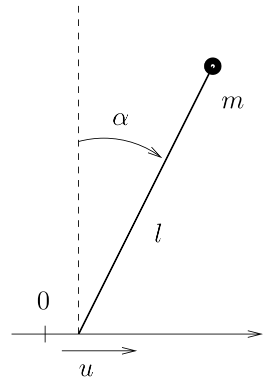
AUT201

TD2 – Lois de commande

Exercice 1 (Stabilisation d'un pendule inversé).



On s'intéresse au problème de stabilisation d'un pendule unidimensionnel autour de son équilibre instable, par exemple un balai dans un plan posé sur le manche. On agit sur le balai en déplaçant son point de contact le long d'une droite, l'axe Oy. En supposant que notre commande est l'accélération u de ce point de contact, la dynamique du balai est régie par l'équation suivante :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = g\sin\alpha - u\cos\alpha,$$

où α est l'angle du balai avec la verticale (on a supposé que le balai est de longueur $l = 1$).

1. Écrire l'équation du mouvement comme un système de commande (préciser son entrée et son état).

2. Linéariser le système autour de l'équilibre correspondant à la position verticale : $(\alpha = 0, u = 0)$. Vérifier que, en l'absence de commande, cet équilibre n'est pas stable pour le système non linéaire.

3. Montrer que le système linéarisé est commandable.

4. Proposer un retour d'état proportionnel qui permet de stabiliser asymptotiquement le système linéarisé.

5. En déduire un retour d'état qui permet de stabiliser asymptotiquement le système d'origine.

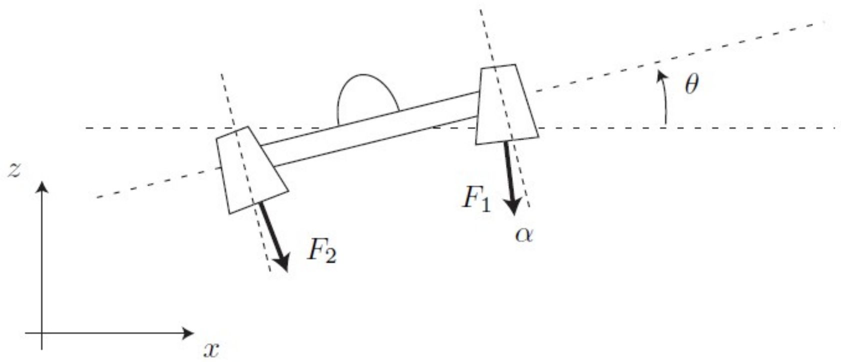
6. On suppose maintenant que seule la mesure de α est disponible. Le système linéarisé est-il stabilisable asymptotiquement par un retour de sortie (de la forme $\delta u = k\delta\alpha$, $k \in \mathbb{R}$) ? Est-il stabilisable ?

Exercice 2 (Avion à décollage vertical).

On s'intéresse ici au pilotage d'un avion à décollage vertical (VTOL). En particulier on voudrait que l'avion soit en mesure de suivre une trajectoire horizontale latérale ou une trajectoire verticale (décollage). On considère que l'avion se déplace dans un plan vertical et, en négligeant les effets aérodynamiques, on modélise sa dynamique de la façon suivante :

$$\begin{aligned} mv'_x &= (F_1 - F_2)\sin\alpha\cos\theta - (F_1 + F_2)\cos\alpha\sin\theta, \\ mv'_z &= (F_1 - F_2)\sin\alpha\sin\theta + (F_1 + F_2)\cos\alpha\cos\theta - mg, \\ J\theta'' &= l(F_1 - F_2)\cos\alpha, \end{aligned}$$

où (v_x, v_z) est la vitesse du centre de masse, θ l'angle par rapport à l'horizontale, F_1, F_2 les poussées des réacteurs, l leur distance par rapport au centre de masse, α leur inclinaison (paramètre fixe proche de 0), m la masse de l'appareil, et J son moment d'inertie.



En posant $c = \frac{J}{ml} \tan \alpha$, $u_1 = \cos \alpha (F_1 + F_2)/m$ et $u_2 = l \cos \alpha (F_1 - F_2)/J$, on peut choisir comme modèle de commande

$$\begin{aligned} v_x' &= c u_2 \cos \theta - u_1 \sin \theta, \\ v_z' &= c u_2 \sin \theta + u_1 \cos \theta - g, \\ \theta'' &= u_2, \end{aligned}$$

où $u = (u_1, u_2)$ est la commande.

1. Quels sont les points d'équilibre de ce modèle ? (ne garder que ceux physiquement plausibles).

2. Calculer le linéarisé du système autour d'un équilibre.

3. Montrer que le système linéarisé est commandable et le mettre sous forme de Brunovsky.

4. Proposer un bouclage stabilisant (toujours pour le linéarisé). Peut-on choisir les pôles ?

5. Comment planifier une trajectoire correspondant à un décollage ? Comment en assurer le suivi ? Mêmes questions pour un mouvement latéral.

Corrigés

Corrigé de l'exercice 1.

1. En prenant pour état $x = (\alpha, \alpha')$ et pour commande u, on obtient

$$x'(t) = \begin{pmatrix} \alpha' \\ g \sin\alpha - u\cos\alpha \end{pmatrix} = f(x, u).$$

2. L'équilibre correspondant à $(\alpha = 0, u = 0)$ est $(x = 0, u = 0)$. L'équation linéarisée autour de cet équilibre est donc :

$$\delta x'(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t),$$

où

$$A = D_x f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix}, \quad B = D_u f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le système sans commande est le système autonome $x' = f(x, 0)$, dont le linéarisé en 0 est $\delta x' = A\delta x$. Puisque A a une valeur propre positive (ses valeurs propres sont $\pm\sqrt{g}$), l'équilibre n'est pas stable.

3. La matrice de commandabilité $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, le système est donc commandable.

4. Prenons une commande par retour d'état $\delta u(t) = K\delta x(t)$, avec $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$. Les solutions associées à ce type de commande sont les solutions de l'équation différentielle

$$\delta x'(t) = (A + BK)\delta x(t), \qquad A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g - k_1 & -k_2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $A + BK$ sont les solutions de

$$P_{A+BK}(\lambda) = \lambda^2 + k_2\lambda + k_1 - g = 0.$$

En choisissant k_1 et k_2 on peut obtenir n'importe quelles valeurs pour les coefficients de ce polynôme, c'est-à-dire que l'on peut obtenir n'importe quelles valeurs pour les valeurs propres λ. Par exemple, on peut choisir

$$k_1 = g + 1, \qquad k_2 = 2,$$

et donc -1 comme valeur propre double de $A+BK$. L'équilibre 0 est alors asymptotiquement stable pour l'équation linéaire $\delta x'(t) = (A + BK)\delta x(t)$.

5. Si on applique maintenant une commande $u = Kx$ au système d'origine, on obtient l'équation différentielle bouclée $x' = f(x, Kx)$, dont le linéarisé en 0 est $\delta x' = (A+BK)\delta x$. Cette dernière étant asymptotiquement stable, l'équation bouclée est elle-aussi asymptotiquement stable.

6. Une commande par retour de sortie $\delta u(t) = k_1\delta\alpha(t)$ correspond à une commande $\delta u(t) = K\delta x(t)$ avec $k_2 = 0$. Les solutions associées à ce type de commande sont les solutions de l'équation différentielle $\delta x'(t) = (A + BKC)\delta x(t)$. Les valeurs propres de $A + BKC$ sont les racines du polynôme

$$P_{A+BKC}(\lambda) = \lambda^2 + k_1 - g.$$

Il est impossible d'avoir deux valeurs propres de partie réelle < 0. Le système n'est donc pas stabilisable asymptotiquement. En revanche on peut obtenir deux valeurs propres complexes conjuguées de partie réelle nulle, par exemple $\pm i$ (il suffit de prendre $k_1 = g + 1$). Les solutions de $\delta x'(t) = (A + BKC)\delta x(t)$ sont alors de la forme

$$\delta x(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \delta x(0),$$

l'équilibre 0 est donc stable pour cette équation linéaire.

Remarque. Dans ce dernier cas, le balai oscille autour de sa position d'équilibre, sans amortissement des oscillations. Cela correspond à ce que peut faire un “ actionneur ” humain, qui peut évaluer à vue d'œil α mais pas α'.