# Corrigé de la PC2 : Résolution analytique d'équations hyperboliques linéaires et non linéaires en 1D

9 Avril 2019

<u>**EXERCICE**</u> **1 (EQUATION DE TRANSPORT À VITESSE VARIABLE)**
*On considère l'équation de transport à vitesse variable*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x) \end{cases}$$

*où $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$ et $c(x,t)$ sera définie dans chaque question.*

**Question 1.** *On suppose que $c(x,t) = x$. Est ce que le problème est bien posé dans $C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ ? Tracer les caractéristiques dans le plan $(x,t)$. Calculer la solution classique en tout point $x$ et tout temps $t$.*

**Corrigé de la question 1.** On est dans le cadre du théorème vu en cours : la vitesse $c$ est bien lipchitzienne par rapport à x et ce indépendamment de $t$ et $u_0 \in C_b^1(\mathbb{R}$ donc le problème est bien posé dans $C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

Les courbes caractéristiques sont d'équation

$$X'_{x_0}(t) = X_{x_0}(t),\ X_{x_0}(0) = x_0\,.$$

ce qui donne $X_{x_0}(t) = x_0\, e^t$. Dans le plan $(x,t)$, la courbe caractéristique de pied $x_0 = 0$ est une droite verticale et pour $x_0 \neq 0$, elle a une pente à l'origine qui vaut $1/x_0$. D'après le théorème de Cauchy Lipchitz, les courbes remplissent tout le demi plan et elles ne se rencontrent jamais.

On montre comme dans le cours que la solution est constante le long des caractéristiques :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad u(X_{x_0}(t),t) = u^0(x_0).$$

Enfin pour tout $(x,t)$, on a vu qu'il existait une et une seule caractéristique qui passe par $(x,t)$ :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \exists!\ x_0, \quad X_{x_0}(t) = x \quad \text{et } x_0 = x\, e^{-t}.$$

On en déduit

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x,t) = u^0(xe^{-t}).$$

**Question 2.** *On suppose que $c(x,t) = 1$ pour $x \leq 1$ et $c(x,t) = x$ pour $x \geq 1$. Est ce que le problème est bien posé ? Tracer les caractéristiques dans le plan $(x,t)$. Calculer la solution classique en tout point $x$ et tout temps $t$.*

**Corrigé de la question 2.** On est toujours dans le cadre du théorème vu en cours : même si la vitesse $c(x)$ n'est pas $C^1$, elle est lipchitzienne.

Les courbes caractéristiques sont d'équation

$$X'_{x_0}(t) = c(X_{x_0}(t)),\ X_{x_0}(0) = x_0\,.$$

Pour $x_0 \geq 1$, on a comme à la question 1, $X_{x_0}(t) = x_0\, e^t \geq 1$.

Pour $x_0 \leq 1$, on a $X_{x_0}(t) = x_0 + t$ jusqu'au temps $t = 1 - x_0$ où la courbe atteint $x = 1$. A partir de ce temps, on trouve $X_{x_0}(t) = e^{t-(1-x_0)}$. Si on utilise les notations du cours (c'est à dire avec $X(t; x_s, s)$), on peut aussi écrire $X_{x_0}(t) := X(t; x_0, 0) = X(t; 1, 1 - x_0)$.

Là encore, d'après le théorème de Cauchy Lipchitz, les courbes remplissent tout le demi plan et elles ne se rencontrent jamais.

On montre comme dans le cours que la solution est constante le long des caractéristiques :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad u(X_{x_0}(t), t) = u^0(x_0).$$

Enfin pour tout $(x, t)$, on a vu qu'il existait une et une seule caractéristique qui passe par $(x, t)$ :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \exists! x_0, \quad X_{x_0}(t) = x.$$

Plus précisément,

$$\left|\begin{array}{lll} \text{Si } x \geq e^t & \text{alors} & X_{x_0}(t) = x \ \Rightarrow\ x_0 = x\, e^{-t}\ (\geq 1) \\ \text{Si } 1 \leq x \leq e^t & \text{alors} & X_{x_0}(t) = x \ \Rightarrow\ x_0 = \ln x - t + 1\ (\leq 1) \\ \text{Si } x \leq 1, & \text{alors} & X_{x_0}(t) = x \ \Rightarrow\ x_0 = x - t\ (\leq 1) \end{array}\right.$$

On en déduit ensuite facilement $u(x, t)$ pour tout $(x, t)$.

**Question 3.** *On va considérer maintenant un cas où la fonction $c(x)$ est discontinue en $x = 0$. On sort alors du cadre du cours. Plus précisément, on suppose maintenant que $c(x, t) = 1$ pour $x \leq 0$ et $c(x, t) = x$ pour $x > 0$.*

**Question 3a.** *On cherche une solution $u(x, t)$ qui soit une solution classique dans chacun des demi-espaces $x < 0$ et $x > 0$. Montrer, à l'aide de la méthode des caractéristiques que la fonction $u$ est alors entièrement déterminée. Montrer que cette fonction est discontinue en général.*

**Corrigé de la question 3a.** L'application de la méthode des caractéristiques montre que $u$ est nécessairement donnée par

$$u(x, t) = u^0(x - t) \quad \text{si } x < 0, \quad u(x, t) = u^0(x\, e^{-t}) \quad \text{si } x > 0.$$

On remarque alors que

$$u(0^-, t) = u^0(-t), \quad u(0^+, t) = u^0(0)$$

En général, la fonction ainsi construite est discontinue en $x = 0$.

**Question 3b.** *A quelle condition sur la donnée initiale $u^0$, la fonction est-elle continue à travers $x = 0$ ? Montrer que dans ce cas, il s'agit d'une solution "classique" au sens ou $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ et où l'égalité*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

*est satisfaite en tout point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.*

**Corrigé de la question 3b.** On voit que la fonction $u$ construite à la question précédente est continue si et seulement si $u^0$ est constante dans $]-\infty, 0]$. On peut alors remarquer que $u$ est globalement $C^1$ puisque

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0^-,t) = \frac{du^0}{dx}(-t) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0^+,t) = e^{-t}\,\frac{du^0}{dx}(0) \equiv 0$$

On a alors bien construit une solution classique puisque on a également

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0^-,t) = -\frac{du^0}{dx}(-t) \equiv 0.$$

**Question 4.** *On reprend la question précédente avec $c(x,t) = -1$ pour $x \leq 0$ et $c(x,t) = x$ pour $x > 0$.*

**Question 4a.** *Montrer que la recherche d'une solution classique par morceaux ne la détermine entièrement que dans une zone du demi-plan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ que l'on précisera. Donner la forme générale d'une telle fonction.*

**Corrigé de la question 4a.** Cette fois, l'application de la méthode des caractéristiques permet toujours de déterminer entièrement $u$ pour $x > 0$ par

$$u(x,t) = u^0(x\,e^{-t}) \quad \text{si } x > 0.$$

Par contre, pour $x < 0$, la solution n'est déterminée que si $x < -t$

$$u(x,t) = u^0(x+t) \quad \text{si } x < 0.$$

Pour $x > -t$, on sait seulement que

$$u = f(t+x), \quad -t < x < 0$$

avec $f$ régulière quelconque telle que $f(0) = u^0(0)$ (cf. PC 1).

**Question 4b.** *Montrer que la fonction $u$ est entièrement définie si on lui impose d'être globalement continue. Montrer que cette fonction est de classe $C^1$ si la dérivée de $u^0$ est nulle à l'origine et qu'il s'agit alors bien d'une solution classique au sens défini à la question 3.b.*

**Corrigé de la question 4b.** Si on impose la continuité de $u$ en $x = 0$, on a alors

$$u(0^-, t) = f(t), \quad u(0^+, t) = u^0(0) \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) = u^0(0) \quad \text{pour tout } t > 0.$$

Ceci entraine que $u(x,t)$ est constante égale à $u^0(0)$ pour $-t \leq x \leq 0$. Par ailleurs

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0^+, t) = e^{-t} \frac{du^0}{dx}(0),$$

alors que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0^-, t) = f'(t) \equiv 0.$$

On en déduit que $u$ est de classe $C^1$ si et seulement si

$$\frac{du^0}{dx}(0) = 0$$

Enfin, il est facile, comme dans la question 3, de vérifier qu'on a ainsi construit une solution classique.

**EXERCICE 2 (SOLUTION CLASSIQUE)**

*On considère l'équation de Bürgers*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

*où* $f(u) = \dfrac{1}{2}u^2$*, avec la condition initiale suivante :* $u^0(x) = x$.

**Question.** *Calculer la solution classique. On tracera les caractéristiques dans le plan* $(x,t)$ *puis la solution en fonction de* $x$ *à différents temps.*

**Corrigé de la question.** La condition initiale $u^0(x) = x$ est croissante et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La méthode des caractéristiques permet de construire une solution classique du problème de Cauchy pour tout $t > 0$.

Pour Bürgers $a(u) = u$. Les droites caractéristiques sont d'équation

$$X_{x_0}(t) = a(u^0(x_0))t + x_0 = x_0 t + x_0\,.$$

La solution $u$ est constante le long des caractéristiques,

$$u(X_{x_0}(t), t) = u^0(x_0) = x_0\,.$$

Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$. Il existe une unique caractéristique passant par $(x,t)$. Le pied de cette caractéristique est

$$x_0 = \frac{x}{1+t}.$$

Finalement (cf. figure 1),

$$u(x,t) = \frac{x}{1+t}\,.$$

**EXERCICE 3 (NAISSANCE DE L'ONDE DE CHOC)**

*On considère l'équation de Bürgers avec la condition initiale suivante :* $u^0(x) = \sin x$.

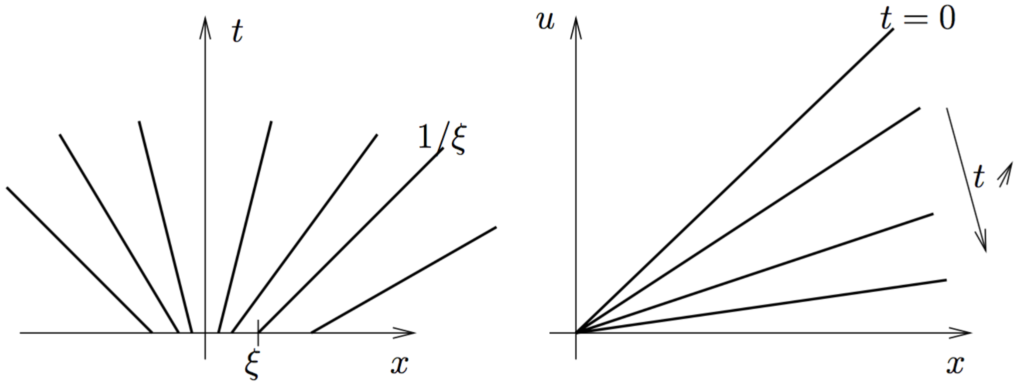


FIGURE 1 – Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour différents temps (à droite).

**Question 1.** *Montrer que les caractéristiques ne se croisent pas avant* $t = 1$.

**Corrigé de la question 1.** $u^0$ n'est pas une fonction croissante. Il existe un temps maximal $t^*$ au delà duquel on ne peut plus appliquer la méthode des caractéristiques. L'équation des droites caractéristiques est donnée par :

$$X_{x_0}(t) = \sin(x_0)t + x_0 \underset{\text{def}}{=} h_t(x_0).$$

Si $t < 1$ alors $h_t'(x_0) = 1 + \cos(x_0)t > 0$ et $\lim h_t(x_0) = \pm\infty$, quand $x_0 \to \pm\infty$ ce qui montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une unique $x_0$ solution de l'équation des caractéristiques.

**Question 2.** *Calculer l'instant* $t_\varepsilon$ *auquel se croisent les caractéristiques issues des points* $\pi - \varepsilon$ *et* $\pi + \varepsilon$.

**Corrigé de la question 2.** Si $t_\varepsilon$ est le temps où se croisent les caractéristiques issues des points $\pi - \varepsilon$ et $\pi + \varepsilon$ alors on a :

$$\sin(\pi - \varepsilon)t_\varepsilon + \pi - \varepsilon = \sin(\pi + \varepsilon)t_\varepsilon + \pi + \varepsilon$$

qui conduit à :

$$t_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} > 1.$$

**Question 3.** *En déduire qu'il n'existe pas de solution classique après* $t = 1$.

**Corrigé de la question 3.** Lorsque $\varepsilon \to 0$ on a $t_\varepsilon \to 1$, ce qui montre qu'il n'existe pas de solution classique au delà du temps $t^* = 1$.

## <u>EXERCICE</u> 4 (CONSTRUCTION DE L'ONDE DE DÉTENTE)

*On considère l'équation de Bürgers avec la condition initiale :*

$$u^0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \leq 0, \\ x/\alpha, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \alpha, \\ 1, & \text{si} \quad x \geq \alpha, \end{cases}$$

*pour* $\alpha > 0$.

**Question 1.** *Construire la solution à l'aide des caractéristiques.*

**Corrigé de la question 1.** La condition initiale est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue. La méthode des caractéristiques permet de construire une fonction $u$ continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux vérifiant l'équation de Bürgers point par point dans tout ouvert où elle est $\mathcal{C}^1$. C'est une solution faible du problème.
La droite caractéristique issue de $x_0$ a pour équation (cf. figure 2 à gauche)

$$\begin{cases} X_{x_0}(t) = x_0, & \text{si} \quad x_0 \leq 0 & \text{soit} \quad X_{x_0}(t) \leq 0, \\ X_{x_0}(t) = x_0 + \dfrac{x_0}{\alpha} t, & \text{si} \quad 0 \leq x_0 \leq \alpha & \text{soit} \quad 0 \leq X_{x_0}(t) \leq t + \alpha, \\ X_{x_0}(t) = x_0 + t, & \text{si} \quad x_0 \geq \alpha & \text{soit} \quad X_{x_0}(t) \geq t + \alpha. \end{cases}$$

La solution $u$ est constante le long des caractéristiques

$$u(X_{x_0}(t), t) = u^0(x_0)\,,$$

soit (cf. figure 2 à droite)

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x_0 \leq 0, \\ \dfrac{x}{\alpha + t}, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq t + \alpha, \\ 1, & \text{si} \quad x \geq t + \alpha. \end{cases}$$

**Question 2.** *Est-ce une solution classique ?*

**Corrigé de la question 2.** La solution n'est pas une solution classique puisqu'elle n'est pas $\mathcal{C}^1$.

**Question 3.** *Que se passe-t-il lorsque* $\alpha \longrightarrow 0$ *?*

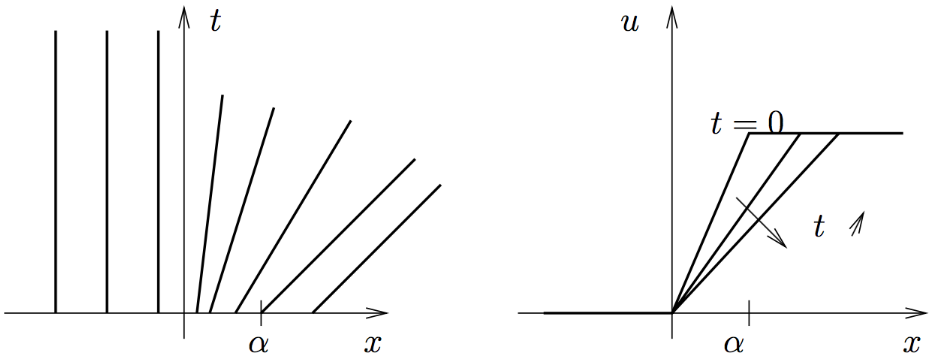


FIGURE 2 – Droites caractéristiques (à gauche) et allure de la solution pour différents temps (à droite).

**Corrigé de la question 3.** Lorsque $\alpha \longrightarrow 0$, la condition initiale tend vers un échelon (fonction discontinue). Pour résoudre le problème il faut rajouter des “caractéristiques virtuelles” d'équation $\dfrac{x}{t}$. La solution obtenue est continue pour $t > 0$ (cf. Problème de Riemann à 2 états).

**<u>EXERCICE</u> 5 (NON UNICITÉ DES SOLUTIONS FAIBLES)**

*On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = a. \end{cases} \tag{1}$$

*où $a$ est une constante réelle donnée. Le but de l'exercice est de montrer qu'on peut construire d'autres solutions faibles de (1) que la solution constante $u(x,t) = a$.*

*Pour ce faire, on va s'intéresser à une classe de solutions constantes par morceaux définies de la manière suivante :*

*a) On se donne $N \leq 1$ réels $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N$ qui définissent $N+1$ zones du demi-plan plan $\mathcal{P} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$*

$$\mathcal{Z}_0 = \{(x,t) \in \mathcal{P} \,/\, x < \lambda_1 t\}, \quad \mathcal{Z}_N = \{(x,t) \in \mathcal{P} \,/\, \lambda_N t < x\},$$

$$\mathcal{Z}_j = \{(x,t) \in \mathcal{P} \,/\, \lambda_j t < x < \lambda_{j+1} t\}, \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad (\textit{si } N \geq 2)$$

*b) On cherche $u$ constante dans chacune des zones*

$$u(x,t) = u_j, \quad \forall\, (x,t) \in \mathcal{Z}_j, \quad 0 \leq j \leq N. \tag{2}$$

**Question 1.** *On suppose que $u$ donnée par (2) est solution faible de (1). Calculer $u_1$ et $u_N$ et montrer que les nombres $\lambda_j$ sont entièrement déterminés par les $u_j$.*

**Corrigé de la question 1.** A cause de la donnée initiale (faire un dessin), $u_0 = u_N = a$. D'autre part, les relations de Rankine-Hugoniot donnent

$$\lambda_j = \frac{u_j + u_{j-1}}{2}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Comme $u$ est évidemment une solution classique partout où elle est régulière, ces égalités sont également suffisantes pour définir une solution faible de (1).

**Question 2.** *Montrer que si $N = 1$ ou $N = 2$, la seule solution possible est la solution constante.*

**Corrigé de la question 2.** Le cas $N = 1$ est évident. Pour $N = 2$, ce n'est guère plus compliqué. Puisque $u_0 = u_2 = a$, la seule valeur restant à fixer est $u_1$. Or

$$\lambda_1 = \frac{u_1 + a}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{u_1 + a}{2}$$

est incompatible avec $\lambda_2 > \lambda_1$.

**Question 3.** *On suppose que $N = 3$. Montrer qu'il existe une infinité de solutions non constantes paramétrées par deux réels (par exemple $\lambda_1$ et $\lambda_3$) dont on précisera le domaine de variation.*

**Corrigé de la question 3.** Il nous faut déterminer $(u_1, u_2)$ ainsi que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ à partir de 3 équations

$$\lambda_1 = \frac{u_1 + a}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{u_2 + a}{2}.$$

Notons alors que $u_1 = 2\lambda_1 - a$ et $u_2 = 2\lambda_3 - a$, auquel cas

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_3 - a.$$

La contrainte $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ impose alors $\lambda_3 > a$ et $\lambda_1 < a$.

Finalement, pour tout $(\lambda_1, \lambda_3) \in \,]-\infty, a\,[ \times ]\,a, +\infty[$, on a construit la solution correspondant à

$$u_1 = 2\lambda_1 - a, \quad u_2 = 2\lambda_3 - a \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_3 - a.$$

**Question 4.** *Montrer que pour $N = 4$, on ne peut pas trouver de solution non constante de la forme (2).*

**Corrigé de la question 4.** On a cette fois

$$\lambda_1 = \frac{u_1 + a}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{u_2 + u_3}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{u_3 + a}{2}.$$

En soustrayant la première égalité de la dernière, puis la deuxième de la troisième, on obtient

$$\lambda_1 - \lambda_4 = \lambda_3 - \lambda_2 = u_1 - u_3$$

ce qui est incompatible avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$.