COMMANDE LINEAIRE QUADRATIQUE – Exercice 1

On s'intéresse à la stabilisation d'un pendule vertical satisfaisant aux équations (normalisées) :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -x(t) + u(t)$$

où $u(t)$ est une commande librement choisie.

On souhaite qu'en temps infini il rejoigne le point d'équilibre $x^{eq} = 0$. On se propose de calculer une commande réalisant cet objectif par la méthode LQR.

Q1/ Mettre le système sous forme d'état. Quelles sont les valeurs propres du système en boucle ouverte ? Comment se comporte-t-il ?

On pose :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}}_{X(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}}_{X(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} . u$$

Les valeurs propres en boucle ouverte sont les racines du polynôme caractéristique de A :

$$P(s) = s^2 - \mathrm{Tr}(A).s + \det(A) = s^2 + 1$$

Le système à deux valeurs propres complexes conjuguées $\pm i$.

Le système est un oscillateur harmonique (stable mais pas asymptotiquement stable).

On cherche la commande u qui minimise le critère quadratique suivant :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(\left(x(t)\right)^2 + \left(\dot{x}(t)\right)^2 + \left(u(t)\right)^2 \right) . dt$$

Q2/ Former l'équation de Riccati algébrique correspondante

On rappelle le théorème sur la commande linéaire quadratique :

Théorème – Commande linéaire quadratique

Soit un système linéaire :

$$\frac{d}{dt}X(t) = A.X(t) + B.U(t)$$

On cherche une commande $U(t)$ qui minimise le critère quadratique :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(X^T(t).R.X(t) + U^T(t).Q.U(t)\right).dt$$

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(a) (A, B) est commandable
(b) R est symétrique positive
(c) Q est symétrique définie positive
(d) Il existe une racine de R telle que $(A, \sqrt{R})$ est observable (remarque : cette hypothèse est vérifiée si R est symétrique définie positive)

Alors il existe une commande $U(t)$ qui stabilise le système et minimise le critère quadratique :

$$U(t) = -K.X(t) \quad \text{avec} \quad K = Q^{-1}.B^T.S$$

où S est l'unique solution symétrique définie positive de l'équation de Riccati algébrique :

$$S.A + S.A^T - S.B.Q^{-1}.B^T.S + R = 0$$

La valeur du critère associée est :

$$J = X^T(0).S.X(0)$$

Dans le cas de l'exercice, on a :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = (1)$$

R et Q sont symétrique définies positives donc on vérifies les hypothèses (b), (c) et (d).

Par ailleurs le système est bien commandable : $\mathcal{C}(A,B) = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A.B}\right)$ est bien de rang 2 (on aurait aussi pu remarque que le système est sous forme de Brunovsky donc commandable).

L'équation de Riccati algébrique associée au problème de commande optimale est donc :

$$S.A + S.A^T - S.B.Q^{-1}.B^T.S + R = 0$$

Soit en remplaçant A, B, R et Q par leurs valeurs repectives :

$$S.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.S - S.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.(1)^{-1}.(0 \quad 1)}_{=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.S + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Le contrôle optimal s'écrit quant à lui :

$$u(t) = -Q^{-1}.B^T.S.X(t) = -\underbrace{(1)^{-1}.(0 \quad 1)}_{(0 \quad 1)}.S.\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

Q3/ Résoudre cette équation. Donner l'expression du contrôle optimal.

On note $S = \begin{pmatrix} s_1 & s_{12} \\ s_{12} & s_2 \end{pmatrix}$. L'équation de Riccati algébrique s'écrit alors :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_1 & s_{12} \\ s_{12} & s_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1 & s_{12} \\ s_{12} & s_2 \end{pmatrix}}_{S.A+S.A^T} - \underbrace{\begin{pmatrix} s_1 & s_{12} \\ s_{12} & s_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1 & s_{12} \\ s_{12} & s_2 \end{pmatrix}}_{S.B.Q^{-1}.B^T.S} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R} = 0$$

$$S.A + A^T.S = \begin{pmatrix} -2.s_{12} & s_1 - s_2 \\ s_1 - s_2 & 2.s_{12} \end{pmatrix}$$

$$S.B.Q^{-1}.B^T.S = \begin{pmatrix} {s_{12}}^2 & s_{12}.s_2 \\ s_{12}.s_2 & {s_2}^2 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} -2.s_{12} - {s_{12}}^2 + 1 = 0 & (1) \\ s_1 - s_2 - s_{12}.s_2 = 0 & (2) \\ 2.s_{12} - {s_2}^2 + 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

En commence par résoudre (1) :

$${s_{12}}^2 + 2.s_{12} - 1 = 0$$

$$s_{12} = -1 + \varepsilon_{12}.\sqrt{2} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{12} = \pm 1$$

On résout ensuite (3) :

$${s_2}^2 - 2.s_{12} - 1 = 0$$

$${s_2}^2 = 2.s_{12} + 1 = -1 + 2.\varepsilon_{12}.\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_{12} = 1$$

$$s_2 = \sqrt{2\sqrt{2} - 1} \quad s_{12} = \sqrt{2} - 1$$

Enfin, on résout (3) :

$$s_1 = s_2 + s_{12}.s_2 = s_2.(1 + s_{12}) = \sqrt{2\sqrt{2} - 1}.\sqrt{2}$$

On en déduit ensuite le contrôle optimal :

$$u(t) = -\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1 & s_{12} \\ s_{12} & s_2 \end{pmatrix}}_{K=Q^{-1}.B^T.S}.\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} s_{12} & s_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 & \sqrt{2\sqrt{2} - 1} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

On considère maintenant le problème un peu plus général de minimisation du critère quadratique :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(\left(x(t)\right)^2 + \left(\dot{x}(t)\right)^2 + q.\left(u(t)\right)^2 \right).dt$$

Q4/ Que se passe-t-il si q est grand ? si q est petit ?

Si q est grand, « la commande coûte cher ». La commande optimale va donc avoir tendance à être peu intense, quitte à laisser l'état éloigné de l'équilibre plus longtemps (réponse plutôt lente).

Si q est petit, « la commande ne coût pas cher ». La commande optimale va donc avoir tendance à être assez intense, pour ramener au plus vite l'état à l'équilibre (réponse plutôt rapide).