PC2 corrigé: Etude sur maquette d'une hélice propulsive

MF101

1. La connaissance exacte de la propulsion T et du moment résistant Q nécessite la résolution des équations de Navier-Stokes:

$$\nabla.(\vec{U}) = 0 \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla\vec{U}.\vec{U}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{g} + \nu\Delta\vec{U} \tag{2}$$

auxquelles il faut ajouter la condition à l'infini amont et la condition sur la surface libre:

$$\vec{U} = 0 \quad \text{à l'infini amont} \tag{3}$$

$$p = p_a \quad \text{sur la surface libre} \tag{4}$$

Sur l'hélice, dont le moyeu en O est animé d'une vitesse $\vec{V_0}$ et d'une vitesse de rotation $\vec{\Omega}_0$, il faut également écrire la condition d'adhérence pour un point M en contact avec l'hélice:

$$\vec{U} = \vec{V_0} + \vec{\Omega}_0 \wedge O\vec{M} \tag{5}$$

Cette résolution conduirait à une relation de la forme:

$$\mathcal{F}(T, V_0, \Omega_0, D, h, g, \rho, \nu, p_a) \tag{6}$$

et de façon équivalente:

$$\mathcal{G}(T, V_0, \Omega_0, D, h, g, \rho, \nu, p_a) \tag{7}$$

Dans un premier temps nous omettrons la pression (cf cours). La pression n'intervenant que par son gradient dans les équations de Navier-Stokes, si la pression p_a est modifiée et devient $p_a + p_0$, la solution du problème s'écrit $p + p_0$ avec p la solution de (1), (2), (4). Or, p_0 est une constante, l'intégration d'une constante sur un contour fermé étant nulle, cette pression n'interviendra pas dans l'expression des forces.
L'analyse dimensionnelle est une alternative à la résolution exacte des équations. Les relations (6) et (7) sont dimensionnellement homogènes c'est à dire qu'elles sont invariantes quelque soit le système d'unités fondamentales choisies. La démonstration ci-dessous est faite pour la relation (6). La relation étant invariante, on a :

$$\frac{T}{[T]} = \mathcal{F}\left(\frac{V_0}{[V_0]}, \frac{\Omega_0}{[\Omega_0]}, \frac{D}{[D]}, \frac{h}{[h]}, \frac{g}{[g]}, \frac{\rho}{[\rho]}, \frac{\nu}{[\nu]}\right) \tag{8}$$

soit encore avec t, L et M les unités fondamentales de temps de longueur et de masse:

$$\frac{T}{MLt^{-2}} = \mathcal{F}\left(\frac{V_0}{Lt^{-1}}, \frac{\Omega_0}{t^{-1}}, \frac{D}{L}, \frac{h}{L}, \frac{g}{Lt^{-2}}, \frac{\rho}{ML^{-3}}, \frac{\nu}{L^2t^{-1}}\right) \tag{9}$$

La relation étant invariante, pour tout choix de t, L et M on prend par exemple:

$$t = 1/\Omega_0 \qquad L = D \qquad M = \rho D^3 \tag{10}$$

On en déduit donc:

$$\frac{T}{\rho\Omega_0^2 D^4} = \mathcal{F}\left(\frac{V_0}{\Omega_0 D}, 1, 1, \frac{h}{D}, \frac{g}{\Omega_0^2 D}, 1, \frac{\nu}{\Omega_0 D^2}, g_i\right) \tag{11}$$

Cette relation fait intervenir le nombre de Reynolds et le nombre de Froude (cf cours pour la définition de ces nombres sans dimension):

$$\mathcal{R}_e = \frac{\Omega_0 D^2}{\nu} \qquad \mathcal{F}_r = \frac{\Omega_0\sqrt{D}}{\sqrt{g}} \tag{12}$$

On obtient alors la relation de l'énoncé. Un raisonnement analogue conduit à l'expression pour Q.

2. Par définition, le rendement s'écrit comme le rapport de la puissance utile sur la puissance fournie:
$$\eta \;=\; \frac{T.V_0}{\Omega_0 Q} \tag{13}$$
On en déduit immédiatement:
$$\eta \;=\; \lambda\,\frac{K_T}{K_Q} \tag{14}$$

3. Pour qu'il y ait similitude entre deux écoulements correspondants à deux expériences distinctes, il suffit que chacun des paramètres sans dimension intervenant explicitement dans la relation finale $\mathcal{F}$ ait la même valeur dans les deux expériences.
La similitude totale, impose alors l'égalité simultanée des nombres de Froude et de Reynolds, on a donc en indiçant par m la maquette:
$$\Omega_0 D^2 \;=\; \Omega_{0m} D_m^2 \qquad\qquad \Omega_0\sqrt{D} \;=\Omega_{0m}\sqrt{D}_m \tag{15}$$
le fluide est supposé être le même pour la maquette (mêmes ν et ρ) que pour l'objet réel. On note
$$e = D/D_m = 16 \tag{16}$$
L'égalité des nombres de Froude conduirait alors à:
$$\Omega_{0m} = 4\Omega_0 \tag{17}$$
L'égalité des nombres de Reynolds conduirait alors à:
$$\Omega_{0m} = 16^2\Omega_0 \tag{18}$$
Ces deux conditions sont incompatibles, On néglige alors l'effet du à la viscosité, on réalise une similitude **partielle**, il s'agit alors ici de la similitude Froude et on en déduit
$$\Omega_{0m} = 4\Omega_0 \;=\; 720 \text{ tr/mn} \tag{19}$$
La conservation du paramètre λ impose alors:
$$\frac{V_0}{\Omega_0 D} \;=\; \frac{V_{0m}}{\Omega_{0m} D_m} \tag{20}$$
On a déduit:
$$V_{0m} \;= V_0/\sqrt{e} \;=\; 2,5 \text{ m/s} \tag{21}$$
De même:
$$h_m = \frac{h}{e} \;=\; 0,312 \text{ m} \tag{22}$$
On mesure la force et le couple sur la maquette. La similitude nous donne alors:
$$\frac{T}{\rho\Omega_0^2 D^4} \;=\; \frac{T_m}{\rho\Omega_{0m}^2 D_m^4} \tag{23}$$
On en déduit alors:
$$T = 34,554 \text{ KN} \tag{24}$$
et de même: $Q = 25,73$ m.KN On en déduit le rendement (rappel 1 tr/mn $= 2*\pi/60$ rad.s^{-1}):
$$\eta = 0,731 \tag{25}$$

4. Pour prendre en compte les effets dus à la cavitation, on prend en compte la pression au niveau de l'hélice, modélisé par $p_a + \rho g h$ et on mesure son écart par rapport à la pression de vapeur saturante p_v. On doit donc rajouter dans les expressions (6) et (7) un nouveau paramètre $p_a + \rho g h - p_v$. Le raisonnement se poursuit comme à la question (1). la relation étant dimensionnellement homogène, la relation (8) fait intervenir:

$$\frac{p_a + \rho g h - p_v}{[p_a + \rho g h - p_v]} \tag{26}$$

avec:

$$[p_a + \rho g h - p_v] \;=\; M L^{-1} t^{-2} \tag{27}$$

avec le choix des unités fondamentales (10), on obtient le paramètre supplémentaire proposé dans l'énoncé.

5. La similitude impose l'égalité de ce paramètre dans l'expérience et le cas réel. Le fluide étant le même, la pression de vapeur saturante est la même dans le cas réel et la maquette. Toutes les autres grandeurs ont été déterminées, on peut donc en déduire, la pression atmosphérique à utiliser sur la maquette pour modéliser correctement les effets de cavitation, et ainsi les contrôler.

6. Le mode de déformation (traction compression) le plus simple pour le matériau supposé élastique peut être modélisé par la loi de Hooke. Le tenseur des contraintes (homogène à une pression) s'exprime en fonction du module d'Young et de l'allongement relatif ϵ (sans dimension) dans l'hypothèse des petites déformations $\sigma = E\epsilon$. Si l'on veut prendre en compte les déformations de l'hélice, il faut donc rajouter le module d'Young E dans la relation (6). La relation étant dimensionnellement homogène, on aura alors le terme suivant dans la relation (9):

$$\frac{E}{M L^{-1} t^{-2}} \;=\; \frac{E}{\rho \Omega_0^2 D^2} \tag{28}$$

Pour qu'il y ait similitude, les nombres sans dimension doivent être égaux dans les deux expériences, on en déduit que:

$$E_m = E/e \;=\; 0,6 \tag{29}$$

Pour prendre en compte correctement les effets de déformation, le matériau choisi doit être de l'aradilte.