MAP-AUT1
Principes fondamentaux de l'Automatique

Dynamique et Contrôle des Systèmes

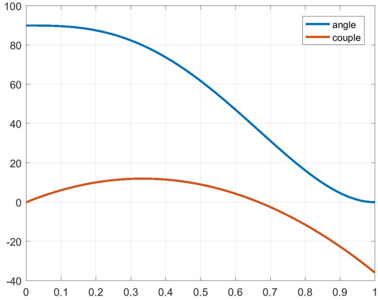
NICOLAS PETIT

Centre Automatique et Systèmes
MINES ParisTech
nicolas.petit@mines-paristech.fr

30 novembre 2018
Amphi 4

http://cas.ensmp.fr/~petit/ensta2018/

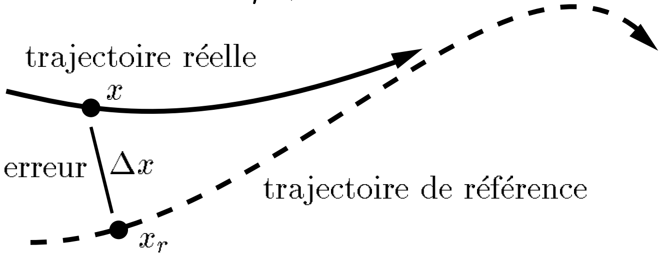
Plan de l'amphi 4



$$\ddot{\theta} = u$$

Suivi de trajectoires

$$u = u_r + \Delta u \ ?$$



Calculer en temps réel la correction Δu en fonction des écarts observés Δx (loi de rétroaction ou feedback) pour que Δx reste petit: stabilisation en 0 de Δx.

Dynamique de l'erreur

La planification de trajectoire donne une trajectoire de référence $t \mapsto (x_r, u_r)$ qui vérifie les équations $\frac{d}{dt}x_r = Ax_r + Bu_r$. Si on note $\Delta x = x - x_r$ et $\Delta u = u - u_r$, on a comme dynamique d'erreur

$$\frac{d}{dt}\Delta x = A\,\Delta x + B\,\Delta u.$$

On cherche un feedback $\Delta u = K\Delta x$ tel que le système bouclé $\frac{d}{dt}\Delta x = (A + BK)\,\Delta x$ soit asymptotiquement stable.

Théorème (placement de pôles)

Si la paire (A, B) est commandable alors, pour toute matrice $n \times n$ réelle F, il existe une matrice $m \times n$, K (non nécessairement unique si $\dim(u) = m > 1$), telle que le spectre de $A + BK$ coïncide avec celui de F.

Dynamique de l'erreur

La planification de trajectoire donne une trajectoire de référence $t \mapsto (x_r, u_r)$ qui vérifie les équations $\frac{d}{dt}x_r = Ax_r + Bu_r$.Si on note $\Delta x = x - x_r$ et $\Delta u = u - u_r$, on a comme dynamique d'erreur

$$\frac{d}{dt}\Delta x = A\,\Delta x + B\,\Delta u.$$

On cherche un feedback $\Delta u = K \Delta x$ tel que le système bouclé $\frac{d}{dt}\Delta x = (A + BK)\,\Delta x$ soit asymptotiquement stable.

Théorème (placement de pôles)

Si la paire (A, B) est commandable alors, pour toute matrice $n \times n$ réelle F, il existe une matrice $m \times n$, K (non nécessairement unique si $\dim(u) = m > 1$), telle que le spectre de $A + BK$ coïncide avec celui de F.

Dynamique de l'erreur

La planification de trajectoire donne une trajectoire de référence $t \mapsto (x_r, u_r)$ qui vérifie les équations $\frac{d}{dt}x_r = Ax_r + Bu_r$.Si on note $\Delta x = x - x_r$ et $\Delta u = u - u_r$, on a comme dynamique d'erreur

$$\frac{d}{dt}\Delta x = A\,\Delta x + B\,\Delta u.$$

On cherche un feedback $\Delta u = K\Delta x$ tel que le système bouclé $\frac{d}{dt}\Delta x = (A + BK)\,\Delta x$ soit asymptotiquement stable.

Théorème (placement de pôles)

Si la paire (A, B) est commandable alors, pour toute matrice $n \times n$ réelle F, il existe une matrice $m \times n$, K (non nécessairement unique si $\dim(u) = m > 1$), telle que le spectre de $A + BK$ coïncide avec celui de F.

Dynamique de l'erreur

La planification de trajectoire donne une trajectoire de référence $t \mapsto (x_r, u_r)$ qui vérifie les équations $\frac{d}{dt}x_r = Ax_r + Bu_r$.Si on note $\Delta x = x - x_r$ et $\Delta u = u - u_r$, on a comme dynamique d'erreur

$$\frac{d}{dt}\Delta x = A\,\Delta x + B\,\Delta u.$$

On cherche un feedback $\Delta u = K\Delta x$ tel que le système bouclé $\frac{d}{dt}\Delta x = (A + BK)\,\Delta x$ soit asymptotiquement stable.

Théorème (placement de pôles)

Si la paire (A, B) est commandable alors, pour toute matrice $n \times n$ réelle F, il existe une matrice $m \times n$, K (non nécessairement unique si $\dim(u) = m > 1$), telle que le spectre de $A + BK$ coïncide avec celui de F.

Avec une seule commande: formule d'Ackermann

$$K = -\begin{bmatrix} 0 & \dots 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \mathcal{P}(A)$$

où $\mathcal{P}$ est le polynôme caractéristique désiré, $\mathcal{C}$ la matrice de commandabilité

Comment choisir les valeurs propres?

à parties réelles <0, très negatives le système sera très rapide, éloignées des valeurs propres en boucle ouverte on trouvera des gains forts

Avec une seule commande: formule d'Ackermann

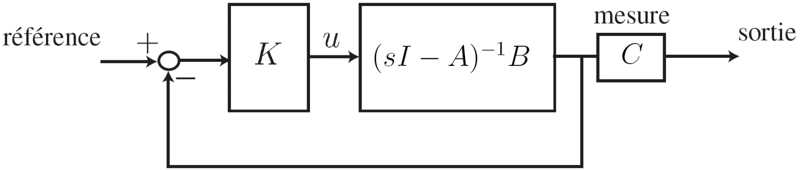
$$K = -\begin{bmatrix} 0 & \dots 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \mathcal{P}(A)$$

où $\mathcal{P}$ est le polynôme caractéristique désiré, $\mathcal{C}$ la matrice de commandabilité

Comment choisir les valeurs propres?

à parties réelles <0, très negatives le système sera très rapide, éloignées des valeurs propres en boucle ouverte on trouvera des gains forts

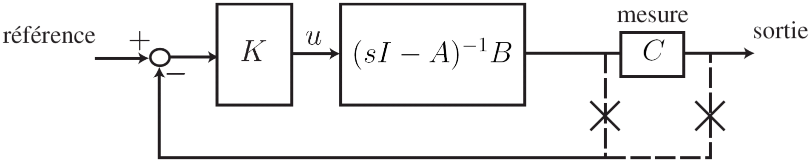
Retour d'état



Placement de pôles

Si (A, B) est commandable, alors le système $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$ est stabilisable par retour d'état $u = Kx$. On peut même choisir toutes les valeurs propres de $A + BK$

Retour de sortie et non pas retour d'état



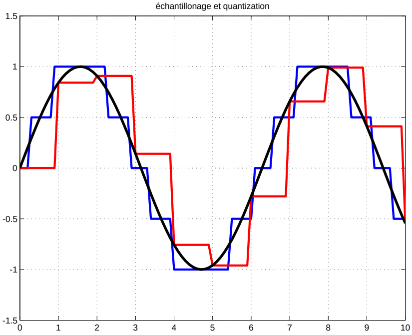
Seule la mesure y est accessible, en général $\dim y \neq n = \dim x$

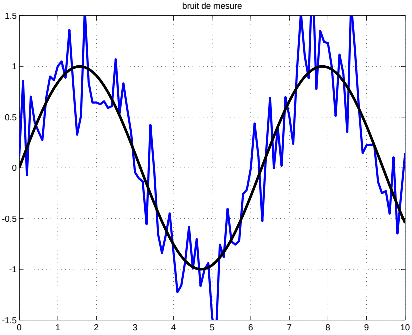
Mesure et estimation d'état

Plusieurs cas de figure

1. Les mesures sont en nombre insuffisant $\dim y < n$: reconstruction d'état
2. Les mesures sont de mauvaise qualité
3. Les mesures sont redondantes mais de mauvaise qualité $\dim y \geq n$: fusion de données

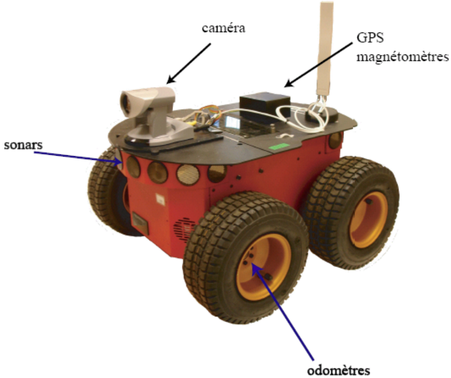
Mauvaise qualité des signaux de mesure





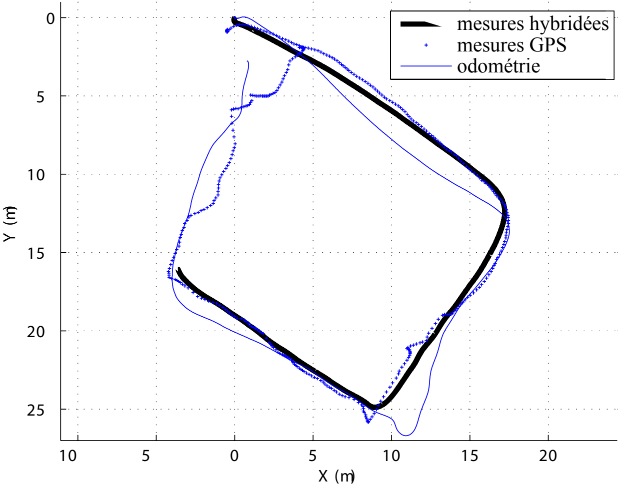
Quantification, échantillonnage, bruit

Fusion de données



Pour l'estimation de la position du véhicule: GPS, caméras, télémètres, sonars, odomètres, magnétomètres, accéléromètres. Chaque technologie a ses défauts caractéristiques

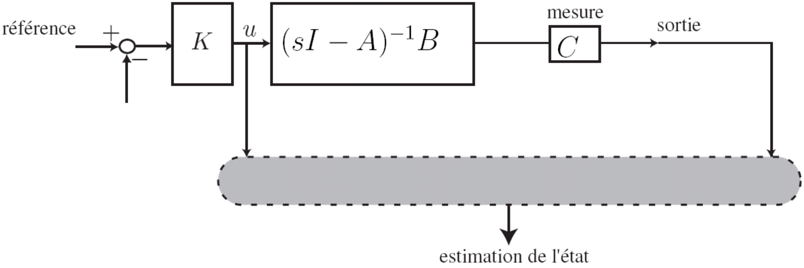
Mesures expérimentales



bruit basse fréquence du GPS, dérive des odomètres

Observateur

On va intercaler entre les mesures et le contrôleur un système dynamique pour estimer l'état du système



On dispose: du modèle du système, des valeurs de la commande u et des mesures y (avec leurs défauts)

Systèmes linéaires

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

Définition (distinguabilité)

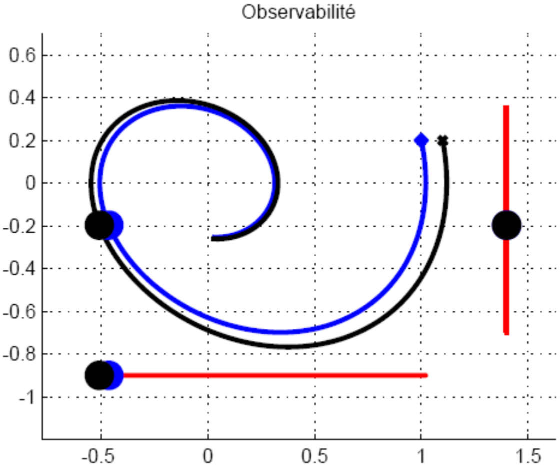
Deux états initiaux x et $\tilde{x}$ sont dits indistinguables (notés $xI\tilde{x}$) si pour tout $t \geq 0$, les sorties $y(t)$ et $\tilde{y}(t)$ sont identiques pour toute entrée $u(t)$. Ils sont dits distinguables sinon.

L'indistinguabilité est une relation d'équivalence. Notons $I(x)$ la classe d'équivalence de x.

Définition (observabilité globale)

Le système est dit observable si $I(x) = \{x\}$pour tout x.

Distinguabilité



$$\frac{d^2}{dt^2}x = -x - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}x + \frac{1}{10}\cos(t)$$

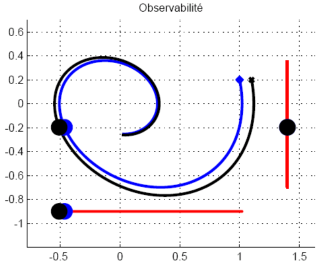
Distinguabilité

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -x - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}x + \frac{1}{10}\cos(t)$$

Formellement,

$$\begin{cases} y = x \\ \frac{d}{dt}y = \frac{d}{dt}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{d}{dt}x \\ \frac{d}{dt}y = -x - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}x + \frac{1}{10}\cos(t) \end{cases}$$



Dans les deux cas, on reconstitue $(x, \frac{d}{dt}x)^T$, la condition initiale est distinguable

Question

Peut-on distinguer la condition initiale d'un système linéaire?

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

$$x(t) = \exp(tA)x(0) + \int_0^t \exp[(t-\tau)A]Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = C\exp(tA)x(0) + \int_0^t C\exp[(t-\tau)A]Bu(\tau)d\tau$$

Équation d'inconnue $x(0)$

$$\underbrace{C\exp(tA)}_{\text{non inversible}}x(0) = y(t) - \int_0^t C\exp[(t-\tau)A]Bu(\tau)d\tau$$

$$C \exp(tA) x(0) = y(t) - \int_0^t C \exp[(t-\tau)A] B u(\tau) d\tau$$

$$\underbrace{\exp(tA') C' C \exp(tA)}_{\text{non inversible}} x(0) = \text{Fonction}(y(t), u(t \in [0, t]))$$

$$\underbrace{\int_0^T \exp(tA') C' C \exp(tA) dt}_{\phi(T)} x(0) = \text{Fonction}(y(t \in [0, T]), u(t \in [0, T]))$$

Si $\phi(T)$ est inversible alors on peut reconstruire $x(0)$ à partir des mesures y et de la commande sur $[0, T]$

Si $\phi(T)$ n'est pas inversible alors on ne peut pas reconstruire $x(0)$ à partir des mesures y et de la commande sur $[0, T]$.
En effet, $\exists v \neq 0$ tel que

$$v' \left(\int_0^T \exp(tA') C' C \exp(tA) dt \right) v = 0$$

et par suite

$$\int_0^T \| C \exp(tA) v \|^2 dt = 0$$

d'où

$$C \exp(tA) v = 0$$

Les mesures issues de la condition initiale $x(0)$ et $x(0) + v$ sont identiques. Ces conditions initiales sont indistinguables

$$\exists v \neq 0, \quad C \exp(tA) v = 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

d'où, par dérivations $\frac{d}{dt}(.)$ (fonction analytique) en $t = 0$

$$CA \exp(tA) v = 0, \quad CA^2 \exp(tA) v = 0, \quad ...,$$
$$CA^{n-1} \exp(tA) v = 0, \quad CA^n \exp(tA) v = 0, \quad ...$$
$$\iff \exists v \neq 0, Cv = 0, \quad CAv = 0, ..., \quad CA^{n-1} v = 0, \quad CA^n v = 0, ...$$
$$\iff \exists v \neq 0, Cv = 0, \quad CAv = 0, ..., \quad CA^{n-1} v = 0$$
$$\iff [C; CA; ...; CA^{n-1}] \text{ n'est pas de rang plein}$$

Critère d'observabilité de Kalman

Le système $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$, $y = Cx$ est observable si et seulement si la matrice d'observabilité $\mathcal{O} = (C; CA; \ldots CA^{n-1})$ est de rang $n = \dim(x)$

Dualité

Le système $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$, $y = Cx$ est observable (resp. commandable) si et seulement si $\frac{d}{dt}x = A'x + C'u$, $y = B'x$ est commandable (resp. observable)

Forme normale observateur

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (\dim C = 1 \times n)$$

Changement de variables mettant le système sous forme canonique observateur

Forme canonique

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} b_0 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M = [H, AH, ..., A^{n-1}H], \quad H$ dernière colonne de l'inverse de $\mathcal{O}$

Construction d'un observateur

$$\mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} L_0 \\ \vdots \\ L_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$A_2 + \mathcal{L}_2 C_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 + L_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} + L_{n-1} \end{pmatrix}$$

Polynôme caractéristique

$$s^n - (a_{n-1} - L_{n-1})s^{n-1} - \dots - (a_1 - L_1)s - (a_0 - L_0) = 0$$

On peut librement choisir les pôles de $A + LC$ si (A, C) est observable

Construction d'un observateur (suite)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad y = Cx \\ \frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}(x - \hat{x}) = (A + LC)(x - \hat{x})$$

d'où, si les pôles sont à partie réelle strictement négative

$$\lim_{t \to +\infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0$$

On reconstitue asymptotiquement x en l'estimant par $\hat{x}$

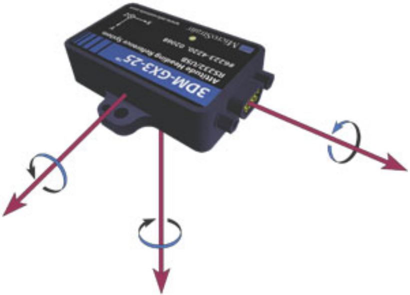
Exemple d'observateur: centrale inertielle bas coût

$$\frac{d}{dt}Q = \frac{1}{2}M(p,q,r)Q$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = -R(Q)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$



$$R(Q) =$$

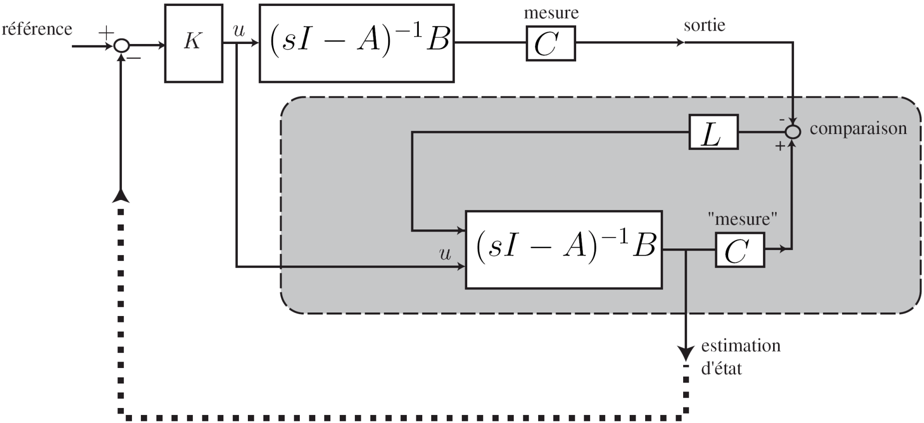
$$\begin{pmatrix} 2\cdot(q_0^2+q_1^2)-1 & 2\cdot q_1\cdot q_2+2\cdot q_0\cdot q_3 & 2\cdot q_1\cdot q_3-2\cdot q_0\cdot q_2 \\ 2\cdot q_1\cdot q_2-2\cdot q_0\cdot q_3 & 2\cdot(q_0^2+q_2^2)-1 & 2\cdot q_2\cdot q_3+2\cdot q_0\cdot q_1 \\ 2\cdot q_1\cdot q_3+2\cdot q_0\cdot q_2 & 2\cdot q_2\cdot q_3-2\cdot q_0\cdot q_1 & 2\cdot(q_0^2+q_3^2)-1 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}M(p,q,r)$$

$$Y = CX$$

$$C = -2\cdot g\cdot \begin{pmatrix} -q_2 & q_3 & -q_0 & q_1 \\ q_1 & q_0 & q_3 & q_2 \\ 2q_0 & 0 & 0 & 2q_3 \end{pmatrix}$$

Observateur-contrôleur



Convergence

Le système (étendu, dimension $2n$) à étudier est

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x &= Ax + Bu, \qquad y = Cx \\
\frac{d}{dt}\hat{x} &= A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y) \quad \text{observateur} \\
u &= u_r(t) + K(\hat{x} - x_r(t)) \quad \text{contrôleur}
\end{aligned}
$$

Hypothèses

Par le choix de K et L, $A + BK$ est stable, $A + LC$ est stable

Question

Le système bouclé par l'observateur contrôleur est-il stable?

Étude de stabilité

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x = Ax + B\left(u_r(t) + K(\hat{x} - x_r(t))\right) \\ \dfrac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + B\left(u_r(t) + K(\hat{x} - x_r(t))\right) + L(C\hat{x} - Cx) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & BK \\ -LC & A + BK + LC \end{pmatrix}}_{=M}\begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} + f(t)$$

Etude du polynôme caractéristique de la matrice M du système étendu

$$
\begin{aligned}
\det(sI - M) &= \begin{vmatrix} sI - A & -BK \\ LC & sI - A - BK - LC \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} sI - A - LC & -sI + A + LC \\ LC & sI - A - BK - LC \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} sI - A - LC & 0 \\ LC & sI - A - BK \end{vmatrix} \\
&= \det(sI - A - LC)\det(sI - A - BK)
\end{aligned}
$$

Principe de séparation

L'ensemble des valeurs propres du système bouclé par l'observateur contrôleur est constitué des valeurs propres de $A + BK$ et de celles de $A + LC$

Démarche pratique: l'observateur-contrôleur

1. On conçoit le contrôleur comme si on disposait de la mesure de tout l'état x. On place les pôles de $A + BK$
2. Séparément on construit un observateur asymptotique. On place les pôles de $A + LC$
3. On substitue $\hat{x}$ à x et on boucle: les valeurs propres ainsi obtenues sont connues à l'avance

Observateur-contrôleur