Corrigé de la PC6 : Schémas numériques pour les équations hyperboliques linéaires.

20 mai 2019

<u>EXERCICE</u> 1 (LE SCHÉMA DE LAX-WENDROFF POUR L'ÉQUATION DE TRANSPORT)
Soit u une solution régulière de l'équation de transport de l'équation de transport ($c > 0$) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \\ u(x,0) = u^0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Question 1. *Montrer que*

$$u\left(x_j, t^{n+1}\right) = u\left(x_j, t^n\right) - c\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}\left(x_j, t^n\right) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_j, t^n\right) - \frac{c^3 \Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\left(x_j, t^n\right) + \mathcal{O}(\Delta t^4)\,. \tag{2}$$

Nous proposons la famille de schémas suivante (dépendant du paramètre μ) pour la résolution numérique de l'équation du transport :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{2h}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) - \frac{\mu\,\Delta t}{h^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) \;=\; 0\,. \tag{3}$$

Obtenir la valeur de μ pour laquelle la méthode est consistante, au moins, à l'ordre deux. Nous appellerons au schéma ainsi obtenu le schéma de Lax-Wendroff. Discuter la précision du schéma lorsque $c\,\Delta t = h$.

Corrigé de la question 1 : On a

$$u(x_j, t^{n+1}) = u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^4)\,.$$

Mais u étant solution de l'équation de transport, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) = -c\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n)$$

et par dérivation de l'équation de transport

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_j, t^n) = -c^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t^n)$$

d'où (2).

Pour effectuer l'étude de consistance de la méthode nous commençons par rappeler que

$$\begin{aligned}
\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(h^4), \\
\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(h^4).
\end{aligned} \tag{4}$$

où on a posé $U_j^n = u(x_j, t^n)$. Nous avons donc que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_j^n &:= \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{2h}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) - \frac{\mu\,\Delta t}{h^2}\left(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right) \\
&= -c\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \Delta t\frac{c^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) - \frac{c^3 \Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^4) \\
&\quad + c\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{ch^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(h^4) - \mu\Delta t\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(h^2\Delta t + h^4) \\
&= \Delta t\left(\frac{c^2}{2} - \mu\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + c\frac{h^2 - c^2\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t^n) \;+\; \mathcal{O}(h^4 + \Delta t^4 + h^2\Delta t),
\end{aligned}$$

où on a utilisé (4) dans la première égalité et (2) dans la deuxième. Il faut que

$$\mu \;=\; \frac{c^2}{2},$$

pour avoir une erreur de consistance du second ordre.

Pour $c\Delta t/h = 1$, le schéma s'écrit

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n\,,$$

équation qui est aussi vérifiée par la solution exacte ; le schéma est donc d'ordre infini dans ce cas particulier.

Question 2. *Calculer le coefficient d'amplification du schéma de Lax-Wendroff et en déduire sa stabilité sous condition CFL.*

Corrigé de la question 2 : Pour l'analyse de stabilité L^2 du schéma, rappelons que la méthode de Fourier Von-Neumann revient à chercher des solutions de (3) de la forme

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ \forall n \geq 0, \quad u_j^n \;:=\; \hat{u}^n(\xi)\, e^{i\xi x_j}. \tag{5}$$

En introduisant la suite (5) dans (3) nous obtenons la relation de récurrence vérifiée par $\hat{u}^n$:

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{S}_h(\xi, \Delta t)\, \hat{u}^n(\xi)$$

avec

$$\hat{S}_h(\xi, \Delta t) = 1 - \frac{\alpha}{2}\left(\exp(\imath\xi h) - \exp(-\imath\xi h)\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(\exp(\imath\xi h) - 2 + \exp(-\imath\xi h)\right),$$

soit

$$\hat{S}_h(\xi,\Delta t) = 1 - \imath\alpha\sin(\xi h) - \alpha^2(1-\cos(\xi h))\,.$$

étudions le module de $\hat{S}_h(\xi,\Delta t)$

$$\begin{aligned}
|\hat{S}_h(\xi,\Delta t)|^2 &= 1 - 2\alpha^2(1-\cos(\xi h)) + \alpha^4(1-\cos(\xi h))^2 + \alpha^2\sin^2(\xi h)\\
&= 1 - \alpha^2(2 - 2\cos(\xi h) + \cos^2(\xi h) - 1) + \alpha^4(1-\cos(\xi h))^2\\
&= 1 + (\alpha^4-\alpha^2)(1-\cos(\xi h))^2\,.
\end{aligned}$$

. Si $\alpha \le 1$, alors $\alpha^4 - \alpha^2 \le 0$ et $\sup|\hat{S}_h| = 1$: le schéma est donc stable.

. Si $\alpha > 1$, alors $\sup|\hat{S}_h| = \sqrt{1+4(\alpha^4-\alpha^2)}$: le schéma est instable.

Question 3. *En utilisant l'erreur de consistance obtenue à la question 1., donner une équation équivalente du schéma de Lax Wendroff. Le schéma sera-t-il principalement dissipatif ou dispersif ?*

Corrigé de la question 3 : Nous avons montré dans la question 1 que

$$\varepsilon_j^n := \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^n) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t^n) + c\frac{h^2 - c^2\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j,t^n) \;+\; \mathcal{O}(h^4 + \Delta t^4 + h^2\Delta t).$$

L'équation équivalente (tronquée à l'ordre 2) est donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{h^2 - c^2\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Du fait de la dérivée d'ordre 3 en espace, cette équation est dispersive et non dissipative. Le schéma sera donc principalement dispersif (à l'ordre 2).

Question 4. *On rappelle que la solution u de l'équation de transport peut s'écrire en fonction de u^0 :*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}^0(\xi)e^{\imath(x-ct)\xi}\,d\xi$$

Ceci montre que l'équation de transport n'est ni **dissipative**, *les ondes planes $e^{\imath\xi x}$ ne sont pas atténuées au cours du temps, et ni* **dispersive**, *les ondes planes $e^{\imath\xi x}$ se propage toutes à la même vitesse c. Nous allons voir si le schéma numérique conserve ces propriétés.*

On pose

$$u_h(x,t^n) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_h^0(\xi)e^{-a_h(\xi,\Delta t)t^n}e^{\imath(x-c_h(\xi,\Delta t)t^n)\xi}\,d\xi$$

Exprimez $a_h(\xi,\Delta t)$ (la dissipation numérique) et $c_h(\xi,\Delta t)$ (la dispersion numérique) en fonction du coefficient d'amplification $\hat{S}_h(\xi,\Delta t)$.

Corrigé de la question 4 : Par définition du coefficient d'amplification, on a

$$\hat{u}_h(\xi, t^n) = \hat{S}_h(\xi, \Delta t)^n \, \hat{u}_h^0(\xi) \, d\xi$$

soit donc

$$\begin{aligned} u_h(x, t^n) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{S}_h(\xi, \Delta t)^n \, \hat{u}_h^0(\xi) \, e^{\imath x \xi} \, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(n \ln|\hat{S}_h(\xi, \Delta t)|) \exp(\imath n \arg(\hat{S}_h(\xi, \Delta t))) \, \hat{u}_h^0(\xi) \, e^{\imath x \xi} \, d\xi \end{aligned}$$

Par définition, on a donc

$$a_h(\xi, \Delta t) = -\frac{1}{\Delta t} \ln(|\hat{S}_h(\xi, \Delta t)|)$$

et

$$c_h(\xi, \Delta t) = -\frac{1}{\xi \Delta t} \arg(\hat{S}_h(\xi, \Delta t))$$

Question 5. *On appelle taux de dissipation numérique la quantité*

$$r_a(\xi, \Delta t) = a_h(\xi, \Delta t),$$

et erreur sur la vitesse de propagation des ondes planes la quantité

$$\varepsilon_c(\xi, \Delta t) = c - c_h(\xi, \Delta t).$$

Étudier le comportement pour h petit (et CFL constante) de ces deux quantités. Commenter.

Corrigé de la question 5 : Le taux de dissipation numérique est donné par :

$$r_a(\xi, \Delta t) = a_h(\xi, \Delta t) = -\frac{1}{\Delta t} \ln(|\hat{S}_h(\xi, \Delta t)|)$$

Si le schéma numérique augmente l'amplitude de l'onde plane de fréquence ξ alors $r_a(\xi, \Delta t) < 0$. S'il diminue son amplitude alors $r_a(\xi, \Delta t) > 0$. Enfin, s'il maintient son amplitude constante durant tout le transport, comme c'est le cas pour la solution exacte, $r_a(\xi, \Delta t) = 0$.

Pour le schéma de Lax-Wendroff, d'après le corrigé de la question 2 on a

$$r_a(\xi, \Delta t) = -\frac{1}{2\Delta t} \ln\left(1 + (\alpha^4 - \alpha^2)(1 - \cos(\xi h))^2\right)$$

Notons que si $\alpha = 1$ alors $r_a(\xi, \Delta t) = 0$ et le schéma maintient l'amplitude des ondes planes constante indépendamment de leur fréquence ξ : le schéma n'est donc pas dissipatif.

De plus, pour h assez petit, cette quantité est équivalente à

$$r_a(\xi, \Delta t) \sim \frac{c\,\alpha(1-\alpha^2)}{8}\,\xi^4 h^3.$$

Notons tout d'abord que, pour $\alpha \neq 1$, deux signaux de fréquences différentes vont se dissiper de manière différente avec le temps, la solution numérique va donc se déformer au cours du temps : le schéma est dissipatif. De plus, si $\alpha < 1$ alors le schéma de Lax Wendroff diminue l'amplitude des ondes planes.

L'erreur sur la vitesse de propagation des ondes planes est donnée par

$$\varepsilon_c(\xi, \Delta t) = c - c_h(\xi, \Delta t) = \frac{c\Delta t\xi + \arg(\hat{S}_h(\xi, \Delta t))}{\xi\Delta t}$$

Si, pour l'onde plane de fréquence ξ, le schéma introduit un déphasage positif (avance de phase) dans la solution, $\varepsilon_c(\xi, \Delta t) > 0$. S'il introduit un retard de phase, $\varepsilon_c(\xi, \Delta t) < 0$. Et si le schéma n'introduit aucun déphasage, $\varepsilon_c(\xi, \Delta t) = 0$.

Pour le schéma de Lax-Wendroff, d'après le corrigé de la question 2 on a

$$\varepsilon_c(\xi, \Delta t) = \frac{c\Delta t\xi - \arctan(\dfrac{\alpha \sin \xi h}{1-\alpha^2(1-\cos\xi h)})}{\xi\Delta t}$$

Notons que si $\alpha = 1$ alors $\varepsilon_c(\xi, \Delta t) = 0$ et la vitesse de propagation numérique des ondes planes est constante indépendamment de leur fréquence ξ, égale à c : le schéma n'est pas dispersif.

De plus, pour h assez petit, cette quantité est équivalente

$$\varepsilon_c(\xi, \Delta t) \sim \frac{c\,(1-\alpha^2)}{6}\xi^3 h^2.$$

Pour $\alpha \neq 1$, on remarque que la vitesse de l'onde numérique dépend généralement de la fréquence ξ, ce qui n'est pas le cas pour la solution exacte. Ainsi deux signaux de fréquences différentes ne se propagent pas à la même vitesse, ce qui conduit à une déformation de la solution numérique au cours du temps : le schéma est dispersif.

Enfin, pour ce schéma on remarque que la partie dominante de l'erreur provient de la dispersion numérique (erreur en h^2) et pas de la dissipation (taux en h^3).

<u>EXERCICE</u> 2 (UN SCHÉMA POUR L'ÉQUATION DES ONDES.)

On s'intéresse à l'approximation de l'équation des ondes 1D :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \tag{6}$$

On rappelle que, pour toute fonction u suffisamment régulière :

$$\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2} = \frac{d^2u}{dx^2}(x) + \frac{h^2}{12}\frac{d^4u}{dx^4}(x) + O(h^4) \tag{7}$$

On introduit l'opérateur aux différences finies :

$$A_h^1 u(x) = -\,c^2\,\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$$

et on considère le schéma numérique, appelé **schéma saute-mouton**

$$\frac{u_h^{n+1}-2u_h^n+u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h^1 u_h^n = 0 \tag{8}$$

Question 1. *Expliquer sans calculs pourquoi ce schéma est consistant. Étudier la vitesse de propagation numérique et en déduire une condition nécessaire de convergence du schéma.*

Corrigé de la question 1 : Il suffit d'utiliser l'expression (7) pour déduire que le schéma est consistant, d'ordre 2 en temps et en espace.

De plus, le support de la solution numérique se propage à vitesse finie au sens où

$$\text{supp } u_h^n \subset [a,b] \implies \text{supp } u_h^{n+1} \subset [a-h, b+h].$$

Autrement dit, la vitesse de propagation numérique est donnée par :

$$V_{num} = \frac{h}{\Delta t}$$

La vitesse de propagation des ondes étant c ici, une condition nécessaire de stabilité est $V_{num} \geq c$, ce qui se réécrit :

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq 1$$

Question 2. *Déterminer le symbole de A_h^1, c'est à dire la fonction $\widehat{A}_h^1$ telle que :*

$$\mathcal{F}\left(A_h^1 u\right)(\xi) = \widehat{A}_h^1(\xi)\mathcal{F}u(\xi)$$

(on exprimera $\widehat{A}_h^1(\xi)$ uniquement à l'aide de $sin^2(\xi h/2)$).

Corrigé de la question 2 : On note u_h^n l'interpolation $\mathbb{P}^1$ par morceaux de $(u_j^n)_j$, que l'on suppose L^2. On se rappelle que si on note $(\tau_{qh}u_h)(x) = u_h(x+qh)$ alors

$$\mathcal{F}(\tau_{qh}u_h)(\xi) = e^{\imath q\xi h}\widehat{u}_h(\xi).$$

On a alors immédiatement :

$$\mathcal{F}\left(A_h^\alpha u_h\right)(\xi) = -\,c^2\,\frac{e^{\imath\xi h} - 2 + e^{-\imath\xi h}}{h^2}\widehat{u}_h(\xi)$$

d'où l'on déduit que :

$$\widehat{A}_h^1(\xi) = 2\,c^2\,\frac{1-\cos(\xi h)}{h^2} = \frac{4\,c^2}{h^2}\,\sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right).$$

Question 3. *Par la méthode de Fourier, déterminer la condition de stabilité* L^2 *du schéma* (8). *Commenter.*

Corrigé de la question 3 : Dans les variables de Fourier, le schéma (8) se réecrit :

$$\widehat{u}_h^{n+1(\xi)} + (\Delta t^2 \widehat{A}_h^1(\xi) - 2)\,\widehat{u}_h^n(\xi) + \widehat{u}_h^{n-1}(\xi) = 0$$

On s'est donc ramenés pour chaque ξ à l'étude d'une suite récurrente d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est donnée par :

$$r^2 + (\Delta t^2 \widehat{A}_h^1(\xi) - 2)r + 1 = 0$$

Son discriminant est $\Delta(\xi) = (\Delta t^2 \widehat{A}_h^1(\xi) - 2)^2 - 4$. Or, d'après la question précédente :

$$0 \le \Delta t^2 \widehat{A}_h^1(\xi) \le \frac{4\,c^2\,\Delta t^2}{h^2}$$

d'où :

$$-2 \le \Delta t^2 \widehat{A}_h^1(\xi) - 2 \le \frac{4\,c^2\,\Delta t^2}{h^2} - 2$$

On a alors $(\Delta t^2 \widehat{A}_h^1(\xi) - 2)^2 \le \max\left(4, (4c^2\Delta t^2/h^2 - 2)^2\right)$, auquel cas

$$\Delta(\xi) \le \max\left(0, \frac{4\,c^2\,\Delta t^2}{h^2}(\frac{4\,c^2\,\Delta t^2}{h^2} - 4)\right)$$

On a donc deux cas à distinguer :

- Soit $c^2\Delta t^2/h^2 \le 1$, alors $\Delta(\xi) \le 0$, on a donc deux racines complexes conjuguées de module 1, et le schéma est stable
- Soit $c^2\Delta t^2/h^2 > 1$, alors il existe des valeurs de ξ telles que $\Delta(\xi) > 0$, on a donc deux racines réelles distinctes, dont le produit vaut 1, l'une est donc forcément de module plus grand que 1, et le schéma est instable.

La condition de stabilité CFL du schéma est donc :

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq 1$$

ce qui est exactement la condition nécessaire que nous avions déduit de la vitesse de propagation numérique.

Nous cherchons maintenant à construire un schéma plus précis à partir d'une combinaison linéaire de deux schémas saute-mouton définis sur deux grilles différentes (une de pas h, une de pas $2h$).

Ainsi, étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on introduit l'opérateur aux différences finies :

$$A_h^\alpha u(x) = -\alpha\, c^2\, \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - (1-\alpha)\, c^2\, \frac{u(x+2h) - 2u(x) + u(x-2h)}{4h^2}$$

et on considère le schéma numérique

$$\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h^\alpha u_h^n = 0 \tag{9}$$

Question 4. *Expliquer sans calculs pourquoi ce schéma est consistant quel que soit α. Étudier la vitesse de propagation numérique et en déduire une condition nécessaire de convergence du schéma.*

Corrigé de la question 4 : L'opérateur A_h^α est la combinaison linéaire de deux opérateurs aux différences finies consistants, dont la somme des coefficients vaut 1 : c'est donc un opérateur consistant.

De plus, le support de la solution numérique se propage à vitesse finie au sens où

$$\text{supp } u_h^n \subset [a,b] \implies \text{supp } u_h^{n+1} \subset [a-2h, b+2h].$$

Autrement dit, la vitesse de propagation numérique est donnée par :

$$V_{num} = \frac{2h}{\Delta t}$$

La vitesse de propagation des ondes étant c ici, une condition nécessaire de stabilité est $V_{num} \geq c$, ce qui se réécrit :

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq 2$$

Question 5. *Déterminer α tel que, pour toute fonction $u(x)$ suffisamment régulière :*

$$A_h^\alpha u(x) = -c^2\, \frac{d^2 u}{dx^2}(x) + O(h^4)$$

Dans la suite, on note cette valeur α_0.

Corrigé de la question 5 : En utilisant la formule de Taylor de indiquée dans l'énoncé, il vient :

$$\begin{aligned}
A_h^\alpha u(x) &= -\alpha\, c^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2}(x) + \frac{h^2}{12}\frac{d^4u}{dx^4}(x)\right) - (1-\alpha)\, c^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2}(x) + \frac{4h^2}{12}\frac{d^4u}{dx^4}(x)\right) + O(h^4) \\
&= -\, c^2 \frac{d^2u}{dx^2}(x) - \frac{h^2}{12}\left(\alpha + 4(1-\alpha)\right)\, c^2 \frac{d^4u}{dx^4}(x) + O(h^4)
\end{aligned}$$

Alors pour $\alpha = \alpha_0 = \frac{4}{3}$, le terme devant la dérivée d'ordre 4 s'annule, et on obtient :

$$A_h^{\alpha_0} u(x) = -\, c^2 \frac{d^2u}{dx^2}(x) + O(h^4)$$

Question 6. *Déterminer le symbole de A_h^α (on exprimera $\widehat{A}_h^\alpha(\xi)$ uniquement à l'aide de $sin^2(\xi h/2)$).*

Montrer que

— *pour $\alpha \geq 0$, $\widehat{A}_h^\alpha(\xi) \geq 0$ pour tout ξ ;*

— *pour $\alpha < 0$, il existe des valeurs de ξ pour lesquelles $\widehat{A}_h^\alpha(\xi) < 0$.*

Corrigé de la question 6 : On note u_h^n l'interpolation $\mathbb{P}^1$ par morceaux de $(u_j^n)_j$, que l'on suppose L^2. On se rappelle que si on note $(\tau_{qh}u_h)(x) = u_h(x+qh)$ alors

$$\mathcal{F}(\tau_{qh}u_h)(\xi) = e^{\imath q\xi h}\widehat{u}_h(\xi).$$

On a alors immédiatement :

$$\mathcal{F}\left(A_h^\alpha u_h\right)(\xi) = \left(-\alpha\frac{e^{\imath\xi h} - 2 + e^{-\imath\xi h}}{h^2} - (1-\alpha)\frac{e^{2\imath\xi h} - 2 + e^{-2\imath\xi h}}{4h^2}\right)\, c^2\, \widehat{u}_h(\xi)$$

d'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_h^\alpha(\xi) &= 2\alpha\, c^2\, \frac{1-\cos(\xi h)}{h^2} + 2(1-\alpha)\, c^2\, \frac{1-\cos(2\xi h)}{4h^2} \\
&= \frac{4\alpha}{h^2}\, c^2\, \sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right) + \frac{1-\alpha}{h^2}\, c^2\, \sin^2(\xi h) \\
&= \frac{4\alpha}{h^2}\, c^2\, \sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right) + 4\frac{1-\alpha}{h^2}\, c^2\, \sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\xi h}{2}\right) \\
&= \frac{4\alpha}{h^2}\, c^2\, \sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right) + 4\frac{1-\alpha}{h^2}\, c^2\, \left(\sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right) - \sin^4\left(\frac{\xi h}{2}\right)\right) \\
&= 4\, c^2\, \frac{1}{h^2}\sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right) - 4\, c^2\, \frac{1-\alpha}{h^2}\sin^4\left(\frac{\xi h}{2}\right) \\
&= \frac{4\, c^2}{h^2}\sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)\left(1 - (1-\alpha)\sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

— pour $\alpha \geq 0$, $\widehat{A}_h^\alpha(\xi) \geq 0$ pour tout ξ ;
— pour $\alpha < 0$, il existe des valeurs de ξ pour lesquelles $\widehat{A}_h^\alpha(\xi) < 0$.

En particulier pour $\alpha = \alpha_0$, on a

$$\widehat{A}_h^{\alpha_0}(\xi) = \frac{4\,c^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)\right) \geq 0$$

Question 7. *Par la méthode de Fourier, déterminer la condition de stabilité L^2 du schéma* (9)*, pour tout α et en particulier pour α_0. Commenter.*

Corrigé de la question 7 : Dans les variables de Fourier, le schéma (9) se réecrit :

$$\widehat{u}_h^{n+1(\xi)} + (\Delta t^2 \widehat{A}_h^\alpha(\xi) - 2)\,\widehat{u}_h^n(\xi) + \widehat{u}_h^{n-1}(\xi) = 0$$

On s'est donc ramenés pour chaque ξ à l'étude d'une suite récurrente d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est donnée par :

$$r^2 + (\Delta t^2 \widehat{A}_h^\alpha(\xi) - 2)r + 1 = 0$$

Son discriminant est $\Delta(\xi) = (\Delta t^2 \widehat{A}_h^\alpha(\xi) - 2)^2 - 4 = \Delta t^2 \widehat{A}_h^\alpha(\xi)(\Delta t^2 \widehat{A}_h^\alpha(\xi) - 4)$.

Comme le produit des racines vaut 1 et que les coefficients de l'équation caractéristiques sont réels, il y a deux cas possibles :

— Soit il existe des valeurs de ξ telles que $\Delta(\xi) > 0$, on aurait deux racines réelles distinctes, dont le produit vaut 1, l'une serait donc forcément de module plus grand que 1, et le schéma serait instable.

— Soit $\Delta(\xi) \leq 0$ pour tout ξ : on aurait alors deux racines complexes conjuguées de module 1, et le schéma serait stable

D'après la question précédente,

— pour $\alpha < 0$, il existe des valeurs de ξ pour lesquelles $\widehat{A}_h^\alpha(\xi) < 0$. Pour ces valeurs de ξ, $\Delta(\xi) > 0$: le schéma est donc instable.
— pour $\alpha \geq 0$, $\widehat{A}_h^\alpha(\xi) \geq 0$ pour tout ξ. Le schéma est donc stable si et seulement si :

$$\Delta t^2 \widehat{A}_h^\alpha(\xi) - 4 \leq 0$$

On rappelle que :

$$\forall \xi, \quad \widehat{A}_h^\alpha(\xi) = \frac{4\,c^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)\left(1 - (1-\alpha)\sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)\right).$$

Si $\alpha \in [0,1]$ ($(1-\alpha) > 0$), le schéma est stable si $c^2 \Delta t^2 / h^2 \leq 1$ (Une condition nécessaire et suffisante de stabilité pourrait être trouver en étudiant le maximum du polynôme $x \mapsto x(1-(1-\alpha)x)$ sur $[0,1]$).

Si $\alpha > 1$ ($(1-\alpha) < 0$), le schéma est stable si et seulement si $c^2 \Delta t^2 \alpha / h^2 \leq 1$.

Ainsi, pour $\alpha = \alpha_0$, la condition de stabilité CFL du schéma est :

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ce qui est plus contraignant que la condition nécessaire que nous avions déduit de la vitesse de propagation numérique.

Voici un exercice supplémentaire (hors programme) pour aller plus loin...

EXERCICE 3 (ÉTUDE DU SCHÉMA DE NEWMARK PAR MÉTHODE ÉNERGÉTIQUE)
Soit u la solution de l'équation des ondes 1D :

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \end{array} \right. \tag{10}$$

Question 1. *Démontrer que pour toutes conditions initiales u_0 et v_0 à support compact, l'énergie*

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left|c\,\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx$$

se conserve au cours du temps.

Corrigé de la question 1 : En multipliant (10) par la vitesse $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et on intégrant sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}\, c^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx = 0.$$

La solution se propageant à vitesse finie, elle est à support compact pour tout temps. Ainsi, en intégrant le second terme de cette identité, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} c^2\, \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(c\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = 0.$$

qui donne bien

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$$

Question 2. *Écrire l'équation vérifiée par le couple* $(u, v) = (u, \dfrac{\partial u}{\partial t})$.

Corrigé de la question 2 : Considérant la vitesse v donnée par $v = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, nous pouvons réécrire (10) sous la forme d'un système

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}(x,0) = \begin{bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Question 3. *On étudie le schéma de Newmark défini par*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{v_j^n + v_j^{n+1}}{2} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \left(A_h\left(\frac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2}\right)\right)_j = 0 \tag{12}$$

où A_h est l'opérateur aux différences finies défini par

$$\forall w_h = (w_j)_j \in l^2(\mathbb{Z}), \quad (A_h w_h)_j = -\frac{c^2}{h}\left(\frac{w_{j+1} - w_j}{h} - \frac{w_j - w_{j-1}}{h}\right).$$

Montrer que ce schéma est équivalent au suivant

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} + \left(A_h\left(\frac{u_h^{n+1} + 2u_h^n + u_h^{n-1}}{4}\right)\right)_j = 0, \tag{13}$$

appelé θ-schéma (en réalité les θ-schémas sont une classe de schémas à laquelle appartient (13)*).*

Corrigé de la question 3 : En soustrayant deux pas de temps consécutifs de (11), on a

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t} = \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2}.$$

De même en additionnant deux pas de temps consécutifs de (12), on obtient

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{\Delta t} + \left(A_h\left(\frac{u_h^{n+1} + 2u_h^n + u^{n-1}}{2}\right)\right)_j = 0.$$

Une combinaison linéaire de ces deux équations produit le schéma (13).

Question 4. *Montrer que ce schéma est consistant.*

Corrigé de la question 4 : En partant de la formulation de Newmark, on pose $U_j^n = u(jh, n\Delta t)$ et $V_j^n = v(jh, n\Delta t)$. On a alors

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= U_j^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2}\big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)_j^{n+1/2} + \frac{(\Delta t)^2}{8}\big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\big)_j^{n+1/2} + \mathcal{O}\big((\Delta t)^3\big) \\ U_j^n &= U_j^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2}\big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)_j^{n+1/2} + \frac{(\Delta t)^2}{8}\big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\big)_j^{n+1/2} + \mathcal{O}\big((\Delta t)^3\big) \end{aligned}$$

et des relations similaires pour V_j^{n+1} et V_j^n. Ainsi

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} - \frac{V_j^n + V_j^{n+1}}{2} = \big(\frac{\partial u}{\partial t}\big)_j^{n+1/2} - V_j^{n+1/2} + \mathcal{O}\big((\Delta t)^2\big).$$

De la même façon, on montre que

$$\Big(A_h\big(\frac{U_h^{n+1} + U_h^n}{2}\big)\Big)_j = -c^2\big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\big)_j^{n+1/2} + \mathcal{O}\big((\Delta t)^2 + h^2\big),$$

soit

$$\frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta t} + \Big(A_h\big(\frac{U_h^{n+1} + U_h^n}{2}\big)\Big)_j = \big(\frac{\partial v}{\partial t}\big)_j^{n+1/2} - c^2\big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\big)_j^{n+1/2} + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2).$$

Le schéma est donc d'ordre 2 en temps et en espace.

Remarquons cependant que la consistance peut aussi directement s'obtenir à partir du θ-schéma.

Question 5. *Démontrer que A_h est un opérateur symétrique et positif pour le produit scalaire $l^2(\mathbb{Z})$ c'est à dire*

$$\forall v_h = (v_j)_j,\; w_h = (w_j)_j \in l^2(\mathbb{Z}), \quad (v_h, A_h w_h)_{l^2} = \sum_j (A_h w_h)_j v_j = (w_h, A_h v_h)_{l^2},$$

et

$$\forall u_h = (u_j)_j \in l^2(\mathbb{Z}), \quad (u_h, A_h u_h)_{l^2} \geq 0.$$

Corrigé de la question 5 : Pour démontrer la symétrie et la positivité il suffit de réécrire $\forall v_h = (v_j)_j,\; w_h = (w_j)_j \in l^2(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} v_h^T A_h w_h &= \sum_j -\frac{c^2}{h}\left[\frac{w_{j+1} - w_j}{h} - \frac{w_j - w_{j-1}}{h}\right] v_j \\ &= \frac{c^2}{h}\sum_j \left[-\frac{w_{j+1} - w_j}{h} v_j\right] + \frac{c^2}{h}\sum_j \left[\frac{w_j - w_{j-1}}{h} v_j\right] \\ &= \frac{c^2}{h}\sum_j \left[-\frac{w_{j+1} - w_j}{h} v_j\right] + \frac{c^2}{h}\sum_j \left[\frac{w_{j+1} - w_j}{h} v_{j+1}\right] \\ &= c^2 \sum_j \left[\left(\frac{w_{j+1} - w_j}{h}\right)\left(\frac{v_{j+1} - v_j}{h}\right)\right]. \end{aligned}$$

Question 6. *En déduire l'estimation d'énergie discrète pour toute solution de (11-12)*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{E}^{n+1} = \mathcal{E}^n,$$

où

$$\mathcal{E}^n = \frac{1}{2}||v_h^n||_{l^2}^2 + \frac{1}{2}(u_h^n, A_h u_h^n)_{l^2}.$$

Corrigé de la question 6 : En prenant le produit scalaire de l'expression (12) avec v_h on a

$$\frac{1}{2\Delta t}\Big(||v_h^{n+1}||_{l^2}^2 - ||v_h^n||_{l^2}^2\Big) + \left(\frac{v_h^{n+1}+v_h^n}{2}, A_h\Big(\frac{u_h^{n+1}+u_h^n}{2}\Big)\right)_{l^2} = 0.$$

De plus, par (11), on a

$$\frac{1}{2\Delta t}\Big(||v_h^{n+1}||_{l^2}^2 - ||v_h^n||_{l^2}^2\Big) + \left(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}, A_h\Big(\frac{u_h^{n+1}+u_h^n}{2}\Big)\right)_{l^2} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2\Delta t}\Big(||v_h^{n+1}||_{l^2}^2 - ||v_h^n||_{l^2}^2\Big) + \frac{1}{2\Delta t}\Big((u_h^{n+1}, A_h u_h^{n+1})_{l^2} - (u_h^n, A_h u_h^n)_{l^2}\Big) = 0,$$

soit le résultat escompté.

On peut évidement obtenir le même type de résultat à partir du θ-schéma en considérant le produit scalaire l^2 avec $\frac{1}{2}\Big(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t} + \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t}\Big) = \frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t}$. On obtient

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t}, \Big(\frac{u_h^{n+1}-2u_h^n+u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h\big(\frac{u_h^{n+1}+2u_h^n+u_h^{n-1}}{4}\big)\Big)\right)_{l^2} \\
&\quad = \frac{1}{\Delta t}\Big(\frac{1}{2}||\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}||_{l^2}^2 - \frac{1}{2}||\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\Delta t}||_{l^2}^2\Big) \\
&\quad + \frac{1}{\Delta t}\Big(\frac{1}{2}\big((\frac{u_h^{n+1}+u_h^n}{2}), A_h(\frac{u_h^{n+1}+u^n}{2})\big)_{l^2} - \frac{1}{2}\big((\frac{u_h^n+u_h^{n-1}}{2}), A_h(\frac{u_h^n+u_h^{n-1}}{2})\big)_{l^2}\Big)
\end{aligned}$$

et on voit que la quantité

$$\mathcal{E}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\Big|\Big|\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}\Big|\Big|_{l^2}^2 + \frac{1}{2}\left(\Big(\frac{u_h^{n+1}+u_h^n}{2}\Big), A_h\Big(\frac{u_h^{n+1}+u_h^n}{2}\Big)\right)_{l^2}.$$

satisfait la relation

$$\frac{1}{\Delta t}\Big(\mathcal{E}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{E}^{n-\frac{1}{2}}\Big) = 0$$

Question 7. *Conclure sur la stabilité L^2 du schéma, plus précisément que*

$$\forall n, \quad ||v_h^n||_{l^2} \leq \sqrt{2\mathcal{E}_0},$$

et

$$\forall n, \quad ||u_h^n||_{l^2} \leq ||u_h^0||_{l^2} + n\Delta t\sqrt{2\mathcal{E}_0}.$$

Corrigé de la question 7 : La conservation de l'énergie obtenue à la question précédente nous donne

$$\forall n,\ \frac{1}{2}||v_h^n||_{l^2}^2 \leq \mathcal{E}_n = \mathcal{E}_0,$$

soit la première inégalité de stabilité. Pour la stabilité de u_h^n, il suffit d'utiliser la relation (11) qui nous donne

$$||u_h^{n+1}||_{l^2} \leq ||u_h^n||_{l^2} + \frac{\Delta t}{2}\big[||v_h^n||_{l^2} + ||v_h^{n+1}||_{l^2}\big],$$

puis l'inégalité obtenue pour $||v_h^n||_{l^2}$:

$$||u_h^{n+1}||_{l^2} \leq ||u_h^n||_{l^2} + \Delta t\sqrt{2\mathcal{E}_0}.$$

Par récurrence, on obtient :

$$\forall n, \quad ||u_h^n||_{l^2} \leq ||u_h^0||_{l^2} + n\Delta t\sqrt{2\mathcal{E}_0}.$$