**ENSTA-Paristech** **MS102**

***

# Elasticité linéaire

Correction des travaux dirigés n°4

Problème Thermoélastique linéaire isotrope

Solutions Exactes - Méthode des Contraintes

***

## Exercice 1 : Échauffement d'un bi-lame

### Cas du bi-lame homogène

**a)** L'espace des champs de contrainte (SA) est composé des champs respectant les équations d'équilibre : div $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$ dans $\Omega$ et les conditions aux limites suivantes sur les surfaces $S_{T_i}$

— en $x = L$, $\underline{T}^d = \underline{0}$ ;
— en $x = 0$, $T^d_y = T^d_z = 0$ ;
— en $y = \pm e$, $\underline{T}^d = \underline{0}$ ;
— en $z = \pm l/2$, $T^d_x = T^d_y = 0$ .

L'espace des champs de déplacement (CA) est composé des champs respectant les conditions aux limites suivantes sur les surfaces $S_{\xi_i}$

— en $x = 0$, $\xi^d_x = 0$ ;
— en $z = \pm l/2$, $\xi^d_z = 0$ .

L'analyse des conditions aux limites (une et une seule condition aux limites en déplacement ou en vecteur contrainte dans chaque direction) montre que le problème est bien posé : il y a existence et unicité de la solution.

**b)** Intuition : $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma\ \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ constant sur $\Omega$. Ce champ est bien (SA). Le champ de déformation s'obtient par la loi de comportement thermoélastique

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\text{tr}\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{I}} + \alpha\tau\underline{\underline{I}} \tag{1}$$

$$= \frac{\sigma}{E}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z - \frac{\nu\sigma}{E}\left(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y\right) + \alpha\tau\underline{\underline{I}} \quad . \tag{2}$$

Ce champ est constant (vérifie les conditions de compatibilités) et s'intègre directement en

$$\underline{\xi} = \underline{\underline{\epsilon}}.\underline{x} + \underline{\omega} \wedge \underline{x} + \underline{c} \tag{3}$$

$$= \frac{\sigma}{E}z\underline{e}_z - \frac{\nu\sigma}{E}\left(x\underline{e}_x + y\underline{e}_y\right) + \alpha\tau\underline{x} + \underline{\omega}.\underline{x} + \underline{c} \tag{4}$$

où $\underline{\omega} \wedge \underline{x}$ et $\underline{c}$ sont respectivement la rotation et la translation de corps rigide. Le terme de translation s'annule en supposant le point $O$ fixe. Les conditions aux limites en déplacement sur la face $x = 0$ imposent

$$\forall(y,z),\ \left(\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\ y\\ z\end{pmatrix}\right).\underline{e}_x = \omega_y z - \omega_z y = 0 \Rightarrow \omega_y = \omega_z = 0. \tag{5}$$

De même, $\xi_z(z = \pm l/2) = \pm(l/2)\,(\sigma/E + \alpha\tau) + \omega_x y = 0$ , ce qui impose $\omega_x = 0$ et $\sigma = -\alpha E\tau$. Le champ de déplacement s'écrit finalement

$$\boxed{\underline{\xi}(\underline{x}) = \alpha(1+\nu)\tau\left(x\underline{e}_x + y\underline{e}_y\right)} \tag{6}$$

et est cinématiquement admissible. Il est donc solution du problème thermoélastique avec le champ de contrainte constant

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = -\alpha E\tau\ \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z} \quad . \tag{7}$$

**c)** Le déplacement du point $A(L,0,0)$ vaut

$$\underline{\xi}(L,0,0) = \alpha(1+\nu)\tau L\underline{e}_x \quad . \tag{8}$$

### Cas du bi-lame hétérogène

**a)** Conditions à rajouter : le champ de déplacement doit être continu à l'interface $\Sigma$ entre les deux matériaux, et le vecteur contrainte doit être continu à cette même interface.

**b)** On suppose ici que le champ de contrainte est continu par morceaux et de la forme

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \begin{cases}\sigma^+\ \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z & \text{dans } \Omega^+\\ \sigma^-\ \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z & \text{dans } \Omega^-\end{cases} \tag{9}$$

Ce champ est (SA) : respect des conditions aux limites, équations d'équilibre dans $\Omega^+$ et $\Omega^-$, et $\underline{\underline{\sigma}}^+.\underline{e}_y = \underline{\underline{\sigma}}^-.\underline{e}_y = \underline{0}$ à l'interface $\Sigma$.

Le champ de déformation associé s'écrit

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) = \begin{cases}\frac{\sigma^+}{E^+}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z - \frac{\nu^+\sigma^+}{E^+}\left(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y\right) + \alpha^+\tau\underline{\underline{I}} & \text{dans } \Omega^+\\ \frac{\sigma^-}{E^-}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z - \frac{\nu^-\sigma^-}{E^-}\left(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y\right) + \alpha^-\tau\underline{\underline{I}} & \text{dans } \Omega^-\end{cases} \tag{10}$$

Par intégration dans chaque domaine $\Omega^+$ et $\Omega^-$ et application des conditions aux limites, le champ de déplacement s'écrit

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \begin{cases}\alpha^+(1+\nu^+)\tau\left(x\underline{e}_x + y\underline{e}_y\right) & \text{dans } \Omega^+\\ \alpha^-(1+\nu^-)\tau\left(x\underline{e}_x + y\underline{e}_y\right) & \text{dans } \Omega^-\end{cases} \tag{11}$$

La continuité du champ de déplacement au franchissement de l'interface $\Sigma$ impose

$$\underline{\xi}^+(x,0,z) = \underline{\xi}^-(x,0,z) \Rightarrow \boxed{\alpha^+(1+\nu^+) = \alpha^-(1+\nu^-)} \quad . \tag{12}$$

Nous avons trouvé un champ de contrainte (SA) relié par la loi de comportement à un champ de déplacement (CA) : c'est donc la solution du problème sous la condition (12)

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \alpha^+(1+\nu^+)\tau\left(x\underline{e}_x + y\underline{e}_y\right) = \alpha^-(1+\nu^-)\tau\left(x\underline{e}_x + y\underline{e}_y\right) \tag{13}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \begin{cases}-\alpha^+E^+\tau\ \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z & \text{dans } \Omega^+\\ -\alpha^-E^-\tau\ \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z & \text{dans } \Omega^-\end{cases} \tag{14}$$

### Le bi-lame comme thermomètre

**a)** On applique le principe de superposition pour les trois solutions suivantes :

— dilatation gênée dans la direction $z$ :

$$\underline{\underline{\sigma}}^1(\underline{x}) = \begin{cases}\sigma^+_z\ \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z & \text{dans } \Omega^+\\ \sigma^-_z\ \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z & \text{dans } \Omega^-\end{cases} \tag{15}$$

— flexion normale de moment selon $\underline{e}_z$ :

$$\underline{\underline{\sigma}}^2(\underline{x}) = \begin{cases}\beta^+y\ \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x & \text{dans } \Omega^+\\ \beta^-y\ \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x & \text{dans } \Omega^-\end{cases} \tag{16}$$

— traction-compression uniaxiale selon $\underline{e}_x$ :

$$\underline{\underline{\sigma}}^3(\underline{x}) = \begin{cases}\sigma^+_x\ \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x & \text{dans } \Omega^+\\ \sigma^-_x\ \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x & \text{dans } \Omega^-\end{cases} \tag{17}$$

Le champ de contrainte proposé est la somme de ces trois champs $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^1 + \underline{\underline{\sigma}}^2 + \underline{\underline{\sigma}}^3$. Ce champ respecte les équations d'équilibre dans $\Omega^+$ et $\Omega^-$, la continuité du vecteur contrainte en $\Sigma$, toutes les conditions aux limites sauf celle en $x = L$. Il n'est donc pas (SA).

Remarque : si la dilatation n'est pas gênée dans la direction $z$, il y a en plus une courbure transverse.

Une solution pour rendre le champ proposé (SA) est de changer les conditions aux limites du problème : en supposant que la surface en $x = L$ glisse sans frotter sur un plan rigide mobile (on oblige donc cette surface à rester plane), le champ devient (SA) (plus de condition sur $\sigma_{xx}$ en $x = L$). Ce changement de conditions aux limites est compatible avec le principe de Saint Venant (dans les deux cas, le torseur résultant des efforts s'appliquant sur la surface $x = L$ est nul).

## Exercice 2 : Étude d'un mat pesant

**1)** Pour les conditions aux limites à la base du mât, deux cas extrêmes peuvent être envisagés :

1. contact sans frottement de la base du mât sur le plan rigide $x_3 = 0$ ;
2. la base du mât est maintenue au plan rigide $x_3 = 0$ .

Tant que le torseur résultant de ces deux conditions aux limites reste le même, on peut appliquer le principe de Saint Venant : la solution du problème sera la même suffisamment loin de la surface d'application de ces efforts extérieurs quelque soit la condition aux limites utilisée. La condition 1 semble être plus pratique pour l'approche en contrainte.

On cherche un champ de contrainte (SA) uniaxial. Au vu des symétries du problème (dans toute la suite, on se place dans un repère cartésien $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$), on considère un champ de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{33}\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

Montrons alors qu'un tel champ est (SA). Pour cela, il doit vérifier l'ensemble des équations de la Mécanique des Milieux continus. Ici, comme il n'y a pas de surface de discontinuité au sein du mât, on a :

— pour tout point du mât, div $\underline{\underline{\sigma}} - p\underline{e}_3 = \underline{0}$. Ici, on a donc $\sigma_{33,3} = p$ et donc

$$\sigma_{33} = p.x_3 + f(x_1, x_2) \quad .$$

— pour tout point appartenant à la surface supérieure du mât en $x_3 = L$, $\underline{\underline{\sigma}}(x_3 = L).\underline{e}_3 = \underline{0}$. On pose alors $f(x_1, x_2) = constante = -pL$, ce qui donne :

$$\sigma_{33} = p.(x_3 - L) \quad .$$

— pour tout point de la surface latérale du mat, $\underline{\underline{\sigma}}.(n_1\underline{e}_1 + n_2\underline{e}_2) = \underline{0}$, avec $n_1, n_2$ constantes. Ce qui est vérifié par la forme définie au point précédent.

Ainsi, le champ uniaxial $\underline{\underline{\sigma}} = p.(x_3 - L)\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ est bien (SA).

**2)** Le champ de déformation associé est donné par

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\text{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{I}}$$

On obtient donc ici

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{p}{E}\begin{bmatrix} -\nu(x_3-L) & 0 & 0 \\ 0 & -\nu(x_3-L) & 0 \\ 0 & 0 & (x_3-L) \end{bmatrix}$$

Pour que le champ $\underline{\underline{\epsilon}}$ soit compatible, on doit vérifier $\underline{\underline{rot}}({}^T\underline{\underline{rot}}(\underline{\underline{\epsilon}})) = \underline{\underline{0}}$. Les composantes de $\underline{\underline{\epsilon}}$ sont des polynômes en $x_3$ d'ordre 1 qui sont trivialement annulés par le double rotationnel. Le champ $\underline{\underline{\epsilon}}$ est donc compatible et on peut l'intégrer afin de déterminer le champ de déplacement $\underline{\xi}$ correspondant. Pour ce faire, on calcule tout d'abord le vecteur rotation $\Phi$

$$\begin{aligned} \Phi_{1,1} &= \varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{12,3} = 0 \\ \Phi_{1,2} &= \varepsilon_{23,2} - \varepsilon_{22,3} = \frac{\nu}{E}.p \\ \Phi_{1,3} &= \varepsilon_{33,2} - \varepsilon_{32,3} = 0 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne $\Phi_1 = \frac{\nu}{E}.p.x_2 + \beta_1$ avec $\beta_1$ constante. La condition $\Phi(O) = \underline{0}$ nous donne $\beta_1 = 0$

$$\begin{aligned} \Phi_{2,1} &= \varepsilon_{11,3} - \varepsilon_{13,1} = \frac{-\nu}{E}.p \\ \Phi_{2,2} &= \varepsilon_{21,3} - \varepsilon_{23,1} = 0 \\ \Phi_{2,3} &= \varepsilon_{31,3} - \varepsilon_{33,1} = 0 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne $\Phi_2 = \frac{-\nu}{E}.p.x_1 + \beta_2$ avec $\beta_2$ constante. La condition $\Phi(O) = \underline{0}$ nous donne $\beta_2 = 0$

$$\begin{aligned} \Phi_{3,1} &= \varepsilon_{12,1} - \varepsilon_{11,2} = 0 \\ \Phi_{3,2} &= \varepsilon_{22,1} - \varepsilon_{21,2} = 0 \\ \Phi_{3,3} &= \varepsilon_{32,1} - \varepsilon_{31,2} = 0 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne $\Phi_3 = \beta_3$ avec $\beta_3$ constante. La condition $\Phi(O) = \underline{0}$ nous donne $\beta_3 = 0$. On obtient donc finalement :

$$\Phi = \frac{\nu.p}{E}\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule alors le champ de déplacement :

$$\begin{aligned} \xi_{1,1} &= \varepsilon_{11} = \frac{-\nu.p}{E}(x_3 - L) \\ \xi_{1,2} &= \varepsilon_{12} - \Phi_3 = 0 \\ \xi_{1,3} &= \varepsilon_{13} + \Phi_2 = \frac{-\nu}{E}.p.x_1 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne $\xi_1 = \frac{-\nu}{E}.p.x_1.x_3 + \frac{\nu}{E}.p.L.x_1 + \alpha_1$ avec $\alpha_1$ constante. La condition $\underline{\xi}(O) = \underline{0}$ nous donne $\alpha_1 = 0$

$$\begin{aligned} \xi_{2,1} &= \varepsilon_{21} + \Phi_3 = 0 \\ \xi_{2,2} &= \varepsilon_{22} = \frac{-\nu.p}{E}(x_3 - L) \\ \xi_{2,3} &= \varepsilon_{23} - \Phi_1 = \frac{-\nu}{E}.p.x_2 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne $\xi_2 = \frac{-\nu}{E}.p.x_2.x_3 + \frac{\nu}{E}.p.L.x_2 + \alpha_2$ avec $\alpha_2$ constante. La condition $\underline{\xi}(O) = \underline{0}$ nous donne $\alpha_2 = 0$

$$\begin{aligned} \xi_{3,1} &= \varepsilon_{31} - \Phi_2 = \frac{\nu}{E}.p.x_1 \\ \xi_{3,2} &= \varepsilon_{32} + \Phi_1 = \frac{\nu}{E}.p.x_2 \\ \xi_{3,3} &= \varepsilon_{33} = \frac{-p}{E}(x_3 - L) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne $\xi_3 = \frac{\nu.p}{2E}.(x_1^2 + x_2^2) + \frac{p}{E}.(\frac{x_3}{2} - L).x_3 + \alpha_3$ avec $\alpha_3$ constante. La condition $\underline{\xi}(O) = \underline{0}$ nous donne $\alpha_3 = 0$. On obtient donc finalement :

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{-\nu}{E}.p.x_1.x_3 + \frac{\nu}{E}.p.L.x_1 \\ \frac{-\nu}{E}.p.x_2.x_3 + \frac{\nu}{E}.p.L.x_2 \\ \frac{\nu.p}{2E}.(x_1^2 + x_2^2) + \frac{p}{E}.(\frac{x_3}{2} - L).x_3 \end{pmatrix}$$

**Ce champ de déplacements n'est pas (CA) car il ne respecte pas la condition aux limites $\xi_3 = 0$ en $x_3 = 0$.**

**3)** On cherche l'évolution des sections droites du mât. Un point $M(m_1, m_2, m_3)$ appartenant à une section se transforme en un point $M'(m'_1, m'_2, m'_3)$. Afin d'obtenir la déformée des sections droites, on cherche la fonction $m'_3 = f(m'_1, m'_2)$. On a :

$$\begin{aligned} m'_1 &= m_1 + \xi_1(m_1, m_2, m_3) = m_1 - \frac{\nu}{E}.p.(m_3 - L).m_1 \\ m'_2 &= m_2 + \xi_2(m_1, m_2, m_3) = m_2 - \frac{\nu}{E}.p.(m_3 - L).m_2 \\ m'_3 &= m_3 + \xi_3(m_1, m_2, m_3) = m_3 + \frac{\nu.p}{2E}.(m_1^2 + m_2^2) + \frac{p}{E}.(\frac{m_3}{2} - L).m_3 \end{aligned}$$

d'où il vient facilement :

$$m'_3 = \frac{\nu.p}{2E}.\frac{1}{(1 - \frac{\nu.p}{E}(m_3 - L))^2}.(m_1'^2 + m_2'^2) + B(m_3)$$

avec $B(m_3)$, une fonction dépendante uniquement de $m_3$. On retrouve bien l'équation d'une calotte sphérique. Le rayon de courbure est donné par :

$$\frac{1}{R} = \frac{\nu.p}{E}.\frac{1}{(1 - \frac{\nu.p}{E}(m_3 - L))^2} \approx \frac{\nu.p}{E}$$

L'application numérique donne $R \approx 9000km$, ce qui est bien entendu négligeable et démontre le faible effet de son poids volumique sur le mât.