Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées ParisTech
PRB202 - Martingales et Algorithmes Stochastiques
PC1 - 15 novembre 2019

Exercice 1 : Etant donné $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fixé.

1. Soit A et B deux évènements.
   (a) Déterminer la tribu $\sigma(\mathbf{1}_B)$ engendrée par la variable aléatoire $\mathbf{1}_B$.
   (b) Caractériser l'ensemble des variables aléatoires $\sigma(\mathbf{1}_B)$ - mesurables.
   (c) En-déduire que, si $\mathbb{P}(B) \in]0,1[$, alors :
   $$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathbf{1}_B] = \mathbb{P}(A|B)\mathbf{1}_B + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbf{1}_{B^c} .$$
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de l'ensemble Ω.
   (a) Montrer que $\sigma((A_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{\cup_{j\in J} A_j\,;\, J \subset \mathbb{N}\}$.
   (b) Démontrer que si Y est une variable aléatoire réelle $\sigma((A_n)_{n\in\mathbb{N}})$ - mesurable, alors il existe des réels $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que :
   $$Y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \mathbf{1}_{A_n} .$$
   (c) Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ou intégrable.
   Montrer que :
   $$\mathbb{E}[X|\sigma((A_n)_{n\in\mathbb{N}})] = \sum_{i\in I^*} \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A_i}]}{\mathbb{P}(A_i)}\mathbf{1}_{A_i},\ \mathbb{P}-\text{p.s.}\,,$$
   où $I^* = \{i \in \mathbb{N}; \mathbb{P}(A_i) > 0\}$.
   En-déduire que :
   $$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\sigma((A_n)_{n\in\mathbb{N}})] = \sum_{i\in I^*} \mathbb{P}(A|A_i)\,\mathbf{1}_{A_i},\ \mathbb{P}-\text{p.s.}\,.$$
3. (a) Soit $E = \{b_i\,; i \in I \subset \mathbb{N}\}$ un ensemble fini ou dénombrable et $Y\ : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{P}(E))$ une variable aléatoire discrète.
   Démontrer que, si X est une variable aléatoire à valeurs positives ou intégrable, alors on a :
   $$\mathbb{E}[X|Y] = \sum_{i\in I^*} \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{Y=b_i\}}]}{\mathbb{P}(Y=b_i)}\mathbf{1}_{\{Y=b_i\}},\ \mathbb{P}-\text{p.s.}\,,$$
   où $I^* = \{i \in I; \mathbb{P}(Y = b_i) > 0\}$.
   (b) Supposons que X soit une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
   Posons $Y = 2\lfloor \frac{X}{2} \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.
   Calculer $\mathbb{E}[Y|X]$ et $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 2 :

1. Considérons un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et admettant une densité $f_{X,Y}\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$.
   Soit, par ailleurs, une fonction borélienne $h\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}[|h(X,Y)|] < +\infty$.
   Montrer que :
   $$\mathbb{E}[h(X,Y)|X] = g(X), \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}\,,$$
   avec :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\int_{\mathbb{R}} h(x,y) f_{X,Y}(x,y)dy}{\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy}\,, & \text{si } \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy \neq 0, \\ 0\,, & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$
2. Supposons que (X, Y) soit un couple de variables aléatoires réelles admettant la densité sur $\mathbb{R}^2$ définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :
   $$f_{X,Y}(x,y) = n(n-1)(y-x)^{n-2}\,\mathbf{1}_\Delta(x,y)\,,$$
   où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,; 0 \le x \le y \le 1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que :

$$\mathbb{E}[Y|X] = \frac{n-1+X}{n}, \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}\,.$$

(b) En-déduire $\mathbb{E}[Y]$.

Exercice 3 :

1. Soient X et Y des variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs réelles. X et Y admettent des densités notées respectivement $f_X \;: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ et $f_Y \;: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.
   On suppose, de plus, que X et Y sont indépendantes.
   Etant donnée une fonction ϕ borélienne bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, démontrer que :
   $$\mathbb{E}[\phi(X,Y)|Y] = \psi(Y), \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}\,,$$
   où, pour tout $y \in \mathbb{R}$:
   $$\psi(y) = \mathbb{E}[\phi(X,y)]\,.$$
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes; X est une variable aléatoire continue de densité notée f_X et Y suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
   (a) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   $$\text{(P1)} \quad e^{\frac{X^2}{2}} \text{ est intégrable} \quad \text{(P2)} \quad e^{XY} \text{ est intégrable} \quad \text{(P3)} \quad e^{|XY|} \text{ est intégrable}$$
   (b) Démontrer que, si $e^{\frac{X^2}{2}}$ est intégrable, alors : $\mathbb{E}[e^{XY}|X] \geq 1, \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}\,.$
   (c) Calculer $\mathbb{E}[e^{XY}|X]$, lorsque $e^{\frac{X^2}{2}}$ est intégrable.

Exercice 4 : Soit (X,Y) un vecteur gaussien centré. Notons σ_1^2 la variance de X et σ_2^2 la variance de Y; on suppose que : $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 > 0$. ρ désigne le coefficient de corrélation de X et Y, soit :

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_1\,\sigma_2}\,.$$

1. Chercher $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la variable aléatoire $Z = X - \lambda\, Y$ soit indépendante de Y.
2. Montrer que :
   $$\mathbb{E}[X|Y] = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)}\,Y = \rho\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,Y, \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}\,.$$
3. En-déduire que :
   $$X = \mathbb{E}[X|Y] + Z, \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}\,,$$
   où Z est une variable aléatoire gaussienne centrée indépendante de Y et de variance donnée par :
   $$\mathrm{Var}(Z) = (1-\rho^2)\,\sigma_1^2\,,$$

Exercice 5 : Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

On pose :

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}\right], \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}\,.$$

Montrer les égalités suivantes :

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}] - (\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2\,, \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}\,,$$
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])\,, \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}\,.$$

Exercice 6 : Etant donnée une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs réelles. On suppose, de plus, que les variables $X_n\,, n \in \mathbb{N}$, sont indépendantes et identiquement distribuées et de carré intégrable.

Considérons, par ailleurs, une variable aléatoire τ définie sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$.

1. En posant $S_\tau = \sum_{i=1}^{\tau} X_i$, calculer $\mathbb{E}[S_\tau|\tau]$ et $\mathrm{Var}(S_\tau|\tau) = \mathbb{E}\left[(S_\tau - \mathbb{E}[S_\tau|\tau])^2|\tau\right]$.
2. En-déduire la valeur de $\mathbb{E}[S_\tau]$, de $\mathbb{E}\left[(S_\tau - \mathbb{E}[S_\tau|\tau])^2\right]$ et de $\mathrm{Var}(S_\tau)$.