***

Elasticité linéaire

Travaux dirigés n°2 - Corrigé

Comportement thermoélastique linéaire

***

Exercice 1 : Inversion de la relation $\underline{\underline{\sigma}}$-$\underline{\underline{\epsilon}}$

En prenant la trace de la relation (1), on trouve

$$\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) + 3\alpha\tau$$

En remplaçant dans (1), on obtient

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)\underline{\underline{1}} + 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} - 2\mu\alpha\tau\underline{\underline{1}}$$

c'est-à-dire

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2\mu}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)\underline{\underline{1}} + \alpha\tau\underline{\underline{1}}$$

Cette relation correspond à (2) si l'on définit E et ν par

$$\frac{1+\nu}{E} = \frac{1}{2\mu} \ \ , \ \ \frac{\nu}{E} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

c'est-à-dire

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} \ , \ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Exercice 2 : Interprétation des coefficients élastiques

1) a) Remarquons qu'un champ de contraintes uniforme vérifie l'équation d'équilibre volumique $\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}} = 0$. La relation d'équilibre $\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n} = \underline{T}$ sur la surface se traduit ici par $\underline{\underline{\sigma}}.\underline{e}_z = (F/S)\underline{e}_z$ en $z = H$, $\underline{\underline{\sigma}}.(-\underline{e}_z) = -(F/S)\underline{e}_z$ en $z = 0$, et $\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n} = 0$ sur la surface latérale. Ceci implique que $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{F}{S}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$.

b) En utilisant l'expression obtenue pour $\underline{\underline{\sigma}}$, la loi de comportement donne

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{F}{ES}(-\nu\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \nu\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)$$

En recherchant le déplacement $\underline{\xi}$ sous la forme indiquée, on trouve

$$\frac{d\xi_x}{dx} = -\nu\frac{F}{ES} \ , \ \frac{d\xi_y}{dy} = -\nu\frac{F}{ES} \ , \ \frac{d\xi_z}{dz} = \frac{F}{ES}$$

D'où l'expression de $\underline{\xi}$ (à des constantes additives près) :

$$\xi_x(x) = -\nu\frac{F}{ES}x \ , \xi_y(y) = -\nu\frac{F}{ES}y \ , \ \xi_z(z) = \frac{F}{ES}z$$

c) La variation de longueur ΔH est donnée par $\Delta H = \xi_z(H) - \xi_z(0) = \frac{F}{ES}H$. On en déduit la formule $F = ES\frac{\Delta H}{H}$. Le module d'Young E s'interprète alors comme le coefficient de proportionnalité entre la force surfacique appliquée et l'allongement relatif. Le coefficient ν caractérise la variation de section : les expressions de ξ_x et ξ_y montrent en effet que la section subit une homothétie de rapport $1 - \nu\frac{F}{ES}$.

Dans le cas incompressible, on a $\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\epsilon}} = 0$ donc $\nu = 1/2$.

2) *Dilatation thermique* : On a ici $\underline{\underline{\sigma}} = 0$. La loi de comportement donne alors $\underline{\underline{\epsilon}} = \alpha\tau\underline{\underline{1}}$. La variation de volume ΔV est donnée par

$$\Delta V = \int_\Omega \mathrm{tr}\,\underline{\underline{\epsilon}}\,d\omega = 3\alpha\tau V$$

D'où la variation relative $\Delta V/V = 3\alpha\tau$. Le coefficient α mesure ainsi la dilatation thermique.

3) *Pression uniforme* : Par un raisonnement analogue à celui mené en 1), on obtient $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}}$. La loi de comportement montre alors que

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{p}{E}(2\nu - 1)\underline{\underline{1}}$$

La variation de volume ΔV vaut $\Delta V = \int_\Omega \mathrm{tr}\,\underline{\underline{\epsilon}}\,d\omega = 3(2\nu - 1)\frac{p}{E}V$. En introduisant $K = E/3(1 - 2\nu)$, on obtient la formule $\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{K}$. Le coefficient K mesure donc la compressibilité. Physiquement, on s'attend à ce que $K > 0$ (diminution de volume pour $p > 0$), ce qui se traduit par la condition $\nu < 1/2$.

4) a) On a $\mathrm{grad}\,\underline{\xi} = \eta\frac{z}{H}(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r - \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta) + \eta\frac{r}{H}\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z$, donc

$$\underline{\underline{\epsilon}} = (\mathrm{grad}\,\underline{\xi} + {}^t\,\mathrm{grad}\,\underline{\xi})/2 = \frac{\eta r}{2H}(\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z)$$

La loi de comportement donne

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mu\frac{\eta r}{H}(\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z)$$

b) Remarquons que le champ de contraintes obtenu n'est pas uniforme. A l'équilibre, les forces volumiques et surfaciques vérifient respectivement $\mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = 0$ et $\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n} = \underline{T}$. On calcule alors que $\underline{f} = 0$ et

$$\underline{T} = \begin{cases} 0 & \text{sur la surface latérale } r = R \\ \mu\frac{\eta r}{H}\underline{e}_\theta & \text{sur la surface } z = H \\ -\mu\frac{\eta r}{H}\underline{e}_\theta & \text{sur la surface } z = 0 \end{cases}$$

c) Les efforts surfaciques sur $z = H$ ont une résultante nulle et un moment en A, centre de la section, donné par

$$\Gamma = \int_{z=H} \underline{AM} \wedge \mu\frac{\eta r}{H}\underline{e}_\theta\,dS = \int_{z=H} r\underline{e}_r \wedge \mu\frac{\eta r}{H}\underline{e}_\theta\,rdrd\theta = \mu\frac{\eta}{H}\pi\frac{R^4}{2}\underline{e}_z$$

Le paramètre μ est ainsi directement relié à la rigidité en torsion.

Exercice 3 : Mesure des contraintes en un point d'une surface libre

On a par définition $A = \underline{e}_1.\underline{\underline{\epsilon}}.\underline{e}_1 = \epsilon_{11}$, $B = \underline{e}_2.\underline{\underline{\epsilon}}.\underline{e}_2 = \epsilon_{22}$ et

$$C = \frac{\underline{e}_1 + \underline{e}_2}{\sqrt{2}}.\underline{\underline{\epsilon}}.\frac{\underline{e}_1 + \underline{e}_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + 2\epsilon_{12})$$

Donc $\epsilon_{12} = C - (A + B)/2$. Pour déterminer les autres composantes de $\underline{\underline{\epsilon}}$, on utilise la loi de comportement et la condition de surface libre. On a en effet la condition $\underline{\underline{\sigma}}.\underline{e}_3 = 0$ au point M considéré, d'où $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$. La loi de comportement $\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}}$ montre alors que

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0 \ \ , \ \epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}$$

Par ailleurs, en prenant directement la trace dans la loi de comportement :

$$\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{1}} = \frac{1 - 2\nu}{E}\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}$$

D'où la relation

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = -\frac{1 - 2\nu}{E}.\frac{E}{\nu}\epsilon_{33} = \frac{2\nu - 1}{\nu}\epsilon_{33}$$

On en déduit $\epsilon_{33} = \frac{\nu}{\nu - 1}(A + B)$. En résumé, $\underline{\underline{\epsilon}}$ est donné par :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = A\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + B\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + [C - \frac{(A+B)}{2}](\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) + \frac{\nu}{\nu - 1}(A + B)\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

La loi de comportement donne alors

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1 - \nu^2}[(A + \nu B)\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + (B + \nu A)\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + (1 - \nu)(C - \frac{(A+B)}{2})(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)]$$