Corrigé de la PC1 : Equations hyperboliques linéaires

1 avril 2019

<u>EXERCICE</u> 1 (EQUATION D'ADVECTION AVEC UN TERME D'ABSORPTION)
On considère l'équation d'advection avec un terme d'absorption :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\alpha u & \textit{pour}\, x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x) & \textit{pour}\, x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où $\alpha > 0$ *et* $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Question *Résoudre ce problème en adaptant la méthode des caractéristiques.*

Corrigé de la question : Nous considérons les droites caractéristiques associées au problème (1) lorsque $\alpha = 0$ et qui sont données par l'équation $X(t) = x_0 + ct$. Le long de ces droites, la solution n'est plus constante, mais elle satisfait l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{dt}u(X(t),t) = -\alpha u(X(t),t).$$

Cela entraîne

$$u(X(t),t) = u^0(x_0)e^{-\alpha t}.$$

On en déduit en remontant au pied de la caractéristique que

$$u(x,t) = u^0(x-ct)e^{-\alpha t}.$$

<u>EXERCICE</u> 2 (EQUATION DES ONDES)
On considère le problème de Cauchy pour l'équation des ondes en une dimension d'espace.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \textit{pour}\, x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,t=0) = u^0(x) & \textit{pour}\, x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t=0) = u^1(x) & \textit{pour}\, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

Question 1. *Mettre le problème sous forme d'un système du premier ordre*

$$\frac{\partial U}{\partial t} - C\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

assorti de la condition initiale,

$$U(x,t=0) = U^0(x),$$

où l'on précisera la matrice C*, le vecteur* U *et la condition initiale* U^0.

Corrigé de la question 1 : Le vecteur

$$U = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ c\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix},$$

répond à la question à condition de poser

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

et en remarquant que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$. On pose de plus $U^0 = \begin{pmatrix} u^1 \\ c{u^0}' \end{pmatrix}$.

Question 2. *En diagonalisant C, mettre le système précédent sous la forme de deux équations de transport indépendantes.*

En déduire l'expression de la solution $u(x,t)$.

Corrigé de la question 2 : Les valeurs propres de la matrice C sont évidemment c et $-c$ et des vecteurs propres associés sont donnés par $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. En notant P la matrice de passage associée

$$P = P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et en multipliant l'équation vérifiée par U par P, on obtient

$$\frac{\partial PU}{\partial t} - PCP^{-1}\frac{\partial PU}{\partial x} = 0 .$$

Mais

$$PCP^{-1} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix},$$

donc en posant $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = PU$, on obtient deux équations de transport indépendantes qui s'écrivent

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

et

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

avec $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ et $w = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} - c\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$. On en déduit en particulier que

$$v(x,t) = v(x+ct,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u^1(x+ct) + c{u^0}'(x+ct)\right],$$

$$w(x,t) = w(x-ct,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u^1(x-ct) - c{u^0}'(x-ct)\right] \ .$$

On obtient donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+w) = \frac{1}{2}\left[u^1(x+ct) + u^1(x-ct) + c{u^0}'(x+ct) - c{u^0}'(x-ct)\right] ,$$

soit, par intégration en temps :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t (u^1(x+cs) + u^1(x-cs))ds + \frac{1}{2}(u^0(x+ct) + u^0(x-ct)).$$

Par un changement de variable $y = x + cs$ d'une part et $y = x - cs$ d'autre part, on aboutit à

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u^0(x+ct) + u^0(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u^1(y)\, dy \ .$$

Question 3. *On suppose que le support des fonctions u^0 et u^1 est inclus dans un intervalle $[a,b]$ et on pose*

$$\left|\begin{array}{l} D^+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \quad x > b+ct\} \\ D^- = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \quad x < a-ct\} \\ D^0 = \{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \quad b-ct < x < a+ct\} \end{array}\right.$$

Montrer que la solution est constante dans chacun de ses domaines et préciser la valeur de ces constantes. Commenter le résultat quand la moyenne de u^1 est nulle.

Corrigé de la question 3 : En utilisant l'expression de la solution trouvée à la question précédente, on trouve Que u est nulle dans D^+ et D^- car pour tout (x,t) appartenant à $D^+ \cup D^-$, on a

$$[x-ct, x+ct] \cap [a,b] = \emptyset.$$

Pour (x,t) appartenant à D^0, on remarque que

$$[a,b] \subset [x-ct, x+ct]$$

ce qui nous donne que

$$u^0(x+ct) = u^0(x-ct) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{x-ct}^{x+ct} u^1(y)\, dy = \int_a^b u^1(y)\, dy.$$

On en déduit que

$$\forall (x,t) \in D^0, \quad u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_a^b u^1(y)\, dy$$

Quand la moyenne de u^1 est nulle, u est donc nulle dans D^0. On dit alors qu'il y a présence de 2 fronts d'ondes.

<u>EXERCICE</u> 3 (EQUATION D'ADVECTION AVEC CONDITION AU BORD)
On s'intéresse à la résolution de l'équation d'advection sur un intervalle semi-infini :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \textit{pour}\, x \in \mathbb{R}^+, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x) \quad \textit{pour}\, x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{4}$$

où $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$.

Question 1. *On suppose que* $c < 0$. *Tracer les caractéristiques. Montrer que le problème (4) admet une unique solution.*

Corrigé de la question 1 : Lorsque $c < 0$, l'ensemble des droites caractéristiques ayant pour origine un point du demi-intervalle $\mathbb{R}_+$ couvre tout le quadrant $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. En d'autres termes, le pied de la caractéristique passant par le point (x,t) est $x_0 = x - ct \in \mathbb{R}_+$. Et on a donc :

$$u(x,t) = u^0(x - ct), \qquad \forall\,(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+. \tag{5}$$

Question 2. *On suppose que* $c > 0$. *Montrer qu'il n'y a pas unicité de la solution du problème* (4).

Corrigé de la question 2 : Cette fois ci, l'ensemble des droites caractéristiques ne couvre pas tout le quadrant. On ne peut pas remonter au pied des caractéristiques des points situés dans le cône $\{(x,t)/x < ct\}$. Ces caractéristiques s'arrêtent sur l'axe $x = 0$. Pour montrer qu'il n 'y a pas unicité de la solution dans le cas $c > 0$, on construit une solution non nulle au problème associé à une donnée initiale nulle. Soit $\tilde{u}^0$ non nulle à support dans $\mathbb{R}^-$ alors la fonction $u(x,t) = \tilde{u}^0(x - ct)$ pour $x > 0$ et $t > 0$ et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et vérifie $u(x,0) = 0$ pour tout $x > 0$.

Question 3. *Pour pallier le défaut d'unicité, on ajoute la condition*

$$u(0,t) = g(t), \ \textit{pour}\, t > 0, \tag{6}$$

où $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. *Montrer que le problème (4) admet une unique solution de classe* $\mathcal{C}^1$ *que l'on déterminera si et seulement si on a :*

$$g(0) = u^0(0), \qquad \textit{et} \qquad g'(0) + c{u^0}'(0) = 0. \tag{7}$$

Corrigé de la question 3 : On vérifie que la solution du problème dans (4) et (6) donnée par la méthode des caractéristiques est :

$$u(x,t) = \begin{cases} u^0(x-ct) & \textbf{si } x > ct, \\ g(t - x/c) & \textbf{si } x < ct. \end{cases} \tag{8}$$

Pour que la solution soit $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ il faut assurer la continuité de $u(x,t)$ ainsi que celle de ses dérivées en x et t le long de la droite d'équation $x = ct$. Grâce à l'équation de ransport, il suffit d'assurer le raccord d'une de ses 2 dérivées. Ceci qui nous donne les conditions (7).

Question 4. *(Estimation d'énergie). On se propose ici de retrouver la nécessité d'imposer une condition sur le bord $t = 0$ lorsque $c > 0$ par une méthode d'énergie pour que le problème admette une unique solution.*

Montrer que toute solution de (4) d'énergie finie vérifie l'identité d'énergie :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} |u|^2 dx\right) = \frac{c}{2}\,|u(0,t)|^2, \tag{9}$$

Conclure en distinguant $c < 0$ et $c > 0$.

Corrigé de la question 4 : Il suffit de multiplier l'équation (4) par u et d'intégrer le terme en espace pour obtenir l'identité d'énergie (9). On supposera ici que la condition initiale est à support compact. La propagation à vitesse finie fait que seulement le terme de bord en $x = 0$ soit présent.

Soient $u_i,\ i \in \{1,2\}$ deux solutions de (4). On vérifie aisément que la différence $u_1 - u_2$ satisfait aussi (4) avec des conditions initiales homogènes. Par conséquent, nous avons que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} |u_1 - u_2|^2 dx\right) = \frac{c}{2}\,|u_1(0,t) - u_2(0,t)|^2. \tag{10}$$

— Si $c < 0$, $\|u_1(.,t) - u_2(.,t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^*)}$ est décroissante ce qui donne l'unicité grâce aux conditions initiales.

— Si $c > 0$, l'énergie croît et on ne peut plus conclure de la même maniére à moins d'imposer une valeur à $u_i(0,t)$. Si on ajoute la condition aux limites (6) nous avons que $\|u_1(.,t) - u_2(.,t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^*)}$ est constante grâce à (10). Les conditions initiales nous indiquent que cette constante est nulle d'où l'unicité.