Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées Paris
PRB202 - Martingales et Algorithmes Stochastiques
PC4 - 9 décembre 2019

Exercice 1 :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi telles que :
$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$.
Posons $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ et $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, pour tout $n \geq 1$.
Pour un entier naturel $a \in \mathbb{N}^*$, on introduit $\tau_a = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \,; S_n = a\}$, le premier temps de passage par a de la marche aléatoire au plus proche voisin symétrique $(X_n)_{n\geq 1}$.

1. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale.
2. Démontrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, le processus $(Z_n^\lambda = \exp(\lambda S_n - n\log(\cosh(\lambda))))_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale.
3. Montrer que τ_a est un $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - temps d'arrêt.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[Z^\lambda_{\tau_a\wedge n}] = 1$, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. On suppose $\lambda > 0$. Montrer que $\mathbb{E}[\exp(\lambda a - \tau_a \log(\cosh(\lambda)))\mathbf{1}_{\{\tau_a<+\infty\}}] = 1$.
6. En-déduire que $\mathbb{P}(\tau_a < +\infty) = 1$.
7. Montrer que pour tout $y > 0$, $\mathbb{E}[\exp(-y\tau_a)] = \exp(-a \text{ argcosh}(e^y))$.
   On rappelle que pour $x \in [1, +\infty[$, $\text{argcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
8. Démontrer que τ_a n'est pas intégrable.

Exercice 2 :

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale de carré intégrable telle que $M_0 = 0$ et $(<M>_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son crochet.
On note $<M>_\infty = \lim_{n\to+\infty} <M>_n$.
Considérons le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $X_0 = M_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k - M_{k-1}}{1+ <M>_k} .$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale de carré intégrable.
2. Démontrer que l'inégalité suivante est vérifiée, quel que soit $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \leq \frac{1}{1+ <M>_{n-1}} - \frac{1}{1+ <M>_n} .$$

3. En-déduire que $< X >_n \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathbb{P}$ - presque-sûrement.
4. Montrer que sur l'évènement $\{<M>_\infty = +\infty\}$,

$$\frac{M_n}{<M>_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}-\text{p.s.}} 0 .$$

   On pourra utiliser le lemme de Kronecker dont l'énoncé est rappelé ci-dessous :
   Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres strictement positifs vérifiant $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Si la série de terme général $\frac{x_n}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$ est convergente, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{a_n} = 0$.

Exercice 3 :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, intégrables et de même loi définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On pose $S_0 = 0\,, \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et pour tout $n \geq 1\,, S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$.

1. Démontrer que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $M_n = S_n - n\,\mathbb{E}[X_1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale.
2. Soit T un $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-temps d'arrêt intégrable. En appliquant convenablement le théorème d'arrêt de Doob, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\,, \mathbb{E}[S_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[X_1]\,\mathbb{E}[T \wedge n]$.
3. En-déduire que S_T est intégrable et :
$$\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[X_1]\,\mathbb{E}[T]\,.$$

Exercice 4 :

Le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évolution temporelle d'un actif risqué sur un marché financier peut être modélisé par la donnée d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $S_0 = s_0 > 0$ et pour tout $n \geq 1$:
$$S_n = (1 + \mu)S_{n-1} + \sigma S_{n-1}\epsilon_n\,,$$
où $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli prenant les valeurs 1 et -1 avec même probabilité $\frac{1}{2}$ et μ et σ sont deux paramètres vérifiant $|\sigma| < 1 + \mu$. On note $\lambda = \sqrt{(1 + \mu)^2 - \sigma^2}$ et $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la filtration naturelle du processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (1 + \mu)x + \sigma xy$. Montrer que pour tout $x \geq 0\,, f(x, 1) \geq 0$ et $f(x, -1) \geq 0$. Que peut-on en-déduire pour la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$.
   (a) Montrer que : $\mathcal{F}_n = \sigma(\epsilon_1\,, \cdots, \epsilon_n)$, quel que soit $n \geq 1$.
   (b) Calculer pour tout $n \geq 1\,, \mathbb{E}[\Delta S_n|\mathcal{F}_{n-1}]$. En-déduire la nature du processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de μ.
   (c) On se place dans le cas où $\mu < 0$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathbb{P}$-presque-sûrement vers une limite que l'on déterminera.
3. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}\,, S_n$ est de carré intégrable et calculer $\mathbb{E}[S_n^2]$.
4. On définit le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}\,, Z_n = \log(S_n)$.
   (a) Démontrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suivant les valeurs de λ, une martingale, une sous- ou sur-martingale.
   (b) Ecrire Z_n, pour tout $n \geq 1$ sous forme d'une suite de variables aléatoires indépendantes.
   (c) En-déduire suivant les valeurs de λ la convergence presque-sûre de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite à préciser.
   (d) Comment se traduisent ces résultats pour la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. On se place dans le cas particulier où $|\sigma| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $(1 + \mu)^2 + \sigma^2 < 1$.
   (a) Montrer que $(-S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale.
   (b) Ecrire sa décomposition de Doob $-S_n = M_n + A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus croissant prévisible nul en 0.
   (c) Vérifier que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale de carré intégrable et calculer son crochet.
   (d) Démontrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement.
6. Considérons le processus $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $W_n = \log\left(\frac{S_n}{\lambda^n}\right)$.
   (a) Démontrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale de carré intégrable et déterminer son crochet en fonction de $\delta = -[\log(\frac{1+\mu+\sigma}{\lambda})]\,[\log(\frac{1+\mu-\sigma}{\lambda})]$; vérifier que ce nombre est strictement positif.
   (b) En-déduire la convergence presque-sûre du processus $\left(S_n^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite à préciser.
7. On définit le processus $(R_n)_{n\geq 1}$ par pour tout $n \geq 1\,, R_n = \lambda^{-\sqrt{n}}\,S_n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$.
   (a) Montrer, à l'aide du théorème central limite, que la suite $(\log(R_n))_{n\geq 1}$ converge en loi et identifier sa limite.
   (b) Que peut-on en-déduire pour la suite $(R_n)_{n\geq 1}$?