Série 4

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité sousjacent. Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle (complétée), soit $T > 0$.

1.(a) Si $t > 0$ écrire la densité $y \mapsto p_t(y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, de la loi de W_t. Que peut-on dire lorsque $t = 0$?

Correction.

— $W_t \sim N(0, t), \ \forall t \geq 0$.

— Si $t > 0$ alors

$$p_t(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right), \ y \in \mathbb{R}.$$

— Si $t = 0$ la loi de W_t n'a pas de densité ; il s'agit d'une Dirac concentrée en 0.

(b) Soit f une fonction réelle borélienne bornée. Posons $\varphi(t,x) = E(f(x+W_t))$. Vérifier que φ est solution du problème parabolique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \varphi(0,x) = f(x). \end{cases}$$

Correction. On voit aisément que

$$\varphi(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)p_t(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)p_t(x-y)dy.$$

Nous posons

$$\varphi'(t,x) = \partial_x \varphi(t,x), \ \varphi''(t,x) = \partial_{xx}^{(2)}\varphi(t,x).$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} \left(\partial_t \varphi - \frac{1}{2}\varphi''\right)(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y)(\partial_t p_t - \frac{1}{2}p_t'')(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)(\partial_t p_t - \frac{1}{2}p_t'')(y)dy. \end{aligned}$$

Il suffit de prouver que

$$(\partial_t p_t - \frac{1}{2}p_t'')(y) \equiv 0. \tag{1}$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \partial_t p_t(y) &= p_t(y)\left\{\frac{-1}{2t} + \frac{y^2}{2t^2}\right\} \\ p_t'(y) &= p_t(y)\left\{\frac{-y}{t}\right\} \\ p_t''(y) &= p_t(y)\left\{-\frac{y^2}{t^2} + \frac{1}{t}\right\}. \end{aligned}$$

D'où (1) est vérifiée.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 dont les dérivées sont bornées. Considérons l'équation

$$\begin{cases} dX_t = a(X_t)\, dW_t + b(X_t)dt \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Justifier l'existence d'une unique solution $(X_t)_{t\geq 0}$, à une version indistinguable près, dans la famille des processus adaptés.

Correction. La version intégrale de (2) est

$$X_t = x + \int_0^t \{a(X_s)dW_s + b(X_s)ds\}.$$

On vérifie les hypothèses du théorème d'existence et unicité des EDS. En effet

$$\begin{aligned} |a(x) - a(y)| &= \left| \int_0^1 a'(\alpha x + (1-\alpha)y)d\alpha \right| |x - y| \\ &\leq \sup |a'||x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

. De même

$$|b(x) - b(y)| \leq \sup |b'||x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

— D'où a, b sont Lipschitz et (étant indépendant du temps donc continues), donc à croissance linéaire.

— x est déterministe donc $\mathcal{F}_0$-mesurable et de carré intégrable.

Par le Théorème 5.3 il existe une unique solution (X_t) adaptée. De plus elle satisfait

$$E(\sup_{t\leq T} |X_t|^2) < \infty. \tag{3}$$

(b) Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ tel que f' est borné. Vérifier que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une martingale où $Y_t = f(X_t) - f(x) - \int_0^t f'(X_s)\, b(X_s)\, ds - \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, a^2(X_s)\, ds$.
Indication : Utiliser la formule d'Itô.

Correction.

— Par la formule d'Itô on a

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d[X,X]_s.$$

Comme

$$\begin{aligned} dX_s &= a(X_s)dW_s + b(X_s)ds \\ [X,X]_t &= \int_0^t a^2(X_s)ds, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(x) + \int_0^t f'(X_s)a(X_s)dW_s + \int_0^t f'(X_s)b(X_s)ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, a^2(X_s)\, ds. \end{aligned}$$

D'où

$$Y_t = \int_0^t f'(X_s)a(X_s)dW_s.$$

— Il reste à vérifier que Y est une martingale. Pour cela, une condition suffisante est donnée par

$$E\left(\int_0^T (f'(X_s)a(X_s))^2 ds\right) < \infty.$$

L'espérance précédente est majorée par

$$\begin{aligned} & \sup|f'|^2 \int_0^T E(a^2(X_s))ds \\ \leq\ & 2K^2 \sup|f'|^2 \int_0^T E(1+|X_s|^2)ds \\ \leq\ & 2K^2 T \sup|f'|^2 E(\sup_{s\leq T}|X_s|^2+1), \end{aligned} \tag{4}$$

où K est une constance de croissance linéaire pour a. Or (4) est finie compte tenu de (3).

(c) **Formule de Dynkin**. Soit τ un temps d'arrêt borné. Soit (X_t) la solution de l'équation (1). Soit f de classe C^2 à support compact. Vérifier que

$$E(f(X_\tau)) - f(x) = E\left\{\int_0^\tau [f'(X_s)\, b(X_s) + \frac{1}{2} f''(X_s)\, a^2(X_s)]\, ds\right\}.$$

Correction. Par le théorème d'arrêt et la remarque qui suit on a $E(Y_\tau) = E(Y_0)$ et le résultat suit car $E(Y_0) = 0$.

3. Calculer
$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t}}\, P\{|W_t| \le t\}.$$
Soit $t > 0$. Si p est la densité de la loi $N(0,1)$ nous avons
$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{t}} P\{|W_t| \le t\} &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-t}^{t} p\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \frac{dx}{\sqrt{t}} \\
\left(y = \frac{x}{\sqrt{t}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} p(y) dy \\
&= 2p(\xi_t)\ (\xi_t \in [-\sqrt{t}, \sqrt{t}]) \to_{t\to 0} \\
& \quad 2p(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.
\end{aligned}$$

4. Soit $\sigma, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ respectivement de classe C^1 et C^0, $x \in \mathbb{R}$.

a) Soit $(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté continu. Rappeler la relation entre l'intégrale de Stratonovich $\displaystyle\int_0^t Y_s \circ dW_s$ et l'intégrale d'Itô $\displaystyle\int_0^t Y_s dW_s$.

Correction.

$$\int_0^t Y_s \circ dW_s = \int_0^t Y_s dW_s + \frac{1}{2}[Y, W]_t, \ t \geq 0.$$

b) Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une solution de

$$X_t = \int_0^t (b + \frac{1}{2}\sigma'\sigma)(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s. \tag{5}$$

Vérifier que $(X_t)_{t\geq 0}$ est solution de l'équation de Stratonovich

$$X_t = \int_0^t b(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s) \circ dW_s. \tag{6}$$

Correction. On a

$$[\sigma(X), W]_t = \int_0^t \sigma'(X_s) d[X, W]_s = \int_0^t (\sigma\sigma')(X_s) ds.$$

Série 4. PRB203. Introduction au calcul stochastique et applications FR 2020-21 **fin**.