Petite Classe n^{0}4

ENSTA ParisTech
http://cas.ensmp.fr/∼dimeglio/ENSTA *8 mars 2018*

Exercice 1 Théorème de LaSalle

On considère le système d'état $x = (x_1, x_2)^T$ satisfaisant

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h_1(x_1) - h_2(x_2)\end{aligned}$$

où h_1 et h_2 sont deux fonctions Lipschitz vérifiant

$$h_i(0) = 0, \quad yh_i(y) > 0, \quad \forall y \neq 0 \text{ dans }]-a, a[, \quad a > 0$$

Le système a un unique point d'équilibre en $(0,0)^T$. Ce système représente un oscillateur non linéaire où h_2 est un terme de friction. On va utiliser la fonction de Lyapounov candidate

$$V(x) = \int_0^{x_1} h_1(y)dy + \frac{1}{2}x_2^2$$

1. Dans le cas d'un système *linéaire* masse-ressort-friction, à quelle grandeur $V(x)$ correspond-elle?
2. Montrer que $V(x)$ est strictement positive sur $]-a, a[^2$ sauf en 0 où elle est nulle.
3. Montrer que $\dot{V}(x) \leq 0$
4. Utiliser le théorème de LaSalle pour montrer que le système converge vers $(0,0)^T$. Quel adjectif caractérise le type de convergence obtenu?

Exercice 2 Fonction de Lyapounov

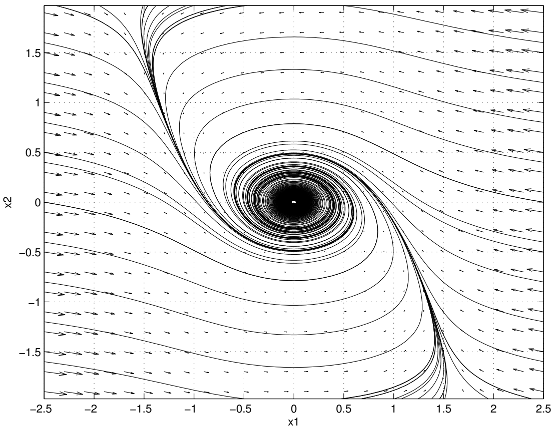
On considère le système d'état $x = (x_1, x_2)^T$ satisfaisant

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

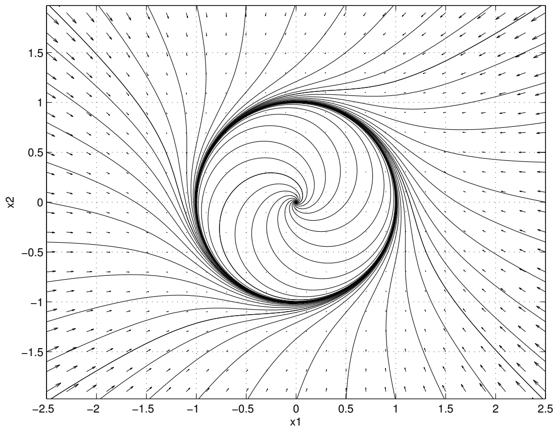
1. Montrer que ce système possède un unique point d'équilibre. Quel est-il?
2. Étudier sa stabilité par son linéarisé tangent.
3. Considérer $V(x) = x_1^2 + x_2^2$. Montrer que les ensembles de niveau $M = \{x \text{ t. q. } V(x) \leq c\} \subset \mathbb{R}^2$ avec $c > 0$ sont des ensembles fermés et bornés (des compacts) contenant l'origine.
4. Montrer que le long de la ligne de niveau $\partial M = \{x \text{ t. q. } V(x) = c\} \subset \mathbb{R}^2$ on a $\frac{dV}{dt}(x) < 0$ sous une hypothèse à expliciter pour c.
5. Que peut-on en déduire? (On pourra utiliser le théorème de Poincaré-Bendixon).

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Portraits de phases

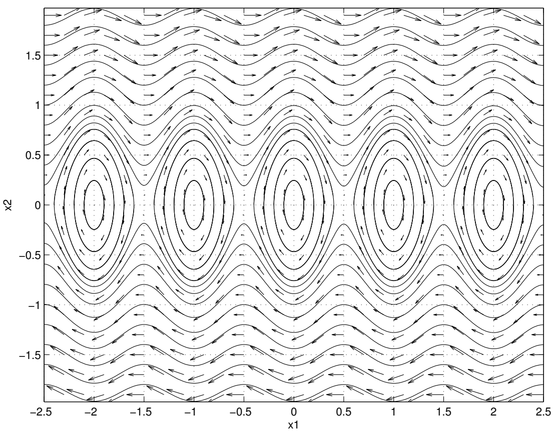
Associer les quatre portraits de phases représentés sur la figure ci-dessous aux quatre systèmes suivants



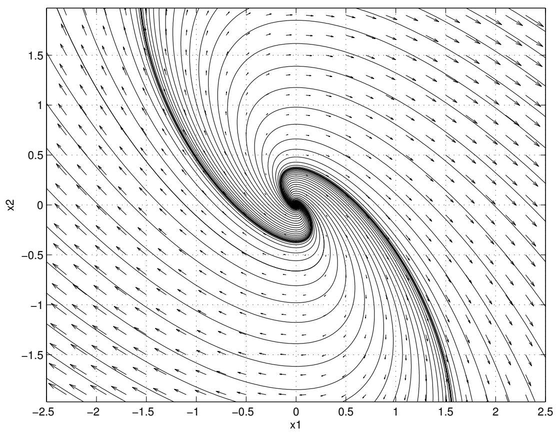
Portrait 1



Portrait 2



Portrait 3



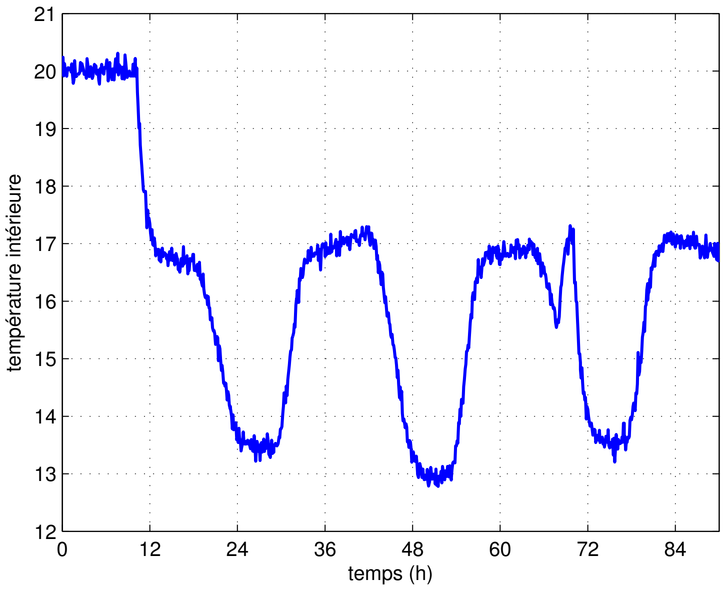
Portrait 4

$$(1)\begin{cases}\dot{x}_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2\\ \dot{x}_2 = -\alpha_1 x_1\end{cases} \qquad (2)\begin{cases}\dot{x}_1 = \alpha_2 x_1 - \beta_2 x_2 - \gamma x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right)\\ \dot{x}_2 = \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 - \gamma x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}\dot{x}_1 = -\alpha_3 x_1^3 - \beta_3 x_2\\ \dot{x}_2 = \alpha_3 x_1\end{cases} \qquad (4)\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -\delta \sin x_1\end{cases}$$

Exercice 4 Chauffage

On considère un bâtiment d'habitation disposant d'un chauffage et d'une sonde de température. On a reporté ci-dessous les relevés de température au cours du temps. Sur cette période, on a coupé le chauffage et sa régulation, puis laissé la température évoluer librement. On s'aperçoit que la température intérieure subit les influences de la température extérieure qui est fluctuante entre la nuit et le jour.



1. Proposer un modèle linéaire simple de ce système.
2. A quel moment a-t-on coupé le chauffage et sa régulation?
3. Quelle est la constante de temps du système? A quelle grandeur physique correspond-elle? Comment pourrait-on la modifier?
4. Pourquoi observe-t-on des oscillations, et quelle en est approximativement la période?
5. Une des trois journées d'étude a été plus froide que les autres. Laquelle?
6. Pendant un temps bref, on a remis le chauffage en route. Quel est ce moment?
7. Pour faire des économies, on souhaite complètement couper le chauffage la nuit au moyen d'une minuterie. Comment choisir la plage horaire sur laquelle on peut faire cette coupure?