TDS. – Exo 1

1°/ $\begin{cases} \dot{x} = -ax + u + \xi \\ y = x + \rho \end{cases}$ où (ξ, ρ) bruit blanc gaussien de densité spectrale $\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2°/ Le filtre s'écrit

$$\dot{\hat{x}} = -a\hat{x} + u + L(y - \hat{x}) \quad , \quad L = L(t) ,$$

où $L = E \in \mathbb{R}$ sol° de $\dot{E} = -2aE - E^2 + \sigma^2$

3°/ Résolution de l'ED en E :

(i) On résoud $E^2 + 2aE - \sigma^2 = 0$

$\Rightarrow \quad E = -a \pm \sqrt{a^2+\sigma^2}$. On pose $\bar{E} = -a + \sqrt{a^2+\sigma^2}$

(ii) ~~Soit P_0 la condition initiale de~~

On a $E(0) = P_0 \Rightarrow$ si $P_0 = \bar{E}$, alors $E(t) = \bar{E}$.

Sinon $E(t) \neq \bar{E} \ \forall t \Rightarrow$ on peut poser $z(t) := \dfrac{1}{E(t) - \bar{E}}$

$\Rightarrow \quad E = \bar{E} + \dfrac{1}{z} \quad (z(t) \neq 0 \ \forall t)$.

$$\Rightarrow \quad -\frac{\dot{z}}{z^2} = -2a\left(\bar{E} + \frac{1}{z}\right) - \left(\bar{E} + \frac{1}{z}\right)^2 + \sigma^2$$

$$= -\frac{2a}{z} - \frac{2\bar{E}}{z} - \frac{1}{z^2}$$

i.e. $\dot{z} = 2(a + \bar{E})z + 1 \quad , \quad z(0) = \dfrac{1}{P_0 - \bar{E}}$

(iii) l'éq° en z est affine $\Rightarrow$ (var° de la constante)

$$z(t) = e^{\omega t} z(0) + \int_0^t e^{\omega(t-s)} \, ds \quad \text{où} \quad \omega = 2(a + \bar{E}) = 2\sqrt{a^2+\sigma^2}$$

$$= e^{\omega t}\left(\frac{1}{P_0 - \bar{E}} + \frac{1}{\omega}\right) - \frac{1}{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad E = -a + \frac{\omega}{2} + \frac{(P_0 - \bar{E})\,\omega}{e^{\omega t}(\omega + P_0 - \bar{E}) - (P_0 - \bar{E})}$$

4°/. Si $a>0$:

$\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = 2a$ et $\bar{E} = 0$

$\Rightarrow \quad E(t) \to 0$ qd $t \to +\infty$.

i.e. pour t gd, $\dot{\hat{x}} \approx -a\hat{x} + u$

Explication: Comme la ~~d~~dynamique est stable ($a>0$) et ~~par faute~~ non perturbée ($\sigma=0$), ~~elle~~ elle suffit pour estimer x (une fois que $\hat{x}$ a été recalé)

• Si $a<0$: $\omega = -2a$ et $\bar{E} = -2a$

$\Rightarrow \quad E(t) \to -2a$ qd $t \to +\infty$

$\Rightarrow \quad \dot{\hat{x}} \approx a\hat{x} + u - 2ay$

La ~~td~~dynamique est stabilisée avec un effet aussi petit que possible du bruit de la mesure sur la variance de l'erreur d'estimation

TDS - Exo 2

1°/ $\begin{cases} \dot{x} = v_m - b \\ \dot{b} = 0 \end{cases}$ $\qquad y = x_m = x + \rho$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \dot{X} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A} X + \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{B} v_m \\ x_m = \underbrace{(1 \quad 0)}_{C} X + \rho \end{cases}$$

2°/ $\begin{cases} \dot{X} = AX + Bv_m + G\xi \\ x_m = CX + \rho \end{cases}$ $\quad$ où $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{N.B. Hypothèses du filtre de Kalman satisfaites.}}$

Filtre de Kalman :

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + Bv_m + L(x_m - C\hat{X})$$

où $L = EC^T$, E étant l'unique sol° > 0 de :

$$AE + EA^T - EC^TCE + q^2 GG^T = 0$$

En posant $E = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{pmatrix} -b & -c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b & 0 \\ -c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = -2b \\ ab = -c \\ b^2 = q^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} b = \pm q = -q & \text{car } -2b = a^2 > 0 \\ a = \varepsilon\sqrt{2q} & \varepsilon = \pm 1 \\ c = \varepsilon q\sqrt{2q} \end{cases}$$

$\mathrm{tr}\, E = a + c > 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$ ie $\varepsilon = +1$.

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} \sqrt{2q} \\ -q \end{pmatrix}, \quad A - LC = \begin{pmatrix} -\sqrt{2q} & -1 \\ q & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2q} & -1 \\ q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_m + \begin{pmatrix} \sqrt{2q} \\ -q \end{pmatrix} x_m$$

3°/ $\dot{x} = v_m - b \rightarrow \dot{\hat{x}} = v_m - \hat{b}$

4°/ $q = 0 \Rightarrow L = 0 \Rightarrow$ estimateur = syst d'origine, ne permet pas de compenser une erreur initiale sur b_0.

Dans ce cas il faut écrire un simple observateur avec matrice L de la forme $L = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ où $a, b > 0$.

5°/ D'après l'énoncé $\mathbb{P}[-15 \leq \rho \leq 15] \approx 0{,}997$

Or si ρ est une variable gaussienne $\rho \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, l'intervalle de confiance au niveau $99{,}7\%$ est $[-3\sigma, 3\sigma]$. Il faut donc choisir $\sigma = 5$.

~~Des~~ nouvelles équations du filtre sont obtenues en insérant la matrice $R_\rho = \sigma^2 = 25$ ds les équations

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b^2}{\sigma^2} = q^2 \\ \dfrac{a^2}{\sigma^2} = -2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\sigma q \\ a = \sigma\sqrt{2q\sigma} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \sqrt{2\sigma q} \\ -\sigma q \end{pmatrix}$$