***

Elasticité linéaire

Travaux dirigés n°5

Solutions approchées

***

Exercice 1 : Barrage

1. L'ensemble des équations du problème est :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Sur } OA : \underline{T} = \rho_f g x_1 \underline{e}_2 \\ \text{Sur } OB : \underline{T} = \underline{0} \\ \text{Sur } AB : \underline{\xi} = \underline{0} \\ \text{Sur } \Omega : \underline{f} = \rho g \underline{e}_1 \\ \text{Solide élastique linéaire isotrope : } \underline{\underline{\sigma}} = \lambda \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \text{Sur } \Omega : \underline{\mathrm{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} = 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

$\Rightarrow$ Le problème est donc bien posé.

2. Les champs de déplacement $\underline{\xi}'$ fonctions linéaires de (x_1, x_2) peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_1' = A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 \\ \xi_2' = A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 \\ \xi_3' = 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

$\underline{\xi}'$ est CA, donc doit respecter la condition en déplacement sur AB :

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_1' = A_1 h + B_1 x_2 + C_1 = 0 \\ \xi_2' = A_2 h + B_2 x_2 + C_2 = 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

Donc,

$$\left\{\begin{array}{l} B_1 = 0 \\ B_2 = 0 \\ C_1 = -A_1 h = q_1 \\ C_2 = -A_2 h = q_2 \end{array}\right. \tag{4}$$

Les champs $\underline{\xi}'$ sont donc de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_1' = q_1(1 - x_1/h) \\ \xi_2' = q_2(1 - x_1/h) \\ \xi_3' = 0 \end{array}\right. \tag{5}$$

3. Calcul d'une solution approchée. On calcule tout d'abord le tenseur de déformation associé à $\underline{\xi}'$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = -\frac{q_1}{h} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{q_2}{2h}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) \tag{6}$$

Puis on calcule l'énergie interne :

$$\begin{aligned} W &= \int_\Omega \tfrac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' dv \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2} \left[\lambda (\mathrm{tr}\, \underline{\underline{\varepsilon}}')^2 + \mu (\underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\varepsilon}}')\right] dv \\ &= \frac{h^2 \tan\alpha}{2} \left[\left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) \frac{q_1^2}{h^2} + \frac{\mu}{2} \frac{q_2^2}{h^2}\right] \end{aligned} \tag{7}$$

Et le travail des efforts extérieurs :

$$\begin{aligned} \phi &= \int_\Omega \underline{\xi}'.\underline{f} \,\mathrm{d}v + \int_{\partial\Omega} \underline{\xi}'.\underline{T} \,\mathrm{d}s \\ &= \rho g q_1 \int_{x_1=0}^{h} \int_{x_2=0}^{x_1 \tan\alpha} \left(1 - \frac{x_1}{h}\right) \mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_1 + \rho_f g q_2 \int_0^h x_1 \left(1 - \frac{x_1}{h}\right) \mathrm{d}x_1 \\ &= \rho g q_1 \frac{h^2}{6} \tan\alpha + \rho_f g q_2 \frac{h^2}{6} \end{aligned} \tag{8}$$

On effectue ensuite la recherche d'un minimum :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (W - \phi)}{\partial q_1} &= -\rho g \frac{h^2}{6} \tan\alpha + q_1 \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) \tan\alpha &= 0 \\ \frac{\partial (W - \phi)}{\partial q_2} &= -\rho_f g \frac{h^2}{6} + \frac{q_2}{2} \mu \tan\alpha &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

La solution obtenue est :

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\rho g h^2}{3(\lambda + 2\mu)} \\ q_2 &= \frac{\rho_f g h^2}{3\mu \tan\alpha} \end{aligned} \tag{10}$$

Les champs de déplacements pour deux valeurs du coefficient de Poisson sont tracés sur la Figure 1, tandis que la déformée est montrée sur la Figure 2.

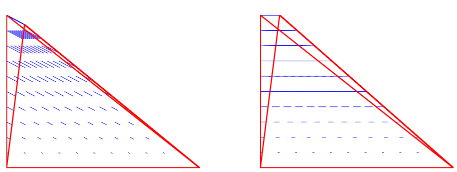

FIGURE 1 – Champ de déplacement et déformation du barrage obtenus pour $\nu = 0.4$ et $\nu = 0.5$ (échelles et paramètres arbitraires).

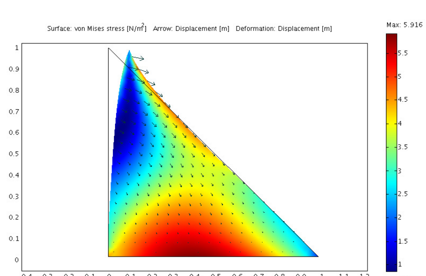

FIGURE 2 – Champ de déplacement et déformation du barrage pour $\nu = 0.4$ (calcul éléments finis, échelles et paramètres arbitraires)

Exercice 2 : Poutre sandwich

Déplacement approché de la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = \frac{\Delta L}{L} \left[\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 - \nu (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2)\right] \tag{11}$$

On pose $S_N = \dfrac{S}{2N}$. L'énergie interne vaut :

$$W(\underline{\xi}') = \int_\Omega \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' \,\mathrm{d}v \tag{12}$$

$$= N S_N \int_{x_3=0}^{L} \left[\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 \frac{1}{2} \lambda_1 (1 - 2\nu)^2 + \mu_1 (1 + 2\nu^2)\right] \mathrm{d}x_3 \tag{13}$$

$$+ N S_N \int_{x_3=0}^{L} \left[\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 \frac{1}{2} \lambda_2 (1 - 2\nu)^2 + \mu_2 (1 + 2\nu^2)\right] \mathrm{d}x_3 \tag{14}$$

$$= N S_N \frac{\Delta L^2}{L} \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} (1 - 2\nu)^2 + (\mu_1 + \mu_2)(1 + 2\nu^2)\right] \tag{15}$$

L'énergie externe est nulle. On cherche ensuite un minimum d'énergie en fonction de ν :

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = 0 \tag{16}$$

$$= N S_N \frac{\Delta L^2}{L} \left[2\nu \left(4 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + 4 \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right) - 4 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right] \tag{17}$$

Le coefficient de Poisson optimal vaut donc :

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda} + \overline{\mu}}, \tag{18}$$

où $\overline{\lambda}$ et $\overline{\mu}$ sont les coefficients de Lamé moyens :

$$\overline{\lambda} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \tag{19}$$

$$\overline{\mu} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \tag{20}$$

Le ν apparent de la poutre est donc un coefficient de Poisson basé sur les coefficients de Lamé moyens.

Exercice 3 : Poutre en flexion

1. $\varepsilon_{xx}' = -\chi y \Rightarrow \xi_x' = -\chi x y + cte$. Ce champ de déplacement doit être CA, $\xi_x'(x = 0) = 0 \Rightarrow cte = 0$, $\xi_x'(x = L) = -\omega y$, donc les champs proposés sont cinématiquement admissibles si

$$\chi = \frac{\omega}{L} \tag{21}$$

2. Énergie :

$$W(\underline{\xi}') = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}' \,\mathrm{d}v \tag{22}$$

$$= \left[\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{\omega}{L} + 2K\right)^2 + \mu\left(\frac{\omega^2}{L^2} + 2K^2\right)\right] L \underbrace{\int\limits_{S} y^2 \,\mathrm{d}v}_{I_z} \tag{23}$$

L'énergie externe est nulle. On cherche ensuite un minimum d'énergie en fonction de K :

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = 0 \Rightarrow K = \frac{\omega}{L}\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = \nu\frac{\omega}{L} \tag{24}$$

Donc,

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = -\frac{\omega}{L} y(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) + \nu\frac{\omega}{L} y(\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \tag{25}$$

Le tenseur de déformation obtenu correspond à la solution exacte [éq (3.55) du poly] avec $\omega/L = \mathcal{M}/EI_z$, on vérifie bien que le champ de contrainte est uniaxial, $\underline{\underline{\sigma}} = -(y\omega/L)(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x)$ [éq (3.54) du poly]. De même l'intégration du tenseur de déformation donne la solution exacte [éq (3.56) du poly].