

\*\*\*

**Elasticité linéaire**

Travaux dirigés n°5

Solutions approchées

\*\*\*

**Exercice 1 : Barrage**

On considère un barrage de section triangulaire représenté en figure 1. Ce triangle est rectangle en A et l'angle  $AOB$  est noté  $\alpha$ . La longueur du segment  $OA$  est  $h$ . Sur la partie gauche du barrage s'exercent des efforts de pression dus à la présence d'eau tandis que la partie droite  $OB$  est soumise à la pression atmosphérique. Sur ses surfaces latérales, le barrage est soumis à des conditions aux limites telles que le déplacement dans la direction  $x_3$  est nul en tout point du barrage.

1. Déterminer l'ensemble des efforts externes et internes auxquels est soumis le barrage, ainsi que les conditions aux limites pour le déplacement.
2. Déterminer l'ensemble des champs Cinématiquement Admissibles constitués de fonctions affines de  $x_1$  et  $x_2$ . On notera  $q_1$  et  $q_2$  les composantes du déplacement du point  $O$ .
3. Déterminer une solution approchée dans cet ensemble de champs Cinématiquement Admissibles.

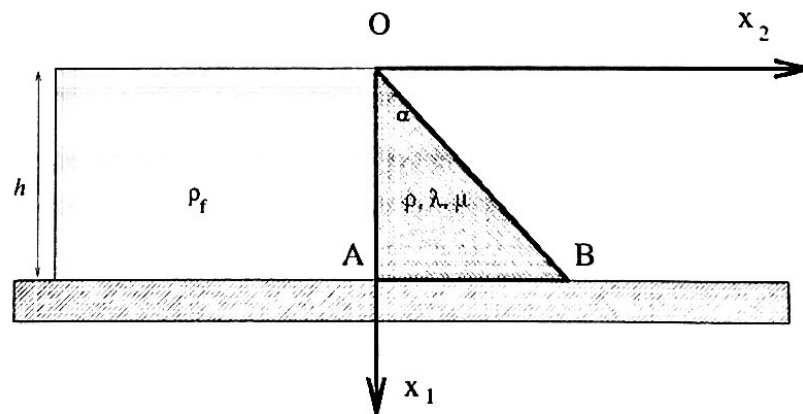


FIGURE 1 – Barrage

**Exercice 2 : Coefficient de Poisson apparent d'une poutre sandwich**

On souhaite calculer le coefficient de Poisson apparent d'une poutre sandwich de section  $S$  et de longueur  $L$ , composée de  $N$  couches d'un matériau ayant pour coefficients de Lamé  $\lambda_1$  et  $\mu_1$  et de  $N$  couches d'un matériau différent  $(\lambda_2, \mu_2)$ .

En supposant que l'allongement de la poutre est  $\Delta L$ , déterminer une solution approchée en déplacement de cette poutre sur la base des champs de déplacement d'une poutre homogène en traction. Déterminer le coefficient de Poisson apparent de cette poutre.

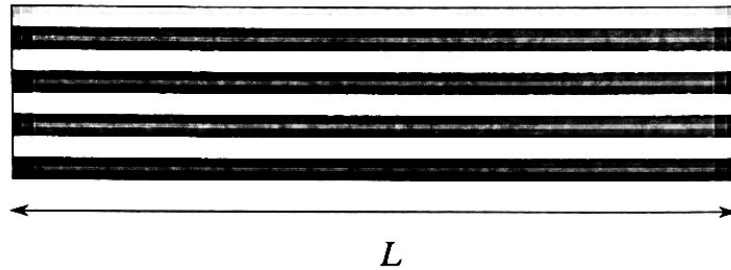


FIGURE 2 – Poutre en sandwich.

### Exercice 3 : Poutre en flexion

On considère une poutre de section rectangulaire  $0 \leq x \leq l$ ,  $-h \leq y \leq h$  et  $-b/2 \leq z \leq b/2$ . Elle est en équilibre sous l'action d'efforts uniquement exercés sur les sections extrêmes. Les données y sont :

- Sur  $S_0(x = 0)$  :  $T_y^d = T_z^d = 0$ ,  $\xi_d^x = 0$
- Sur  $S_L(x = L)$  :  $T_y^d = T_z^d = 0$ ,  $\xi_d^x = -\omega y$

1. Vérifier que le problème est bien posé.
2. Montrer qu'il existe des champs de déplacement Cinématiquement Admissibles tels que  $\varepsilon'_{xx} = -\chi y$ ,  $\varepsilon'_{yy} = \varepsilon'_{zz} = Ky$ , autres  $\varepsilon_{ij} = 0$ .
3. Trouver une solution en déplacement approchée dans cet ensemble.

\*\*\*

**Elasticité linéaire**

Travaux dirigés n°5

Solutions approchées

\*\*\*

**Exercice 1 : Barrage**

1. L'ensemble des équations du problème est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sur } OA : \underline{T} = \rho_f g x_1 \underline{e}_2 \\ \text{Sur } OB : \underline{T} = \underline{0} \\ \text{Sur } AB : \underline{\xi} = \underline{0} \\ \text{Sur } \Omega : \underline{f} = \rho g \underline{e}_1 \\ \text{Solide élastique linéaire isotrope : } \underline{\sigma} = \lambda \text{tr}(\underline{\varepsilon}) \underline{1} + 2\mu \underline{\varepsilon} \\ \text{Sur } \Omega : \underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = \underline{0} \end{array} \right. \quad (1)$$

 $\Rightarrow$  Le problème est donc bien posé.2. Les champs de déplacement  $\underline{\xi}'$  fonctions linéaires de  $(x_1, x_2)$  peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi'_1 = A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 \\ \xi'_2 = A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 \\ \xi'_3 = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

 $\underline{\xi}'$  est CA, donc doit respecter la condition en déplacement sur  $AB$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi'_1 = A_1 h + B_1 x_2 + C_1 = 0 \\ \xi'_2 = A_2 h + B_2 x_2 + C_2 = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Donc,

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = 0 \\ B_2 = 0 \\ C_1 = -A_1 h = q_1 \\ C_2 = -A_2 h = q_2 \end{array} \right. \quad (4)$$

Les champs  $\underline{\xi}'$  sont donc de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi'_1 = q_1 (1 - x_1/h) \\ \xi'_2 = q_2 (1 - x_1/h) \\ \xi'_3 = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

3. Calcul d'une solution approchée. On calcule tout d'abord le tenseur de déformation associé à  $\underline{\xi}'$  :

$$\underline{\varepsilon}' = -\frac{q_1}{h} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{q_2}{2h} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \quad (6)$$

Puis on calcule l'énergie interne :

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' dv \\
 &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\lambda (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}')^2 + \mu (\underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\varepsilon}}')] dv \\
 &= \frac{h^2 \tan \alpha}{2} \left[ \left( \frac{\lambda}{2} + \mu \right) \frac{q_1^2}{h^2} + \frac{\mu}{2} \frac{q_2^2}{h^2} \right]
 \end{aligned} \tag{7}$$

Et le travail des efforts extérieurs :

$$\begin{aligned}
 \phi &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\xi}}' \cdot \underline{\underline{f}} dv + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\xi}}' \cdot \underline{\underline{T}} ds \\
 &= \rho g q_1 \int_{x_1=0}^h \int_{x_2=0}^{x_1 \tan \alpha} \left( 1 - \frac{x_1}{h} \right) dx_2 dx_1 + \rho_f g q_2 \int_0^h x_1 \left( 1 - \frac{x_1}{h} \right) dx_1 \\
 &= \rho g q_1 \frac{h^2}{6} \tan \alpha + \rho_f g q_2 \frac{h^2}{6}
 \end{aligned} \tag{8}$$

On effectue ensuite la recherche d'un minimum :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(W - \phi)}{\partial q_1} &= -\rho g \frac{h^2}{6} \tan \alpha + q_1 \left( \frac{\lambda}{2} + \mu \right) \tan \alpha = 0 \\
 \frac{\partial(W - \phi)}{\partial q_2} &= -\rho_f g \frac{h^2}{6} + \frac{q_2}{2} \mu \tan \alpha = 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

La solution obtenue est :

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \frac{\rho g h^2}{3(\lambda + 2\mu)} \\
 q_2 &= \frac{\rho_f g h^2}{3\mu \tan \alpha}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Les champs de déplacements pour deux valeurs du coefficient de Poisson sont tracés sur la Figure 1, tandis que la déformée est montrée sur la Figure 2.

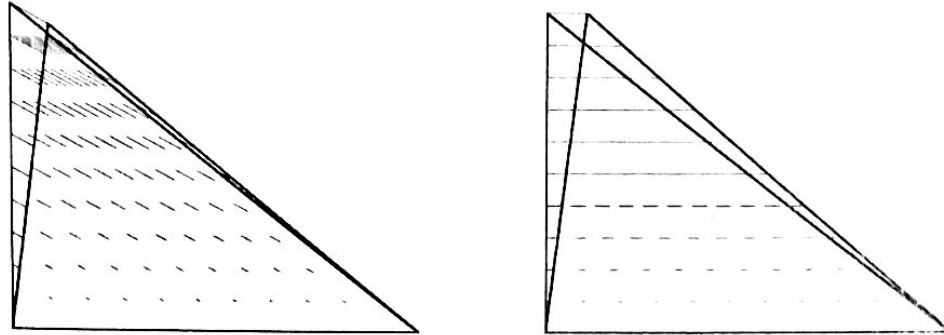


FIGURE 1 - Champ de déplacement et déformation du barrage obtenus pour  $\nu = 0.4$  et  $\nu = 0.5$  (échelles et paramètres arbitraires).

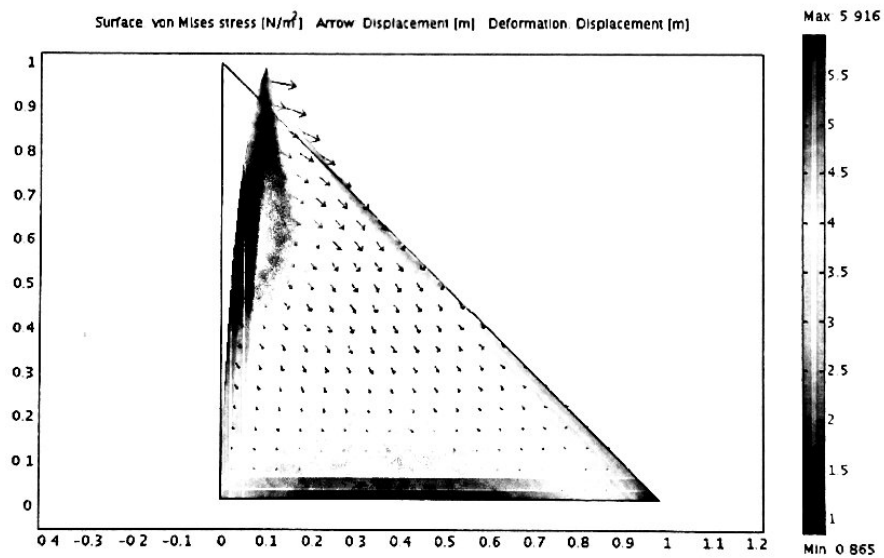


FIGURE 2 - Champ de déplacement et déformation du barrage pour  $\nu = 0.4$  (calcul éléments finis, échelles et paramètres arbitraires)

## Exercice 2 : Poutre sandwich

Déplacement approché de la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = \frac{\Delta L}{L} [\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 - \nu(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2)] \quad (11)$$

On pose  $S_N = \frac{S}{2N}$ . L'énergie interne vaut :

$$W(\underline{\xi}') = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\xi}' : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\xi}' dv \quad (12)$$

$$= NS_N \int_{x_3=0}^L \left[ \left( \frac{\Delta L}{L} \right)^2 \frac{1}{2} \lambda_1 (1 - 2\nu)^2 + \mu_1 (1 + 2\nu^2) \right] dx_3 \quad (13)$$

$$+ NS_N \int_{x_3=0}^L \left[ \left( \frac{\Delta L}{L} \right)^2 \frac{1}{2} \lambda_2 (1 - 2\nu)^2 + \mu_2 (1 + 2\nu^2) \right] dx_3 \quad (14)$$

$$= NS_N \frac{\Delta L^2}{L} \left[ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} (1 - 2\nu)^2 + (\mu_1 + \mu_2) (1 + 2\nu^2) \right] \quad (15)$$

L'énergie externe est nulle. On cherche ensuite un minimum d'énergie en fonction de  $\nu$  :

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = 0 \quad (16)$$

$$= NS_N \frac{\Delta L^2}{L} \left[ 2\nu \left( 4 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + 4 \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \right) - 4 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right] \quad (17)$$

Le coefficient de Poisson optimal vaut donc :

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} + \bar{\mu}} \quad (18)$$

où  $\bar{\lambda}$  et  $\bar{\mu}$  sont les coefficients de Lamé moyens :

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad (19)$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \quad (20)$$

Le  $\nu$  apparent de la poutre est donc un coefficient de Poisson basé sur les coefficients de Lamé moyens.

### Exercice 3 : Poutre en flexion

1.  $\varepsilon'_{xx} = -\chi y \Rightarrow \xi'_x = -\chi xy + cte$ . Ce champ de déplacement doit être CA.  $\xi'_x(x=0) = 0 \Rightarrow cte = 0$ .  $\xi'_x(x=L) = -\omega y$ , donc les champs proposés sont cinématiquement admissibles si

$$\chi = \frac{\omega}{L} \quad (21)$$

2. Énergie :

$$W(\underline{\xi}') = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\xi}' : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\xi}' dv \quad (22)$$

$$= \left[ \frac{\lambda}{2} \left( -\frac{\omega}{L} + 2K \right)^2 + \mu \left( \frac{\omega^2}{L^2} + 2K^2 \right) \right] \underbrace{L \int_S y^2 dv}_{I_z} \quad (23)$$

L'énergie externe est nulle. On cherche ensuite un minimum d'énergie en fonction de  $K$  :

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = 0 \Rightarrow K = \frac{\omega}{L} \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \nu \frac{\omega}{L} \quad (24)$$

Donc,

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = -\frac{\omega}{L} y (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) + \nu \frac{\omega}{L} y (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \quad (25)$$

Le tenseur de déformation obtenu correspond à la solution exacte [éq (3.55) du poly] avec  $\omega/L = \mathcal{M}/EI_z$ , on vérifie bien que le champ de contrainte est uniaxial,  $\underline{\underline{\sigma}} = -(y\omega/L)(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x)$  [éq (3.54) du poly]. De même l'intégration du tenseur de déformation donne la solution exacte [éq (3.56) du poly].