estimation Spectrale non paramétrique

8.2.1 Périodogramme, Corrélogramme

La Transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $r_{xx}(\tau)$ du processus aléatoire $x(t)$ stationnaire à l'ordre 2 s'écrit:

$$P(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (67.)$$

elle est égale à la densité spectrale de puissance $P(f)$ du processus $x(t)$.

En effet, pour $\tau = 0$, il vient:

$$r(0) = E[x(t)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) e^{j2\pi f 0} df = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) df \quad (68.)$$

En supposant l'hypothèse ergodique vérifiée, l'espérance mathématique s'écrit:

$$E[x(t)^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) df \quad (69.)$$

$P(f)$ représente donc bien la densité spectrale de puissance du processus $x(t)$. Il s'agit là du théorème de Wiener-Kintchine.

L'hypothèse ergodique permettant de confondre l'espérance mathématique avec une moyenne temporelle, le développement de $r(\tau)$ donne :

$$P(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x^*(t-\tau) d\tau \right] e^{-j2\pi f\tau} dt \quad (70.)$$

On peut aussi introduire le spectre complexe de la réalisation tronquée du processus $x(t)$:

$$X_{2T}(f) = \int_{-T}^{+T} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (71.)$$

En prenant le carré de cette expression, il vient :

$$\frac{I}{2T} |X_{2T}(f)|^2 = \frac{I}{2T} \int_{-T}^{+T} \int_{-T}^{+T} x(u)x^*(v)e^{-j2\pi fu} e^{+j2\pi fv} du dv \quad (72.)$$

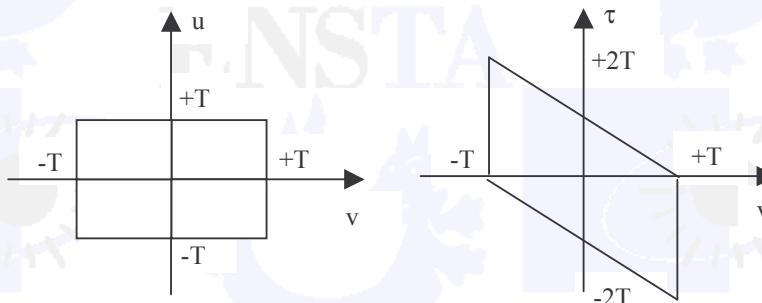
et en prenant l'espérance de cette expression, on obtient :

$$E\left[\frac{I}{2T} |X_{2T}(f)|^2\right] = \frac{I}{2T} \int_{-T}^{+T} \int_{-T}^{+T} r_{xx}(u-v)e^{-j2\pi f(u-v)} du dv \quad (73.)$$

En effectuant alors le changement de variable suivant

$$\begin{cases} \tau = u - v \\ v' = v \end{cases}$$

et en prenant garde aux intervalles de variation des nouvelles variables, il vient :



Pour $\tau \geq 0$, v' varie de $-T$ à $T - \tau$ et pour $\tau \leq 0$, v' varie de T à $-T - \tau$

$$E\left[\frac{I}{2T} |X_{2T}(f)|^2\right] = \frac{I}{2T} \int_{\tau=0}^{2T} \int_{v'=-T}^{T-\tau} r_{xx}(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau dv' + \int_{\tau=0}^{-2T} \int_{v'=T}^{-T-\tau} r_{xx}(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau dv' \quad (74.)$$

$$E\left[\frac{I}{2T} |X_{2T}(f)|^2\right] = \frac{I}{2T} \int_{\tau=0}^{2T} r_{xx}(\tau)(2T - |\tau|)e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_{\tau=0}^{-2T} r_{xx}(\tau)(-2T + |\tau|)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (75.)$$

d'où finalement :

$$E\left[\frac{1}{2T}|X_{2T}(f)|^2\right] = \int_{\tau=-2T}^{2T} r_{xx}(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (76.)$$

En introduisant alors la fonction I_{4T} indicatrice de l'intervalle $[-2T, +2T]$, il vient :

$$E\left[\frac{1}{2T}|X_{2T}(f)|^2\right] = TF\left[r_{xx}(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) I_{4T}\right] \quad (77.)$$

On obtient donc :

$$E\left[\frac{1}{2T}|X_{2T}(f)|^2\right] = P(f) * TF\left[\left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) I_{4T}\right] \quad (78.)$$

Lorsque T tend vers l'infini, le deuxième terme du produit de convolution tend vers $\delta(f)$, d'où :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{2T}|X_{2T}(f)|^2\right] = P(f) \quad (79.)$$

En considérant alors un cas numérique, où l'observation du signal $x(t)$ se résume à N valeurs échantillonées à la période T_e , la densité spectrale peut être estimée en limitant l'intégrale précédente et en oubliant l'espérance mathématique.

d'où :

$$P_{per}(f) = \frac{1}{NT_e} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-j2\pi n T_e f} \right|^2 \quad (80.)$$

Cet estimateur de la densité spectrale de la densité spectrale de puissance du signal $x(nT_e)$ est appelé *périodogramme*.

Il demande, pour être calculé, la mise au carré de la Transformée de Fourier du signal numérique $x(nT_e)$ sur N points. Il est, depuis la mise au point de l'algorithme de Transformation de Fourier Rapide (TFR ou FFT en anglais) par J. Cooley et J. Tukey en 1965, l'estimateur le plus employé.

Jusqu'à la mise au point de l'algorithme de la FFT, la méthode la plus utilisée consistait à estimer N' valeurs de la fonction d'autocorrélation $r(p)$ avec $N' < N$ et à calculer la Transformée de Fourier Discrète (TFD ou DFT en anglais) sur les N' points obtenus. Cet estimateur de la densité spectrale de puissance, du aux travaux de Blackman et Tukey, porte le nom de *corrélogramme*.

$$P_{cor}(f) = \sum_{p=-(N'-1)}^{N'-1} r_{xx}(p) e^{-j2\pi pf} \quad (81.)$$

avec :

$$r(p) = \frac{1}{N} \sum_{n=p}^{N-1} x(n)x(n-p)^*$$

pour $p = 0 \rightarrow N-1$

(82.)

Pour $N' = N$ les estimateurs du *périodogramme* et du *corrélogramme* sont identiques.

En effet,

$$P_{cor}(f) = \frac{1}{N} \sum_{p=-(N-1)}^{N-1} \sum_{n=p}^{N-1} x(n)x(n-p)^* e^{-j2\pi pf}$$

(83.)

d'où:

$$P_{cor}(f) = \frac{1}{N} \sum_{p=-(N-1)}^{N-1} \sum_{n=p}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nf} x(n-p)^* e^{j2\pi(n-p)f}$$

(84.)

expression qui peut encore s'écrire:

$$P_{cor}(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nf} \right|^2 = P_{per}(f)$$

(85.)

Les deux estimateurs sont donc bien identiques pour $N' = N$.

Propriétés du périodogramme:

Le périodogramme constituant un estimateur de la densité spectrale de puissance du processus $x(nT_e)$, il est nécessaire d'étudier son biais et sa variance.

- Le calcul de l'espérance de $P_{per}(f)$ donne:

$$E[P_{per}(f)] = E \left[\sum_{p=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}(p) e^{-j2\pi pf} \right]$$

(86.)

$$\text{avec : } r(p) = \frac{1}{N} \sum_{n=p}^{N-1} x(n)x(n-p)^*$$

d'où:

$$E[P_{per}(f)] = \sum_{p=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}(p) \frac{N-|p|}{N} e^{-j2\pi pf}$$

(87.)

encore grâce aux propriétés de la Transformée de Fourier:

$$E[P_{per}(f)] = P(f) * N \left(\frac{\sin \pi f N}{N \sin \pi f} \right)^2$$

(88.)

L'estimateur du périodogramme est donc une estimation biaisé de la densité spectrale de puissance $P(f)$ du processus $x(nT_e)$. L'estimateur est en fait le résultat du filtrage, dans le domaine fréquentiel de $P(f)$ par le filtre

$N \left(\frac{\sin \pi f N}{N \sin \pi f} \right)^2$. Lorsque N tend vers l'infini ce filtre tend vers $\delta(f)$, le périodogramme est donc asymptotiquement sans biais.

- Le calcul de la variance est délicat et conduit, pour des signaux gaussiens à :

$$Var(P_{per}(f)) = P(f) \left[I + N \left(\frac{\sin(2\pi f/N)}{2\pi f/N} \right)^2 \right] \quad (89.)$$

Cette variance peut être diminuée en séparant l'ensemble des N valeurs de $x(nT_e)$ en $\frac{N}{K}$ sous ensembles de $K < N$ valeurs. Il est alors possible de calculer K estimateurs et de faire la moyenne des K estimateurs obtenus. La variance est alors divisée par K^2 . Cette amélioration de la variance de l'estimateur se paye par une diminution de résolution de ce dernier. En effet la résolution spectrale est en $\frac{I}{NT_e}$ dans le cas de N échantillons et en $\frac{I}{KT_e}$ dans le cas de K échantillons.

Enfin, les lobes secondaires de $N \left(\frac{\sin \pi f n}{\pi f N} \right)^2$ peuvent être atténusés en introduisant des fenêtres de pondérations qui vont être appliquées directement sur le signal observé $x(nT_e)$.

En conclusion, le périodogramme est un estimateur de la densité spectrale de puissance qui est d'autant meilleur que le signal est observé sur une longue plage de stationnarité. L'algorithme de la Transformée de Fourier Rapide est bien connu et la plupart des processeurs de signaux sont vendus avec des routines de TFR optimisées. Cet estimateur est donc aisément à utiliser et c'est la raison pour laquelle c'est l'estimateur le plus employé aujourd'hui.

Pour calculer un périodogramme il faut donc:

- observer N valeurs du signal $x(nT_e)$,
- calculer une TFR sur N points avec mise au carré.

8.2.2 Méthode du minimum de variance: méthode de Capon

Pour chaque fréquence f , cette méthode cherche un *filtre adapté* dont la réponse vaut I pour cette fréquence f et 0 partout ailleurs. Une fois ce filtre obtenu l'estimateur $P_{Cap}(f)$ n'est autre que la puissance de sortie du filtre obtenu pour la fréquence f .

La sortie $y(n)$ de ce filtre s'écrit :

$$y(n) = \sum_{i=0}^N h_i^* x(n-i)$$

(90.)

ou plus simplement sous forme vectorielle :

$$y(n) = H^T X(n)$$

(91.)

$$\text{avec } H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} \text{ et } X(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-N+1) \end{bmatrix}$$

Le filtre H doit donc minimiser $E[y(n)^2]$ avec la contrainte $H^T F = I$
avec :

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j2\pi f} \\ e^{j4\pi f} \\ \vdots \\ e^{j2N\pi f} \end{bmatrix}$$

(92.)

Ce qui s'écrit, en utilisant un multiplicateur de Lagrange:

H optimal est tel que $E[H^T X(n)]^2 + \alpha(I - H^T F)$ est minimal
soit, en annulant la dérivé par rapport à H :

$$H = \frac{\alpha}{2} R_N^{-1} F$$

(93.)

avec $R_N = E[X(n)X(n)^T]$ matrice d'autocorrélation du signal $x(n)$.

en introduisant α dans l'expression de la contrainte $H^T F = I$, il vient :

$$\alpha = \frac{2}{F^T R_N^{-1} F}$$

(94.)

d'où finalement :

$$H = \frac{R_N^{-1} F}{F^T R_N^{-1} F}$$

(95.)

Pour estimer $P_{Cap}(f)$ il ne reste plus qu'à calculer:

$$P_{Cap}(f) = E[y(n)^2] = E[H^T X(n) X(n)^T H] \quad (96.)$$

$$P_{Cap}(f) = \frac{F^T R_N^{-1} R_N R_{N+1}^{-1} F}{F^T R_N^{-1} F F^T R_N^{-1} F}$$

$$P_{Cap}(f) = \frac{I}{F^T R_N^{-1} F}$$

or :

$$F^T R_N^{-1} F = [I, e^{-j2\pi f}, e^{-j4\pi f}, \dots, e^{-j2N\pi f}] \begin{bmatrix} I \\ e^{j2\pi f} \\ \vdots \\ e^{j2N\pi f} \end{bmatrix} \quad (99.)$$

d'où:

$$P_{Cap}(f) = \frac{I}{\sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N \rho_{kl} e^{-j2\pi(k-l)f}} \quad (100.)$$

En conclusion pour obtenir l'estimateur de Capon, il faut:

- observer N échantillons du signal $x(nT_e)$
- estimer la matrice d'autocorrélation et l'inverser pour obtenir les termes ρ_{kl}
- calculer $P_{Cap}(f)$ pour chaque fréquence f .

Cette méthode souffre donc d'un coût de calcul supérieur aux estimateurs précédents. Il est possible de démontrer que cet estimateur à une variance minimale et c'est la raison pour laquelle il est souvent appelé estimateur du minimum de variance.

8.3 Estimation spectrale par décomposition harmonique

8.3.1 Méthode de Pisarenko:

Dans cette méthode, le signal $x(n)$ est supposé être constitué d'une somme de N sinusoïdes $s(n)$ et d'un bruit blanc additif $b(n)$.

$$x(n) = s(n) + b(n)$$

(101.)

Sachant que toute sinusoïde pure $\sin(n\omega)$ peut s'écrire:

$$\sin(n\omega) = 2 \cos \omega \sin(n-1)\omega - \sin(n-2)\omega$$

il est possible d'écrire:

$$s(n) = - \sum_{m=1}^{2N} a_m s(n-m)$$

d'où:

$$x(n) = - \sum_{m=1}^{2N} a_m s(n-m) + b(n)$$

en remplaçant $s(n-m)$ par $x(n-m) - b(n-m)$, il vient:

$$\sum_{m=0}^{2N} a_m x(n-m) = \sum_{m=0}^{2N} a_m b(n-m)$$

ce qui peut s'écrire matriciellement:

$$X(n)^T A = B(n)^T A$$

avec:

$$\begin{aligned} X(n)^T &= [x(n), x(n-1), \dots, x(n-2N)]^T \\ B(n)^T &= [b(n), b(n-1), \dots, b(n-2N)]^T \end{aligned}$$

et :

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2N} \end{bmatrix}$$

d'où:

$$\begin{aligned} E[X(n)X(n)^T]A &= E[X(n)B^T(n)]A = E[(S(n) + B(n))B(n)^T]A \\ R_{2N+1}A &= E[(S(n) + B(n))B(n)^T]A \end{aligned}$$

Or, le bruit est supposé blanc, de variance σ^2 et décorrélé du mélange de sinusoïdes, cette équation devient donc:

$$R_{2N+1}A = \sigma^2 I A = \sigma^2 A$$

Le vecteur A est donc le vecteur propre associé à la valeur propre σ^2 avec la contrainte $a_0 = 1$.

Ayant le vecteur A , on peut écrire la transformée en Z de l'équation:

$$s(n) = - \sum_{m=1}^{2N} a_m s(n-m)$$

$$S(Z) \left(1 - \sum_{m=1}^{2N} a_m Z^{-m} \right) = 0$$

les valeurs de Z pour lesquelles cette équation est vérifiée donnent les valeurs des fréquences présentes dans le

mélange. Il faut donc extraire les racines du polynôme $1 - \sum_{m=1}^{2N} a_m Z^{-m}$ pour obtenir les N valeurs de fréquences.

Si N et σ^2 ne sont pas connus a priori, il suffit de surdimensionner la matrice R et d'analyser ses valeurs propres.

Théoriquement celles ci doivent, au bout de N ordres, atteindre une valeur constante égale à σ^2 . Il existe de nombreux critères qui permettent de détecter ce blocage à σ^2 des valeurs propres.

Enfin, il est possible d'obtenir les puissances des sinusoïdes détectées. En effet, il est facile de vérifier que, dans le cas d'un mélange de N sinusoïdes de pulsation ω_i et de puissance P_i , on a :

$$\begin{aligned} r(1) &= P_1 \cos \omega_1 + P_2 \cos \omega_2 + \dots + P_N \cos \omega_N \\ r(2) &= P_1 \cos 2\omega_1 + P_2 \cos 2\omega_2 + \dots + P_N \cos 2\omega_N \\ &\dots \\ r(N) &= P_1 \cos N\omega_1 + P_2 \cos N\omega_2 + \dots + P_N \cos N\omega_N \end{aligned}$$

disposant des pulsations ω_i et des coefficients d'autocorrélation $r(i)$, il "suffit" de résoudre ce système pour trouver les puissances respectives P_i des raies spectrales identifiées.

En conclusion pour analyser un signal selon la méthode de Pisarenko, il faut:

- observer N valeurs du signal $x(nT_e)$,
- calculer la matrice d'autocorrélation et en faire la décomposition en éléments propres,
- détecter σ^2 et en déduire le nombre de sinusoïdes,
- extraire les racines d'un polynôme complexe de degré $2N$,
- enfin si l'on veut les puissances, résoudre un système réel de N équations à N inconnues.

La décomposition en éléments propres reste pour l'instant l'étape la plus délicate à réaliser de manière rapide et c'est le frein principal à l'emploi de cette méthode.

8.3.2 Méthode de Prony:

Dans cette méthode le signal est, comme dans la méthode de Pisarenko, supposé être constitué d'une somme de N sinusoïdes mais le bruit est remplacé par un amortissement sur ces dernières. L'hypothèse de départ s'écrit donc :

$$x(n) = \sum_{m=1}^N b_m Z_m^n$$

avec :

$$Z_m = e^{\alpha_m} e^{j2\pi f_m}$$

On peut alors fabriquer le polynôme :

$$\psi(Z) = \prod_{k=1}^N (Z - Z_k) = \sum_{i=0}^N a_i Z^{N-i} \quad \text{avec } a_0 = 1$$

D'après l'hypothèse de départ sur $x(n)$ on a :

$$x(n-m) = \sum_{l=1}^N b_l Z_l^{n-m}$$

en multipliant cette équation par a_m et en effectuant une sommation sur m, il vient :

$$\sum_{m=0}^N a_m x(n-m) = \sum_{m=0}^N a_m \sum_{l=1}^N b_l Z_l^{n-m}$$

ou encore :

$$\sum_{m=0}^N a_m x(n-m) = \sum_{l=1}^N b_l Z_l^{n-N} \sum_{m=0}^N a_m Z_l^{N-m}$$

or $\sum_{m=0}^N a_m Z_l^{N-m} = 0$ par définition des coefficients a_m du polynôme $\psi(Z)$ dont les racines sont les Z_l , d'où :

$$\sum_{m=0}^N a_m x(n-m) = 0$$

et donc :

$$x(n) = - \sum_{m=1}^N a_m x(n-m)$$

Les coefficients a_m peuvent donc être obtenus par la résolution du système linéaire de dimension N suivant :

$$\begin{bmatrix} x(N+I) \\ \vdots \\ x(2N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(N) & \dots & x(I) \\ x(N+I) & \dots & x(2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x(2N) & \dots & x(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

A partir des N coefficients a_m il est possible de former le polynôme :

$$\psi(Z) = \sum_{m=0}^N a_m Z^{m-i} \text{ avec } a_0 = 1$$

et d'en extraire les N racines complexes. Les modules de ces racines donnent alors les affaiblissements α_m tandis que les phases donnent les fréquences f_m .

Les amplitudes respectives b_m des différentes sinusoïdes peuvent enfin être obtenues en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} I & I & \dots & I \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_1^{N-I} & \dots & Z_N^{N-I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-I} \end{bmatrix}$$

Pour cette méthode il faut donc :

- observer $2N$ valeurs du signal $x(nT_e)$
- résoudre un système linéaire complexe de dimension N

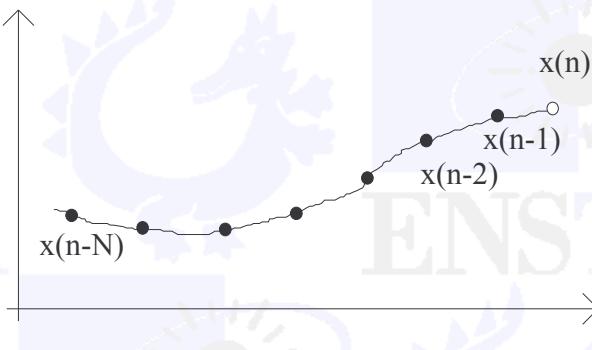
- extraire les racines d'un polynôme complexe de degré N
- et si l'on veut les amplitudes résoudre un système linéaire complexe de dimension N .

8.4 Estimation spectrale paramétrique

A la différence de l'estimation spectrale non paramétrique, qui ne faisait aucune hypothèse sur le signal observé $x(n)$, si ce n'est des propriétés de stationnarité à l'ordre 2, l'estimation spectrale paramétrique suppose que ce signal suit un modèle donné. Ce modèle comporte un certain nombre de paramètres qui sont adaptables en fonction du signal observé. Il existe principalement trois grandes classes de modèles:

Le modèle auto régressif - modèle AR -

Le signal $x(n)$ est supposé être prédictible en fonction d'un certain nombre de ses valeurs antérieures.



Il peut donc s'écrire:

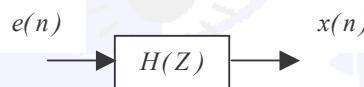
$$x(n) = \sum_{i=1}^N a_i x(n-i) + e(n)$$

équation où les coefficients $(a_i)_{i=1,N}$ constituent les paramètres du modèle et où $e(n)$ est un bruit blanc décorrélé de $x(n)$ de variance σ^2 et qui représente l'erreur de prédiction.

La transformée en Z de cette équation donne alors:

$$X(Z) \left(1 - \sum_{i=1}^N a_i Z^{-i} \right) = E(Z)$$

Le signal $x(n)$ peut donc être vu comme le résultat du passage d'un bruit blanc $e(n)$ de variance σ^2 à travers un filtre de fonction de transfert $H(Z)$.



$$\text{avec : } H(Z) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^N a_i Z^{-i}}$$

La connaissance des paramètres a_i permet donc de calculer la densité spectrale de puissance $P(f)$:

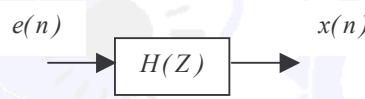
$$P_{ar}(f) = \frac{\sigma^2}{\left| 1 - \sum_{i=1}^N a_i e^{-j2\pi f i} \right|^2}$$

Le modèle à moyenne ajustée - modèle MA -

Le signal $x(n)$ est supposé pouvoir s'écrire comme une combinaison linéaire d'échantillons décorrélatés entre eux, ce qui peut se formaliser comme une combinaison linéaire d'échantillons d'un bruit blanc $e(n)$:

$$x(n) = \sum_{i=0}^M b_i e(n-i)$$

Le signal $x(n)$ peut donc être vu comme le résultat du passage d'un bruit blanc $e(n)$ à travers un filtre de fonction de transfert $H(Z)$.



$$\text{avec : } H(Z) = \sum_{i=0}^M b_i Z^{-i}$$

La densité spectrale de puissance du signal $x(n)$ s'écrit alors :

$$P_{ma}(f) = \left| \sum_{i=0}^N b_i e^{-j2\pi f i} \right|^2 \sigma^2$$

Le modèle auto régressif à moyenne ajustée - modèle ARMA-

Combinaison des modèles AR et MA où le signal $x(n)$ où le signal $x(n)$ est supposé pouvoir s'écrire en fonction de N valeurs passées et de M échantillons d'un bruit blanc décorrélaté.

$$x(n) = \sum_{i=1}^N a_i x(n-i) + \sum_{i=0}^M b_i e(n-i)$$

d'où:

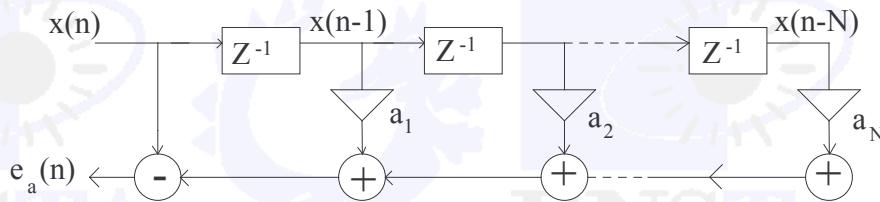
$$P_{arma}(f) = \left| \frac{\sum_{i=0}^M b_i e^{-j2\pi f i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i e^{-j2\pi f i}} \right|^2 \sigma^2$$

8.4.1 Modélisation AR

Pour effectuer cette modélisation il faut donc trouver les paramètres a_i du modèle:

$$x(n) = \sum_{i=1}^N a_i x(n-i) + e_a(n)$$

modèle qui correspond à la structure RIF suivante:



(l'erreur $e(n)$ est ici notée $e_a(n)$ pour traduire qu'il s'agit d'une erreur avant correspondant à une prédiction de $x(n)$ à partir de $\{x(n-1) \quad x(n-2) \quad \dots \quad x(n-N)\}$

Il est alors possible d'optimiser un critère de minimisation d'erreur quadratique, c'est à dire, de chercher le jeu de paramètres a_i qui minimisent $E[e_a(n)^2]$. Ce qui peut s'écrire matriciellement de la manière suivante:

$$A_N \text{ optimal est tel qu'il minimise: } E[e_a(n)^2] = E[(x(n) - X_N^T(n-I)A_N)^2]$$

avec :

$$X_N(n-I) = [x(n-I), x(n-2), \dots, x(n-N)]^T$$

et :

$$A_N = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T$$

En développant $E[e_a(n)^2]$ il vient:

$$E[e_a(n)^2] = E[(x(n) - X_N^T(n-I)A_N)^T(x(n) - X_N^T(n-I)A_N)]$$

$$E[e_a(n)^2] = E[x(n)^2 - A_N^T X_N(n-I)x(n) - x(n) X_N^T(n-I)A_N + A_N^T X_N(n-I) X_N^T(n-I)A_N]$$

En annulant la dérivée de cette expression par rapport à A_N il vient :

$$A_N = E[X_N(n-I)X_N^T(n-I)]^{-1} E[X_N(n-I)x^*(n)]$$

ou encore:

$$A_N = R_N^{-1} r_N^a \quad (1)$$

avec:

$$R_N = \begin{bmatrix} r(0) & r(I) & \dots & r(N-I) \\ r^*(I) & r(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & r(I) \\ r^*(N-I) & r^*(I) & r(0) & \vdots \end{bmatrix}$$

matrice d'autocorrélation du signal et $r_N^a = \begin{bmatrix} r(I) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(N) \end{bmatrix}$

En posant $E_{aN} = E[e_a(n)^2]$ et en utilisant (1), il vient:

$$E_{aN} = E[x(n)^2] - 2E[X_N^T(n-I)x(n)]A_N + A_N^T E[X_N(n-I)X_N^T(n-I)]A_N$$

$$E_{aN} = E[e_a(n)^2] = E[(x(n) - X_N^T(n-I)A_N)^2]$$

$$E_{aN} = r(0) - 2r_N^{aT} A_N + r_N^{aT} A_N$$

$$E_{aN} = r(0) - r_N^{aT} A_N \quad (2)$$

En écrivant (1) et (2) sous une forme matricielle unique, il vient:

$$\begin{bmatrix} r(0) & r_N^{aT} \\ r_N^a & R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{aN} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

équation de Yule Walker avant (ou directe ou forward) dans le cas stationnaire

Il est donc possible de trouver le vecteur A_N en inversant la matrice R_N puis de calculer l'énergie d'erreur de prédiction avant. Cependant, le coût de calcul d'une telle approche est alors en $O(N^3)$ ce qui peut s'avérer gênant lorsque N est important. Il est possible de résoudre cette équation avec un coût de calcul proportionnel à $O(N^2)$ en utilisant l'algorithme de Levinson.

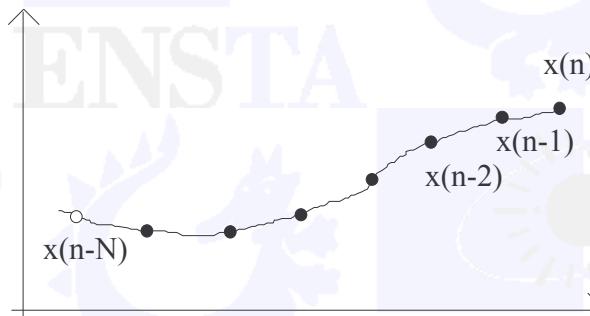
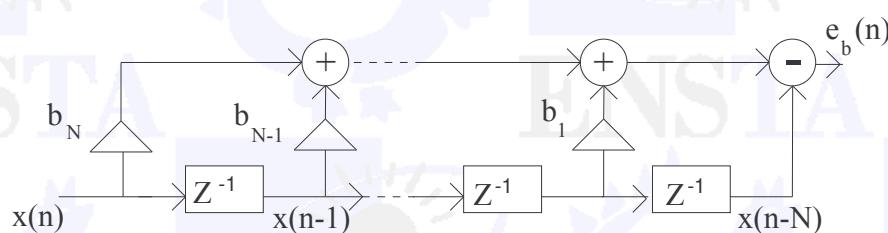
Algorithme de Levinson :

Pour faire passer le coût de calcul de la résolution de l'équation de Yule Walker de $O(N^2)$ à $O(N^3)$, cet algorithme va utiliser une récurrence sur l'ordre N du modèle prédicteur AR. Pour cela, il est nécessaire d'introduire l'erreur de prédiction arrière.

Le modèle de prédiction avant consistait à estimer $x(n)$ à partir de $\{x(n-1) \ x(n-2) \ \dots \ x(n-N)\}$, en inversant l'axe des temps, on peut construire un modèle de prédiction arrière qui va estimer $x(n-N)$ à partir de $\{x(n-N+1) \ \dots \ \dots \ x(n)\}$. Cela correspond à l'équation de prédiction arrière suivante :

$$x(n-N) = \sum_{i=1}^N b_{N+1-i} x(n+1-i) + e_b(n)$$

modèle, dont la structure RIF est la suivante:



L'équation de prédiction arrière s'écrit de manière matricielle:

$$e_b(n) = x(n-N) - X_N^T(n)B_N$$

avec $X_N(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T$

et $B_N = [b_N, b_{N-1}, \dots, b_1]^T$

Le vecteur B_N optimal est tel qu'il minimise $E_{bN} = E[e_b(n)^2]$

ce qui conduit à: $B_N = E[X_N(n)X_N^T(n)]^{-1} E[X_N(n)x(n-N)]$

d'où:

$$B_N = R_N^{-1} r_N^b \quad (4)$$

avec $r_N^b = [r(N), r(N-1), \dots, r(1)]$

en reportant B_N dans l'expression de $E_{bN} = E[e_b(n)^2]$ il vient:

$$E[e_b(n)^2] = E[x(n-N)^2] - 2E[x(n-N)X_N(n)]B_N + B_N^T E[X_N(n)X_N^T(n)]B_N$$

d'où:

$$E_{bN} = r(0) - r_N^{b T} B_N \quad (5)$$

En réunissant (4) et (5) au sein d'une même équation matricielle, il vient:

$$\begin{bmatrix} R_N & r_N^b \\ r_N^{b T} & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -B_N \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{bN} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Equation de Yule Walker arrière (ou rétrograde ou backward) dans le cas stationnaire

L'algorithme de Levinson est obtenu en réunissant les équations avant et arrière.

- Il est aisément vérifier $E_{aN} = E_{bN}$

En effet, l'équation (6) peut s'écrire:

$$R_{N+1} \begin{bmatrix} -B_N \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{bN} \end{bmatrix}$$

en multipliant à gauche par la coidentité :

$$J_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et en remarquant que, du fait de la symétrie de R_N :

$$J_N R_N = R_N J_N$$

il vient:

$$R_{N+I} \begin{bmatrix} I \\ -JB_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{bN} \\ 0 \end{bmatrix}$$

en identifiant avec l'équation avant (3):

$$R_{N+I} \begin{bmatrix} I \\ -A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{aN} \\ 0 \end{bmatrix}$$

il vient: $A_N = JB_N$ et $E_{bN} = E_{aN} = E_N$

Ce qui revient à dire que prédire $x(n-N)$ à partir de $x(n-N+1), \dots, x(n)$ est identique à prédire $x(n)$ à partir de $x(n-1), \dots, x(n-N)$. La seule différence entre les deux prédictions est le sens de parcours sur la trajectoire de $x(n)$.

- L'algorithme se base sur une récursion sur l'ordre N. Si on connaît A_{N-1} et B_{N-1} à l'ordre N-1, il vient pour la prédiction avant à l'ordre N:

$$\begin{bmatrix} R_N & r_N^b \\ r_N^b T & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -A_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{N-1} \\ 0 \\ K_N \end{bmatrix}$$

avec $K_N = r(N) - \sum_{i=1}^{N-1} a_{i,N-1} r(N-i)$

et pour la prédiction arrière:

$$\begin{bmatrix} r(0) & r_N^a T \\ r_N^a & R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -B_{N-1} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_N \\ 0 \\ E_{N-1} \end{bmatrix}$$

d'où:

$$R_{N+I} \begin{bmatrix} I \\ -A_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{N-1} \\ 0 \\ K_N \end{bmatrix} \text{ et } R_{N+I} \begin{bmatrix} 0 \\ -B_{N-1} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_N \\ 0 \\ E_{N-1} \end{bmatrix}$$

d'où: $R_{N+I} \left[\begin{bmatrix} I \\ -A_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{K_N}{E_{N-1}} \begin{bmatrix} 0 \\ -B_{N-1} \\ I \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} E_{N-1} - \frac{K_N^2}{E_{N-1}} \\ 0 \end{bmatrix}$

d'où:

$$[A_N] = \begin{bmatrix} A_{N-1} \\ 0 \end{bmatrix} - k_N \begin{bmatrix} B_{N-1} \\ -I \end{bmatrix}$$

et $E_N = E_{N-1} \left(1 - k_N^2 \right)$ avec $k_N = \frac{K_N}{E_{N-1}}$

- Algorithme de Levinson -

Ce qui correspond aux relations suivantes:

$$\begin{aligned} E(0) &= r(0) \\ j : I \rightarrow N &\left\{ \begin{array}{l} k_j = \frac{1}{E_{j-1}} \left[r(j) - \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j-1} r(j-i) \right] \\ a_{j,j} = k_j \\ i : I \rightarrow j-1 \quad a_{i,j} = a_{i,j-1} - k_j a_{j-i,j-1} \\ E_j = E_{j-1} (I - k_j^2) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Remarque:

il est possible d'écrire: $\begin{pmatrix} I \\ -A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ -A_{N-1} \end{pmatrix} - k_N \begin{pmatrix} 0 \\ -B_{N-1} \end{pmatrix}$

et: $\begin{pmatrix} -B_N \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_{N-1} \end{pmatrix} - k_N \begin{pmatrix} I \\ -A_{N-1} \end{pmatrix}$

d'où:

$$A_N = \begin{pmatrix} A_{N-1} \\ 0 \end{pmatrix} - k_N \begin{pmatrix} B_{N-1} \\ -I \end{pmatrix}$$

et:

$$B_N = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{N-1} \end{pmatrix} - k_N \begin{pmatrix} -I \\ A_{N-1} \end{pmatrix}$$

d'où en reprenant les expressions des erreurs avant et arrières:

$$e_{aN}(n) = x(n) - X_N^T (n-I) A_N$$

$$e_{aN}(n) = x(n) - X_N^T (n-I) \left[\begin{pmatrix} A_{N-1} \\ 0 \end{pmatrix} - k_N \begin{pmatrix} B_{N-1} \\ -I \end{pmatrix} \right]$$

$$e_{aN}(n) = e_{aN-1}(n) - k_N X_N^T (n-I) \begin{pmatrix} -B_{N-1} \\ I \end{pmatrix}$$

or: $e_{bN}(n) = x(n-N) - X_N^T (n) B_N$

$$e_{bN-1}(n) = x(n-N+1) - X_{N-1}^T(n)B_{N-1}$$

$$e_{bN-1}(n-1) = x(n-N) - X_{N-1}^T(n-1)B_{N-1}$$

$$\Rightarrow e_{aN}(n) = e_{aN-1}(n) - k_N e_{bN-1}(n-1)$$

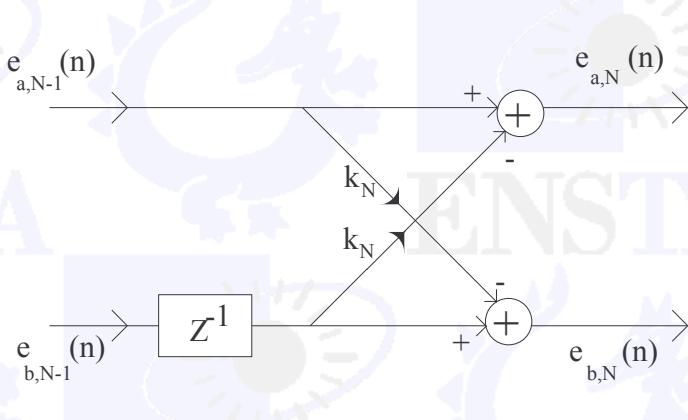
de la même manière :

$$e_{bN}(n) = x(n-N) - X_N^T(n)B_N$$

conduit à :

$$e_{bN}(n) = e_{bN-1}(n-1) - k_N e_{aN-1}(n)$$

Les coefficients k_i correspondent donc à la structure en treillis suivante:



Enfin, on peut démontrer:

$$k_N = \frac{E[e_{aN-1}(n)e_{b,N-1}]}{E_{N-1}}$$

d'où le nom de coefficients de corrélation partielle (PARCOR) donné souvent aux coefficients k_i .

En conclusion, la modélisation AR demande la mise à jour de N coefficients a_i pour cela il faut:

- observer au minimum N valeurs du signal,
- calculer les coefficients d'autocorrélation,
- appliquer l'algorithme de Levinson (coût de calcul proportionnel à $O(N^2)$).

8.4.2 Modélisation MA

Dans le cas du modèle AR, le vecteur A_N s'obtient en optimisant un critère d'erreur quadratique. Cette optimisation conduit de manière explicite à la résolution d'un système linéaire:

$$A_N = R_N^{-1} r_N^a$$

Par contre, pour un modèle MA:

$$x(n) = \sum_{i=0}^M b_i e(n-i)$$

l'erreur de prédiction s'écrit:

$$e(n) = x(n) - E_N^T (n-I) B_N$$

avec $E_N(n-I) = [e(n-I), e(n-2), \dots, e(n-M)]^T$

Le vecteur EN dépend de BN et le système à résoudre devient non linéaire. L'optimisation exacte du critère est alors très délicate. Cependant, l'algorithme de Durbin permet d'approcher la solution optimale avec de bons résultats.

Algorithme de Durbin:

Le principe de cet algorithme consiste à identifier le modèle MA d'ordre M avec un modèle AR d'ordre N>>M.

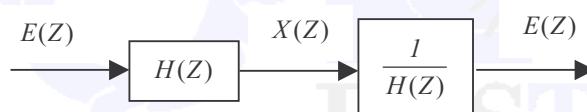
En effet, tout modèle MA peut être identifié à un modèle AR d'ordre infini:

$$\sum_{i=0}^M b_i Z^{-i} = \frac{I}{\sum_{i=0}^{\infty} a_i Z^{-i}}$$

en remplaçant la borne infinie par une valeur N>>M, il est possible de faire l'approximation suivante:

$$H(Z) = \sum_{i=0}^M b_i Z^{-i} \approx \frac{I}{\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}}$$

d'où :



$$\Rightarrow \sum_{i=0}^M b_i Z^{-i} \frac{I}{\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}} = I$$

ou encore dans le domaine temporel :

$$b_i * a_i = \delta_i$$

ce qui donne $\delta_j = \sum_{i=0}^M b_i a_{j-i}$, en posant $b_0 = 1$ il vient:

$$\delta_j = a_j + \sum_{i=1}^M b_i a_{j-i}$$

et donc:

$$\text{pour } j = 1 \text{ à } N : a_j + \sum_{i=1}^M b_i a_{j-i} = 0$$

Les coefficients b_i du modèle MA d'ordre M du signal $x(n)$ sont donc aussi les coefficients du modèle AR d'ordre M du signal a_n .

Conclusion, l'obtention des M valeurs b_i se fait en résolvant deux systèmes AR, il faut:

- modéliser le signal $x(n)$ sous la forme d'un processus AR d'ordre $N >> M$ et trouver le vecteur des paramètres, grâce à l'algorithme de Levinson par exemple,
- modéliser le signal constitué par les paramètres précédents sous une forme AR d'ordre M et trouver le nouveau vecteur des paramètres.

8.4.3 Modélisation ARMA

La modélisation ARMA peut se décomposer en une modélisation AR suivie d'une modélisation MA.

En effet, il faut identifier le filtre:

$$H(Z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i Z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i Z^{-i}} = \left(\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^N a_i Z^{-i}} \right) \left(\sum_{i=0}^M b_i Z^{-i} \right) = H_1(Z) H_2(Z)$$

$H_1(Z)$ est identifiable de manière exacte au moyen de l'algorithme de Levinson tandis que $H_2(Z)$ est identifiable de manière approchée au moyen de l'algorithme de Durbin.

En conclusion, pour identifier les paramètres d'un modèle MA il faut:

- identifier un modèle AR d'ordre N ,
- filtrer le signal $x(n)$ par le filtre mis à jour,
- identifier un modèle MA d'ordre M à partir du signal filtré.

Les modélisations AR,MA et ARMA permettent finalement d'obtenir la densité spectrale de puissance du signal $x(n)$ grâce à l'identification des paramètres du modèle considéré.

- Le modèle AR ne comporte que des pôles (filtre tout pôles) et ne passe jamais par zéro:

$$P_{ar}(f) = \frac{\sigma^2}{\left| 1 - \sum_{i=1}^N a_i e^{-j2\pi fi} \right|^2}$$

Ce modèle est bien adapté aux signaux composés de raies pures dans du bruit blanc.

- Le modèle MA ne comporte que des zéros (filtre tout zéros):

$$P_{ma}(f) = \left| \sum_{i=0}^M b_i e^{-j2\pi fi} \right|^2 \sigma^2$$

Ce modèle est bien adapté aux signaux dont la puissance est nulle dans certaines bandes de fréquences.

- Le modèle ARMA possédant à la fois des pôles et des zéros:

$$P_{arma}(f) = \frac{\left| \sum_{i=0}^M b_i e^{-j2\pi fi} \right|^2 \sigma^2}{\left| 1 - \sum_{i=1}^N a_i e^{-j2\pi fi} \right|^2}$$

il est adapté à n'importe quel type de signaux.

8.5 Conclusion

Il existe un grand nombre de méthodes d'analyse spectrale et le choix est souvent dicté par l'application considérée.

En général, les méthodes non paramétriques trouvent leur intérêt en présence de signaux longs et stationnaires tandis que les méthodes paramétriques sont plutôt utilisées pour les signaux brefs et non stationnaires.

Enfin, les méthodes de modélisation AR peuvent être rendues adaptatives, ce qui permet une analyse temps réel de la densité spectrale de puissance du signal observé.

9. Bibliographie

- M. Bellanger**, Traitement numérique du signal, Collection CNET ENST, Masson 1990.
- Boite et H. Leich**, Les filtres numériques, Collection CNET ENST, Masson 1990.
- M. Stein**, Les modems pour les Transmissions de Données, Collection CNET ENST, Masson 1987
- M. Bellanger**, Analyse des signaux et filtrage numérique adaptatif, Collection CNET ENST, Masson 1989.
- M. Kunt**, Techniques modernes de traitement numérique des signaux, Collection CNET ENST, Presses Polytechniques de Lausanne.
- S. Kay, S. Marple**, Spectrum analysis - A modern perspective -, Proceedings of IEEE vol 69 N° 11, November 1981.

10. Annexe Dérivation Forme Bilinéaire

Dérivation de $A^T R A$ en réel

$$u = (a_0 \dots a_{N-1}) \begin{pmatrix} & \\ r_{i,j} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$u = (a_0 \dots a_{N-1}) \left(\sum_j r_{k,j} a_j \right)$$

$$u = \sum_k a_k \left(\sum_j r_{k,j} a_j \right)$$

$$u = \sum_k \sum_j a_k a_j r_{k,j}$$

$$u = \sum_{k \neq p} \sum_j a_k a_j r_{k,j} + \sum_j a_p a_j r_{p,j}$$

$$u = \sum_{k \neq p} a_k a_p r_{k,p} + \sum_{k \neq p} \sum_{j \neq p} a_k a_j r_{k,j} + \sum_{j \neq p} a_p a_j r_{p,j} + a_p^2 r_{p,p}$$

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \sum_{k \neq p} a_k r_{k,p} + \sum_{j \neq p} a_j r_{p,j} + 2a_p r_{p,p}$$

$R = R^T$ donc $r_{k,p} = r_{p,k}$ d'où :

$$\frac{\partial u}{\partial a_p} = 2a_p r_{p,p} + 2 \sum_{j \neq p} a_j r_{p,j}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial p} \\ \vdots \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} & & \\ \dots & r_{p,j} & \dots \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial A} A^T R A = 2RA$$