Rappels (non exhaustifs) du cours pour le TD 6

Produit tensoriel : Utilisé pour prendre en compte plusieurs degrés de liberté (nouvelle dimension, état à plusieurs particules, spin)

- Soit $\mathcal{E}_a$ un espace de Hilbert muni d'une base $|a_m\rangle$.

  Soit $\mathcal{E}_b$ un espace de Hilbert muni d'une base $|b_p\rangle$.

  On définit l'espace (de Hilbert) produit tensoriel de $\mathcal{E}_a$ et $\mathcal{E}_b$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_a \otimes \mathcal{E}_b$ comme l'espace engendré par les vecteurs $|a_m\rangle \otimes |b_p\rangle$.

  Tout vecteur $|\psi\rangle$ de $\mathcal{E}_a \otimes \mathcal{E}_b$ peut s'écrire

$$|\psi\rangle = \sum_{m,p} \gamma_{m,p} |a_m\rangle \otimes |b_p\rangle$$

⚠ On ne peut pas toujours "factoriser" $|\psi\rangle$, i.e. trouver $|\psi_a\rangle \in \mathcal{E}_a$ et $|\psi_b\rangle \in \mathcal{E}_b$ tel que $|\psi\rangle = |\psi_a\rangle \otimes |\psi_b\rangle$. Les états qu'on ne peut factoriser sont dits intriqués.

<u>En notation fonction d'onde</u> (s'il y a lieu), si $\varphi_a(x)$ et $\varphi_b(y)$ sont les fonctions d'onde associées respectivement à $|\varphi_a\rangle \in \mathcal{E}_a$ et $|\varphi_b\rangle \in \mathcal{E}_b$, alors la fonction d'onde associée à $|\varphi_a\rangle \otimes |\varphi_b\rangle$ est $\varphi(x,y) = \varphi_a(x)\varphi_b(y)$.

<u>Recherche de valeurs propres</u> d'une somme d'opérateurs

Soit $\hat{H}_a$ un opérateur agissant dans $\mathcal{E}_a$, de vecteurs propres $|\lambda_n\rangle$ et de valeurs propres λ_n.

Soit $\hat{H}_b$ un opérateur agissant dans $\mathcal{E}_b$, de vecteurs propres $|\mu_p\rangle$ et de valeurs propres μ_p

Alors, la base $|\lambda_n\rangle \otimes |\mu_p\rangle$ est une base de vecteurs propres de $\hat{H}_a + \hat{H}_b$. La valeur propre associée à $|\lambda_n\rangle \otimes |\mu_p\rangle$ est $\lambda_n + \mu_p$

$$\left(\hat{H}_a + \hat{H}_b\right) |\lambda_m\rangle \otimes |\mu_p\rangle = \hat{H}_a |\lambda_m\rangle \otimes |\mu_p\rangle$$
$$+ \hat{H}_b |\lambda_m\rangle \otimes |\mu_p\rangle$$
$$= \left(\hat{H}_a |\lambda_m\rangle\right) \otimes |\mu_p\rangle$$
$$+ |\lambda_m\rangle \otimes \left(\hat{H}_b |\mu_p\rangle\right)$$
$$= \lambda_m |\lambda_m\rangle \otimes |\mu_p\rangle$$
$$+ |\lambda_m\rangle \otimes \mu_p |\mu_p\rangle$$
$$= (\lambda_m + \mu_p) |\lambda_m\rangle \otimes |\mu_p\rangle$$

Ce résultat est très souvent utilisé pour trouver les états propres du Hamiltoniem.