

---

# Correction du contrôle de connaissances de PA101 année scolaire 2021/2022

---

## 1 Oscillateur harmonique

Dans tout cet exercice, l'espace de Hilbert sera noté  $\mathbb{H}$  muni du produit scalaire associé à  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

1. On rappelle que les états doivent être de norme 1. De plus, la famille des fonctions propres du hamiltonien  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est orthonormée. Par conséquent on a :

$$1 = \|\psi(x, 0)\|^2 = |N|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} |c|^{2n} = \frac{|N|^2}{1 - |c|^2} \quad . \quad (1.1)$$

La normalisation impose alors que  $N = e^{i\alpha} \sqrt{1 - |c|^2}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

2. Comme le choix de la phase est arbitraire, on choisit ici  $\alpha = 0$  de sorte que  $N \in \mathbb{R}$ . On rappelle que en une dimension les niveaux d'énergie sont non dégénérés et que  $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . L'état initial étant une combinaison linéaire de fonctions propres du hamiltonien<sup>1</sup>, on a alors pour  $t > 0$  :

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \sqrt{1 - |c|^2} \sum_{n=0}^{+\infty} c^n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \psi_n(x) \\ &= \sqrt{1 - |c|^2} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} c^n e^{-i\omega n t} \psi_n(x) \quad . \end{aligned} \quad (1.2)$$

On a alors  $\psi(x, t) = \sqrt{1 - |c|^2} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} c^n e^{-i\omega n t} \psi_n(x)$  pour  $t > 0$ .

3. Introduisons un peu de notation. On note  $|\psi(t)\rangle$  le ket associé à l'état de fonction d'onde spatiale  $\psi(x, t)$  à  $t \geq 0$  ainsi que  $|\psi_n\rangle$  les états propres du hamiltonien<sup>2</sup>. Il vient alors

---

1. La linéarité de l'équation de Schrödinger permet de traiter chaque terme séparément.  
2. On prendra garde à ne pas confondre le ket  $|\psi\rangle \in \mathbb{H}$  et le scalaire  $\psi(x, t) = \langle x | \psi(t) \rangle \in \mathbb{C}$ .

que l'on peut écrire les états  $|\psi(t)\rangle$  sous la forme :

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{1 - |c|^2} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} c^n e^{-i\omega n t} |\psi_n\rangle \quad . \quad (1.3)$$

La probabilité  $\mathbb{P}_0(t) := \left| \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle \right|^2$  est la probabilité de transition de l'état  $|\psi(t)\rangle$  à son état initial  $|\psi(0)\rangle$ . Pour  $t > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(t) &= (1 - |c|^2)^2 \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} (c^*)^n c^m e^{-i\omega m t} \underbrace{\langle \psi_n | \psi_m \rangle}_{\delta_{nm}} \right|^2 \\ &= (1 - |c|^2)^2 \left| \sum_{n=0}^{+\infty} |c|^{2n} e^{-i\omega n t} \right|^2 \\ &= \frac{(1 - |c|^2)^2}{\left| 1 - |c|^2 e^{-i\omega t} \right|^2} \\ &= \frac{(1 - |c|^2)^2}{1 + |c|^4 - 2|c|^2 \cos(\omega t)} \quad . \end{aligned} \quad (1.4)$$

On applique la formule donnée en début d'énoncé  $(1 - \cos(x)) = 2 \sin^2(\frac{x}{2})$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(t) &= \frac{(1 - |c|^2)^2}{(1 - |c|^2)^2 + 4|c|^2 \sin^2(\frac{\omega t}{2})} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{4|c|^2}{(1 - |c|^2)^2} \sin^2(\frac{\omega t}{2})} \quad . \end{aligned} \quad (1.5)$$

On a alors  $\boxed{\mathbb{P}_0(t) = \frac{1}{1 + \frac{4|c|^2}{(1 - |c|^2)^2} \sin^2(\frac{\omega t}{2})}}$ .

4. La valeur moyenne de l'énergie dans l'état  $|\psi(t)\rangle$  est définie par  $\langle E \rangle(t) := \langle \psi(t) | \hat{H} | \psi(t) \rangle$  où  $\hat{H}$  est l'opérateur hamiltonien. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \langle E \rangle(t) &= (1 - |c|^2) \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} (c^*)^n c^m E_m e^{-i\omega(m-n)t} \underbrace{\langle \psi_n | \psi_m \rangle}_{\delta_{nm}} \\ &= (1 - |c|^2) \hbar \omega \sum_{n=0}^{+\infty} |c|^{2n} \left( n + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\hbar \omega}{2} + \hbar \omega (1 - |c|^2) \sum_{n=0}^{+\infty} n |c|^{2n} \quad . \end{aligned} \quad (1.6)$$

En utilisant l'identité  $\frac{z}{(1 - z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n z^n$  pour  $|z| < 1$ , on obtient finalement que

$\boxed{\langle E \rangle = \frac{\hbar \omega}{2} \frac{1 + |c|^2}{1 - |c|^2}}$  qui ne dépend pas du temps. L'indépendance par rapport au temps provient du fait que l'on a déjà écrit l'état  $|\psi(t)\rangle$  comme une combinaison linéaire des kets propres  $|\psi_n\rangle$ . La dépendance temporelle ne se reflétant que sous la forme d'exponentielles complexes, ces dernières disparaissent dans le calcul. On peut aussi noter qu'ici,

l'expression de l'énergie moyenne correspond à l'espérance de la variable aléatoire  $\mathbb{E}$  qui mesure l'énergie du système dont la loi de probabilité est  $\mathbb{P}(\mathbb{E} = E_n) = (1 - |c|^2)|c|^{2n}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

5. La probabilité de mesurer l'énergie  $E_2$  (non dégénérée) à l'instant  $t > 0$  est donnée par  $\mathbb{P}_2(t) := \left| \langle \psi_2 | \psi(t) \rangle \right|^2$ , ce qui correspond au module au carré du coefficient situé devant  $|\psi_2\rangle$  dans l'expression de  $|\psi(t)\rangle$  ce qui donne immédiatement  $\boxed{\mathbb{P}_2 = (1 - |c|^2)|c|^4}$ .

## 2 Double marche de potentiel

1. Voici une représentation graphique du potentiel à deux marches  $V(x)$  :

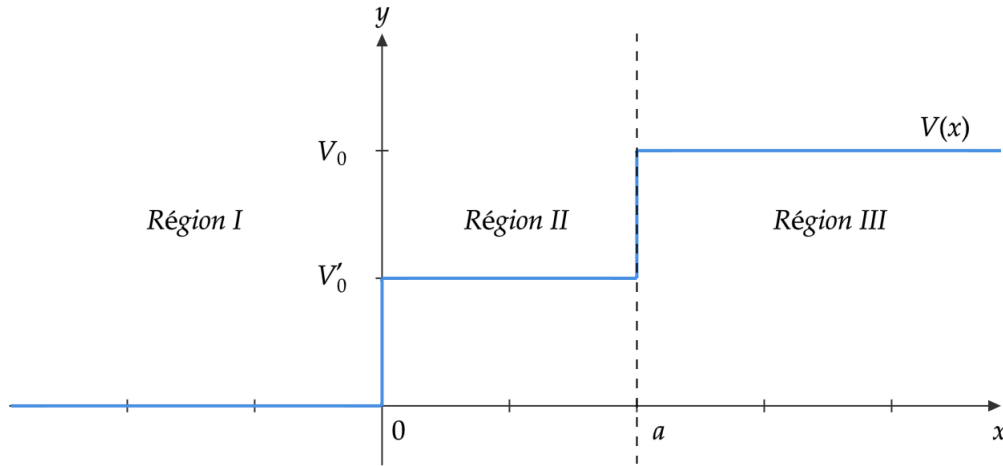


FIGURE 2.1 – Potentiel à deux marches  $V'_0, V_0$

On résout l'équation de Schrödinger stationnaire dans chacun des trois domaines :

$$E\phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) + V(x)\phi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \phi''(x) + k_1^2\phi(x) = 0 & (\text{région I}) \\ \phi''(x) + k_2^2\phi(x) = 0 & (\text{région II}) \\ \phi''(x) + k_3^2\phi(x) = 0 & (\text{région III}) \end{cases}, \quad (2.1)$$

où  $k_1 := \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ ,  $k_2 := \frac{\sqrt{2m(E-V'_0)}}{\hbar}$  et  $k_3 := \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$  sont des nombres réels (car  $E \geq V_0 \geq V'_0$ ). De manière générale,  $\phi$  est une fonction à valeur dans  $\mathbb{C}$ , on en déduit alors la forme générale des solutions :

- Région I :  $\boxed{\phi(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}}$  avec  $A_1, B_1$  des nombres complexes.
- Région II :  $\boxed{\phi(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x}}$  avec  $A_2, B_2$  des nombres complexes.
- Région III :  $\boxed{\phi(x) = A_3 e^{ik_3 x} + B_3 e^{-ik_3 x}}$  avec  $A_3, B_3$  des nombres complexes.

2. La fonction d'onde  $\phi$  est continue, ce qui donne les conditions suivantes :

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2, & (\text{en } x = 0) \\ A_2 e^{ik_2 a} + B_2 e^{-ik_2 a} = A_3 e^{ik_3 a} + B_3 e^{-ik_3 a}, & (\text{en } x = a) \end{cases}. \quad (2.2)$$

Comme les discontinuités sont finies<sup>3</sup>, la dérivée première de  $\phi$  est également continue,

3. Attention si la discontinuité est infinie, on a juste la continuité de la fonction d'onde au point de discontinuité.

ce qui donne deux autres conditions qui sont :

$$\begin{cases} A_1 - B_1 = \frac{k_2}{k_1}(A_2 - B_2), & (\text{en } x = 0) \\ A_2 e^{ik_2 a} - B_2 e^{-ik_2 a} = \frac{k_3}{k_2}(A_3 e^{ik_3 a} - B_3 e^{-ik_3 a}), & (\text{en } x = a) \end{cases} \quad (2.3)$$

3. D'abord on considère une onde incidente<sup>4</sup> qui se propage depuis la région I. L'onde incidente aura une amplitude  $A_1$  tandis que  $B_1$  correspond à l'amplitude de l'onde réfléchie sur la première barrière de potentiel. Comme il n'y a pas d'onde réfléchie dans la région III, on a alors  $B_3 = 0$  et  $A_3$  est l'amplitude de l'onde transmise dans la région III. Par conséquent le coefficient de transmission  $T$  vaut  $T = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 \frac{k_3}{k_1}$ . De (2.2) et (2.3) il vient :

$$\begin{cases} A_2 = \frac{e^{ia(k_3-k_2)}}{2} \left( 1 + \frac{k_3}{k_2} \right) A_3 \\ B_2 = \frac{e^{ia(k_3+k_2)}}{2} \left( 1 - \frac{k_3}{k_2} \right) A_3 \\ A_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k_2}{k_1} \right) A_2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k_2}{k_1} \right) B_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

En réinjectant les expressions de  $A_2$  et de  $B_2$  dans l'expression de  $A_1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{A_1}{A_3} \right|^2 &= \frac{1}{16} \left| e^{-ik_2 a} \left( 1 + \frac{k_3}{k_2} \right) \left( 1 + \frac{k_2}{k_1} \right) + e^{ik_2 a} \left( 1 - \frac{k_3}{k_2} \right) \left( 1 - \frac{k_2}{k_1} \right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{16} \left[ e^{-ik_2 a} \left( 1 + \frac{k_3}{k_2} \right) \left( 1 + \frac{k_2}{k_1} \right) + e^{ik_2 a} \left( 1 - \frac{k_3}{k_2} \right) \left( 1 - \frac{k_2}{k_1} \right) \right] \\ &\quad \left[ e^{ik_2 a} \left( 1 + \frac{k_3}{k_2} \right) \left( 1 + \frac{k_2}{k_1} \right) + e^{-ik_2 a} \left( 1 - \frac{k_3}{k_2} \right) \left( 1 - \frac{k_2}{k_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pour plus de simplicité, posons  $A := \frac{k_2}{k_1}$  et  $B := \frac{k_3}{k_2}$ , on notera que  $AB = \frac{k_3}{k_1}$ . On obtient alors :

$$\left| \frac{A_1}{A_3} \right|^2 = \frac{1}{16} [(1+A)^2(1+B)^2 + (1-A)^2(1-B)^2 + 2\cos(2k_2 a)(1-A^2)(1-B^2)] \quad (2.6)$$

On fait subtilement apparaître  $1 = \cos^2(k_2 a) + \sin^2(k_2 a)$  et  $\cos(2k_2 a) = \cos^2(k_2 a) - \sin^2(k_2 a)$ . Par conséquent (2.6) s'exprime sous la forme  $\mathcal{Y} \cos^2(k_2 a) + \mathcal{Z} \sin^2(k_2 a)$  où :

$$\begin{cases} \mathcal{Y} = \frac{1}{16} [(1+A)^2(1+B)^2 + (1-A)^2(1-B)^2 + 2(1-A^2)(1-B^2)] \\ \mathcal{Z} = \frac{1}{16} [(1+A)^2(1+B)^2 + (1-A)^2(1-B)^2 - 2(1-A^2)(1-B^2)] \end{cases} \quad (2.7)$$

Un peu de simplification s'impose, il est utile de remarquer qu'en utilisant l'identité remarquable  $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ , on a :

$$\begin{cases} \mathcal{Y} = \frac{1}{16} [(1+A)(1+B) + (1-A)(1-B)]^2 \\ \mathcal{Z} = \frac{1}{16} [(1+A)(1+B) - (1-A)(1-B)]^2 \end{cases} \quad (2.8)$$

---

4. La convention ici veut que  $Ae^{ikx}$  correspond à une onde se propageant vers les  $x$  positifs et inversement  $Be^{-ikx}$  correspond à une onde se propageant vers les  $x$  négatifs.

Le calcul donne alors :

$$\begin{cases} \mathcal{Y} = \frac{1}{4}(1 + AB)^2 = \frac{1}{4}(A + B)^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{k_3}{k_1}\right)^2 \\ \mathcal{Z} = \frac{1}{4}(A + B)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_3}{k_2}\right)^2 \end{cases} . \quad (2.9)$$

En posant  $Y := \mathcal{Y} \frac{k_1}{k_3}$  et  $Z := \mathcal{Z} \frac{k_1}{k_3}$ , il vient que :

$$T = \frac{1}{Y \cos^2(k_2 a) + Z \sin^2(k_2 a)} . \quad (2.10)$$

4. Il suffit alors de développer les termes. Détaillons les choses.

- $\frac{k_3}{k_1} = \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}$ , ce qui donne pour  $T$  un numérateur valant  $4\sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}$ .
- Au dénominateur, on remarque que l'on a  $\cos^2(k_2 a) = 1 - \sin^2(k_2 a)$ . Par conséquent, le terme non trigonométrique du dénominateur vaut  $\left(1 + \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}\right)^2$  comme ce qui est demandé.
- Le terme proportionnel à  $\sin^2(k_2 a)$  vaut :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1 - \frac{V'_0}{E}} + \sqrt{\frac{E - V_0}{E - V'_0}}\right)^2 - \left(1 + \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}\right)^2 &= \frac{E - V'_0}{E} + \frac{E - V_0}{E - V'_0} + 2\sqrt{\frac{E - V_0}{E}} \\ &\quad - 1 - 2\sqrt{\frac{E - V_0}{E}} - \frac{E - V_0}{E} \\ &= -\frac{V'_0(V_0 - V'_0)}{E(E - V'_0)} . \end{aligned} \quad (2.11)$$

On en déduit finalement que :

$$T = \frac{4\sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}\right)^2 - \frac{V'_0(V_0 - V'_0)}{E(E - V'_0)} \sin^2(k_2 a)} . \quad (2.12)$$

5. Le cas du potentiel à une marche correspond au cas  $V_0 = V'_0$ , ce qui donne :

$$T_0 = \frac{4\sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}\right)^2} . \quad (2.13)$$

6. Comme  $0 \leq V'_0 \leq V_0$  et  $E > V_0$ , le terme supplémentaire dans le dénominateur est toujours négatif, donc on a  $T_0 \leq T$ .

7. Minimiser  $T$  en fonction de  $a$  revient à maximiser le dénominateur en fonction de  $a$ . Cela

n'est possible que si et seulement si  $\sin(k_2 a) = 0$ , ce qui donne alors  $a_n = \frac{\hbar n \pi}{\sqrt{2m(E - V'_0)}}$

où  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dans ce cas on a  $T_{\min} = T_0$ .

8. Le raisonnement est complètement similaire, on cherche  $a$  tel que le dénominateur soit minimal, soit  $|\sin(k_2 a)| = 1$ , ce qui donne  $a_n = \frac{\hbar(2n+1)\pi}{2\sqrt{2m(E-V'_0)}}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . On a alors :

$$T_{\max} = \frac{4\sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}\right)^2 - \frac{V'_0(V_0 - V'_0)}{E(E - V'_0)}} \quad (2.14)$$

9. Il suffit de trouver  $V'_0$  tel que  $T_{\max} = 1$  parce que si cette condition est vérifiée, il suffira de choisir  $a$  comme dans la question précédente pour assurer une transmission maximale. Cette condition donne alors :

$$4\sqrt{1 - \frac{V_0}{E}} = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}\right)^2 - \frac{V'_0(V_0 - V'_0)}{E(E - V'_0)} \quad (2.15)$$

ce qui revient à résoudre l'équation du second degré :

$$V_0'^2 - V'_0 \left( V_0 + E \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}} \right)^2 \right) + E^2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}} \right)^2 = 0 \quad (2.16)$$

Il se trouve qu'il s'agit d'une identité remarquable, car  $\left( V_0 + E \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}} \right)^2 \right) = 2E \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}} \right)$ , ce qui donne l'équation du second degré très simple :

$$\left( V'_0 - E \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}} \right) \right)^2 = 0 \quad (2.17)$$

qui a pour solution  $V'_0 = E \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}} \right)$ . On vérifie que  $V'_0 \leq V_0 < E$  en utilisant l'inégalité  $\forall x \in [0, 1], 1 - x \leq \sqrt{1 - x}$ , avec  $x = \frac{V_0}{E}$ .

10. On peut constater que la transmission est plus efficace à deux marches qu'à une marche de potentiel. Avec une seule marche de potentiel, on a une transmission qui est possible mais il existe une probabilité non nulle qu'une onde soit réfléchi ce qui ne prévoit pas la physique classique (une onde incidente et une onde transmise). Avec deux marches, cette probabilité qu'une onde soit réfléchi existe mais elle devient nulle pour une certaine valeur du potentiel  $V'_0$  et de certaines valeurs de  $a$ .

### 3 Opérateur carré

L'exercice est complètement trivial si  $\alpha = 0$  ou  $\beta = 0$ . On supposera ici que  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ .

1. On suppose que  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ . Par conséquent il existe une base de kets propres  $|\lambda, \mu\rangle$  commune à  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ , telle que :

$$\begin{cases} \hat{A}|\lambda, \mu\rangle = \lambda|\lambda, \mu\rangle \\ \hat{B}|\lambda, \mu\rangle = \mu|\lambda, \mu\rangle \end{cases} \quad (3.1)$$

pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Il vient alors que :

$$\hat{C}|\lambda, \mu\rangle = (\alpha\lambda^2 + \beta\mu^2)|\lambda, \mu\rangle \quad (3.2)$$

On en déduit alors que le spectre de  $\hat{C}$  est l'ensemble des réels positifs.

2. On suppose que  $[\hat{A}, \hat{B}] = i\gamma\hat{I}$  où  $\gamma > 0$ . L'idée est de s'inspirer de la diagonalisation de l'oscillateur harmonique quantique<sup>5</sup> qui est en fait un cas particulier, avec  $\gamma = \hbar$ ,  $\alpha = \frac{1}{2m}$ ,  $\beta = \frac{m\omega^2}{2}$ ,  $\hat{A} = \hat{P}$  et  $\hat{B} = \hat{X}$ . On introduit les opérateurs sans dimension<sup>6</sup> :

$$\hat{\mathcal{A}} := \left(\frac{\alpha}{\beta\gamma^2}\right)^{1/4} \hat{A}, \quad \hat{\mathcal{B}} := \left(\frac{\beta}{\alpha\gamma^2}\right)^{1/4} \hat{B} \quad . \quad (3.3)$$

Ils vérifient la relation de commutation  $[\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}] = i\hat{I}$ . Ainsi l'opérateur  $\hat{C}$  s'écrit comme  $\hat{C} = \gamma\sqrt{\alpha\beta}(\hat{\mathcal{A}}^2 + \hat{\mathcal{B}}^2)$ . On définit ensuite les opérateurs d'échelle<sup>7</sup> comme avec l'oscillateur harmonique :

$$\hat{a} := \frac{\hat{\mathcal{A}} + i\hat{\mathcal{B}}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^\dagger := \frac{\hat{\mathcal{A}} - i\hat{\mathcal{B}}}{\sqrt{2}} \quad . \quad (3.4)$$

On vérifie sans peine que  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I}$  et on a :

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{2} \left( \hat{\mathcal{A}}^2 + \hat{\mathcal{B}}^2 + i[\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}] \right) = \frac{1}{2} \left( \hat{\mathcal{A}}^2 + \hat{\mathcal{B}}^2 - \hat{I} \right) \quad , \quad (3.5)$$

d'où  $\hat{C} = 2\gamma\sqrt{\alpha\beta} \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\hat{I} \right)$ . En reprenant l'exemple de l'oscillateur harmonique, l'opérateur  $\hat{N} := \hat{a}^\dagger \hat{a}$  est une observable, ses kets propres sont les  $|n\rangle$  avec  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ . On en déduit finalement que le spectre  $\hat{C}$  est composé des réels positifs

$$C_n = 2\gamma\sqrt{\alpha\beta} \left( n + \frac{1}{2} \right) \text{ avec } n \in \mathbb{N}.$$

## 4 Mesure quantique non destructive

Cet exercice fait appel à des notions sur le produit tensoriel de deux espaces de Hilbert, qui est une notion souvent abordée qu'en petites classes et rarement en cours magistral.

1. On rappelle que l'électron est un fermion de spin  $s = \frac{1}{2}$ . L'espace des états de spin de l'électrons  $\mathbb{E}_A$  est un espace dont une base est donnée par les kets propres de  $\hat{S}_z$  et  $\hat{S}^2$  que sont  $|s, m\rangle$  avec  $-s \leq m \leq s$  où  $m$  est la projection du spin sur l'axe z. En notant  $|+\rangle_{A,z}$  ( $|-\rangle_{A,z}$ ) les kets propres pour la valeur  $m = \frac{1}{2}$  ( $m = -\frac{1}{2}$ ), on a  $\dim(\mathbb{E}_A) = 2$ . On notera  $\mathcal{B}_A := \left( |+\rangle_{A,z}, |-\rangle_{A,z} \right)$  la base de l'espace des états. On rappelle que l'opérateur de spin  $\hat{S}_A$  a pour composantes dans la base  $\mathcal{B}_A$   $\hat{S}_{A,i} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_i$  pour  $i = x, y, z$  où  $\hat{\sigma}_i$  sont les matrices de Pauli :

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \quad (4.1)$$

2. Comme l'axe de quantification est complètement arbitraire, les valeurs propres de chaque composante de  $\hat{S}_A$  sont  $\pm \frac{\hbar}{2}$ . Par contre les vecteurs propres de chaque composante ne sont pas identiques car ces dernières ne commutent pas entre elles. Il faut donc chercher manuellement les vecteurs propres en résolvant deux systèmes linéaires (un par valeur

5. On rappelle que le hamiltonien de l'oscillateur quantique en 1D s'écrit  $\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2$ , où  $\hat{P}$  est l'opérateur impulsion et  $\hat{X}$  est l'opérateur position.

6. Une analyse dimensionnelle permet de le voir.

7. Ce ne sont pas des observables, car ils sont adjoints l'un de l'autre et distincts.

propre) pour chaque composante  $\hat{S}_{A,x}$  et  $\hat{S}_{A,y}$ ,  $\hat{S}_{A,z}$  étant déjà diagonalisé dans la base  $\mathcal{B}_A$ . Cela revient à chercher  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$  tel que  $\hat{\sigma}_i \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  pour  $i = x, y$  avec la condition de normalisation des kets propres  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Cela donne le tableau suivant (à une phase près) :

Composantes	Ket propre pour la valeur propre $\frac{\hbar}{2}$	Ket propre pour la valeur propre $-\frac{\hbar}{2}$
$\hat{S}_{A,x}$	$ +\rangle_{A,x} = \frac{1}{\sqrt{2}}( +\rangle_{A,z} +  -\rangle_{A,z})$	$ -\rangle_{A,x} = \frac{1}{\sqrt{2}}( +\rangle_{A,z} -  -\rangle_{A,z})$
$\hat{S}_{A,y}$	$ +\rangle_{A,y} = \frac{1}{\sqrt{2}}( +\rangle_{A,z} + i -\rangle_{A,z})$	$ -\rangle_{A,y} = \frac{1}{\sqrt{2}}( +\rangle_{A,z} - i -\rangle_{A,z})$
$\hat{S}_{A,z}$	$ +\rangle_{A,z}$	$ -\rangle_{A,z}$

TABLE 4.1 – Etats propres des composantes de  $\hat{S}_A$

3. Du tableau (4.1), on en tire que :

$$\begin{cases} |+\rangle_{A,z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_{A,x} + |-\rangle_{A,x}) \\ |-\rangle_{A,z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_{A,x} - |-\rangle_{A,x}) \end{cases} . \quad (4.2)$$

On en déduit alors que :

$$|\pm\rangle_{A,y} = \frac{1}{2}((1 \pm i)|+\rangle_{A,x} + (1 \mp i)|-\rangle_{A,x}) . \quad (4.3)$$

A partir de cette relation, on peut aussi exprimer les kets de propres de  $\hat{S}_{A,x}$  en fonction de ceux de  $\hat{S}_{A,y}$  car si on écrit ce système sous forme matricielle on a :

$$\begin{pmatrix} |+\rangle_{A,y} \\ |-\rangle_{A,y} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}}_U \begin{pmatrix} |+\rangle_{A,x} \\ |-\rangle_{A,x} \end{pmatrix} . \quad (4.4)$$

On montre sans problème que<sup>8</sup>  $U^\dagger U = U U^\dagger = I_2$  où  $I_2$  est la matrice identité. Le système est alors facile à inverser en multipliant par  $U^\dagger$  ce qui donne :

$$|\pm\rangle_{A,x} = \frac{1}{2}((1 \mp i)|+\rangle_{A,y} + (1 \pm i)|-\rangle_{A,y}) . \quad (4.5)$$

4. On note  $\mathbb{E}_B$  l'espace des états de spin pour l'électron B. On admettra que tout ce qui a été fait précédemment reste valable pour l'électron B en utilisant un indice B. Pour représenter l'état à deux spins, celui de A et celui de B, on choisit  $\mathbb{E} = \mathbb{E}_A \otimes \mathbb{E}_B$  qui est le produit tensoriel de  $\mathbb{E}_A$  et de  $\mathbb{E}_B$ . On a ainsi  $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{E}_A)\dim(\mathbb{E}_B) = 4$ . Une base  $\mathcal{B}$  de cet espace peut être obtenue en faisant le produit tensoriel d'un vecteur de  $\mathcal{B}_A$  et un vecteur de  $\mathcal{B}_B$ . Une proposition de base peut être :

$$\mathcal{B} = \left( |+\rangle_{A,z} \otimes |+\rangle_{B,z}, |+\rangle_{A,z} \otimes |-\rangle_{B,z}, |-\rangle_{A,z} \otimes |+\rangle_{B,z}, |-\rangle_{A,z} \otimes |-\rangle_{B,z} \right) , \quad (4.6)$$

qui contient quatre éléments.

---

8. On dit que  $U$  est unitaire.



5. Les trois observables  $\hat{H}$ ,  $\hat{S}_{A,z}$  et  $\hat{S}_{B,x}$  forment un E.C.O.C (Ensemble Complet d'Observables qui Commutent), c'est-à-dire qu'elles commutent deux à deux et que leurs valeurs propres sont non dégénérées i.e. les espaces propres sont des droites. On peut diagonaliser ces trois observables dans une seule base de kets propres communs à ces trois opérateurs. Par conséquent l'ordre de la mesure n'a pas d'importance. La mesure est même dite complète car une fois qu'elle est réalisée pour chaque grandeur, l'état sera projeté sur un unique vecteur connu puisque les espaces propres sont de dimension 1, l'état du système sera donc complètement connu après la mesure.
6. Rappelons que si  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  sont des opérateurs agissant respectivement sur  $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$  deux espaces de Hilbert, on peut définir l'opérateur  $\hat{A} \otimes \hat{B}$  défini sur  $\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$ , dont l'action est :

$$\forall(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) \in \mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_2, \quad (\hat{A} \otimes \hat{B})(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = (\hat{A}|\psi_1\rangle \otimes \hat{B}|\psi_2\rangle) \quad . \quad (4.7)$$

Cette propriété peut être généralisée à un produit tensoriel de  $n$  opérateurs.

Ici, on a  $\hat{H} = \frac{2\omega}{\hbar} \hat{S}_{A,z} \otimes \hat{S}_{B,x}$ . Il paraît alors naturel que les états propres du hamiltonien sont les produits tensoriels des états propres de  $\hat{S}_{A,z}$  par ceux de  $\hat{S}_{B,x}$ . La propriété rappelée en (4.7) permet alors de calculer l'énergie propre. On résume les résultats dans le tableau suivant :

Etats stationnaires	Energies propres
$ +\rangle_{A,z} \otimes  +\rangle_{B,x}$	$\frac{\hbar\omega}{2}$
$ +\rangle_{A,z} \otimes  -\rangle_{B,x}$	$-\frac{\hbar\omega}{2}$
$ -\rangle_{A,z} \otimes  +\rangle_{B,x}$	$-\frac{\hbar\omega}{2}$
$ -\rangle_{A,z} \otimes  -\rangle_{B,x}$	$\frac{\hbar\omega}{2}$

TABLE 4.2 – Etats stationnaires et énergies propres du hamiltonien  $\hat{H}$

7. On suppose qu'à l'instant initial, on a  $|\psi_+(0)\rangle = |+\rangle_{A,z} \otimes |+\rangle_{B,y}$ . Pour écrire l'état à l'instant  $t > 0$ , on décompose d'abord l'état initial sur la base des états stationnaires de  $\hat{H}$  donnée dans le tableau (4.2) pour ensuite ajouter les facteurs temporels. En utilisant la réponse de la question 3., on obtient :

$$|\psi_+(t)\rangle = \frac{1}{2}(1+i)e^{-\frac{i\omega t}{2}}(|+\rangle_{A,z} \otimes |+\rangle_{B,x}) + \frac{1}{2}(1-i)e^{\frac{i\omega t}{2}}(|+\rangle_{A,z} \otimes |-\rangle_{B,x}) \quad . \quad (4.8)$$

De manière similaire, pour  $|\psi_-(0)\rangle = |-\rangle_{A,z} \otimes |+\rangle_{B,y}$ , on obtient :

$$|\psi_-(t)\rangle = \frac{1}{2}(1+i)e^{\frac{i\omega t}{2}}(|-\rangle_{A,z} \otimes |+\rangle_{B,x}) + \frac{1}{2}(1-i)e^{-\frac{i\omega t}{2}}(|-\rangle_{A,z} \otimes |-\rangle_{B,x}) \quad . \quad (4.9)$$

8. On choisit un temps d'interaction  $\tau = \frac{\pi}{2\omega}$ . On calcule alors  $|\psi_{\pm}(\tau)\rangle$ . Comme  $e^{\pm \frac{i\omega\tau}{2}} = e^{\pm \frac{i\pi}{4}}$ , on a :

$$\begin{aligned} |\psi_+(\tau)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_{A,z} \otimes (|+\rangle_{B,x} + |-\rangle_{B,x}) \\ &= |+\rangle_{A,z} \otimes |+\rangle_{B,z} \quad , \end{aligned} \quad (4.10)$$

et

$$\begin{aligned} |\psi_-(\tau)\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle_{A,z} \otimes (|+\rangle_{B,x} - |-\rangle_{B,x}) \\ &= i|-\rangle_{A,z} \otimes |-\rangle_{B,z} \quad . \end{aligned} \quad (4.11)$$

On a alors :

$$\boxed{|\psi_+(\tau)\rangle = |+\rangle_{A,z} \otimes |+\rangle_{B,z} \quad , \quad |\psi_-(\tau)\rangle = i|-\rangle_{A,z} \otimes |-\rangle_{B,z}} \quad . \quad (4.12)$$

Brancher le système au hamiltonien durant  $\tau$  conduit à amener l'état à dans lequel les composantes selon l'axe z des spins des deux électrons sont égales.

9. On remarque que l'état initial s'écrit aussi  $|\psi(0)\rangle = \alpha|\psi_+(0)\rangle + \beta|\psi_-(0)\rangle$  avec la condition de normalisation  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Par le principe de superposition, on a au temps  $\tau$  :

$$|\psi(\tau)\rangle = \alpha|\psi_+(\tau)\rangle + \beta|\psi_-(\tau)\rangle = \alpha|+\rangle_{A,z} \otimes |+\rangle_{B,z} + i\beta|-\rangle_{A,z} \otimes |-\rangle_{B,z} \quad . \quad (4.13)$$

En mesurant la projection sur l'axe z du spin de l'électron A, on obtient :

— la valeur propre  $\boxed{\frac{\hbar}{2}}$  avec une probabilité  $\boxed{|\alpha|^2}$ , l'état après la mesure est

$$\boxed{\hat{\Pi}_+|\psi(\tau)\rangle = |+\rangle_{A,z} \otimes |+\rangle_{B,z}} \text{ à une phase près et après normalisation.}$$

— la valeur propre  $\boxed{-\frac{\hbar}{2}}$  avec une probabilité  $\boxed{|\beta|^2}$ , l'état après la mesure est

$$\boxed{\hat{\Pi}_-|\psi(\tau)\rangle = |-\rangle_{A,z} \otimes |-\rangle_{B,z}} \text{ à une phase près et après normalisation.}$$

10. Si l'électron A est perdu ou détruit dans le processus de mesure, on connaîtra tout de même l'état de la projection du spin de l'électron B sur l'axe z avec certitude sans l'avoir détruit. C'est ce que l'on appelle la mesure quantique non destructive qui permet d'accéder à l'état de notre système, en l'occurrence l'électron B, en passant par un autre système, ici l'électron A, sur lequel on réalise une mesure avec un appareil.