

MAP-AUT1

Principes fondamentaux de l'Automatique

Dynamique et Contrôle des Systèmes

NICOLAS PETIT

Centre Automatique et Systèmes
MINES ParisTech
nicolas.petit@mines-paristech.fr

9 novembre 2018
Amphi 2

<http://cas.ensmp.fr/~petit/ensta2018/>

- 1 Systèmes dynamiques
- 2 Propriétés des solutions
- 3 Stabilité
- 4 Étude locale par le linéarisé tangent
- 5 Moyennisation

Équations différentielles du premier ordre

$$\frac{d}{dt}x_1 = v_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t)$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = v_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t)$$

⋮

$$\frac{d}{dt}x_n = v_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t)$$

forme d'état, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$: état, $u = (u_1, \dots, u_m)^T$: entrée

$$\frac{d}{dt}x = v(x, u, t)$$

$y = (y_1, \dots, y_q)^T$ sortie

$$y = h(x, u, t)$$

$$u = k(t, x), \quad \text{ou} \quad u = k(t, y)$$

Système libre (instationnaire ou stationnaire)

$$\frac{d}{dt}x = v(x, t), \quad \frac{d}{dt}x = v(x)$$

Système linéaire

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u &= K(t)x \\ \frac{d}{dt}x &= (A(t) + B(t)K(t))x\end{aligned}$$

Problème de Cauchy

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(x(t), t), \quad x(0) = x^0$$

Propriétés importantes

- ① existence
- ② unicité
- ③ dépendance continue par rapport à x^0

Fonction Lipschitz

Une fonction scalaire $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow v(x, t) \in \mathbb{R}^n$ est **Lipschitz** en x avec la constante $k > 0$ si

$$\|v(x_1, t) - v(x_2, t)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$$

pour tout (x_1, x_2, t)

Existence et unicité *Théorème de Cauchy-Lipschitz*

Soit $v(x, t)$ continue et **Lipschitz** en x dans la région

$R = \{|x - x^0| \leq b, |t| \leq a\}$. Soit **M la borne supérieure** de $\|v\|$ sur R . Il existe une unique solution $x(t)$ au problème de Cauchy définie sur l'intervalle $|t| \leq \min(a, \frac{b}{M})$

Existence pour tout temps

Si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

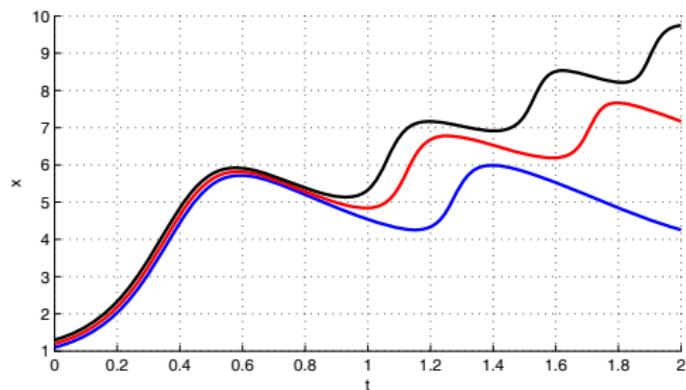
$$\|v(x, t)\| \leq M_0(t) + M_1(t)\|x\|$$

avec $M_0 > 0$, $M_1 > 0$ localement intégrables alors la solution (unique) au problème de Cauchy est définie pour $t \in]-\infty, +\infty[$

Propriétés avancées (suite)

Dépendance en la condition initiale

Si $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ continues par rapport à x et t , alors la solution du problème de Cauchy est continûment différentiable par rapport à x^0



\bar{x} est point d'équilibre de $\dot{x} = v(x, t)$, si $v(\bar{x}, t) = 0$ (pour tout t)

Stabilité

L'équilibre $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est **stable** si et seulement si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel $\forall x^0$, $\|x^0 - \bar{x}\| \leq \eta$, la solution de $\frac{d}{dt}x = v(x, t)$ issue de x^0 à $t = 0$ vérifie

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

Stabilité asymptotique

L'équilibre $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est **asymptotiquement stable** s'il est stable et si, de plus, $\exists \eta > 0$ tel que

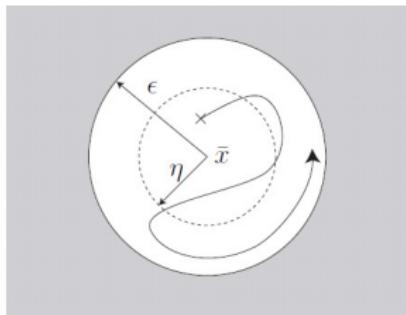
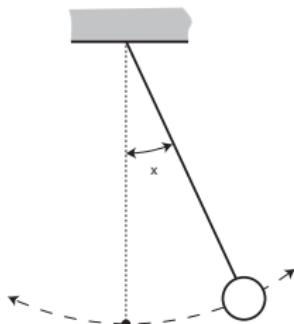
$$\|x^0 - \bar{x}\| \leq \eta, \text{ implique } x(t) \longrightarrow \bar{x}$$

lorsque $t \longrightarrow +\infty$

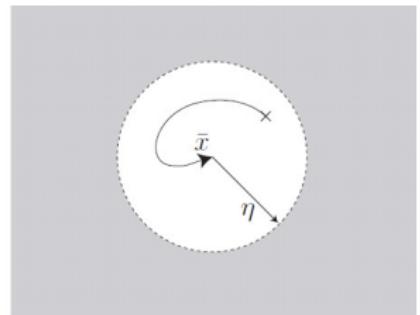
Exemple

Pendule amorti ou non amorti

$$\frac{d^2}{dt^2}x + k \frac{d}{dt}x + \frac{g}{R} \sin x = 0$$



\bar{x} stable



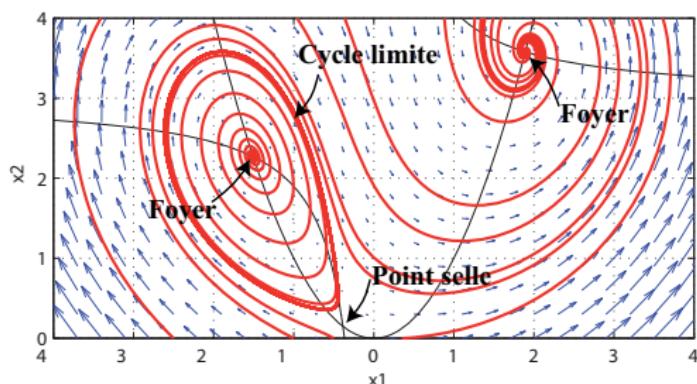
\bar{x} asymt. stable

Portrait de phases d'un système non linéaire

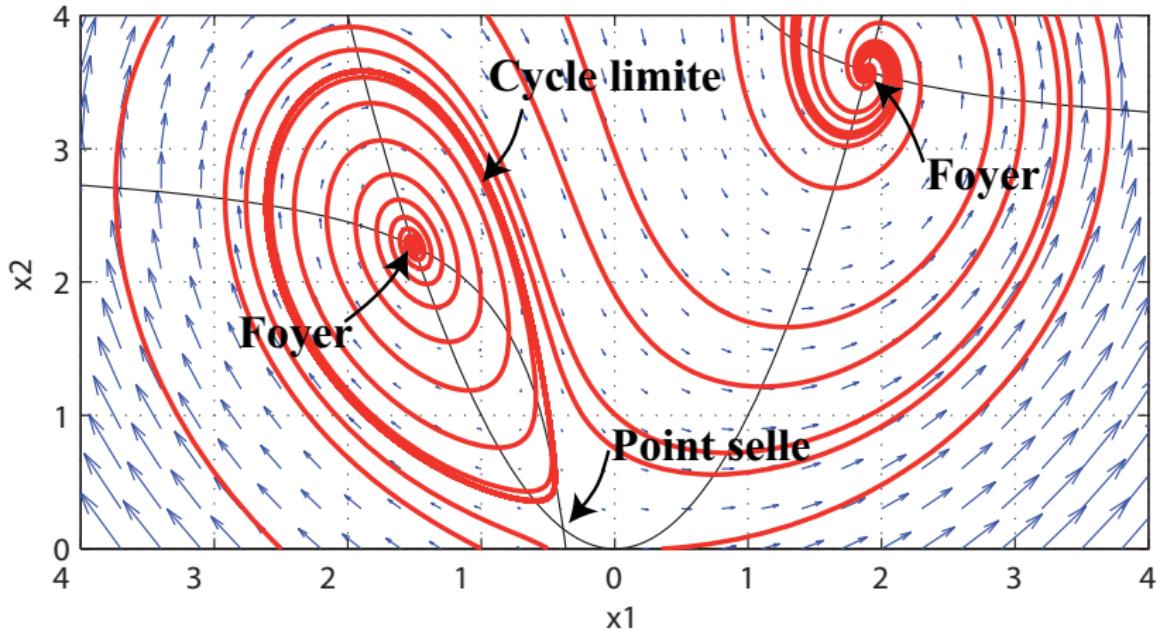
Exemple de plan de phases

$$\frac{d}{dt}x_1 = -a_1 x_1 - x_2 x_1 + a_2$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = -x_2 + x_1^2$$



Multiplicité des points d'équilibre, comportement divers autour de ces points



Trajectoires, plan de phase, portrait de phase

Multiplicité des points d'équilibre, comportement divers autour de ces points

Étude locale par le linéarisé tangent

Linéarisé tangent

Autour de \bar{x} , le développement au premier ordre d'un système non linéaire stationnaire $\frac{d}{dt}x = v(x)$ donne

$$\frac{d}{dt}x = Ax(t) \triangleq \left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right) x(t)$$

A matrice $n \times n$

Solution du système linéaire

$$x(t) = \exp(tA)x^0$$

$$\exp(tA) = \left[I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k + \dots \right]$$

Stabilité asymptotique

L'équilibre 0 est asymptotiquement stable pour $\frac{d}{dt}x = Ax(t)$ si et seulement si toutes les **valeurs propres de A** sont à **partie réelle strictement négative**

Cas diagonalisable

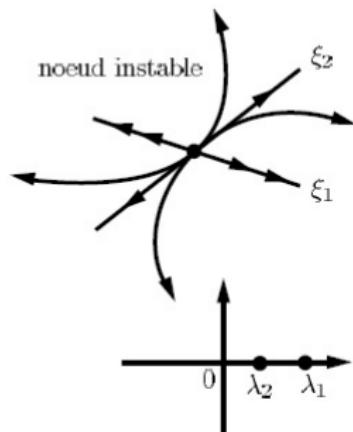
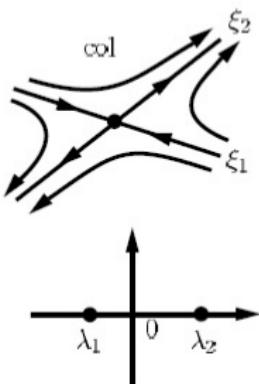
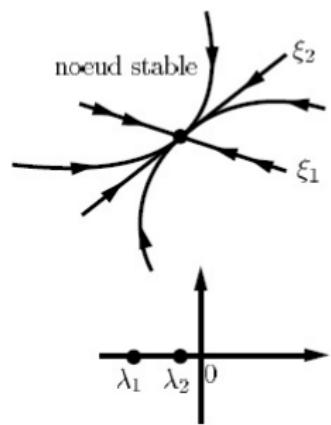
$$A = T^{-1}DT$$

$$A^n = T^{-1}D^nT, \quad \exp(tA) = T^{-1}\exp(tD)T$$

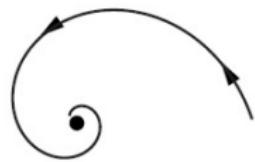
$$\exp(tD) = \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & & & 0 \\ & \exp(t\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Cas général par réduction de Jordan

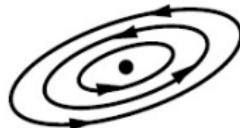
Portraits de phases en dimension 2



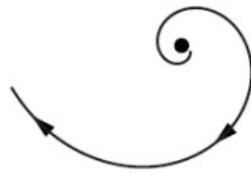
Portraits de phases en dimension 2



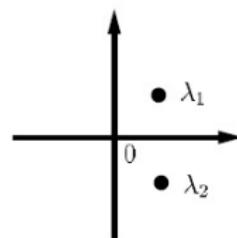
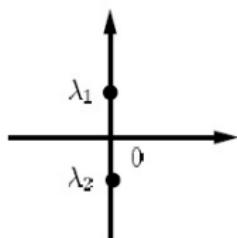
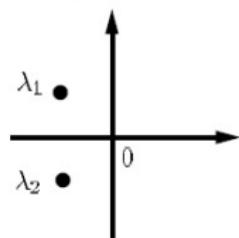
foyer stable



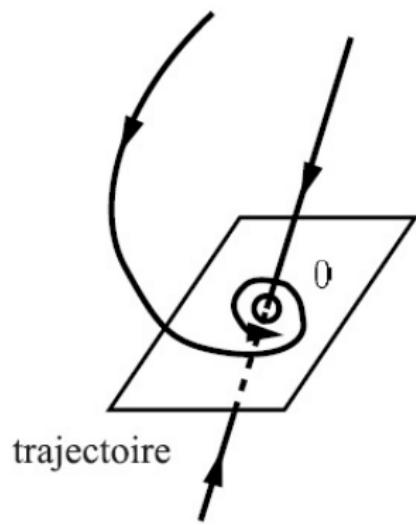
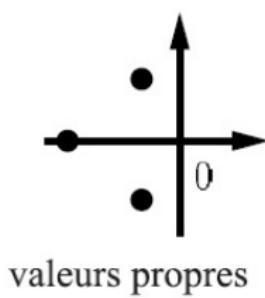
centre



foyer instable



Portraits de phases en dimension 3



Polynôme caractéristique

Table de Routh

Soit

$$P(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n$$

Soit la table de Routh définie à partir de ces deux premières lignes par

| | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|
| s^n | a_n | a_{n-2} | a_{n-4} | \dots |
| s^{n-1} | a_{n-1} | a_{n-3} | a_{n-5} | \dots |
| s^{n-2} | b_{n-1} | b_{n-3} | b_{n-5} | |
| s^{n-3} | c_{n-1} | c_{n-3} | c_{n-5} | |
| . | . | . | . | |
| s^0 | g_{n-1} | . | . | |

Critère de Routh (suite)

$$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix},$$

$$c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix} \dots$$

Le polynôme $P(s)$ n'a que des racines à partie réelle strictement négative (polynôme Hurwitz) **si et seulement si** il n'y a pas de changement de signe dans la première colonne de la table de Routh.

Point d'équilibre hyperbolique

L'équilibre \bar{x} est **hyperbolique** pour $\frac{d}{dt}x = v(x)$ si le Jacobien

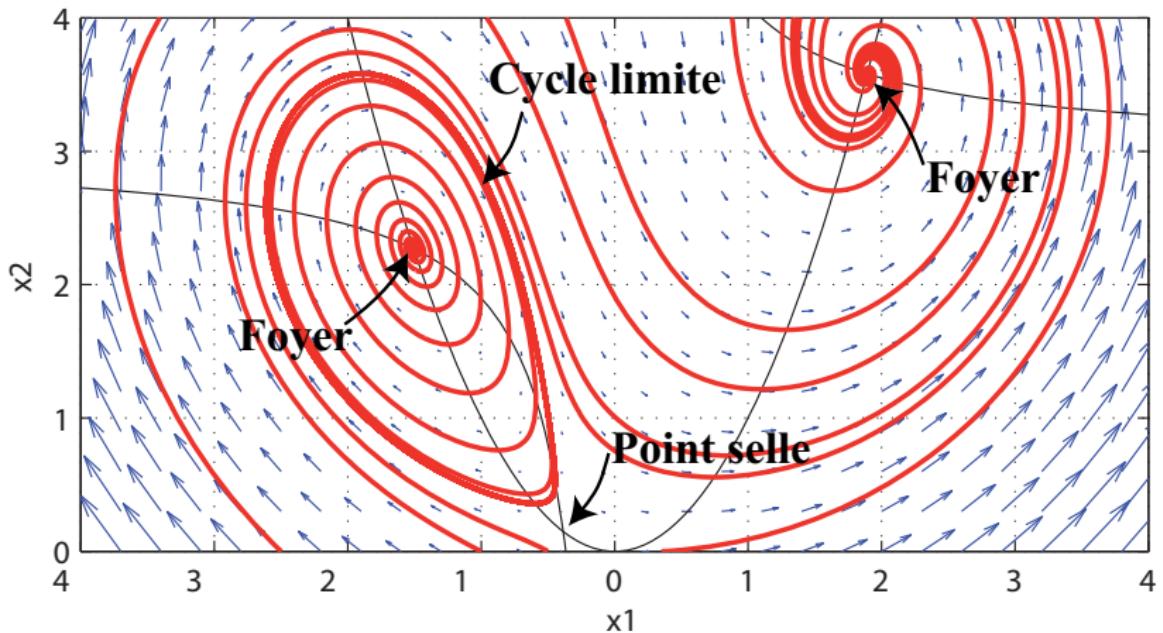
$$\frac{\partial v}{\partial x}(\bar{x}) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

a toutes ses valeurs propres à **partie réelle non nulle**

Première méthode le Lyapounov

Le point d'équilibre \bar{x} de $\frac{d}{dt}x = v(x)$ est localement asymptotiquement stable si les valeurs propres de la matrice Jacobienne en \bar{x} sont toutes à partie réelle strictement négative.

Le point d'équilibre \bar{x} est instable si au moins l'une des valeurs propres de la matrice Jacobienne $\frac{\partial v}{\partial x}(\bar{x})$ est à partie réelle strictement positive

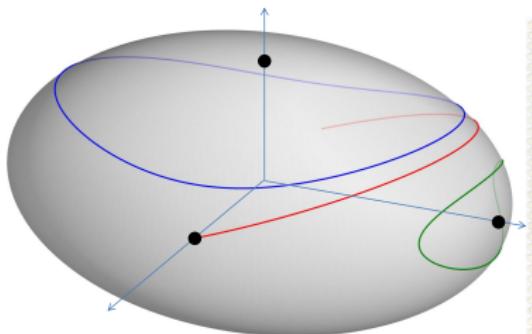


Vers le feedback: rendre plus attractif un des foyers



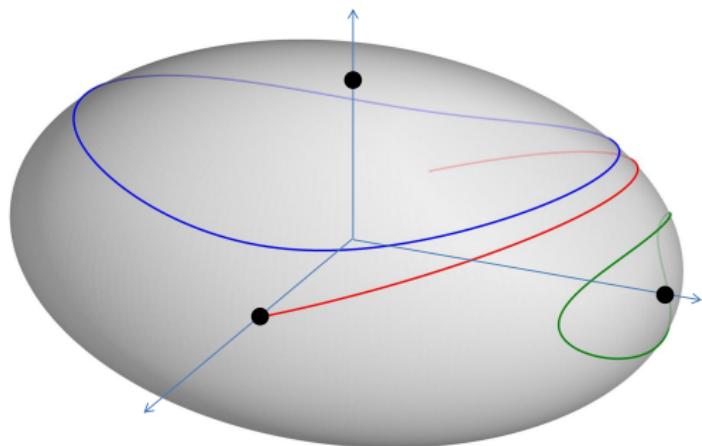
Équations d'Euler, rotation libre, un exemple de système instable

Vit. de rotation (effet Djanibekov)



Explorer 1 (1958)

Équations d'Euler, rotation libre



Théorème (Critère de Bendixon)

Soit

$$\mathbb{R}^2 \ni x \mapsto v(x) \in \mathbb{R}^2$$

une fonction continue et dérivable. On suppose que

$$\operatorname{div}(v)(x) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x) < 0$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^2$.

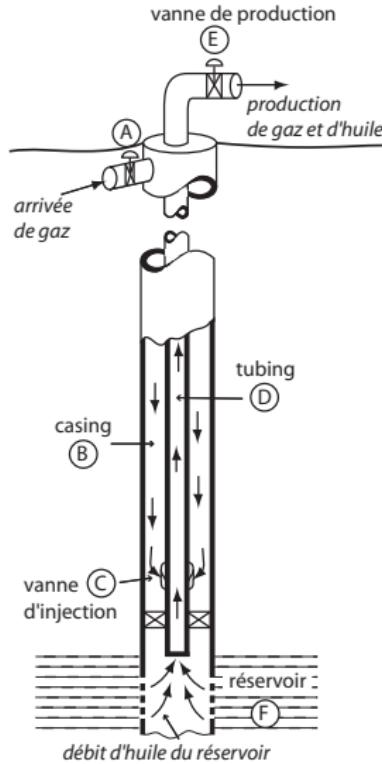
Soit $t \mapsto x(t)$ une solution de $\frac{d}{dt}x = v(x)$ qui reste bornée pour les temps t positifs. Alors, sa limite quand t tend vers $+\infty$ est un point d'équilibre, i.e., une solution $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ de $v(\bar{x}) = 0$.

Théorème (existence d'orbite périodique)

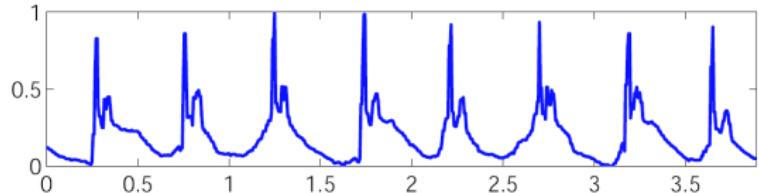
Soit $\mathbb{R}^2 \ni x = v(x) \in \mathbb{R}^2$ une fonction de classe C^1 . On considère le système dynamique $\dot{x} = v(x)$. On suppose qu'il existe dans le plan un ensemble compact Ω tel que

- toute trajectoire ayant sa condition initiale dans Ω reste dans Ω pour les temps $t > 0$.
- soit Ω ne contient aucun point d'équilibre , soit Ω contient un unique point d'équilibre dont toutes les valeurs propres sont à parties réelles strictement positives.

alors Ω contient une orbite périodique.



Oscillations (cycle limite) en tête de production, TOTAL



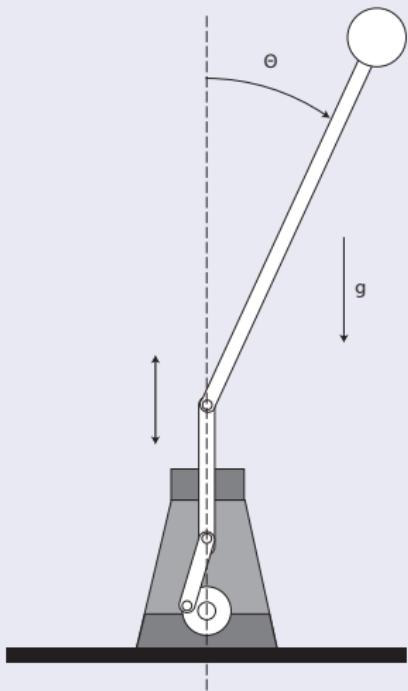
Boucle slugging, source IFPEN



Le pendule de Kapitza



P. L. Kapitza, "Dynamic stability of a pendulum when its point of suspension vibrates", Soviet Phys. JETP 21, 588–592 (1951);



Équations du mouvement

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = \left[g + d\omega^2 \cos(\omega t) \right] \sin \theta$$

($m = 1$, $\ell = 1$), équations obtenues par méthode Lagrangienne.
Le couple apparent découle du déplacement vertical (d'amplitude d) du point d'accroche.

Le pendule est instable ($\omega = 0$) en boucle ouverte au voisinage de $\theta = 0$.

Théorème de moyennisation

$$\frac{d^2}{dt^2}x = a(t, \epsilon)f(x)$$

avec $a(t, \epsilon)$, de période $0(\epsilon) << 1$ signal périodique oscillant rapidement est approché par

$$\frac{d^2}{dt^2}x^0 = \langle a \rangle f(x^0) - \langle v^2 \rangle f'(x^0)f(x^0)$$

$$x = x^0 + o(\epsilon)$$

avec $\langle a \rangle$ moyenne de a , $v(t) = \int_0^t (a - \langle a \rangle) dt$

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}x = a(t, \epsilon)f(x), & f(x) = \sin(x) \\ \frac{d^2}{dt^2}x^0 = \langle a \rangle f(x^0) - \langle v^2 \rangle f'(x^0)f(x^0) \end{cases}$$

détails des calculs

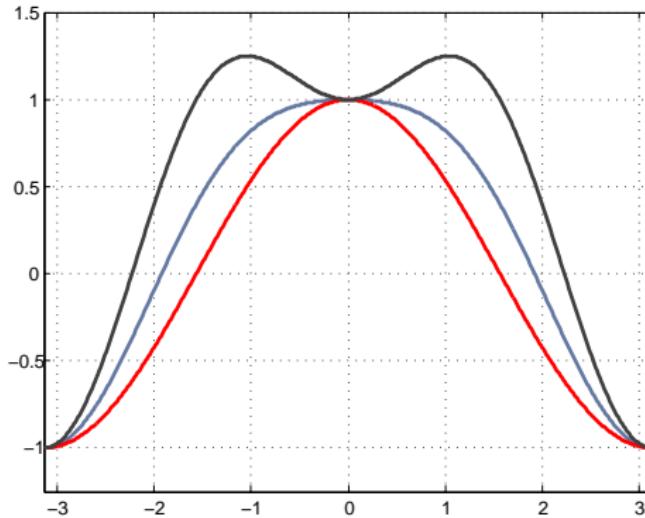
$$a(t, \epsilon) = g + d/\epsilon^2 \cos\left(\frac{t}{\epsilon}\right), \quad \langle a \rangle = g$$

$$v(t) = \int_0^t (g + d/\epsilon^2 \cos\left(\frac{t}{\epsilon}\right) - g) dt = d/\epsilon \sin\left(\frac{t}{\epsilon}\right), \quad \langle v^2 \rangle = \frac{d^2}{2\epsilon^2}$$

Le système moyen est donc

$$\frac{d^2}{dt^2}x^0 = g \sin(x^0) - \frac{d^2}{2\epsilon^2} \cos x^0 \sin x^0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x^0 = -\frac{d}{dx^0} \underbrace{\left(g \cos x^0 + \frac{d^2}{4\epsilon^2} \sin^2 x^0 \right)}_{\text{potentiel effectif}}$$



Le potentiel a un minimum local en 0 (stable asympt.).

CRS6 landing

Organes de stabilisation passive ou active

- ➊ Systèmes dynamiques: $\frac{d}{dt}x = v(x)$
- ➋ Propriétés des solutions: **existence** et **unicité**
- ➌ Stabilité et **stabilité asymptotique**
- ➍ Étude **locale** par le linéarisé tangent: **Jacobienne** et valeurs propres, point hyperbolique