Statistique (MA101) Cours 6

ENSTA 1ère année

Christine Keribin

christine.keribin@math.u-psud.fr

Laboratoire de Mathématiques
Université Paris-Sud

2017-2018

Intervalle de confiance
Introduction
Définition
Construction
Le mot de la fin

Sommaire

Intervalle de confiance
- Introduction
- Définition
- Construction

Le mot de la fin

Des tests aux intervalles de confiance

Soit le test $(H_0) : \mu = \mu_0$ contre $(H_1) : \mu \neq \mu_0$ de l'espérance d'une loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ à variance connue. On ne peut rejeter (H_0) au niveau α si

$$|T(X)| = \left|\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\right| \leq q^*_{1-\alpha/2}$$

soit

$$-q^*_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \leq q^*_{1-\alpha/2}$$

qu'on peut aussi écrire

$$\underbrace{\bar{X} - q^*_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\widehat{\mu}_{inf}} \leq \mu_0 \leq \underbrace{\bar{X} + q^*_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\widehat{\mu}_{sup}}$$

et $1 - \alpha = \mathbb{P}\left(|T(X)| \leq q_{1-\alpha/2}\right) = \mathbb{P}\left([\widehat{\mu}_{inf}; \widehat{\mu}_{sup}] \ni \mu_0\right)$

Des tests aux intervalles de confiance

- Ainsi, une valeur hypothétique de μ ne soit pas rejetée si elle est dans l'intervalle

$$IC(\mu) = [\widehat{\mu}_{inf} ; \widehat{\mu}_{sup}]$$

- Cet intervalle $IC(\mu)$ aux bornes aléatoires est appelé intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ de l'espérance μ inconnue
- Dans cet exemple, il y a équivalence pour μ entre prendre une valeur acceptée (H_0) dans le test de niveau α et le fait d'être situé dans l'intervalle de confiance de niveau (de confiance) $1 - \alpha$

Fournir un intervalle (fourchette) permet de prendre en compte la fluctuation d'échantillonnage plutôt que de donner une valeur ponctuelle $\widehat{\mu}$

Intervalle de confiance

Définition

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathbb{P}_\theta$, où $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ est inconnu. Un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour θ est un intervalle $IC = [\widehat{\theta}_{inf}(X), \widehat{\theta}_{sup}(X)]$ dont les bornes sont aléatoires, telles que, pour tout $\theta \in \Theta$

$$\mathbb{P}_\theta(IC \ni \theta) \geq 1-\alpha.$$

où α est "petit".
Une réalisation $[\widehat{\theta}_{inf}(x), \widehat{\theta}_{sup}(x)]$ est obtenue à partir des données $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Retour sur l'exemple : $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 connu.

- On choisit $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq \alpha$ tq $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ et soit q^* la fonction quantile de $\mathcal{N}(0,1)$. Un intervalle de probabilité $1-\alpha$ de $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ est $[q^*_{\alpha_1}; q^*_{1-\alpha_2}]$

$$\mathbb{P}(q^*_{\alpha_1} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < q^*_{1-\alpha_2}) = 1-\alpha$$

- d'où un IC de niveau $1-\alpha$ de μ

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} - q^*_{1-\alpha_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - q^*_{\alpha_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$IC = \left[\bar{X} - q^*_{1-\alpha_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} - q^*_{\alpha_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Exemple : $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 1$, $n = 10$, $\bar{x} = 2.0686$.

Une infinité d'expression pour un même niveau $1 - \alpha$ (ci-dessous, réalisations pour 4 couples (α_1, α_2))

	alpha1	alpha2	min	max	length
IC1	0.000	0.050	1.904	Inf	Inf
IC2	0.015	0.035	1.887	2.286	0.398
IC3	0.025	0.025	1.873	2.265	0.392
IC4	0.050	0.000	-Inf	2.233	Inf

- IC1 et IC4 sont des intervalles de confiance unilatéraux
- IC2 et IC3 sont bilatéraux
- IC3 est l'intervalle de confiance symétrique, de longueur minimale ici :

$$IC3(\mu) = \left[\bar{X} - q^*_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + q^*_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

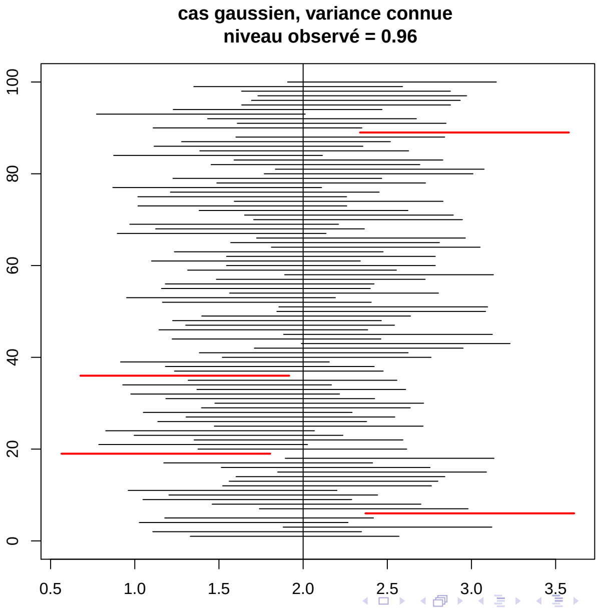
Interprétation

```
> mean(X)
[1] 2.0686
    alpha1 alpha2     min     max   length
IC3  0.025  0.025   1.873   2.265   0.392
```

- Interprétation fausse : θ appartient à $[1.873; 2.265]$ avec probabilité $1 - \alpha$.
- Interprétation correcte :
  - $\hookrightarrow$ La vraie valeur de θ (inconnue) appartient ou (exclus.) n'appartient pas à l'intervalle observé `[1.873 ; 2.265]`.
  - $\hookrightarrow$ Si on construit une centaine d'intervalles de confiance à partir d'une centaine de n-échantillons indépendants, en moyenne $100 \times \alpha$ IC observés ne contiendront pas θ

    $\hookrightarrow$ mais on ne sait pas lesquels...

Exemple : IC de l'espérance à variance connue



Intervalle de confiance : Remarques

- IC est d'autant plus large que α est petit.
  - $\hookrightarrow$ A l'extrême, l'IC de niveau de confiance 1 contient toutes les valeurs possibles... mais n'est plus informatif !
- IC de l'espérance calculé précédemment est d'autant plus étroit que *n* est grand
  - $\hookrightarrow$ Une construction d'IC est convergente si la différence de ses bornes tend en proba vers 0 avec *n*
- Choisir un estimateur de θ, dont on connaît la loi de probabilité pour tout θ, et le meilleur possible
  - $\hookrightarrow$ à α et *n* fixés, l'IC est d'autant meilleur que sa longueur est faible (pour toute réalisation / en moyenne)

Méthodes de construction

Inégalité probabiliste

Méthode pivotale :

- définir un estimateur $\widehat{\theta}$ de θ
- trouver une statistique pivotale $T_n(\widehat{\theta}, \theta)$ dont la loi ne dépend pas de θ
- exprimer les bornes de l'intervalle de confiance en fonction de T_n et de ses quantiles

Utiliser une équivalence Test - IC. Si $\mathcal{R}(\theta)$ est une région de rejet de niveau α, alors

$$IC(\theta) = \{\theta; \mathbb{1}_{X \in \mathcal{R}(\theta)} = 0\}$$

est un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$.

Méthodes de construction

IC asymptotique :

- La loi de la statistique n'est pas connue à distance finie, mais tend asymptotiquement vers une loi pivotale.
- On construit l'IC comme si la loi à distance finie était la loi limite.
- le niveau de l'IC construit est approximativement $1-\alpha$ à distance finie, et vaut asymptotiquemet $1-\alpha$
- l'approximation s'améliore avec avec n croissant.

Définition

Une suite d'intervalle de confiance IC_n de $\theta \in \mathbb{R}$ est de niveau asymptotique $1-\alpha$ si, pour tout $\theta \in \Theta$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(IC_n \ni \theta) = 1 - \alpha.$$

Exemple : IC de l'espérance θ d'une loi à variance inconnue

- TLC+Slutsky :

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \xrightarrow{\mathcal{P}} \sigma^2$$

$$T_n = \frac{\bar{X} - \theta}{S_n/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

d'où, avec q^* le quantile de $\mathcal{N}(0,1)$ d'ordre $1-\alpha/2$:

$$IC = \left[\bar{X} - q^*\frac{S_n}{\sqrt{n}}; \bar{X} + q^*\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right] \text{ avec } \mathbb{P}(IC \ni \theta) \simeq 1 - \alpha$$

Zoologie des tests et ICs

Tests et ICs paramétriques usuels

- Test d'une moyenne, d'une proportion, d'une variance
- Comparaison des moyennes de deux échantillons, comparaison de deux proportions, comparaison de deux variances

Tests d'adéquation

- hypothèse gaussienne : ex Shapiro-Wilks
- généraux pour les observations continues : Kolmogorov-Smirnov (test non paramétrique)
- observations discrètes : Khi-deux d'adéquation

Test de l'indépendance de deux facteurs
Test de corrélation entre deux variables...

Test de Student de comparaison de moyennes

- $X = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ et
  $Y = (Y_1, \dots, X_m) \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$ indépendants.
  μ_1, μ_2 et σ^2 sont inconnus.
- La variance est inconnue, et supposée identique dans les deux échantillons
- Alors, la statistique T définie par

$$T = \frac{\overline{Y} - \overline{X}}{\widehat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim \mathcal{T}(n+m-2)$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n+m-2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{m}(Y_j - \overline{Y})^2\right)$$

suit une loi de Student de paramètre $n+m-2$.

Test de Student de comparaison de moyennes

- $(H_0) : \mu_1 = \mu_2$ contre $(H_1) : \mu_1 \neq \mu_2$: Région de rejet bilatérale de niveau α

$$\{|T| > q^{1-\alpha/2}_{\mathcal{T}(n+m-2)}\}$$

- Un IC bilatère de niveau de confiance $1-\alpha$

$$IC(\mu_2 - \mu_1) = \left[\bar{Y} - \bar{X} - q^{1-\alpha/2}_{\mathcal{T}(n+m-2)} \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} ; \bar{Y} - \bar{X} + q^{1-\alpha/2}_{\mathcal{T}(n+m-2)} \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

- Asymptotique (n grand et sans l'hypothèse gaussienne), on utilise le TLC + Slutsky

$$T \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

et on construit tests et ICs à partir de la loi asymptotique

Sommaire

Intervalle de confiance
- Introduction
- Définition
- Construction

Le mot de la fin

Préparation à l'examen... Check-list

- feuille A4 manuscrite + calculatrice
- Exercices refaits (corrigés sur le site pédagogique via synapse)
- Compétences attendues :
  - $\hookrightarrow$ Construire un estimateur par les méthodes du maximum de vraisemblance et des moments
  - $\hookrightarrow$ Comparer des estimateurs
  - $\hookrightarrow$ Etudier l'asymptotique
  - $\hookrightarrow$ Construire l'IC d'un paramètre et en interpréter le résultat
  - $\hookrightarrow$ Construire un test et en interpréter le résultat ; calculer une puissance, calculer et utiliser une p-value.
  - $\hookrightarrow$ Construire un test UPP
- une demi-heure de questions/réponses de 8h30 à 9h00 avant l'examen

Merci de votre attention !