

# Fonctions d'une variable complexe

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Patrick Joly

10 décembre 2020



# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Fonctions analytiques</b>  | <b>7</b>  |
| 1.1 Rappels sur les séries entières . . . . .                               | 7         |
| 1.2 Fonctions analytiques . . . . .   | 11        |
| 1.3 Principe des zéros isolés et prolongement analytique . . . . .          | 13        |
| <b>2 Fonctions holomorphes</b>  | <b>17</b> |
| 2.1 Différentiabilité et $\mathbb{C}$ -dérivabilité . . . . .               | 17        |
| 2.1.1 Différentiabilité . . . . .   | 17        |
| 2.1.2 $\mathbb{C}$ -dérivabilité . . . . .                                  | 19        |
| 2.2 $\mathbb{C}$ -dérivabilité et conditions de Cauchy-Riemann . . . . .    | 19        |
| 2.3 Fonctions holomorphes . . . . .   | 22        |
| <b>3 Intégration complexe</b>   | <b>29</b> |
| 3.1 Notion de chemin et de lacet . . . . .                                  | 29        |
| 3.1.1 Notion de chemin paramétré. . . . .                                   | 29        |
| 3.1.2 Points multiples. Chemins paramétrés admissibles et simples . . . . . | 31        |
| 3.1.3 Notion de chemin. . . . .   | 32        |
| 3.1.4 Notion de chemin orienté ou contour. . . . .                          | 33        |
| 3.1.5 Sous-chemin et découpage d'un chemin . . . . .                        | 34        |
| 3.1.6 Multi-chemin et multi-lacet. . . . .                                  | 34        |
| 3.1.7 Vecteur tangent et normal. . . . .                                    | 35        |
| 3.2 Intégrale curviligne complexe . . . . .                                 | 37        |
| 3.2.1 Définition . . . . .  | 37        |
| 3.2.2 Linéarité et continuité de l'intégrale . . . . .                      | 39        |
| 3.2.3 Additivité de l'intégrale. Généralisation aux multi-chemins . . . . . | 40        |
| 3.2.4 Sommes de Riemann. . . . .  | 41        |
| <b>4 Théorie de Cauchy</b>  | <b>43</b> |
| 4.1 Notion de primitive et résultats associés. . . . .                      | 43        |
| 4.2 Formule de Cauchy locale et applications . . . . .                      | 50        |
| 4.3 Analyticité des fonctions holomorphes. . . . .                          | 53        |
| 4.4 Théorie de Cauchy globale . . . . .                                     | 55        |
| 4.4.1 Bord orienté d'un compact . . . . .                                   | 55        |

|   |            |
|---|------------|
| 4.4.2 Théorème de Cauchy . . . . .                                    | 57         |
| 4.4.3 Formule de Cauchy . . . . .                                     | 61         |
| <b>5 Le théorème des résidus</b>                                      | <b>63</b>  |
| 5.1 Séries de Laurent . . . . .                                       | 63         |
| 5.2 Singularités ponctuelles . . . . .                                | 66         |
| 5.3 Théorème des résidus . . . . .                                    | 70         |
| 5.4 Le principe de l'argument . . . . .                               | 73         |
| <b>6 Logarithme, racines carrées, coupures</b>                        | <b>77</b>  |
| 6.1 Le logarithme complexe . . . . .                                  | 77         |
| 6.1.1 Le logarithme comme primitive de $1/z$ . . . . .                | 77         |
| 6.1.2 Inversion de l'exponentielle et applications . . . . .          | 79         |
| 6.1.3 Autres déterminations du logarithme . . . . .                   | 84         |
| 6.2 Théorèmes de Rouché et de l'image ouverte . . . . .               | 85         |
| 6.2.1 Théorème de Rouché . . . . .                                    | 85         |
| 6.2.2 Théorème de l'image ouverte . . . . .                           | 88         |
| 6.3 La racine carrée complexe . . . . .                               | 90         |
| 6.3.1 Détermination principale. . . . .                               | 90         |
| 6.3.2 Autres déterminations. . . . .                                  | 92         |
| <b>7 Transformations conformes</b>                                    | <b>95</b>  |
| 7.1 Inversion de fonctions holomorphes . . . . .                      | 95         |
| 7.2 Propriétés des transformations conformes . . . . .                | 98         |
| 7.3 Exemples de quelques transformations conformes usuelles . . . . . | 101        |
| 7.3.1 Les homographies . . . . .                                      | 101        |
| 7.3.2 Autres transformations . . . . .                                | 103        |
| 7.4 Le théorème de l'application conforme de Riemann . . . . .        | 104        |
| <b>A Résultats techniques sur les chemins</b>                         | <b>107</b> |
| A.1 Preuve du lemme sur les paramétrages . . . . .                    | 107        |
| A.2 Preuve du théorème 3.13 . . . . .                                 | 110        |
| A.3 Longueur d'une courbe . . . . .                                   | 110        |
| <b>B Régularité des fonctions harmoniques</b>                         | <b>113</b> |

# Introduction

Dans ce cours, nous allons étudier des fonctions de la variable complexe à valeurs complexes :

$$f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \rightarrow f(z)$$

Parmi ces fonctions, nous allons nous intéresser à une catégorie très particulière : il s'agit des fonctions dites analytiques ou holomorphes (on verra que ces deux notions sont équivalentes). Ces fonctions ont des propriétés tout à fait remarquables qui peuvent être exploitées pour obtenir assez simplement de nombreux résultats (unicité de solutions de problèmes aux limites, calcul d'intégrales, études de racines, etc...).

## Avertissement au lecteur

Plus qu'un polycopié abouti, ce document doit être considéré comme un ensemble de notes de cours encore incomplètes, et qui reste très probablement entaché d'erreurs (que nous espérons mineures sur le fond) et de coquilles. Il va de soi que tout retour sur ces erreurs sera le bienvenu.



# Chapitre 1

## Fonctions analytiques

La définition d'une fonction analytique s'appuie sur la notion de série entière, qui a été vue en classe préparatoire. Nous nous contenterons donc ici d'en rappeler brièvement les principaux aspects.

### 1.1 Rappels sur les séries entières

**Définitions 1.1** • *On appelle série entière une série de fonctions de la forme*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

*où les  $a_n$  sont des nombres complexes.*

- *On appelle rayon de convergence de  $S(z)$  et on note  $\rho(S)$  le nombre réel positif, éventuellement infini, défini par :*

$$\rho(S) = \sup\{r \in [0, +\infty[ ; \sum |a_n| r^n \text{ converge}\} \quad (1.1)$$

**Lemme 1.2** *Le rayon de convergence est aussi donné par la formule suivante :*

$$\rho(S) = \sup\{r \in [0, +\infty[ ; |a_n| r^n \text{ est bornée}\} \quad (1.2)$$

**DÉMONSTRATION.** Montrons que les formules (1.1) et (1.2) donnent effectivement la même valeur. Désignons a priori par  $\rho$  la valeur donnée par la formule (1.1) et par  $\tilde{\rho}$  celle donnée par la formule (1.2). Il est clair que si  $r$  est tel que  $\sum |a_n|r^n$  converge, alors la suite  $|a_n|r^n$  est bornée. On en déduit immédiatement que  $\tilde{\rho} \geq \rho$ .

Supposons par l'absurde que  $\tilde{\rho} > \rho$ . Soient  $r_1$  et  $r_2$  deux réels positifs tels que :

$$\rho < r_1 < r_2 < \tilde{\rho}.$$

Alors, comme la suite  $|a_n|r_2^n$  est bornée, il en résulte que la série

$$\sum |a_n|r_1^n = \sum (|a_n|r_2^n) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$$

converge, puisqu'elle est majorée par une série géométrique de raison plus petite que 1. Mais ceci est en contradiction avec le fait que  $r_1 > \rho$ .  $\square$

La dénomination *rayon de convergence* est justifiée par le lemme ci-dessous :

**Lemme 1.3 LEMME D'ABEL**

Soit  $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  une série entière et  $\rho(S)$  son rayon de convergence.

- Si  $z \in \mathbb{C}$  est tel que  $|z| < \rho(S)$ , la série  $S(z)$  converge absolument, c'est-à-dire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||z|^n < +\infty,$$

donc  $S(z)$  converge dans  $\mathbb{C}$ .

- Si  $z \in \mathbb{C}$  est tel que  $|z| > \rho(S)$ , la série  $S(z)$  diverge.
- Si  $\rho(S) > 0$  et si  $r$  est un réel tel que  $0 < r < \rho(S)$ , alors la série converge uniformément sur le disque  $\{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq r\}$ .

Ceci conduit à appeler *disque de convergence* de la série  $S(z)$  le disque ouvert

$$\{z \in \mathbb{C} ; |z| < \rho(S)\} \quad (1.3)$$

On utilisera dans la suite la notation  $D(a, r)$  pour désigner le disque ouvert de centre  $a$  et de rayon  $r$

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} ; |z - a| < r\}.$$

En particulier, le disque de convergence d'une série de rayon de convergence  $\rho(S)$  sera donc noté  $D(0, \rho(S))$ . Il résulte en particulier du dernier item du lemme d'Abel que  $S(z)$  est continue dans  $D(0, \rho(S))$  (puisque la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur un compact est continue). On établira un résultat beaucoup plus fort dans la suite de ce cours.

Notons que l'on ne peut rien dire de général sur ce qui se passe au bord du disque de convergence. La fonction  $S(z)$  peut tendre vers l'infini en certains points du bord, voire en un ensemble dense de points du bord, mais la série peut également converger en tout point du bord, ainsi que toutes ses dérivées.

En pratique, on utilisera généralement la formule suivante pour déterminer le rayon de convergence :

**Lemme 1.4** Soit  $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  une série entière et  $\rho(S)$  son rayon de convergence.

On a l'égalité suivante

$$\frac{1}{\rho(S)} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} \quad (1.4)$$

(où les deux membres de l'égalité peuvent prendre la valeur  $+\infty$ ).

Rappelons que la limite sup d'une suite désigne la plus grande valeur d'adhérence de la suite. La formule (1.4) peut aussi s'écrire :

$$\frac{1}{\rho(S)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{p \geq n} |a_p|^{1/p}$$

où l'on remarque que la suite d'indice  $n$  définie par  $\sup_{p \geq n} |a_p|^{1/p}$  est une suite positive décroissante, donc elle admet bien une limite.

DÉMONSTRATION. Notons  $\tilde{\rho}$  le nombre réel positif, éventuellement infini, défini par

$$\frac{1}{\tilde{\rho}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{p \geq n} |a_p|^{1/p}.$$

Soit  $0 < r < \tilde{\rho}$ . Alors on peut fixer  $\varepsilon > 0$  et  $\eta > 0$  tels que

$$\eta = \left(1 - \frac{r}{\tilde{\rho}}\right) - \varepsilon.$$

Par définition de  $\tilde{\rho}$ , il existe alors  $n_0 > 0$  tel que

$$\sup_{p \geq n_0} |a_p|^{1/p} < \frac{1}{\tilde{\rho}} + \frac{\eta}{r}.$$

Autrement dit, pour tout  $p > n_0$  :

$$r |a_p|^{1/p} < 1 - \varepsilon.$$

Ceci prouve que la suite  $r^n |a_n|$  tend vers 0, et donc que  $r < \rho(S)$ .

Supposons maintenant  $\tilde{\rho} < +\infty$  et  $r > \tilde{\rho}$ . Alors par définition de  $\tilde{\rho}$ , pour tout  $n_0 \geq 0$ , il existe  $n \geq n_0$  tel que

$$|a_n|^{1/n} > \frac{1}{r}.$$

Il en résulte que la suite  $r^n |a_n|$  ne peut pas tendre vers 0, et donc que  $r \geq \rho(S)$ . □

**Exemple 1.5** 1. Il est clair qu'un polynôme est une série entière particulière, de rayon de convergence infini. On peut d'ailleurs voir les séries entières comme des généralisations de polynômes.

2. La série

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

a pour rayon de convergence  $\rho(S) = 1$ , et est égale à la fonction

$$\frac{1}{1-z}$$

sur son disque de convergence, qui est le disque unité.

3. La série

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

a un rayon de convergence infini (ce qui se montre en utilisant la formule de Stirling). On la note  $e^z$ . C'est l'exponentielle complexe qui prolonge au plan complexe l'exponentielle réelle. Les fonctions  $\cos z$  et  $\sin z$  sont alors définies dans  $\mathbb{C}$  par :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

On peut alors montrer que pour tous  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  :

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1)^n}{n!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(z_2)^m}{m!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^p \frac{(z_1)^n (z_2)^{(p-n)}}{n!(p-n)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(z_1 + z_2)^p}{p!} = e^{z_1 + z_2}.$$

On a ainsi montré la propriété suivante :

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \quad (1.5)$$

On déduit facilement de (1.5) la formule de Moivre :

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.6)$$

On peut enfin s'intéresser à la dérivée (pour l'instant formelle) d'une série entière. On vérifie aisément le résultat suivant :

**Lemme 1.6** Soit  $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence strictement positif  $\rho(S)$ . Alors la série obtenue en dérivant  $S(z)$  terme à terme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

a le même rayon de convergence  $\rho(S)$  que la série  $S(z)$ . Plus généralement, pour tout entier  $p$ , la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) \cdots (n+p) a_{n+p} z^n$$

a le même rayon de convergence  $\rho(S)$  que la série  $S(z)$ .

En classe préparatoire, on voit également que sur l'intersection du disque de convergence avec l'axe réel, une série entière est une fonction indéfiniment dérivable, et que ses dérivées successives sont obtenues en dérivant la série terme à terme. Nous montrerons au chapitre suivant que ce résultat reste valable, en un sens à préciser, dans tout le disque de convergence.

## 1.2 Fonctions analytiques

**Définition 1.7** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .

- $f$  est dite développable en série entière au point  $z_0 \in \Omega$  si il existe une série entière de terme général  $a_n z^n$  et de rayon de convergence strictement positif telle que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1.7)$$

pour  $z - z_0$  assez petit.

- $f$  est dite analytique dans l'ouvert  $\Omega$  si elle est développable en série entière en tout point de  $\Omega$ .

Notons que le développement (1.7) peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$$

pour  $h$  assez petit.

**Remarque 1.8** On peut facilement vérifier que le développement en série entière d'une fonction au voisinage d'un point est unique. Cela équivaut à montrer que si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n = 0$$

pour  $h$  assez petit, alors nécessairement tous les coefficients  $a_n$  sont nuls. C'est par exemple une conséquence du lemme 1.13.

Il est clair, d'après ce qu'on a vu sur les séries entières qu'une fonction analytique dans  $\Omega$  est en particulier continue dans  $\Omega$ . On obtiendra un résultat beaucoup plus fort au chapitre suivant.

**Définition 1.9** Une fonction analytique dans tout le plan complexe est appelée une fonction entière.

Un résultat en apparence trivial, mais qui ne l'est pas tant que ça, est donné par le

**Lemme 1.10** *Une série entière est analytique dans son disque de convergence.*

DÉMONSTRATION. Il faut montrer que la série entière est développable en série entière autour de tout point de son disque de convergence, et pas seulement en 0.

Soit donc

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

une série entière de rayon de convergence  $\rho(S) > 0$ . Montrons que  $S$  est développable en série entière autour de  $z_0$ , avec  $|z_0| < \rho(S)$ . Pour  $h$  assez petit, on a :

$$S(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0 + h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} z_0^{n-p} h^p \quad (1.8)$$

où l'on a utilisé la formule du binôme. On veut alors intervertir les deux sommes. Pour le justifier, on remarque que si  $|z_0| + |h| < \rho(S)$ , par définition du rayon de convergence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (|z_0| + |h|)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} |z_0|^{n-p} |h|^p < +\infty.$$

Ceci montre que si  $|z_0| + |h| < \rho(S)$ , la permutation de l'ordre des sommations dans (1.8) est licite car la série double est absolument sommable, et on obtient finalement :

$$S(z_0 + h) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p h^p \text{ avec } b_p = \sum_{n \geq p} a_n \binom{n}{p} z_0^{n-p}.$$

Notons que l'on a vérifié du même coup que la série  $\sum b_n z^n$  a un rayon de convergence strictement positif. □

Il résulte du lemme précédent qu'un polynôme est une fonction entière, ainsi que les fonctions  $e^z$ ,  $\cos z$  et  $\sin z$ .

On peut également vérifier que la fonction

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

est analytique dans  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ . Plus généralement, une fraction rationnelle en  $z$  définit une fonction analytique dans le plan complexe privé de ses pôles.

En revanche, on peut vérifier que la fonction  $f(z) = \Re z$  n'est analytique nulle part. Il suffit pour cela de montrer que  $f$  n'est pas développable en série entière en  $z = 0$ . Supposons par l'absurde que l'on ait

$$f(z) = \Re z = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Alors, en considérant la restriction de cette identité sur l'axe réel, on trouve que nécessairement,  $a_1 = 1$  et  $a_n = 0$  pour  $n \neq 1$ . Mais alors on doit avoir sur l'axe imaginaire :

$$\Re e z = z,$$

ce qui est évidemment faux.

Enfin, on peut facilement vérifier que la somme de deux séries entières de rayons de convergence non nuls définit une série entière de rayon de convergence non nul. Il en est de même du produit. Il s'ensuit que l'ensemble des fonctions analytiques dans  $\Omega$  est une algèbre sur le corps des complexes.

### 1.3 Principe des zéros isolés et prolongement analytique

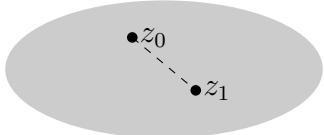
Pour présenter ces deux propriétés importantes, vérifiées par les fonctions analytiques, il nous faut tout d'abord rappeler brièvement quelques notions relatives à la *connexité*.

**Définition 1.11** *Un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  est dit connexe si les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :*

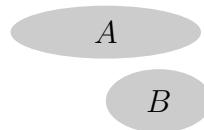
- (i) *Si  $z_0$  et  $z_1$  sont deux points de  $\Omega$ , il existe une application continue  $\gamma : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  telle que  $\gamma(0) = z_0$  et  $\gamma(1) = z_1$ .*
- (ii) *Si  $A$  et  $B$  sont deux ouverts de  $\mathbb{C}$  tels que  $A \cup B = \Omega$  et  $A \cap B = \emptyset$ , alors l'un des deux ouverts  $A$  ou  $B$  est vide.*

**Remarque 1.12** *L'équivalence entre les deux items n'est vraie que parce que  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ . De façon plus générale, une partie de  $\mathbb{C}$  vérifiant (i) est dite connexe par arcs, et la connexité par arcs est plus forte, en général, que la connexité au sens topologique. Pour un ouvert, ces deux notions sont équivalentes. La connexité par arcs est facile à interpréter : elle signifie que deux points de  $\Omega$  peuvent toujours être reliés par un chemin continu qui ne sort pas de  $\Omega$ . La propriété (ii) signifie quant à elle que  $\Omega$  est d'un seul morceau. Elle nous sera utile lors de certaines démonstrations.*

$\Omega$  ouvert connexe



$\Omega = A \cup B$  non connexe



Pour démontrer le principe des zéros isolés, nous nous appuierons sur le résultat suivant relatif aux séries entières :

**Lemme 1.13** *Soit une série entière*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

*de rayon de convergence  $\rho(S) > 0$ . De deux choses l'une :*

- *soit tous les coefficients  $a_n$  sont nuls, et  $S(z)$  est identiquement nulle ;*
- *soit il existe  $\varepsilon$  vérifiant  $0 < \varepsilon < \rho(S)$  et tel que*

$$S(z) \neq 0 \text{ pour tout } z \neq 0 \text{ tel que } |z| < \varepsilon.$$

*On dit que  $S(z)$  ne s'annule pas dans le disque pointé de centre 0 et de rayon  $\varepsilon$ .*

DÉMONSTRATION. Supposons que tous les coefficients  $a_n$  ne sont pas nuls et soit  $a_{n_0}$  le premier coefficient non nul. Alors  $S(z)$  s'écrit :

$$S(z) = z^{n_0} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n_0+p} z^p.$$

Autrement dit :

$$S(z) = z^{n_0} T(z) \quad \text{avec} \quad T(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n_0+p} z^p$$

où la série entière  $T(z)$  a le même rayon de convergence que  $S$ .  $T(z)$  définit donc une fonction continue dans le disque de convergence. De plus  $T$  ne s'annule pas en 0 puisque  $T(0) = a_{n_0}$ . Il en résulte que  $T(z)$  est non nul dans un petit voisinage de 0, d'où le résultat. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le

**Théorème 1.14** *Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ ,  $f$  une fonction analytique dans  $\Omega$  et  $Z(f)$  l'ensemble de ses zéros :*

$$Z(f) = \{z \in \Omega; f(z) = 0\}.$$

*Alors, si  $f$  n'est pas identiquement nulle,  $Z(f)$  est un ensemble de points isolés.*

Par contraposée, on a le résultat suivant :

**Corollaire 1.15** *Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ ,  $f$  une fonction analytique dans  $\Omega$  et  $Z(f)$  l'ensemble de ses zéros. Si  $Z(f)$  admet un point d'accumulation dans  $\Omega$ , alors  $f$  est identiquement nulle dans  $\Omega$ .*

En effet, si  $Z(f)$  admet un point d'accumulation dans  $\Omega$ , ce point est lui-même un zéro de  $f$ , et donc un élément de  $Z(f)$ , d'après la continuité de  $f$ . Il y a donc un point de  $Z(f)$  qui n'est pas isolé.

Démontrons maintenant le théorème.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer le théorème, nous allons démontrer la contraposée.

1. Pour démontrer cette contraposée, on suppose que  $Z(f)$  admet un point d'accumulation  $z^* \in \Omega$ . Comme  $f$  est analytique dans  $\Omega$ , elle est en particulier développable en série entière en  $z^*$ . Il existe donc une série entière  $S(z)$  de rayon de convergence strictement positif telle que

$$f(z^* + h) = S(h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$$

pour  $h$  assez petit. Mais alors, dire que  $z^*$  est un point d'accumulation de  $Z(f)$  signifie que la série  $S(z)$  s'annule en une suite de points distincts convergeant vers 0. D'après le lemme 1.13, cela implique que la série  $S(z)$  est identiquement nulle. On en déduit que la fonction  $f$  s'annule dans un voisinage de  $z^*$ .

2. On veut montrer que ceci n'est possible que si  $f$  est identiquement nulle dans tout  $\Omega$ .

Appelons  $A$  l'ensemble des  $z \in \Omega$  tels que  $f$  soit nulle dans un voisinage de  $z$ . Par hypothèse,  $z^* \in A$  donc  $A$  n'est pas vide. De plus, par définition, il est clair que  $A$  est un ouvert. Posons alors  $B = \{z \in \Omega; z \notin A\}$  et montrons que  $B$  est ouvert. En effet, si  $z_0 \in B$ , comme  $f$  est analytique,  $f$  est développable en série entière au point  $z_0$ . Donc, toujours d'après le lemme 1.13, soit  $f$  est identiquement nulle dans un voisinage de  $z_0$ , ce qui est impossible puisque  $z_0 \notin A$ , soit  $f$  est non nulle dans tout un voisinage de  $z_0$ , excepté peut-être en  $z_0$ . Cela prouve que tout ce voisinage est inclus dans  $B$ .

On peut alors conclure, en utilisant la caractérisation ii) de la connexité (cf. définition 1.11), que  $B = \emptyset$  et  $A = \Omega$ .

□

**Remarque 1.16** *On peut compléter le théorème en affirmant que  $Z(f)$  est un ensemble au plus dénombrable. En effet, l'ouvert  $\Omega$  est une réunion dénombrable de compacts de  $\mathbb{C}$  :*

$$\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j.$$

*On pourra prendre par exemple :*

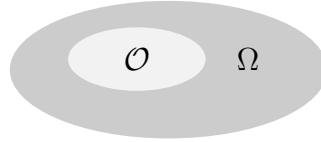
$$K_j = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq j \text{ et } \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{j}\}.$$

D'après le théorème, les zéros de  $f$  sont en nombre fini sur tout compact inclus dans  $\Omega$ , et donc en particulier dans tout  $K_j$ , d'où le caractère dénombrable de  $Z(f)$ .

On utilise souvent ce théorème de la façon suivante : si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions analytiques dans  $\Omega$  ouvert connexe telles que  $f(z_n) = g(z_n)$  en une suite  $z_n$  de points de  $\Omega$ , distincts deux-à-deux et admettant une limite dans  $\Omega$ , alors  $f = g$  dans tout  $\Omega$ .

Une application est le *principe de prolongement unique* que nous énonçons ci-dessous :

**Corollaire 1.17** *Soit  $\mathcal{O}$  et  $\Omega$  deux ouverts de  $\mathbb{C}$ , tels que  $\mathcal{O} \subset \Omega$  et  $\Omega$  est connexe, et soit  $f$  une fonction analytique dans  $\mathcal{O}$ . Alors il existe au plus une fonction  $g$  analytique dans  $\Omega$  telle que  $g = f$  dans  $\mathcal{O}$ . Dans ce cas, la fonction  $g$  est appelée le prolongement analytique de  $f$  à l'ouvert  $\Omega$ .*



**DÉMONSTRATION.** Si  $g$  et  $h$  sont deux fonctions analytiques dans  $\Omega$ , qui coincident avec  $f$  dans  $\mathcal{O}$ , alors  $g - h$  est une fonction analytique dans l'ouvert connexe  $\Omega$  qui s'annule dans l'ouvert  $\mathcal{O}$ . C'est donc une fonction identiquement nulle en vertu du corollaire 1.15.

□

# Chapitre 2

## Fonctions holomorphes

### 2.1 Différentiabilité et $\mathbb{C}$ -dérivabilité

Il est assez habituel d'identifier le plan complexe  $\mathbb{C}$  à l'espace  $\mathbb{R}^2$  via :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \longrightarrow \quad z = x + i y \quad (2.1)$$

qui constitue en outre une isométrie entre les deux espaces (implicitement on munit  $\mathbb{C}$  de la norme définie par le module complexe et  $\mathbb{R}^2$  de sa structure euclidienne naturelle). Par conséquent, une fonction  $f$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , ou plus précisément d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , peut être identifiée à une application notée  $\tilde{f}$  de  $\tilde{\Omega}$  dans  $\mathbb{C}$ , où l'ouvert  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$  est défini par

$$\tilde{\Omega} = \{(x, y) / x + i y \in \Omega\} \quad (2.2)$$

et où  $\tilde{f}$  est définie par :

$$\tilde{f}(x, y) := f(x + i y) \quad (2.3)$$

En termes de régularité, tant qu'on ne s'intéresse qu'à la continuité, il n'y a aucune raison de distinguer  $f$  de  $\tilde{f}$  :  $f$  est continue si et seulement si  $\tilde{f}$  l'est.

Dès qu'on aborde la notion de différentiabilité (resp. de dérivabilité) telle que nous allons la rappeler (resp. la définir) ci-dessous, la question de l'identification est plus subtile.

**Remarque 2.1** *Dans cette section, on pourrait aussi remplacer l'ensemble d'arrivée par un espace vectoriel normé quelconque  $X$  sur  $\mathbb{C}$ . Le lecteur se convaincra aisément que les définitions gardent un sens et que les résultats sont toujours valables.*

#### 2.1.1 Différentiabilité

Dans ce paragraphe, on assimile la fonction  $f$  à la fonction  $\tilde{f}$  en conséquence de quoi ce qui suit n'est qu'un rappel, voire une reformulation, de notions et propriétés bien connues relatives aux fonctions de deux variables réelles. Par définition, et par abus de

langage, nous dirons que  $f$  est différentiable en  $z = x + iy \in \Omega$  si et seulement si  $\tilde{f}$  est différentiable, en tant qu'application d'un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{C}$  au point  $(x, y)$ . Rappelez que cela signifie l'existence d'une application linéaire  $D\tilde{f}(x, y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$  telle que pour tout  $(h_x, h_y) \in \mathbb{R}^2$  (suffisamment petit pour que  $(x + h_x, y + h_y)$  appartienne à  $\Omega$ ),

$$\tilde{f}(x + h_x, y + h_y) = \tilde{f}(x, y) + D\tilde{f}(x, y).(h_x, h_y) + o(h_x, h_y) \quad (2.4)$$

où on rappelle que, par définition,  $o(\cdot)$  désigne une fonction à valeurs complexes définie dans un voisinage de l'origine (elle dépend du point  $(x, y)$ ) qui satisfait

$$\lim_{(h_x, h_y) \rightarrow 0} \frac{o(h_x, h_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0.$$

La théorie des fonctions de deux variables nous dit que l'application linéaire  $D\tilde{f}(x, y)$  est de la forme (le lecteur se convaincra aisément que toute application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{C}$  est de cette forme)

$$D\tilde{f}(x, y).(h_x, h_y) := h_x \partial_x \tilde{f}(x, y) + h_y \partial_y \tilde{f}(x, y) \quad (2.5)$$

où  $\partial_x \tilde{f}(x, y)$  et  $\partial_y \tilde{f}(x, y)$  sont deux nombres complexes appelés dérivées partielles de  $\tilde{f}$  au point  $(x, y)$ , qu'on peut donc aussi définir par

$$\partial_x \tilde{f}(x, y) := \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(x + h_x, y) - \tilde{f}(x, y)}{h_x}, \quad \partial_y \tilde{f}(x, y) := \lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(x, y + h_y) - \tilde{f}(x, y)}{h_y}.$$

**Remarque 2.2** Il est clair que la différentiabilité en un point  $(x, y)$  entraîne l'existence des dérivées partielles en ce même point. Il est bien connu que la réciproque est fausse : l'existence de dérivées partielles en un point n'entraîne même pas la continuité de la fonction.

Par extension, on dira que  $f$  est différentiable dans  $\Omega$  si  $f$  est différentiable en tout point de  $\Omega$ . Si de plus la fonction  $(x, y) \mapsto D\tilde{f}(x, y)$  (où de façon équivalente chacune des fonctions  $(x, y) \mapsto \partial_x \tilde{f}(x, y)$  et  $(x, y) \mapsto \partial_y \tilde{f}(x, y)$ ) est continue sur  $\Omega$ , on dit que la fonction  $f$  est continuement différentiable ou de classe  $C^1$  dans  $\Omega$ . On le note  $f \in C^1(\Omega)$ .

**Remarque 2.3** En écho à la remarque 2.2, il n'est pas inutile de rappeler que si  $\tilde{f}$  admet des dérivées partielles dans un voisinage de  $(x, y)$  et que ces dernières sont continues au point  $(x, y)$  alors  $\tilde{f}$  (resp.  $f$ ) est différentiable au point  $(x, y)$  (resp.  $z$ ).

Par récurrence sur l'entier  $k \geq 2$ , on dit que  $f$  est de classe  $C^k(\Omega)$  (et on le note  $f \in C^k(\Omega)$ ) si les dérivées partielles

$$\partial_x \tilde{f} \text{ et } \partial_y \tilde{f}$$

sont de classe  $C^{k-1}$  dans  $\Omega$  (évidemment  $C^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\Omega)$  strictement). Enfin, on dira que  $f$  est de classe  $C^\infty(\Omega)$  (i. e.  $f \in C^\infty(\Omega)$ ) si  $f$  est dans  $C^k(\Omega)$  pour tout  $k \geq 1$ .

### 2.1.2 C-dérivabilité

La notion de différentiabilité introduite au paragraphe précédent se généralise évidemment aux applications de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{C}$ . Le cas où l'ensemble de départ est  $\mathbb{C}$ , ou un ouvert de  $\mathbb{C}$ , ce qui correspond donc à  $N = 2$ , présente une vraie particularité liée au fait que  $\mathbb{C}$  n'est pas seulement un espace vectoriel (comme  $\mathbb{R}^N$  pour  $N$  arbitraire) mais aussi une algèbre muni de la multiplication complexe usuelle :

$$z = x + iy, z = x' + iy' \implies z z' = x x' - y y' + i(x y' + x' y)$$

Ceci va nous permettre de définir une notion plus forte que la différentiabilité, à savoir la C-dérivabilité, en étendant de façon très naturelle la définition usuelle de la dérivabilité d'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On dira que  $f$  est C-dérivable en  $z \in \Omega$ , si le quotient différentiel, défini pour  $h \in \mathbb{C}$  non nul et suffisamment petit (pour que  $z + h$  reste dans  $\Omega$ )

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} \tag{2.6}$$

admet une limite dans  $\mathbb{C}$  quand  $h$  tend vers 0. Cette limite est appelée dérivée de  $f$  au point  $z$  et notée

$$\frac{df}{dz}(z) \equiv f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}. \tag{2.7}$$

Notons qu'une application C-dérivable en  $z$  y est différentiable au sens du paragraphe précédent. En effet nous pouvons écrire

$$f(z + h) = f(z) + h f'(z) + h \left( \frac{f(z + h) - f(z)}{h} - f'(z) \right)$$

soit de façon équivalente, si  $z = x + iy$  et  $h = h_x + ih_y$ ,

$$\begin{cases} \tilde{f}(x + h_x, y + h_y) = f(z) + h_x f'(z) + h_y i f'(z) + o(h), \\ o(h) := h \left( \frac{f(z + h) - f(z)}{h} - f'(z) \right) \end{cases}$$

ce qui correspond bien à (2.4, 2.5) avec en l'occurrence

$$\partial_x \tilde{f}(x, y) = f'(z), \quad \partial_y \tilde{f}(x, y) = i f'(z).$$

La réciproque de cette assertion, à savoir une fonction différentiable est C-dérivable, est fausse et nous allons caractériser parmi les fonctions différentiables celles qui sont C-dérivables.

## 2.2 C-dérivabilité et conditions de Cauchy-Riemann

Soit  $f$  une application de  $\Omega \subset \mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  différentiable, nous posons

$$P(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy), \quad Q(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy) \tag{2.8}$$

de telle sorte que  $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ . Il est clair que si  $f$  est différentiable en  $z$ ,  $P$  et  $Q$  sont différentiables en  $(x,y)$ . Nous allons maintenant donner une condition nécessaire et suffisante sur ces fonctions pour que  $f$  soit  $\mathbb{C}$ -dérivable en ce point.

**Théorème 2.4** *Une fonction  $f$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ , différentiable en  $z = x + iy \in \Omega$ , est dérivable en  $z$  si et seulement si la fonction  $\tilde{f}$  définie par (2.3) satisfait*

$$\partial_x \tilde{f}(x,y) + i \partial_y \tilde{f}(x,y) = 0 \quad (2.9)$$

ou, de façon équivalente, si les fonctions  $P$  et  $Q$  définies par (2.8) satisfont les relations de Cauchy-Riemann, à savoir

$$\partial_x P(x,y) = \partial_y Q(x,y), \quad \partial_x Q(x,y) = -\partial_y P(x,y) \quad (2.10)$$

DÉMONSTRATION. Soit  $f$  différentiable en  $z = x + iy \in \Omega$ .

Si  $h = h_x + i h_y$ , comme  $h_x = \frac{h + \bar{h}}{2}$  et  $h_y = \frac{h - \bar{h}}{2i}$ , nous déduisons de (2.3, 2.4, 2.5) que

$$\begin{aligned} f(z+h) &= f(z) + \partial_x \tilde{f}(x,y) \left( \frac{h + \bar{h}}{2} \right) + \partial_y \tilde{f}(x,y) \left( \frac{h - \bar{h}}{2i} \right) + o(h) \\ &= f(z) + \frac{h}{2} \left( \partial_x \tilde{f}(x,y) - i \partial_y \tilde{f}(x,y) \right) + \frac{\bar{h}}{2} \left( \partial_x \tilde{f}(x,y) + i \partial_y \tilde{f}(x,y) \right) + o(h). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2} \left( \partial_x \tilde{f}(x,y) - i \partial_y \tilde{f}(x,y) \right) + \frac{1}{2} \frac{\bar{h}}{h} \left( \partial_x \tilde{f}(x,y) + i \partial_y \tilde{f}(x,y) \right) + \frac{o(h)}{h}.$$

Alors que  $o(h)/h$  tend vers 0 avec  $h$ , la fonction  $h \in \mathbb{C}^* \rightarrow \bar{h}/h$  n'a pas de limite quand  $h$  tend vers 0. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que le long de la demi-droite  $\Delta_\theta := \{\rho e^{i\theta}, \rho > 0\}$  ( $\theta \in [0, 2\pi[$  est ici fixé), cette fonction est constante égale à  $e^{-2i\theta}$  ! Donc, le seul cas où le quotient différentiel apparaissant dans le terme de gauche de l'égalité précédente a une limite est lorsque le terme en facteur de  $\bar{h}/h$  est nul, ce qui mène à (2.9).

Pour aboutir à (2.10), il suffit de remarquer que :

$$\partial_x \tilde{f} + i \partial_y \tilde{f} = \partial_x P - \partial_y Q + i (\partial_x Q + \partial_y P)$$

□

La preuve du théorème propose une formule pour le calcul de  $f'(z)$ , à savoir

$$f'(z) = \frac{1}{2} (\partial_x \tilde{f}(x,y) - i \partial_y \tilde{f}(x,y)) \quad \text{si } z = x + iy.$$

En fait, on peut calculer la dérivée d'une infinité de manières : si la limite (2.7) existe, on peut la calculer directionnellement en considérant  $h = \rho e^{i\theta}$  avec  $\rho \rightarrow 0$ . Ceci est une autre façon d'obtenir la condition de Cauchy-Riemann (2.9). En effet

$$f'(z) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(x + \rho \cos \theta, y + \rho \sin \theta) - \tilde{f}(x, y)}{\rho e^{i\theta}} \equiv e^{-i\theta} \frac{d}{d\rho} \tilde{f}(x + \rho \cos \theta, y + \rho \sin \theta) \Big|_{\rho=0}$$

Comme, par la formule de dérivation de la composée de deux fonctions,

$$\frac{d}{d\rho} \tilde{f}(x + \rho \cos \theta, y + \rho \sin \theta) = (\cos \theta \partial_x \tilde{f} + \sin \theta \partial_y \tilde{f})(x + \rho \cos \theta, y + \rho \sin \theta)$$

on obtient la formule

$$f'(z) = e^{-i\theta} (\cos \theta \partial_x \tilde{f}(x, y) + \sin \theta \partial_y \tilde{f}(x, y)) \quad \text{si } z = x + iy.$$

soit encore, comme  $e^{-i\theta} \cos \theta = \frac{1}{2}(1 + e^{-2i\theta})$  et  $e^{-i\theta} \sin \theta = -\frac{i}{2}(1 - e^{-2i\theta})$

$$f'(z) = \frac{1}{2} \left( \partial_x \tilde{f}(x, y) - i \partial_y \tilde{f}(x, y) + e^{-2i\theta} (\partial_x \tilde{f}(x, y) + i \partial_y \tilde{f}(x, y)) \right). \quad (2.11)$$

Le fait que l'expression du terme de droite dans (2.11) doive être indépendant de  $\theta$  mène donc à la condition (2.9). D'un point de vue pratique, on peut retenir que pour calculer la dérivée complexe, on peut la calculer dans n'importe quelle direction via (2.11), par exemple

$$\begin{aligned} \theta = 0 &\implies f'(z) = \partial_x \tilde{f}(x, y) \equiv \partial_x P(x, y) + i \partial_x Q(x, y) \\ \theta = \frac{\pi}{2} &\implies f'(z) = -i \partial_y \tilde{f}(x, y) \equiv -i \partial_y P(x, y) + \partial_y Q(x, y) \end{aligned}$$

la cohérence des deux formules étant assurée par (2.9) ou (2.10).

Nous énonçons maintenant sans démonstration des résultats basiques sur les fonctions C-dérivables. Ces résultats se démontrent exactement comme pour les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 2.5** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\Omega \subset \mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , C-dérivables en  $z$ , alors les fonctions  $f + g$  et  $fg$  sont C-dérivables en  $z$  et*

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z), \quad (fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z). \quad (2.12)$$

*Si de plus  $f(z) \neq 0$ , alors la fonction inverse  $1/f$  est bien définie dans un voisinage de  $z$  et elle est C-dérivable en ce point avec*

$$(1/f)'(z) = -f'(z)/f(z)^2. \quad (2.13)$$

*Enfin, si  $h$  est une fonction à valeurs complexes définie dans un voisinage de  $f(z)$  et C-dérivable en  $f(z)$ , la fonction composée  $h \circ f$  est bien définie dans un voisinage de  $z$  et elle est C-dérivable en  $z$  avec*

$$(h \circ f)'(z) = h'(f(z))f'(z). \quad (2.14)$$

## 2.3 Fonctions holomorphes

Une fonction de  $\Omega \subset \mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  est dite *holomorphe* dans  $\Omega$  si et seulement si elle est  $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point de  $\Omega$ . Une conséquence immédiate du théorème 2.4 est la caractérisation suivante des fonctions holomorphes :

**Théorème 2.6** *Une fonction  $f$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ , différentiable dans  $\Omega$ , est holomorphe dans  $\Omega$  si et seulement si les relations de Cauchy-Riemann (2.9) (ou (2.10)) sont satisfaites en tout point  $z = x + iy$  de  $\Omega$ .*

Nous pouvons énoncer deux conséquences directes immédiates de ce résultat. Le premier met en lumière un lien très fort entre la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe.

**Corollaire 2.7** *Soit  $f$  une fonction holomorphe dans  $\Omega$ , supposé connexe. Sa partie réelle est, à une constante additive près, entièrement déterminée par sa partie imaginaire et réciproquement.*

DÉMONSTRATION. Les relations de Cauchy-Riemann (2.10) montrent que le gradient de  $P := \operatorname{Re} f$  est entièrement défini par celui de  $Q := \operatorname{Im} f$ . On conclut aisément puisque, dans un ouvert connexe, une fonction est, à une constante additive près, entièrement définie par son gradient. □

Le second est d'une certaine façon encore plus surprenant et dit notamment qu'une fonction holomorphe est automatiquement très régulière.

**Corollaire 2.8** *Si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$ , sa partie réelle et sa partie imaginaire sont des fonctions harmoniques (i. e. à Laplacien nul au sens des distributions). En particulier  $f$  est de classe  $C^\infty$  dans  $\Omega$ .*

DÉMONSTRATION. Nous donnons la preuve pour  $P := \operatorname{Re} f$  (c'est la même pour  $Q := \operatorname{Im} f$ ). Elle nécessite une incursion dans la théorie des distribution. En tant que fonctions continues sur  $\Omega$ ,  $P$  et  $Q := \operatorname{Im} f$  définissent deux distributions dans  $\Omega$ . C'est un exercice délicieux (et un peu subtil) sur la théorie des distributions (exercice que nous laissons au lecteur) de montrer que les relations de Cauchy-Riemann (2.10) se traduisent au sens des distributions. par

$$\partial_x P = \partial_y Q, \quad \partial_y P = -\partial_x Q \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Par suite, en dérivant ces deux égalités au sens des distributions, respectivement par rapport à  $x$  pour la première et  $y$  pour la seconde, nous obtenons

$$\begin{cases} \partial_x P = \partial_y Q & \implies \partial_{xx}^2 P = \partial_{xy}^2 Q \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \partial_y P = -\partial_x Q & \implies \partial_{yy}^2 P = -\partial_{xy}^2 Q \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

Le caractère harmonique de  $P$  s'obtient alors par addition des deux égalités obtenues.

L'assertion finale est une conséquence d'un résultat de régularité bien connu sur les distributions harmoniques (nous engageons le lecteur à essayer de démontrer ce résultat avec les outils du cours MA102). Pour le confort du lecteur nous donnons une démonstration de ce résultat pour une fonction continue (comme  $P$  ou  $Q$ ) dans l'annexe B (théorème B.1).

□

En poussant un cran plus loin le raisonnement, nous aboutissons au

**Corollaire 2.9** *La dérivée d'une fonction holomorphe dans  $\Omega$  est elle-même holomorphe dans  $\Omega$ . Il s'ensuit qu'une fonction holomorphe dans  $\Omega$  y est indéfiniment  $\mathbb{C}$ -dérivable.*

DÉMONSTRATION. Il suffit bien sûr de montrer la première assertion du corollaire et de conclure par récurrence.

D'après le corollaire 2.8, nous savons déjà que  $f'(z)$  est différentiable dans  $\Omega$ . En utilisant le fait que la dérivée complexe peut se calculer, par exemple, dans la direction  $x$ , nous avons, si  $P(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy)$ ,  $Q(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy)$  alors

$$z = x + iy \implies f'(z) = P_1(x, y) + iQ_1(x, y), \quad P_1 = \partial_x P, \quad Q_1 = \partial_x Q$$

Il suffit maintenant de vérifier Cauchy-Riemann pour les fonctions  $(P_1, Q_1)$ . Or

$$\partial_x P = \partial_y Q \implies \partial_x^2 P = \partial_{xy}^2 Q \quad \text{c'est à dire} \quad \partial_x P_1 = \partial_y Q_1,$$

$$\partial_y P = -\partial_x Q \implies \partial_{xy}^2 P = -\partial_x^2 Q \quad \text{c'est à dire} \quad \partial_y P_1 = -\partial_x Q_1,$$

ce qui achève la démonstration.

□

**Remarque 2.10** *Le résultat du corollaire 2.9 est particulièrement surprenant car il n'a pas d'équivalent pour les fonctions de la variable réelle.*

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ .

Il est clair que cette fonction est dérivable en tout point de  $\mathbb{R}$ . C'est évident pour  $x \neq 0$  avec

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

alors que, en  $x = 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin \frac{1}{x} \implies f'(0) = 0.$$

Par contre, il est clair que, à cause de  $\cos \frac{1}{x}$ ,  $f'(x)$  n'a pas de limite quand  $x$  tend vers 0.

Par conséquent,  $f'$  n'est pas continue en 0.

L'extension "naturelle" de cette fonction au plan complexe est

$$f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z} \quad \text{si } z \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Il est facile de montrer que cette fonction est holomorphe dans  $\mathbb{C}^*$  (voir les exemples à la fin de cette section). Par contre cette fonction n'est même pas continue en  $z = 0$ , ce dont on se rend compte aisément en se plaçant sur l'axe imaginaire

$$i f(iy) = -y^2 \sinh \frac{1}{y} \quad \text{pour } y \in \mathbb{R}^* \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } y \text{ tend vers } 0.$$

Nous désignons dans la suite par  $H(\Omega)$  l'ensemble des fonctions holomorphes de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ . Du théorème 2.5 nous déduisons immédiatement la structure de cet ensemble :

**Théorème 2.11** *Muni des lois de composition interne  $+$  et  $\times$  de l'addition et du produit des fonctions ainsi que de la loi de composition externe sur  $\mathbb{C}$  du produit d'une fonction par un scalaire complexe, notée  $\cdot$ , l'ensemble  $(H(\Omega), +, \cdot, \times)$  est une algèbre sur  $\mathbb{C}$ , commutative et unitaire (les fonctions constantes sont holomorphes).*

Le théorème 2.5 nous permet également d'énoncer un résultat sur la composition de fonctions holomorphes.

**Théorème 2.12** *Soit  $f$  une application holomorphe dans  $\Omega$ ,  $\mathcal{V}(f(\Omega))$  un voisinage ouvert de l'ensemble  $f(\Omega)$  et  $h$  une fonction holomorphe dans  $\mathcal{V}(f(\Omega))$  alors  $h \circ f$  est holomorphe dans  $\Omega$  et  $(h \circ f)' = (h' \circ f) f'$ .*

**Remarque 2.13** *Dès que  $f$  est non constante dans  $\Omega$  nous verrons plus tard (théorème de l'application ouverte) que l'ensemble  $f(\Omega)$  est automatiquement ouvert. On peut donc dans l'énoncé du théorème (2.12) remplacer  $\mathcal{V}(f(\Omega))$  par  $f(\Omega)$ .*

**Exemples (contre-exemples) élémentaires de fonctions holomorphes.** Les deux exemples les plus immédiats de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}$  sont les fonctions  $f(z) = 1$ , respectivement  $f(z) = z$ , dont on vérifie de façon triviale en passant par le quotient différentiel (2.6) que leurs dérivées sont  $f'(z) = 0$ , respectivement  $f'(z) = 1$ .

Inversement, il est très facile d'exhiber un exemple élémentaire de fonction non holomorphe et pourtant de classe  $C^\infty$  (ce qui signifie, ou plutôt confirme, que le corollaire 2.8 n'admet pas de réciproque) ! Il suffit de considérer la fonction  $f(z) = \bar{z}$  qui correspond à  $P(x, y) = x$  et  $Q(x, y) = -y$ . Pour vérifier que  $f$  n'est  $\mathbb{C}$ -dérivable en aucun point de  $\mathbb{C}$ , on peut prodéder de (au moins) deux manières. La première consiste à remarquer que les relations de Cauchy-Riemann (2.10) ne sont jamais satisfaites puisque, par exemple,  $\partial_x P(x, y) = 1$  et  $\partial_y Q(x, y) = -1$ . Alternativement, si on passe par le quotient différentiel, on voit aisément que la non dérivalibilité complexe résulte directement de

la non continuité (déjà vue) à l'origine de la fonction  $h \mapsto \bar{h}/h$ . De ce contre-exemple, on peut intuiter que  $\bar{z}$  est un "ennemi" des fonctions holomorphes.

Ceci étant, en utilisant les fonctions 1 et  $z$  avec le théorème 2.5, il est déjà facile de construire une foultitude de fonctions holomorphes. Ainsi

- tout polynôme  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$  et  $P'(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}$ .
- toute fraction rationnelle  $P(z)/Q(z)$ , où  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes premiers entre eux, est holomorphe dans  $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}(Q)$ , où  $\mathcal{Z}(Q)$  est l'ensemble des zéros de  $Q$ .

Pour aller plus loin, il est naturel de penser aux fonctions analytiques, vues au chapitre précédent dans la mesure où elles sont partout des limites uniformes de suite de polynômes. Le théorème suivant est donc attendu !

**Théorème 2.14** *Toute fonction  $f$  analytique dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  est holomorphe dans  $\Omega$ . De plus, sa dérivée  $f'$  est également analytique. Enfin, pour tout  $z_0 \in \Omega$ , on a la formule de dérivation sous le signe somme suivante :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \implies f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \quad (2.15)$$

pour  $|z - z_0|$  assez petit.

Nous encourageons le lecteur à proposer une preuve directe de ce résultat à l'aide du quotient différentiel à partir du développement en série entière local d'une fonction analytique. C'est un peu technique et tout à fait faisable (attention toutefois à la question de l'inversion d'une limite avec une somme infinie). Ici, le résultat va apparaître comme une conséquence directe d'un résultat dit de "fermeture holomorphe" dont la preuve a l'intérêt pédagogique d'exploiter les conditions de Cauchy-Riemann. Ce résultat sera amélioré plus tard avec le théorème 4.11.

Quelques rappels préliminaires sont nécessaires. Dans ce qui suit  $\Omega$  désigne un ouvert borné et  $C^1(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de classe  $C^1$  dans  $\Omega$ , ici assimilé à  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$  (de telle sorte que  $f$  est assimilée à  $\tilde{f}$ ) à valeurs dans  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{C}$  suivant le contexte (nous choisissons de ne pas préciser car c'est inessentiel). On désigne par  $C^0(\overline{\Omega})$  le sous-espace vectoriel de  $C^0(\Omega)$  fait des fonctions qui se prolongent par continuité à  $\overline{\Omega}$  et par  $C^1(\overline{\Omega})$  le sous-espace vectoriel de  $C^1(\Omega)$  fait des fonctions dont les deux dérivées partielles appartiennent à  $C^0(\overline{\Omega})$ . Comme ici  $\Omega$  est un ouvert borné, on peut munir  $C^0(\overline{\Omega})$  et  $C^1(\overline{\Omega})$  d'une structure d'espace vectoriel normé avec les normes suivantes :

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} = \sup_{(x,y) \in \tilde{\Omega}} |u(x,y)|, \quad \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \|\partial_x u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \|\partial_y u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \quad (2.16)$$

Nous utiliserons ci-dessous le résultat d'analyse bien connu qui dit que les espaces  $C^0(\overline{\Omega})$  et  $C^1(\overline{\Omega})$  sont des espaces de Banach, c'est-à-dire des espaces vectoriels normés complets. Nous encourageons le lecteur à donner une preuve de ce résultat (c'est tout à fait accessible avec les outils du cours MA102). Nous pouvons maintenant passer au

**Lemme 2.15** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{C}$  et  $f_n \in H(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  une suite de fonctions. On suppose qu'il existe deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\overline{\Omega}$  dans  $\mathbb{C}$  telles que :*

- $f_n(z)$  converge vers  $f(z)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , uniformément dans  $\overline{\Omega}$ ,
- $f'_n(z)$  converge vers  $g(z)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , uniformément dans  $\overline{\Omega}$ ,

alors  $f \in H(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  et  $f' = g$ .

DÉMONSTRATION. Le fait que  $f \in C^1(\overline{\Omega})$  est immédiat puisque l'espace  $C^1(\overline{\Omega})$  est complet. Il reste à établir le caractère holomorphe de  $f$ .

Écrivons  $f = P + iQ$  et  $f_n = P_n + iQ_n$ , conformément à (2.8). La convergence uniforme de  $f_n$  vers  $f$  entraîne bien évidemment celle de  $(P_n, Q_n)$  vers  $(P, Q)$ . De même, si  $g = P_* + iQ_*$  ( $P_*$  et  $Q_*$  étant définies comme les parties réelle et imaginaire de  $g$ ), comme  $f'_n = \partial_x P_n + i\partial_x Q_n$  (nous choisissons ici de dériver dans la direction  $x$ ), nous déduisons de la convergence uniforme de  $f'_n$  vers  $g$  la convergence uniforme de  $(\partial_x P_n, \partial_x Q_n)$  vers  $(P_*, Q_*)$ . D'après les conditions de Cauchy-Riemann,  $(\partial_y Q_n, -\partial_x P_n)$  converge uniformément vers  $(P_*, Q_*)$  également. Mais, toujours grâce au caractère complet de  $C^1(\overline{\Omega})$ , nous savons aussi que  $(\partial_x P_n, \partial_x Q_n)$  converge uniformément vers  $(\partial_x P, \partial_x Q)$  et que  $(\partial_y Q_n, -\partial_y P_n)$  converge uniformément vers  $(\partial_y Q, -\partial_y P)$ . On en déduit les égalités (dans tout  $\Omega$ )

$$P_* = \partial_x P = \partial_y Q, \quad Q_* = \partial_x Q = -\partial_y P$$

Autrement dit, la fonction  $f$  vérifie les conditions de Cauchy-Riemann et est donc holomorphe. L'égalité  $f' = g$  s'ensuit immédiatement. □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.14 Soit  $f$  analytique dans  $\Omega$  et  $z_0 \in \Omega$ . D'après le chapitre 1, nous savons qu'il existe  $\rho > 0$  telle que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{pour } |z - z_0| < \rho$$

où en outre la convergence de la série est uniforme dans chaque disque fermé  $D(z_0, \rho')$  avec  $\rho' < \rho$ . Posons alors

$$f_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k$$

qui est holomorphe dans  $\mathbb{C}$  puisque polynomiale, de dérivée  $f_n(z) := \sum_{k=1}^n k a_k (z - z_0)^{k-1}$ .

Il est facile de voir que le rayon de convergence de la série entière de terme général  $(n+1) a_{n+1} z^n$  est le même que celui de la série entière  $a_n z^n$ . Il s'ensuit que dans tout disque  $D(z_0, \rho')$  avec  $\rho' < \rho$ ,  $f'_n$  converge uniformément vers

$$g(z) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Nous pouvons alors appliquer le théorème à la suite  $f_n$  dans l'ouvert borné  $D(z_0, \rho')$ , en ayant fixé  $\rho' < \rho$ , pour conclure que  $f$  est holomorphe dans  $D(z_0, \rho')$  (en particulier  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$ ) et que (2.15) est satisfait. Comme ceci est valable pour tout  $z_0$  on conclut aisément.  $\square$

Le théorème 2.14 montre en outre que la dérivée d'une fonction analytique est analytique. En itérant l'application de ce théorème, on en déduit que toute fonction analytique dans  $\Omega$  est indéfiniment dérivable dans  $\Omega$  et que si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{pour } |z - z_0| < \rho,$$

alors

$$f^k(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k} \quad \text{pour } |z - z_0| < \rho. \quad (2.17)$$

En outre, cette formule permet d'identifier les coefficients du développement en série entière à l'aide des dérivées successives de  $f$ , à savoir (écrire (2.17) en  $z = z_0$ ) :

$$a_k = \frac{1}{k!} f^k(z_0), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.18)$$

Nous avons annoncé plus haut qu'un résultat frappant de la théorie des fonctions holomorphes est qu'une fonction une fois dérivable est automatiquement indéfiniment dérivable. En fait, nous verrons au chapitre 4 (section 4.2) qu'une fonction  $\mathbb{C}$ -dérivable dans  $\Omega$  est analytique dans  $\Omega$ , ce qui entraîne donc l'énoncé précédent et signifie que parler de fonction analytique ou de fonction holomorphe (c'est-à-dire  $\mathbb{C}$ -dérivable), c'est la même chose !

**Exemples de fonctions holomorphes (suite).** A l'aide des théorèmes 2.5, 2.12 et 2.14, on peut bien-sûr exhiber bien d'autres fonctions holomorphes que celles déjà vues et même broder à l'infini. Nous nous contenterons de quelques exemples fondamentaux.

- La fonction  $e^z$  et les fonctions trigonométriques  $\sin z$  et  $\cos z$  sont holomorphes dans  $\mathbb{C}$  et, grâce à la règle de dérivation (2.15), les règles usuelles de dérivation de ces fonctions sur  $\mathbb{R}$  restent valables dans  $\mathbb{C}$ ;

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z, \quad \frac{d}{dz} \sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z.$$

- La fonction  $\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}$  est holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  et

$$\frac{d}{dz} \operatorname{tg} z = \frac{1}{\cos^2 z}$$

- La fonction  $\operatorname{cotg} z := \frac{\cos z}{\sin z}$  est holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  et

$$\frac{d}{dz} \operatorname{cotg} z = -\frac{1}{\sin^2 z}$$

- Si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes premiers entre eux, les fonctions

$$e^{P(z)/Q(z)}, \quad \sin(P(z)/Q(z)), \quad \cos(P(z)/Q(z))$$

sont holomorphes dans  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}(Q)$ .

# Chapitre 3

## Intégration complexe

### 3.1 Notion de chemin et de lacet

La notion de chemin, dont le lacet est un cas particulier (important), désigne un objet géométrique 1D plongé dans le plan complexe : penser à un arc de courbe qui se referme sur lui-même dans le cas d'un lacet. Pour aller plus loin, il faut donner une définition mathématique précise qui va notamment imposer une certaine "régularité" et permettre plus tard d'attribuer une "orientation" à ce lieu géométrique.

#### 3.1.1 Notion de chemin paramétré.

Dans un premier temps, il est difficile de dissocier la notion de chemin de celle de sa paramétrisation : un chemin est d'abord vu comme l'image d'un segment de  $\mathbb{R}$  par une certaine fonction continue à valeurs complexes.

**Définition 3.1** [*Chemin paramétré*] Un chemin paramétré est un couple  $(g, \gamma)$  tel que :

(i) il existe deux réels  $a < b$  et une fonction continue  $g : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ , qui est de classe  $C^1$  par morceaux, localement injective, c'est-à-dire que  $g$  est injective dans un voisinage de chaque point, et non stationnaire. Mathématiquement nous voulons dire qu'il existe des réels en nombre fini ( $t_0 = a < t_1 < \dots < t_N = b$ ) tels que

$$g|_{[t_i, t_{i+1}]} \in C^1([t_i, t_{i+1}], \mathbb{C}) \text{ et est injective, } g'(t) \neq 0, \quad \forall t \in ]t_i, t_{i+1}[, \quad (3.1)$$

On dira, par convention, que les  $t_i$  sont les points singuliers du paramétrage  $g$ .

(ii) Le lieu  $\gamma$  est défini par  $\gamma = g([a, b])$ .

Si dans la définition ci-dessus  $g(a) \neq g(b)$ , on parle de chemin paramétré ouvert (ou d'arc ouvert) dont les points  $\mathbf{a} := g(a)$  et  $\mathbf{b} = g(b)$  sont respectivement l'origine et l'extrémité. Si  $g(a) = g(b)$ , on parle de lacet paramétré.

Notons que, par continuité de  $g$ ,  $\gamma$  est nécessairement un sous-ensemble connexe et compact du plan complexe.

**Remarque 3.2** Il faut comprendre que dans le couple  $(g, \gamma)$ , la fonction  $g$  est un moyen de décrire le lieu  $\gamma$  : une façon simple de le comprendre est de considérer que la variable de paramétrage  $t$  est le temps et que  $g(t)$  est un point matériel mobile qui se déplace (pendant un intervalle de temps fini) dans le plan complexe.

Vu comme cela, on comprend aisément que l'hypothèse (3.1) est assez naturelle. En effet, si on abandonne l'hypothèse d'injectivité locale, cela signifie que le point matériel peut "revenir sur ses pas" donc qu'une portion de  $\gamma$  est parcourue plusieurs fois, ce qui est bien sûr inutile pour décrire  $\gamma$ . De même, si on imagine que  $g'(t)$  s'annule sur un petit intervalle de temps, cela signifie que le point matériel "stationne" un petit moment, ce qui est à nouveau inutile pour décrire  $\gamma$ .

**Exemples élémentaires** (voir figure 3.1) :

- (i) Avec  $[a, b] = [0, 1]$  et  $g(t) := t \mathbf{b} + (1 - t) \mathbf{a}$ , où  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont deux points distincts du plan complexe, on obtient un chemin paramétré  $(\gamma, g)$  où le lieu  $\gamma$  n'est autre que le segment de droite dans le plan complexe qui joint les points  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ , noté  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ . Un autre paramétrage du même segment est donné par  $\{g(t) := \sin^2 t \mathbf{b} + (1 - \sin^2 t) \mathbf{a}\}$ ,  $t \in [0, T]$ . Toutefois, ce paramétrage n'est localement injectif que pour  $T \leq \pi/2$ .
- (ii) Avec  $[a, b] = [0, \theta]$ ,  $\theta \in ]0, 2\pi]$  et  $g(t) := e^{it}$ , on obtient un arc de cercle qui est ouvert dès que  $\theta < 2\pi$ . Pour  $\theta \geq 2\pi$ , on obtient un lacet paramétré qui n'est autre que le cercle unité. Si  $\theta > 2\pi$ , il est facile de voir que l'injectivité locale du paramétrage est préservée (ce paramétrage est donc en accord avec la définition (3.1)) mais que le paramétrage n'est plus globalement injectif ce qui signifie qu'un sous-arc du cercle (qui peut être le cercle en entier) est parcouru plusieurs fois, mais toujours dans le même sens ...
- (iii) Si on considère  $\gamma_R := \{g(t), t \in [-R, R + 2\pi]\}$  où la fonction  $g$  est définie par

$$g(t) = t \text{ si } t \in [-R, R], \quad g(t) = R(1 + e^{i(t-R)}) \text{ si } t \in [R, R + 2\pi], \quad (3.2)$$

on obtient un lacet paramétré qui est le bord d'un demi-disque de rayon  $R$ .

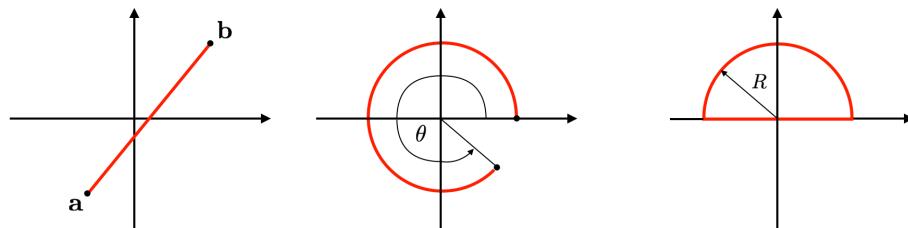


FIGURE 3.1 – Exemples élémentaires de chemins et lacets paramétrés.

### 3.1.2 Points multiples. Chemins paramétrés admissibles et simples.

**Définition 3.3** [Points multiples] On dit qu'un point  $z$  d'un chemin paramétré est un point multiple s'il existe au moins deux valeurs distinctes du paramètre, soit  $(t_1, t_2) \in [a, b]^2$  ou  $(t_1, t_2) \in ]a, b]^2$ , tels que  $g(t_1) = g(t_2) = z$ .

Notons que l'existence de points multiples n'est évidemment pas incompatible avec l'hypothèse d'injectivité locale imposée au paramétrage  $g$ . Toutefois, toujours pour éviter qu'une portion de  $\gamma$  soit décrite plusieurs fois, nous nous limiterons dans la suite, sans forcément le mentionner, aux chemins et lacets *admissibles* au sens de la définition suivante

**Définition 3.4** [Chemin admissible] Un chemin paramétré  $(g, \gamma)$  sera dit admissible si et seulement si ses éventuels points multiples forment un ensemble de points isolés, donc fini.

Ainsi pour l'arc de cercle (ii) (p. 28), le chemin n'est admissible que si  $\theta \leq 2\pi$ .

**Définition 3.5** [Chemin simple] Un chemin (ou lacet) paramétré sans point multiple, sera appelé chemin (ou lacet) paramétré simple, i. e. si  $g$  est injective sur  $]a, b]$  et  $[a, b[$ .

Dans la vision du point matériel parcourant une courbe, cela revient à dire que le point mobile ne repasse jamais par le même endroit.

**Exemple** (figure 3.2) Le chemin paramétré  $\{g(t) := t + i(\sqrt{t} - t), t \in [0, 2]\}$  (dessin de gauche) est un chemin simple. En revanche, si  $sg(t)$  désigne la fonction signe, le chemin paramétré  $\{g(t) := |t| + i(sg(t)\sqrt{|t|} - t), t \in [-2, 2]\}$ , obtenu géométriquement par symétrisation du précédent par rapport à l'axe réel, admet un point double.

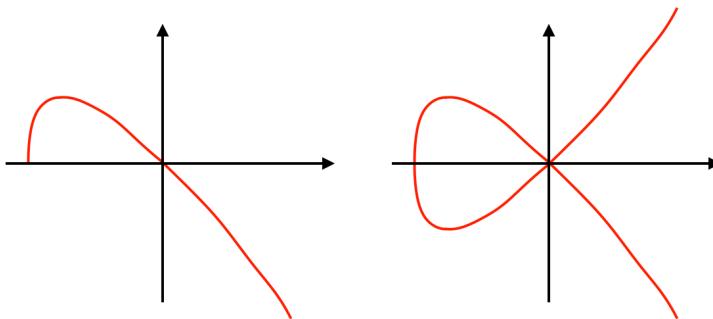


FIGURE 3.2 – Chemin simple (gauche). Chemin admettant un point double (droite)

### 3.1.3 Notion de chemin.

Dans la suite, on appellera chemin  $\gamma$  tout sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  pour lequel il existe une fonction  $g$  satisfaisant (3.1) tel que  $(\gamma, g)$  soit un chemin paramétré (admissible). Ce faisant, on définit implicitement un objet intrinsèque puisqu'on ne fait plus référence à sa paramétrisation. Or, il est évident que, pour un chemin donné, on peut définir une infinité de paramétrages. Ainsi, le segment de droite  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  peut être défini par

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{t^k \mathbf{b} + (1-t)^k \mathbf{a}, t \in [0, 1]\} \text{ pour n'importe quel entier } k.$$

De façon générale, si  $g_1 : [a_1, b_1] \mapsto \mathbb{C}$  est un paramétrage de  $\gamma$  et si  $\theta$  est une bijection continue et strictement monotone de  $[a_2, b_2]$  dans  $[a_1, b_1]$  telle que

$$\begin{aligned} \exists t_0^* = a_2 < t_1^* < \cdots < t_M^* = b_2 & \quad (\text{points de singularité de } \theta), \text{ tels que} \\ \theta|_{[t_i^*, t_{i+1}^*]} \in C^1([t_i^*, t_{i+1}^*]), \quad \theta'(t) & \neq 0 \text{ pour } t \in ]t_i^*, t_{i+1}^*. \end{aligned} \tag{3.3}$$

il est clair (exercice) que  $g_2 = g_1 \circ \theta : [a_2, b_2] \mapsto \mathbb{C}$  est un autre paramétrage de  $\gamma$ .

**Remarque 3.6** *On peut toujours trouver un paramétrage défini sur  $[0, 1]$  à partir d'un paramétrage défini sur  $[a, b]$  avec  $\theta(t) = t b + (1 - t) a$ .*

On peut caractériser (lemme 3.7 ci-dessous) tous les paramétrages possibles d'un chemin  $\gamma$ . Pour cela, introduisons

- (i)  $\mathcal{P}(\gamma)$  l'ensemble des paramétrages de  $\gamma$ , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions  $g$  telles que  $(\gamma, g)$  soit un chemin paramétré admissible au sens de la définition 3.1,
- (ii)  $\mathcal{C}(a_1, b_1, a_2, b_2)$  l'ensemble des bijections  $\theta$  de  $[a_2, b_2]$  dans  $[a_1, b_1]$  qui satisfont (3.3).

**Lemme 3.7** *Pour tout couple de paramétrages de  $\gamma$ , soit  $(g_1, g_2) \in \mathcal{P}(\gamma)^2$ , il existe une (unique) bijection  $\theta \equiv \theta(g_1, g_2) \in \mathcal{C}(a_1, b_1, a_2, b_2)$  telle que  $g_2 = g_1 \circ \theta$ .*

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A pour la démonstration (un peu pénible) de ce résultat.

**Remarque 3.8** *Il est clair que la condition d'injectivité locale du paramétrage est nécessaire pour que le lemme 3.7 soit vrai.*

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier, à l'aide du lemme 3.7, que les notions de *chemin admissible* et de *chemin simple*, introduites au paragraphe précédent, sont indépendantes du paramétrage. Il s'agit donc bien de notions intrinsèques.

### 3.1.4 Notion de chemin orienté ou contour.

Dans la section 3.2, nous définirons l'intégrale d'une fonction le long d'un chemin  $\gamma$ . Cette notion sera liée à la notion de chemin *orienté*, également appelé *contour*.

Pour définir cette notion, introduisons une relation d'équivalence dans l'ensemble  $\mathcal{P}(\gamma)$ .

$$\forall (g_1, g_2) \in \mathcal{P}(\gamma), \quad g_1 \mathcal{R} g_2 \iff \theta(g_1, g_2) \text{ (cf. lemme 3.7) est croissante.} \quad (3.4)$$

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier (c'est immédiat) que  $\mathcal{R}$  est bien une relation d'équivalence. Comme  $\theta(g_1, g_2)$  est soit croissante soit décroissante, il est clair que  $\mathcal{R}$  n'admet que deux classes d'équivalence qui peuvent être décrites comme suit :

- On choisit arbitrairement une paramétrisation sur  $[0, 1]$  (ce qui est toujours possible, cf. remarque 3.6) que l'on note  $g^+$  et qui définit ce que l'on appellera l'orientation *directe* du chemin  $\gamma$ .
- On définit  $g^-(t) = g^+(1-t)$  qui n'est pas en relation d'équivalence avec  $g^+$  puisque  $\theta(g^+, g^-) = 1-t, t \in [0, 1]$  est décroissante.
- On note  $\mathcal{P}^+(\gamma)$  la classe d'équivalence de  $g^+$  et  $\mathcal{P}^-(\gamma)$  celle de  $g^-$ . On a donc

$$\begin{cases} \mathcal{P}^\pm(\gamma) = \{g^\pm \circ \theta, \theta \in \mathcal{C}(0, 1, a, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b\}, \\ \mathcal{P}(\gamma) = \mathcal{P}^+(\gamma) \cup \mathcal{P}^-(\gamma), \quad \mathcal{P}^+(\gamma) \cap \mathcal{P}^-(\gamma) = \emptyset. \end{cases} \quad (3.5)$$

Par définition, à un chemin  $\gamma$ , on associera deux chemins orientés correspondant à  $\mathcal{P}^+(\gamma)$  (orientation directe) et à  $\mathcal{P}^-(\gamma)$  (orientation indirecte). Ainsi, un chemin orienté sera associé à n'importe quel paramétrage de sa classe d'équivalence.

**Notation importante.** Pour alléger la notation, il est de coutume de noter quand même  $\gamma$  un chemin orienté (implicitement associé à la famille de paramétrages directs  $\mathcal{P}^+(\gamma)$ , un quelconque d'entre eux suffisant). L'autre chemin associé au même lieu géométrique mais à l'orientation opposée sera noté  $\tilde{\gamma}$ .

**Exemples :**

- On notera  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  le chemin orienté correspondant au segment  $\{t \mathbf{b} + (1-t) \mathbf{a}, t \in [0, 1]\}$  et  $[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$  celui correspondant au segment  $\{t \mathbf{a} + (1-t) \mathbf{b}, t \in [0, 1]\}$ .
- pour un arc de cercle d'angle  $\theta$ , la coutume veut que l'orientation *directe* corresponde à  $\{e^{it}, t \in [0, \theta]\}$  (on parle aussi de sens trigonométrique ou anti-horaire) alors que l'orientation *indirecte* correspond à  $\{e^{i(\theta-t)}, t \in [0, \theta]\}$  (ou sens horaire).

### 3.1.5 Sous-chemin et découpage d'un chemin

Étant donné  $\gamma := \{g(t), t \in [a, b]\}$  un chemin orienté, on définit un *sous-chemin*  $\tilde{\gamma} \subset \gamma$  en considérant le chemin orienté

$$\tilde{\gamma} = \{g(t), t \in [a', b'], a' \geq a, b' \leq b\}$$

qui est ainsi orienté "dans le même sens" que  $\gamma$ .

Si maintenant  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$  désigne un découpage de l'intervalle  $[a, b]$ , on réalise un découpage (orienté) du chemin  $\gamma$  en écrivant

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_N, \quad \gamma_j := \{g(t), t \in [t_{j-1}, t_j]\}, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3.6)$$

Dans (3.6), l'extrémité  $z_j = g(t_j)$  du chemin  $\gamma_j$  coïncide avec l'origine du chemin  $\gamma_{j+1}$  : en ce sens les chemins  $\gamma_j$  ainsi numérotés sont "consécutifs". L'ensemble

$$\mathbf{z}(\gamma) = \{z_0, z_1, \dots, z_N\} \quad (3.7)$$

est alors appelé un *découpage* de  $\gamma$  : on notera  $\mathcal{Z}(\gamma)$  l'ensemble des découpages de  $\gamma$ . Pour tout  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\gamma) \in \mathcal{Z}(\gamma)$ , on appellera *pas* du découpage  $\mathbf{z}$  la quantité

$$h(\mathbf{z}) := \sup_{j \leq N-1} |z_{j+1} - z_j| > 0. \quad (3.8)$$

**Lemme 3.9** *Tout chemin admissible admet un découpage en sous-chemins simples.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de choisir comme ensemble  $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ , l'ensemble des points singuliers du paramétrage  $g$  au sens de la définition 3.1. □

### 3.1.6 Multi-chemin et multi-lacet.

On appellera multi-chemin orienté, toute union finie de chemins orientés  $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_N$  où on fera l'hypothèse (bien que cela ne soit pas absolument nécessaire) que l'intersection entre deux de ces chemins est réduite à un nombre fini de points (dans la plupart des cas d'applications, cette intersection sera même vide). Si chaque  $\gamma_j$  est un lacet, on parlera de multi-lacet.

**Remarque 3.10** *La restriction sur l'intersection finie est cohérente avec la notion de chemin admissible (cf. définition 3.1). Par exemple, elle exclut de fait le cas  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$  avec  $\gamma_1 := \{e^{it}, t \in [0, \pi/2]\}$  et  $\gamma_2 := \{e^{it}, t \in [\pi/4, 3\pi/2]\}$ . Si on acceptait une telle éventualité, l'arc  $\{e^{it}, t \in [\pi/4, 3\pi/2]\}$  serait parcouru deux fois.*

Compte-tenu du paragraphe précédent, tout chemin peut être vu comme un multi-chemin, et ce d'une infinité de manières différentes. Le contraire n'est évidemment pas vrai (autrement dit, un multi-chemin n'est en général pas un chemin), les  $\gamma_j$  pouvant par exemple être disjoints deux à deux.

**Remarque 3.11** *La distinction entre chemin et multi-chemin aurait été inutile si, dans la définition 3.1, nous n'avions pas imposé la continuité du paramétrage  $g$  (hypothèse usuelle dans la littérature, raison pour laquelle nous l'avons gardée).*

### 3.1.7 Vecteur tangent et normal.

La régularité demandée à la paramétrisation d'un chemin permet de définir un vecteur unitaire tangent et un vecteur unitaire normal. Soit donc  $(\gamma, g)$  un chemin paramétré et  $t \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_{N-1}\}$  (cf. définition 3.1). Pour la simplicité de l'exposé, nous allons nous limiter au cas d'un chemin *simple* mais ceci n'est pas restrictif (voir remarque 3.15). Le vecteur tangent unitaire en  $g(t)$  se définit comme la limite (si elle existe) quand  $h > 0$  tend vers 0 du vecteur unitaire parallèle au vecteur  $g(t+h) - g(t)$  qui joint les points  $g(t)$  et  $g(t+h)$  (qui est bien non nul pour  $h$  assez petit par injectivité locale de  $g$ ) :

$$\text{Au point } z = g(t), \quad \tau(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{|g(t+h) - g(t)|}. \quad (3.9)$$

Du fait que  $g$  est dérivable en  $t$ ,  $g(t+h) - g(t) = h g'(t) + h o(h)$  et donc, comme  $h > 0$ , que  $|g(t+h) - g(t)| = h |g'(t)| + h o(h)$ . Comme  $g(t)$  n'est pas un point stationnaire (voir remarque 3.12),  $g'(t) \neq 0$ , on en déduit l'existence de  $\tau(z)$  avec la formule

$$\text{Au point } z = g(t), \quad \tau(z) := \frac{g'(t)}{|g'(t)|} \quad (3.10)$$

Il est important de remarquer que,

- en privilégiant  $h > 0$  dans la définition (3.9), nous définissons un vecteur tangent orienté, ce qui est consistant avec l'orientation conférée à  $\gamma$  par le paramétrage  $g$  : si on revient à l'image du point matériel décrivant la courbe  $\gamma$ ,  $\tau$  indique en (presque) tout point de  $\gamma$  la direction du vecteur vitesse de ce point.
- Le fait d'avoir associé le vecteur  $\tau$  au point  $z$  et non au paramètre  $t$  exprime le fait que ce vecteur est intrinsèque au chemin orienté défini par  $g$ . En effet soit  $\tilde{g}$  un autre paramétrage de  $\gamma$  tel que  $g = \tilde{g} \circ \theta$  avec  $\theta$  strictement croissante. Comme le chemin est simple, il existe un unique  $s$  tel que  $z = \tilde{g}(s)$ , donné par  $s = \theta(t)$ . Nous avons alors (excluant implicitement les points singuliers de  $\tilde{g}$ )

$$s = \theta(t) \implies \tilde{g}'(s) = \theta'(t) g'(t)$$

$$\text{Par conséquent, comme } \theta'(t) > 0, \quad \frac{\tilde{g}'(s)}{|\tilde{g}'(s)|} = \frac{g'(t)}{|g'(t)|}.$$

Il découle de ce qui précède que l'orientation d'un chemin est directement liée au choix du vecteur tangent et c'est pourquoi il est naturel de matérialiser cette orientation par une (ou plusieurs) petite flèche indiquant l'orientation du vecteur tangent.

**Remarque 3.12** *Contrairement à ce que peut suggérer un réflexe naturel, Il ne suffit pas qu'un chemin admette un paramétrage  $g(t)$  de classe  $C^1$  pour que ce chemin soit lisse partout, c'est-à-dire qu'on puisse définir un (unique) vecteur tangent en tout point. Il faut aussi tenir compte des éventuels points stationnaires d'annulation de la dérivée de  $g$ .*

Ainsi le chemin  $\{\max(t, 0)^2 + i \min(t, 0)^2, t \in [-1, 1]\}$  est bien de classe  $C^1$  et il s'agit pourtant de la réunion de deux segments orthogonaux, à savoir  $[i, 0] \cup [0, 1]$ , qui n'est évidemment pas lisse au point  $z = 0$  (figure 3.3, dessin de gauche). Ce point est atteint en  $t = 0$  qui correspond au point d'annulation de la dérivée du paramétrage.

On peut même créer des singularités plus fortes avec un paramétrage  $C^1$ . Ainsi, avec

$$g(t) = t^2 + i t^4 \text{ si } t \in [-1, 0], \quad g(t) = t^2 + 2i t^4 \text{ si } t \in [0, 1]$$

on obtient un chemin composé de deux arcs de parabole connectés en  $z = 0$ , point en lequel le chemin présente un point de rebroussement (figure 3.3, dessin de droite).

Ces exemples sont représentatifs d'une situation générale : tout chemin admet un paramétrage globalement  $C^1$ , modulo l'introduction de points stationnaires (exercice).

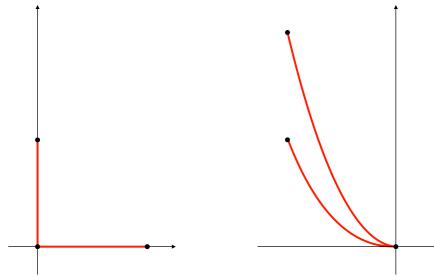


FIGURE 3.3 – Exemples de chemin avec paramétrage régulier admettant un point singulier.

Bien entendu, une fois qu'on a défini le vecteur unitaire tangent  $\tau(z)$  le long d'un chemin orienté on peut définir un vecteur normal unitaire  $n(z)$ . Là encore, deux choix sont possibles. L'habitude est qu'on choisisse celui déduit du vecteur tangent par une rotation d'angle  $\pi/2$  dans le sens trigonométrique, de telle sorte que le couple  $(\tau(z), n(z))$  défuisse un repère direct. Dans le plan complexe, cela se traduit par

$$\text{Au point } z = g(t), \quad n(z) = i \tau(z) \equiv i \frac{g'(t)}{|g'(t)|} \quad (3.11)$$

L'existence du vecteur normal permet de démontrer (voir annexe ) un résultat en apparence banal (voir toutefois la remarque 3.14) :

**Théorème 3.13** *Tout chemin est d'intérieur vide.*

**Remarque 3.14** Étonnamment, l'image d'un segment de  $\mathbb{R}$  par une application qui est seulement continue (et non plus dérivable par morceaux) peut être d'intérieur non vide. C'est notamment le cas de la fameuse courbe de Peano qui "remplit" le carré  $[0, 1]^2$  du plan complexe, bien qu'êtant obtenue comme l'image de  $[0, 1]$  par un paramétrage continu.

**Remarque 3.15 (Cas des chemins multiples)** *Comme tout chemin est une union finie de chemins simples, il n'y a pas de problème pour définir un vecteur tangent sur un chemin multiple. Il suffit de le définir pour chaque chemin simple, par morceaux. Toutefois, il faut réaliser que en un point multiple, on peut a priori définir autant de vecteurs tangents que de chemins simples qui se croisent en ce point. Il est possible, mais pénible, de vérifier que cette construction est indépendante du découpage en sous-chemins simples.*

Dans la suite, nous appellerons point régulier de  $\gamma$  tout point  $z$  en lequel on peut définir un vecteur tangent de façon unique. Notons que l'ensemble des points qui ne sont pas réguliers est un ensemble fini.

## 3.2 Intégrale curviligne complexe

### 3.2.1 Définition

Nous cherchons dans cette section à définir l'intégrale curviligne "le long" d'un chemin orienté  $\gamma$  du plan complexe (on parle alors de *contour d'intégration*) d'une fonction à valeurs complexes qui est continue sur  $\gamma$  : pour la continuité,  $\gamma$  est naturellement muni de la topologie induite par celle de  $\mathbb{C}$ . Nous noterons  $C^0(\gamma)$  l'espace vectoriel de ces fonctions, qu'on munit naturellement d'une structure d'espace de Banach avec la norme

$$\|f\|_{C^0(\gamma)} := \sup_{z \in \gamma} |f(z)|. \quad (3.12)$$

L'intégrale curviligne complexe peut être vue comme une généralisation naturelle de l'intégrale sur  $\mathbb{R}$ . Comme nous nous limiterons aux fonctions continues, on peut se limiter à l'intégrale de Riemann, notion avec laquelle le lecteur est supposé familier. De ce fait, une grande partie des propriétés de l'intégrale curviligne complexe va apparaître comme un "héritage naturel" de propriétés de l'intégrale de Riemann.

Dans un premier temps, on va donner une définition sur  $\gamma$  qui dépend a priori de sa paramétrisation  $(g, \gamma)$  : nous définissons

$$I(f; \gamma, g) := \int_a^b f(g(t)) g'(t) dt \quad (3.13)$$

qui est bien définie puisque la fonction  $t \mapsto f(g(t)) g'(t)$  est continue par morceaux, donc intégrable. Notons que la formule fait furieusement penser à une formule de changement de variable dans une intégrale (classique) sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Ceci n'est pas le fruit du hasard. Nous allons voir que, grâce à cette définition, la quantité  $I(f; \gamma, g)$  est en fait invariante par changement de paramétrage pour peu que celui-ci ne change pas l'orientation du chemin.

**Lemme 3.16** Pour tout couple  $(g, \tilde{g}) \in \mathcal{P}(\gamma)^2$  dans la même classe d'équivalence on a

$$I(f; \gamma, \tilde{g}) = I(f; \gamma, g) \quad (3.14)$$

et  $I(f; \gamma, \tilde{g}) = -I(f; \gamma, g)$  si  $(g, \tilde{g})$  n'appartiennent pas à la même classe d'équivalence.

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, nous savons que  $g = \tilde{g} \circ \theta$ , avec  $\theta \in \mathcal{C}(\tilde{a}, \tilde{b}, a, b)$ . Supposons pour simplifier que les fonctions  $\theta$  et  $g$  sont globalement  $C^1$  (si ce n'est pas le cas, il suffit de découper les intégrales en bouts suffisamment petits, les détails sont laissés au lecteur). Par définition

$$I(f; \gamma, \tilde{g}) := \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{g}(s)) \tilde{g}'(s) ds$$

Effectuons le changement de variable  $s = \theta(t), t \in [a, b]$ , auquel cas, comme  $ds = \theta'(t) dt$ ,

$$I(f; \gamma, \tilde{g}) := \int_a^b f(\tilde{g}(\theta(t))) \tilde{g}'(\theta(t)) \theta'(t) dt \equiv \int_a^b f(g(t)) \tilde{g}'(\theta(t)) \theta'(t) dt$$

où nous avons implicitement utilisé le fait que  $\theta$  était croissante. Pour conclure, il suffit de remarquer que, par la formule de la dérivée de la composée de deux fonctions

$$g(t) = \tilde{g}(\theta(t)) \implies \tilde{g}'(\theta(t)) \theta'(t) = g'(t),$$

ce qui démontre (3.14). La seconde partie du lemme suit de même.  $\square$

Ce lemme nous dit donc que, lorsque  $g$  décrit  $\mathcal{P}(\gamma)$ ,  $I(f; \gamma, g)$  ne peut prendre que deux valeurs suivant que  $g$  appartient à  $\mathcal{P}^+(\gamma)$  ou  $\mathcal{P}^-(\gamma)$ , que l'on notera respectivement, en accord avec la notation  $(\gamma, \tilde{\gamma})$  introduite à la section 3.1.4, paragraphe intitulé "Notation importante" :

$$\int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{et} \quad \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz, \quad \text{avec} \quad \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (3.15)$$

On retiendra finalement la définition suivante. Étant donné  $\gamma := \{g(t), t \in [a, b]\}$  un chemin orienté,

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(g(t)) g'(t) dt \quad (3.16)$$

Remarquons au passage que, même si  $f$  est à valeurs réelles, son intégrale n'est pas réelle puisque  $g'(t)$  n'est pas réel en général, sauf si  $\gamma$  est un segment parallèle à l'axe réel.

**Exemples basiques importants.** L'intégrale de  $f$  le long d'un segment  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  est donnée par

$$\int_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]} f(z) dz = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \int_0^1 f(t \mathbf{b} + (1-t) \mathbf{a}) dt \quad (3.17)$$

En particulier, si  $f$  est constante sur  $\gamma$ , i. e.  $f(z) = \mathbf{f}_0, \forall z \in \gamma$ ,  $\int_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]} f(z) dz = \mathbf{f}_0 (\mathbf{b} - \mathbf{a})$ .

Notons que si  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on a tout simplement

$$\int_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]} f(z) dz = \int_a^b f(t) dt,$$

ce qui démontre que l'intégration complexe généralise bien l'intégration sur  $\mathbb{R}$ .

De même, pour l'arc de cercle  $\gamma := \{g(t) = R e^{it}, t \in [0, \theta]\}$  avec  $0 < \theta < 2\pi$ , on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = iR \int_0^{\theta} f(R e^{it}) e^{it} dt \quad (3.18)$$

Considérons l'exemple fondamental (on le verra par la suite) de la fonction  $f(z) = z^n$ , pour  $n \in \mathbb{Q}$ , qui est bien continue sur l'arc  $\gamma$ . On calcule aisément (exercice) que

$$\int_{\gamma} z^n dz = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{n+1} R^{n+1} \quad \text{si } n \neq -1, \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = i\theta. \quad (3.19)$$

En particulier, dans le cas du cercle complet, i. e.  $\theta = 2\pi$ , nous avons

$$\int_{\gamma} z^n dz = 0 \quad \text{si } n \neq -1, \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2i\pi. \quad (3.20)$$

### 3.2.2 Linéarité et continuité de l'intégrale

L'application  $f \mapsto \int_{\Gamma} f(z) dz$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{C}^0(\gamma)$  :

$$\begin{cases} \forall (f, g) \in \mathcal{C}^0(\gamma)^2, & \int_{\gamma} (f(z) + g(z)) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz, \\ \forall (\lambda, f) \in \mathbb{C} \times \mathcal{C}^0(\gamma), & \int_{\gamma} (\lambda f)(z) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz \end{cases} \quad (3.21)$$

On peut donner un majorant simple du module de l'intégrale de  $f$ . Pour cela, rappelons que, sur la courbe  $\gamma$  dans  $\mathbb{C}$  identifié à  $\mathbb{R}^2$ , on définit sur  $\gamma$  une mesure superficielle, mesure positive, classiquement notée

$$d\sigma = |g'(t)| dt,$$

où  $g(t)$  est un paramétrage quelconque de  $\gamma$ . On définit alors l'intégrale, au sens de Lebesgue, d'une fonction  $f \in C^0(\gamma)$  par la quantité (voir aussi annexe A.3)

$$\int_{\gamma} f dz := \int_a^b f(g(t)) |g'(t)| dt \quad (3.22)$$

dont il est facile de voir, par le même argument qu'au lemme 3.16, que la valeur de cette intégrale est indépendante de  $g(t)$  mais aussi cette fois de son orientation, à cause de la présence de la valeur absolue dans la définition 3.15. Notons également que cette intégrale est réelle si  $f$  est réelle, contrairement à l'intégrale curviligne au sens complexe.

On obtient la longueur de  $\gamma$ , notée  $|\gamma|$ , en intégrant la fonction 1 (voir annexe A.3) :

$$|\gamma| = \int_{\gamma} d\sigma \equiv \int_a^b |g'(t)| dt. \quad (3.23)$$

De façon immédiate on démontre alors le lemme suivant

**Lemme 3.17** *Pour tout  $f \in C^0(\gamma)$ , on a la majoration*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| d\sigma \leq |\gamma| \|f\|_{C^0(\gamma)}. \quad (3.24)$$

Ce lemme montre que  $f \mapsto \int_{\gamma} f(z) dz$  est une forme linéaire continue sur  $C^0(\gamma)$  et donc le

**Corollaire 3.18** *Soit  $f_n$  une suite de fonctions dans  $C^0(\gamma)$  convergeant uniformément vers  $f$*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (3.25)$$

### 3.2.3 Additivité de l'intégrale. Généralisation aux multi-chemins

Si  $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_N$  est un découpage orienté de  $\gamma$  au sens de (3.6), on a évidemment la propriété d'additivité

$$\int_{\gamma} f d\sigma = \sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} f d\sigma. \quad (3.26)$$

**Remarque 3.19** *La formule précédente permet évidemment d'utiliser des paramétrages locaux pour diverses parties d'un contour d'intégration. Ainsi, si on revient à l'exemple (iii) du contour  $\gamma_R$  défini par (3.2) on fera plutôt la décomposition*

$$\gamma_R = [-R, R] \cup C_R, \quad C_R := \{R e^{it}, t \in [0, \pi]\}$$

en on écrira directement

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(t) dt + i \int_0^\pi f(R e^{it}) e^{it} dt$$

Compte tenu de cette propriété, pour un multi-chemin orienté  $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_N$ , il est naturel de définir l'intégrale le long de ce multi-chemin par

$$\int_{\gamma} f d\sigma := \sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} f d\sigma. \quad (3.27)$$

### 3.2.4 Sommes de Riemann.

On peut donner une caractérisation plus géométrique et plus intrinsèque que (3.15) de l'intégrale curviligne complexe, directement liée à la définition de l'intégrale de Riemann par les sommes du même nom (cette caractérisation aurait pu être prise comme définition). Nous énonçons cela sous la forme d'un théorème qui fait référence à la notion de découpage d'un chemin introduite dans la section 3.1. Nous appellerons somme de Riemann associée à un découpage  $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}(\gamma)$  et à une fonction  $f \in C^0(\gamma)$ , la quantité

$$S(f, \mathbf{z}) := \sum_{j=1}^N (z_j - z_{j-1}) f(z_j) \quad (3.28)$$

**Théorème 3.20** *Soit  $\mathbf{z}_n \in \mathcal{Z}(\gamma)$  une suite de découpages de  $\gamma$  "de plus en plus fins", i. e. telle que le pas  $h(\mathbf{z}_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , alors*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \mathbf{z}_n) \quad (3.29)$$

DÉMONSTRATION. C'est un exercice technique sur les sommes de Riemann usuelles pour une intégrale sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Les détails sont laissés au lecteur (voir aussi, pour une approche similaire, la section A.3 de l'annexe A).

□

**Remarque 3.21** *Dans la définition d'une somme de Riemann, on pourrait, sans incidence sur le théorème, remplacer l'évaluation en  $z_j$  par l'évaluation en n'importe quel point  $z'_j$  de l'arc  $\gamma_j$  (d'extrémités  $z_{j-1}$  et  $z_j$ ), où même par n'importe quel point  $z'_j$  du segment  $[z_{j-1}, z_j]$ , pour peu que  $f$  soit continue sur un ensemble contenant ces segments.*



# Chapitre 4

## Théorie de Cauchy

### 4.1 Notion de primitive et résultats associés.

Par définition, on dit qu'une fonction  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  admet une primitive dans  $\Omega$  s'il existe une fonction holomorphe  $F \in H(\Omega)$ , appelée primitive de  $f$ , telle que  $F'(z) = f(z), \forall z \in \Omega$ . Notons que, en vertu du corollaire 2.9, une fonction qui admet une primitive dans  $\Omega$  est a fortiori holomorphe dans  $\Omega$ .

Bien entendu, si  $F$  est une primitive de  $f$  dans  $\Omega$ , pour tout complexe  $\mathbf{c} \in \mathbb{C}$ ,  $F + \mathbf{c}$  est aussi une primitive de  $f$ . Inversement, la différence entre deux primitives de  $f$  sans  $\Omega$  est nécessairement constante dans chaque composante connexe de  $\Omega$ .

Comme sur  $\mathbb{R}$ , la notion de primitive est intimement liée à celle d'intégrale.

**Théorème 4.1** *Soit  $\gamma$  un chemin orienté d'origine  $\mathbf{a}$  et d'extrémité  $\mathbf{b}$ . Soit  $f$  une fonction admettant une primitive  $F$  dans un voisinage de  $\gamma$ , alors*

$$\int_{\gamma} f(z) dz \equiv \int_{\gamma} F'(z) dz = F(\mathbf{b}) - F(\mathbf{a}) \quad (4.1)$$

En particulier, si  $\gamma$  est un lacet,  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $\gamma = \{g(t), t \in [a, b]\}$  avec  $g \in C^1(a, b)$  (les modifications, élémentaires, à apporter à la preuve dans le cas  $C^1$  par morceaux, sont laissées au soin du lecteur). Par hypothèse et définition de l'intégrale

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} F'(z) dz = \int_a^b F'(g(t)) g'(t) dt$$

Par composition de fonctions dérivables, l'application  $t \mapsto F(g(t))$  est dérivable de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et de plus

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = F'(g(t)) g'(t).$$

Il s'ensuit que  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b \frac{d}{dt} F(g(t)) dt = F(g(b)) - F(g(a)) = F(\mathbf{b}) - F(\mathbf{a})$ .

□

Le résultat (4.1) est de prime abord décevant puisqu'il dit que le résultat de l'intégrale de  $f$  sur un lacet d'extrémités  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  est, d'une certaine manière, indépendant du chemin pris pour aller de  $\mathbf{a}$  à  $\mathbf{b}$ . Toutefois, il faut bien avoir conscience que ce résultat est lié à l'existence d'une primitive dans un ouvert englobant tous ces chemins. Or, contrairement à ce qui se passe sur  $\mathbb{R}$ , l'existence d'une primitive dans  $\mathbb{C}$  est tout sauf une question triviale.

Il est bien connu que, dans  $\mathbb{R}$ , une fonction  $f(x)$  continue sur un segment  $[a, b]$  admet automatiquement une primitive donnée par

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (4.2)$$

Dans  $\mathbb{C}$ , une telle propriété n'est plus vraie en général. Anticipons par exemple le chapitre 6 en mentionnant par exemple que la fonction  $f(z) = 1/z$ , qui est continue dans  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , n'admet pas de primitive dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Le théorème 4.2 qui va suivre donne une condition suffisante d'existence de la primitive d'une fonction continue dans un ouvert convexe.

Introduisons quelques notations. Soit  $T$  un triangle de  $\mathbb{C}$  de sommets  $(z_1, z_2, z_3)$  non alignés, c'est-à-dire

$$T \equiv \{z_1, z_2, z_3\} := \{z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3, \lambda_i \geq 0 \text{ pour tout } i, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 1\}$$

Nous considérons le bord  $\partial T$  de  $T$  comme un lacet orienté qui est la réunion des 3 segments orientés joignant chaque sommet au suivant (voir figure 4.2, dessin de gauche) :

$$\partial T = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup [z_3, z_1] \quad (4.3)$$

**Théorème 4.2** *Soit  $\Omega$  un ouvert convexe de  $\mathbb{C}$  et  $f$  continue de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$  telle que,*

$$\text{pour tout triangle } T \text{ inclus dans } \Omega, \quad \int_{\partial T} f(z) dz = 0. \quad (4.4)$$

*Alors,  $f$  admet une primitive dans  $\Omega$ .*

**DÉMONSTRATION.** Par analogie avec (4.2), un candidat naturel pour être une primitive de  $f$  est la fonction ( $\mathbf{a}$  désigne ci-dessous un point, quelconque mais fixé, de  $\Omega$ ).

$$F(z) = \int_{[\mathbf{a}, z]} f(\zeta) d\zeta, \quad \forall z \in \Omega.$$

Notons que c'est la convexité de  $\Omega$  qui permet d'assurer que  $F$  a bien un sens : en effet, le segment  $[\mathbf{a}, z]$  est bien inclus dans  $\Omega$ . Montrons maintenant que  $F$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable

en tout  $z_0$  de  $\Omega$  et que  $F'(z_0) = f(z_0)$ .

Si les points  $\mathbf{a}$ ,  $z_0$  et  $z$  sont alignés, on se retrouve évidemment comme dans le cas d'une intégrale sur  $\mathbb{R}$  et on a

$$F(z) = F(z_0) + \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta \quad (4.5)$$

En fait, grâce à l'hypothèse (4.4), cette formule reste vraie, c'est le point clé, même si les trois points ne sont pas alignés.

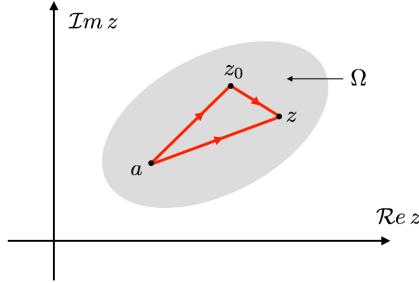


FIGURE 4.1 – Le triangle  $T = \{\mathbf{a}, z_0, z\}$

En effet, par convexité de  $\Omega$ , le triangle  $T = \{\mathbf{a}, z_0, z\}$  est inclus dans  $\Omega$ . Par hypothèse, l'intégrale de  $f$  le long du bord de  $T$  est nulle. En décomposant cette intégrale le long des trois côtés du triangle, on obtient la formule (4.5), après avoir pris soin des questions d'orientation. On en déduit que, en écrivant  $f(\zeta) = f(z_0) + (f(\zeta) - f(z_0))$ ,

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta = f(z_0) + \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta.$$

Par le lemme 3.17, il vient

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| \leq \sup_{\zeta \in [z_0, z]} |f(\zeta) - f(z_0)| \rightarrow 0 \text{ quand } z \rightarrow z_0, \text{ (continuité de } f).$$

On en déduit que  $F$  est dérivable en  $z_0$  et que  $F'(z_0) = f(z_0)$ . □

**Remarque 4.3** Compte-tenu du théorème 4.1, le théorème 4.2 montre en fait que (4.4) est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue dans un ouvert convexe y admette une primitive.

Le résultat du théorème donne une importance particulière aux intégrales sur des triangles et, par conséquent, au lemme de Goursat :

**Lemme 4.4 (Lemme de Goursat)** Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un voisinage d'un triangle  $T := \{z_1, z_2, z_3\}$  dont le bord  $\partial T$  est orienté conformément à (4.3). Alors,

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0 \quad (4.6)$$

DÉMONSTRATION. Commençons par donner la démarche de la preuve. L'idée consiste à construire une suite  $T^{(n)}$  de triangles emboités, telle que  $T^{(0)} = T$ ,  $T^{(n+1)} \subset T^{(n)}$  avec  $T^{(n+1)}$  deux fois plus petit que  $T^{(n)}$ , et telle que pour tout  $n$

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T^{(n)}} f(z) dz \right|$$

puis de montrer dans un deuxième temps que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n \left| \int_{\partial T^{(n)}} f(z) dz \right| = 0$ .

La continuité de  $f$  suffit pour la première partie de la preuve. C'est dans la dernière partie qu'on utilise la  $\mathbb{C}$ -dérivabilité de  $f$ .

*Étape 1 : construction de la suite  $T^{(n)}$ .* Elle se fait par récurrence. Il suffit de comprendre comment on passe de  $T^{(0)}$  à  $T^{(1)}$  puis de répéter le processus pour passer de  $T^{(n)}$  à  $T^{(n+1)}$ .

Introduisons  $z_{ij} \equiv z_{ji}$  le milieu de  $[z_i, z_j]$  et découpons  $T \equiv T^{(0)}$  en la réunion de triangles deux fois plus petits

$$T = T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$$

où nous avons posé

$$T_1 = \{z_1, z_{12}, z_{13}\}, \quad T_2 = \{z_2, z_{21}, z_{23}\}, \quad T_3 = \{z_3, z_{31}, z_{32}\}, \quad T_0 = \{z_{12}, z_{23}, z_{31}\},$$

dont les bord sont orientés comme suit (voir figure 4.2) :

$$\partial T_1 = [z_1, z_{12}] \cup [z_{12}, z_{13}] \cup [z_{13}, z_1], \quad \partial T_2 = [z_2, z_{23}] \cup [z_{23}, z_{12}] \cup [z_{12}, z_2]$$

$$\partial T_3 = [z_3, z_{31}] \cup [z_{31}, z_{23}] \cup [z_{23}, z_3], \quad \partial T_0 = [z_{12}, z_{23}] \cup [z_{23}, z_{31}] \cup [z_{31}, z_{12}]$$

En remarquant alors que, par additivité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_{\partial T_1} f(z) dz &= \int_{[z_1, z_{12}]} f(z) dz + \int_{[z_{12}, z_{13}]} f(z) dz + \int_{[z_{13}, z_1]} f(z) dz, \\ \int_{\partial T_2} f(z) dz &= \int_{[z_2, z_{23}]} f(z) dz + \int_{[z_{23}, z_{12}]} f(z) dz + \int_{[z_{12}, z_2]} f(z) dz, \\ \int_{\partial T_3} f(z) dz &= \int_{[z_3, z_{31}]} f(z) dz + \int_{[z_{31}, z_{23}]} f(z) dz + \int_{[z_{23}, z_3]} f(z) dz, \\ \int_{\partial T_0} f(z) dz &= \int_{[z_{12}, z_{23}]} f(z) dz + \int_{[z_{23}, z_{31}]} f(z) dz + \int_{[z_{31}, z_{12}]} f(z) dz, \end{aligned} \quad (4.7)$$

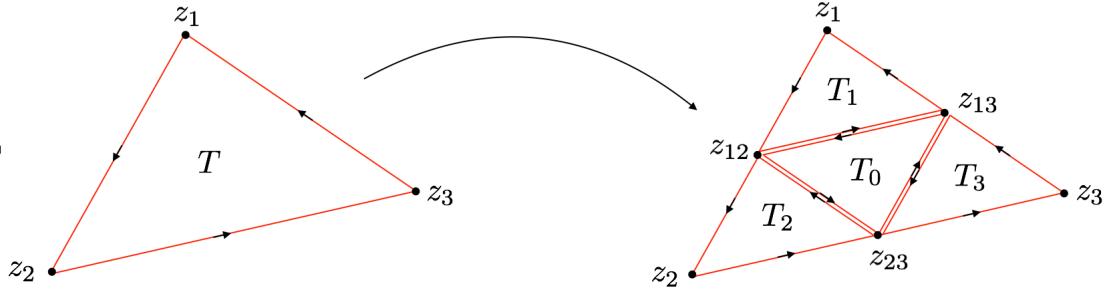


FIGURE 4.2 – Découpage du triangle

et que par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_{\partial T} f(z) dz &= \int_{[z_1, z_{12}]} f(z) dz + \int_{[z_{12}, z_2]} f(z) dz + \int_{[z_2, z_{23}]} f(z) dz, \\ &\quad + \int_{[z_{23}, z_3]} f(z) dz + \int_{[z_3, z_{31}]} f(z) dz + \int_{[z_{31}, z_1]} f(z) dz, \end{aligned} \quad (4.8)$$

on déduit alors de (4.7), (4.8) et de  $\int_{[b,a]} f(z) dz = - \int_{[a,b]} f(z) dz$ , que

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \int_{\partial T_0} f(z) dz + \int_{\partial T_1} f(z) dz + \int_{\partial T_2} f(z) dz + \int_{\partial T_3} f(z) dz. \quad (4.9)$$

Nous choisissons alors  $0 \leq j \leq 3$  tel que  $\left| \int_{\partial T_j} f(z) dz \right| = \max_{i=0}^3 \left| \int_{\partial T_i} f(z) dz \right|$  et posons

$$T^{(1)} := T_j \quad (4.10)$$

On procède alors de la même manière pour construire toute la suite  $T^{(n)}$ .

Il résulte évidemment de (4.9) et du choix (4.10) que

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T^{(1)}} f(z) dz \right|, \quad (4.11)$$

et par conséquent, de proche en proche, que

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T^{(n)}} f(z) dz \right|. \quad (4.12)$$

Par ailleurs, il est clair que par construction

$$|\partial T_n| = 2^{-n} |\partial T|. \quad (4.13)$$

*Étape 2 : passage à la limite.* Désignons par  $z_n$  le centre de gravité de  $T^{(n)}$ . Par construction

$$|z_{n+1} - z_n| \leq 2^{-n} \operatorname{diam} T$$

ce qui prouve que  $z_n$  est une suite de Cauchy qui converge donc vers  $z_\infty \in T$ .

Par  $\mathbb{C}$ -dérivabilité de  $f$  au point  $z_\infty$ , nous pouvons écrire

$$f(z) = f(z_\infty) + (z - z_\infty) f'(z_\infty) + (z - z_\infty) \varepsilon(z - z_\infty), \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

En intégrant cette identité sur le lacet  $\partial T^{(n)}$ , comme l'intégrale des deux premiers termes du membre de droite est nulle, il vient

$$\int_{\partial T^{(n)}} f(z) dz = \int_{\partial T^{(n)}} (z - z_\infty) \varepsilon(z - z_\infty) dz$$

Posons  $\varepsilon_n = \sup_{z \in \partial T^{(n)}} |\varepsilon(z - z_\infty)|$  (qui tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ ).

Comme  $|z - z_\infty| \leq 2^{-n} |\partial T|$  sur  $\partial T^{(n)}$ , en utilisant le lemme 3.17 et (4.13), il vient

$$\left| \int_{\partial T^{(n)}} f(z) dz \right| \leq 2^{-n} |\partial T| |\partial T^{(n)}| \varepsilon_n = 4^{-n} |\partial T|^2 \varepsilon_n$$

Nous déduisons alors de (4.12) que

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq |\partial T|^2 \varepsilon_n \tag{4.14}$$

ce qui permet de conclure. □

**Remarque 4.5** *Attention, pour que (4.6) soit vrai, il faut que  $f$  soit holomorphe dans un voisinage de tout le triangle  $T$  et pas seulement dans un voisinage de son bord  $\partial T$ . A titre d'exercice (et de contre-exemple), le lecteur pourra vérifier que le résultat est faux avec  $f(z) = 1/z$  et  $T := \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\}$ .*

**Remarque 4.6** *Le lecteur se convaincra aisément qu'on peut remplacer dans le lemme 4.4 le triangle  $T$  par un quadrilatère strictement convexe. La démonstration serait quasiment identique (exercice). L'intérêt du triangle est lié au théorème 4.2.*

Une conséquence importante du lemme de Goursat et du théorème 4.2 est une première version du théorème de Cauchy, dont nous donnerons une version plus élaborée section 4.4.

**Théorème 4.7 (Théorème de Cauchy dans un ouvert convexe)** *Soit  $\Omega$  un ouvert convexe de  $\mathbb{C}$ . Soit  $\gamma$  un lacet orienté inclus dans  $\Omega$  et  $f \in H(\Omega)$ , alors*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (4.15)$$

DÉMONSTRATION. Le lemme de Goursat entraîne la nullité de l'intégrale de  $f$  le long du bord de tout triangle inclus dans  $\Omega$ , ce qui entraîne, grâce au théorème 4.2, que  $f$  admet une primitive dans  $\Omega$ . Il suffit alors d'appliquer le théorème 4.1 pour conclure.  $\square$

**Remarque 4.8** *Bien évidemment, le théorème apparaît comme une généralisation du lemme de Goursat. Le lecteur notera que pour passer du bord d'un triangle à un lacet quelconque, c'est à dire du lemme de Goursat au théorème 4.7, nous avons emprunté un chemin (un de plus !) un peu tortueux passant par l'existence d'une primitive.*

Terminons cette section par un résultat qui constitue une réciproque du lemme de Goursat et donne un critère (parfois) pratique pour vérifier l'holomorphie d'une fonction continue.

**Théorème 4.9 (Théorème de Morera)** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  soit holomorphe est que*

$$\text{Pour tout triangle } T \subset \Omega, \quad \int_{\partial T} f(z) dz = 0. \quad (4.16)$$

DÉMONSTRATION. On suppose que  $f \in H(\Omega)$ . Soit  $T$  un triangle inclus dans  $\Omega$ . Il existe un voisinage  $\tilde{T}$  de  $T$ , convexe et inclus dans  $\Omega$  (prendre par exemple l'union des boules centrées en un point de  $T$  et de rayon  $\varepsilon > 0$  assez petit). Comme  $f \in H(\tilde{T})$  et que  $\partial T$  est un lacet inclus dans  $\tilde{T}$ , il suffit d'appliquer le théorème 4.7 pour obtenir (4.16) qui est donc bien une condition nécessaire.

Inversement, supposons que (4.16) a lieu. Soit  $B$  une boule incluse dans  $\Omega$ ,  $B$  est convexe et, d'après (4.16), l'intégrale de  $f$  le long du bord de tout triangle inclus dans  $B$  est nulle. Par conséquent, d'après le théorème 4.2,  $f$  admet une primitive dans  $B$  et donc  $f$  est a fortiori holomorphe dans  $B$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Remarque 4.10** *Insistons à nouveau sur le fait que, pour que (4.16) soit vrai, il faut que le triangle  $T$  soit inclus dans  $\Omega$  et pas seulement son bord (cf. remarque 4.5).*

Un corollaire utile du théorème de Morera est un théorème de fermeture holomorphe par convergence uniforme, qui améliore le lemme 2.15 :

**Théorème 4.11 (Fermeture holomorphe)** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f_n \in H(\Omega)$  une suite de fonctions telle qu'il existe une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $f_n$  converge uniformément dans tout compact inclus dans  $\Omega$ , alors  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$ .

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le théorème de Morera (4.9) et le corollaire 3.18.

□

Une façon de démontrer qu'une fonction est holomorphe est donc de démontrer qu'elle est limite uniforme d'une suite de fonctions holomorphes.

## 4.2 Formule de Cauchy locale et applications

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la *formule de Cauchy locale* (théorème 4.13 ci-après) dont la démonstration va s'appuyer sur le lemme technique suivant.

**Lemme 4.12** Soit  $f$  une fonction continue dans un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $z$  et  $\gamma_\varepsilon \subset \mathcal{V}$  le cercle de centre  $z$  et de rayon  $\varepsilon$  (assez petit), orienté de façon directe. On suppose de plus  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z$ , alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2i\pi f(z). \quad (4.17)$$

DÉMONSTRATION. Nous pouvons écrire

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \equiv 2i\pi f(z) + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

où nous avons utilisé le résultat (3.20) (après changement de variable évident). Par dérivabilité de  $f$  en  $z$ , il existe une constante  $C = C(z) > 0$  telle que

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq C \varepsilon, \quad \text{pour tout } \varepsilon \text{ assez petit,}$$

ce qui permet de conclure.

□

**Théorème 4.13 (Formule de Cauchy locale)** Soit  $B$  un disque du plan complexe dont le bord  $\gamma := \partial B$ , un cercle, est orienté positivement. Si  $f$  est holomorphe dans un voisinage  $\Omega$  de  $\overline{B}$ , alors

$$\forall z \in B, \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (4.18)$$

DÉMONSTRATION. Notons tout d'abord que la formule a bien un sens car  $\zeta - z$  ne s'annulant pas sur  $\gamma$ , la fonction  $f(\zeta)/(\zeta - z)$  est bien continue sur  $\gamma$ .

Supposons que  $B$  est le disque de centre  $z_0$  et de rayon  $\rho$ . Soit  $z \in B$  et  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que si  $B_\varepsilon = B(z, \varepsilon)$ ,  $\overline{B_\varepsilon}$  soit inclus dans  $B$ . Introduisons alors (voir figure 4.3)

$$C_\varepsilon := B \setminus \overline{B_\varepsilon}.$$

Supposons que  $z = z_0 + r e^{i\varphi}$ ,  $r \geq 0$ ,  $\varphi \in [-\pi, \pi[$  (avec par convention,  $\varphi = 0$  si  $r = 0$ ). Nous introduisons les trois secteurs du plan complexe

$$S_j(z) = \left\{ \zeta = z + \rho e^{i\theta} / \rho \geq 0, \theta - \varphi \in [(j-1)\frac{\pi}{3}, j\frac{\pi}{3}] \right\}, \quad j = 1, 2, 3,$$

qui "partitionnent" le plan complexe au sens où les  $S_j(z)$  sont d'intérieurs deux à deux disjoints alors que leur union est le plan complexe entier. Introduisons alors (cf. figure 4.3)

$$C_{\varepsilon,j} := C_\varepsilon \cap S_j(z).$$

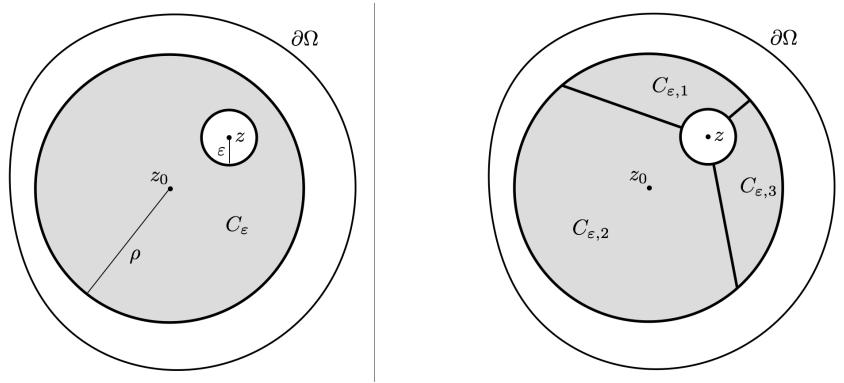


FIGURE 4.3 – Le domaine  $C_\varepsilon$  (gauche). Son découpage en trois (droite)

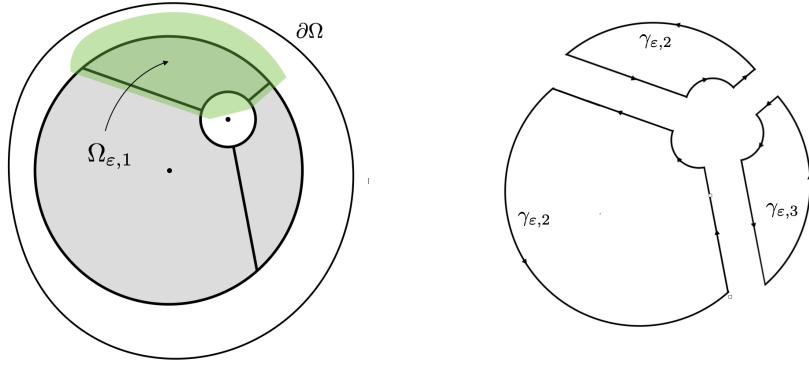
Considérons  $\gamma_{\varepsilon,j} := \partial C_{\varepsilon,j}$ , comme un lacet, union de deux segments et de deux arcs de cercle (de rayons  $\varepsilon$  et  $\rho$ ), est orienté de façon que l'arc de cercle extérieur (de rayon  $\rho$ ) soit orienté de manière directe (voir figure 4.4).

Le lecteur se convaincra par un argument géométrique simple que la fonction

$$\zeta \in \Omega \setminus \{z\} \rightarrow g_z(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

est holomorphe dans un voisinage convexe de chaque  $\gamma_{\varepsilon,j}$ . Il s'ensuit que

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,j}} g_z(\zeta) d\zeta \equiv \int_{\gamma_{\varepsilon,j}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

FIGURE 4.4 – Le domaine convexe  $\Omega_{\varepsilon,1}$  (gauche). Les bords  $\gamma_{\varepsilon,j}$  (droite)

Par conséquent

$$\sum_{j=1}^3 \int_{\gamma_{\varepsilon,j}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad (4.19)$$

Or, il est facile de voir que

$$\sum_{j=1}^3 \int_{\gamma_{\varepsilon,j}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (4.20)$$

En effet, la réunion (orientée) des arcs de cercle de rayon  $\rho$  (respectivement de rayon  $\varepsilon$ ) engendre le cercle  $\gamma$  (respectivement  $\gamma_{\varepsilon}$ ) tout entier alors que les intégrales sur les segments appartenant aux  $\gamma_{\varepsilon,j}$  s'annulent deux à deux, toujours pour des raisons d'orientation, dans la somme du membre de gauche de (4.20). Nous déduisons alors de (4.19) et (4.20) que

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad (4.21)$$

Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon$  assez petit, pour conclure, il suffit d'appliquer le lemme 4.12. □

**Corollaire 4.14 (Formule de la moyenne)** *Soit  $f$  holomorphe dans  $\Omega$ . Pour tout  $z \in \Omega$  et tout  $r > 0$  assez petit pour que  $B(z, r)$  soit inclus dans  $\Omega$ , alors on a la formule (dite de la moyenne)*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r e^{it}) dt. \quad (4.22)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser la formule (4.18), avec  $z$  au centre de la boule, et de noter que, comme  $\partial B(z, r) = \{z + r e^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$

$$\int_{\partial B(z, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = i \int_0^{2\pi} \frac{f(z + r e^{it})}{r e^{it}} r e^{it} dt \equiv i \int_0^{2\pi} f(z + r e^{it}) dt.$$

□

Ce résultat est surprenant au prime abord, car on n'a évidemment aucun résultat de cette nature pour des fonctions de la variable réelle. D'une certaine façon, pour une fonction holomorphe : "évaluer ponctuellement" équivaut à "intégrer". (Au passage, on montre que le terme de droite de (4.22) est indépendant de  $r$  assez petit, ce qui n'est pas évident a priori à la lecture).

**Remarque 4.15** *le lecteur se convaincra aisément que cette formule n'est autre qu'une réécriture dans  $\mathbb{C}$  de la formule de la moyenne pour les fonctions harmoniques dans  $\mathbb{R}^2$  (qui est aussi valable dans  $\mathbb{R}^d$  pour tout  $d$ ), formule vue dans le cours d'analyse MA102.*

### 4.3 Analyticité des fonctions holomorphes.

Nous avons démontré (théorème 2.14) que toute fonction analytique dans  $\Omega$  est holomorphe dans  $\Omega$ . Nous sommes maintenant en mesure d'établir la réciproque, qui est l'un des résultats les plus frappants de l'analyse complexe.

**Théorème 4.16** *Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un ouvert  $\Omega$ , alors  $f$  est analytique dans  $\Omega$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $z_0 \in \Omega$  et  $B(z_0, r) \subset \Omega$ . Nous allons montrer que  $f$  est développable en série entière au voisinage de  $z_0$  et que le rayon de convergence de cette série entière est au moins égal à  $r$ . Pour cela nous allons utiliser la formule de Cauchy locale (4.18) avec  $\gamma = \partial B(z_0, r)$ . Soit  $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ , nous écrivons, pour tout  $\zeta \in \gamma$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) + (z_0 - z)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{-1}$$

Comme  $|\zeta - z_0| = r$  et  $|z - z_0| < r$ , nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}, \quad (4.23)$$

où, puisque  $|\zeta - z_0| = r$  est indépendant de  $\zeta \in \gamma$ , la convergence de la série géométrique est uniforme par rapport à  $\zeta$  sur  $\gamma$ . Ceci nous autorise, après avoir injecté (4.23) dans (4.18), à permuter l'intégrale avec le signe somme et écrire :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (4.24)$$

ce qui achève la démonstration.

□

**Remarque 4.17** En fait, la démonstration ci-dessus montre que le rayon de convergence de la série entière est la plus grande valeur de  $r$  telle que la boule  $B(z_0, r)$  soit incluse dans le "domaine d'holomorphie" de  $f$ , défini comme le plus grand ouvert de  $\mathbb{C}$  dans lequel  $f$  admet un prolongement holomorphe. Le lecteur s'en convaincra aisément à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

En comparant la formule (4.24) à la formule (2.18), nous montrons que, si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$ , pour tout  $z_0 \in \Omega$  et  $r$  assez petit pour que  $B(z_0, r) \subset \Omega$ ,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (4.25)$$

Cette formule peut aussi être retrouvée par récurrence (exercice) en appliquant la formule de dérivation sous le signe intégral à la formule de Cauchy (4.18). On obtient même un peu mieux, à savoir une expression de la dérivée  $n^{\text{ieme}}$  de  $f$  à l'intérieur du disque  $B(z_0, r) \subset \Omega$  :

$$\forall z \in B(z_0, r), \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (4.26)$$

Les formules (4.25) et (4.26) disent d'une certaine façon quelque chose d'a priori surprenant : pour une fonction holomorphe, dériver "revient" à intégrer.

Terminons cette section par un résultat important sur les fonctions entières.

**Théorème 4.18 (Théorème de Liouville)** Soit  $f$  une fonction entière (i. e. analytique dans  $\mathbb{C}$ ). On suppose qu'il existe un entier  $p \in \mathbb{N}$  et une constante réelle  $C > 0$  telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq C (1 + |z|)^p, \quad (4.27)$$

alors  $f$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $p$ . En particulier, toute fonction entière bornée est constante.

DÉMONSTRATION. Comme  $f$  est entière, nous pouvons écrire (nous utilisons ici la formule (4.24) avec  $z_0 = 0$ )

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad \text{avec } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

Grâce à l'hypothèse sur  $f$ , nous avons donc

$$|a_n| \leq C \frac{(1+r)^p}{r^n}.$$

Puisque  $f$  est analytique dans  $\mathbb{C}$  tout entier, on peut choisir  $r$  arbitrairement grand. En faisant tendre  $r$  vers  $+\infty$ , on obtient  $a_n = 0$  pour  $n > p$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

Terminons cette section par une jolie conséquence de la formule de la moyenne, le principe du maximum, qu'on rencontre également dans la théorie des fonctions harmoniques ou des équations aux dérivées partielles elliptiques.

**Théorème 4.19 (Principe du maximum)** *Soit  $\Omega$  un ouvert connexe et  $f \in H(\Omega)$ , si  $|f|$  atteint un maximum local en un point de  $\Omega$  alors  $f$  est constante dans  $\Omega$ .*

DÉMONSTRATION. L'hypothèse du théorème signifie qu'il existe  $z_0 \in \Omega$  et  $r > 0$  tel que  $B(z_0, r) \subset \Omega$  et

$$\forall z \in \overline{B(z_0, r)}, \quad |f(z)| \leq |f(z_0)|.$$

Si  $f$  n'est pas identiquement nulle (sinon la preuve est déjà terminée), on peut alors appliquer la formule de la moyenne 4.22 à la fonction  $g(z) = f(z)/f(z_0)$ , ce qui nous donne

$$g(z_0) \equiv 1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

En prenant la partie réelle de cette égalité nous obtenons

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta, \quad \text{soit encore} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{Re} g(z_0 + r e^{i\theta})) d\theta = 0$$

Par hypothèse,  $|g(z)|$  et donc en particulier  $\operatorname{Re} g$  est bornée par 1 sur le cercle de centre  $z_0$  et rayon  $r$ . L'égalité ci-dessus n'est donc possible que si  $1 - \operatorname{Re} g(z_0 + r e^{i\theta})$  est identiquement nulle, ce qui, en utilisant à nouveau  $|g(z_0 + r e^{i\theta})| \leq 1$  entraîne que

$$\operatorname{Re} g(z_0 + r e^{i\theta}) = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} g(z_0 + r e^{i\theta}) = 0, \quad \text{i. e. } g(z_0 + r e^{i\theta}) = 1, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

La fonction  $g(z) - 1$ , analytique dans  $\Omega$  d'après le théorème 4.16, s'annule donc sur le cercle de centre  $z_0$  et rayon  $r$ . D'après le principe des zéros isolés,  $\Omega$  étant connexe, cette fonction s'annule dans  $\Omega$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

## 4.4 Théorie de Cauchy globale

Le théorème de Cauchy que nous allons énoncer et démontrer dans la section 4.4.2, a pour résultat la nullité de l'intégrale d'une fonction holomorphe sur un certain contour fermé. A ce titre, il peut être vu comme une généralisation du théorème 4.7 qui concernait le cas particulier d'une fonction holomorphe dans un ouvert convexe de  $\mathbb{C}$  et d'un lacet inclus dans ce convexe. Nous n'allons pas chercher le degré de généralité maximal mais nous limiter à une classe de contours particulière : les bords orientés d'un compact.

### 4.4.1 Bord orienté d'un compact

Il s'agit ici de généraliser le fait de considérer le cercle unité orienté de façon directe

$$\mathcal{C} := \{e^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$$

comme le *bord orienté* du disque unité  $D = B(0, 1) = \{z / |z| < 1\}$ . Pour cela notons que par définition du vecteur tangent associé à  $\mathcal{C}$ , nous avons (avec des notations évidentes)

$$\tau(t) = i e^{it} \quad \text{ou, de façon équivalente} \quad \tau(z) = i z, \quad \forall z \in \mathcal{C}.$$

Ainsi, le vecteur normal à  $\mathcal{C}$  tel que défini par (3.11), section 3.1.7, est donné par

$$n(z) := i\tau(z) = -z, \quad \forall z \in \mathcal{C}.$$

On constate que le vecteur normal  $n(z)$  pointe vers l'origine c'est-à-dire vers l'intérieur du disque  $D$ . En fait, cette seule propriété caractérise l'orientation de  $\mathcal{C}$  et c'est de cette façon que nous allons caractériser le bord orienté d'un compact.

**Définition 4.20 (Bord orienté d'un compact)** *Un multi-lacet orienté  $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_N$  est le bord orienté d'un compact si et seulement si il existe un ouvert borné  $\Omega$ , localement d'un seul côté de sa frontière, tel que  $\gamma$  soit le bord de  $\Omega$  et tel que le vecteur normal  $n(z)$  défini par l'orientation de  $\gamma$  pointe localement vers  $\Omega$ . Mathématiquement :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{En tout point régulier } z \text{ de } \gamma, \text{ il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que} \\ \forall \nu \in ]0, \varepsilon[, \quad z + \nu n(z) \in \Omega, \quad z - \nu n(z) \notin \Omega. \end{array} \right. \quad (4.28)$$

*Dans la suite, on pourra dire par définition que  $\Omega$  est l'intérieur de  $\gamma$  et que  $n(z)$  est le vecteur unitaire normal à  $\gamma$  qui est rentrant par rapport à  $\Omega$ .*

**Exemple : Cas du lacet simple** . C'est un cas important de bord orienté d'un compact. La démonstration repose sur le théorème de Jordan qui énonce un résultat en apparence banal (si on se fie à la seule intuition géométrique) mais dont la démonstration est difficile et dépasse largement le cadre de ce cours.

**Théorème 4.21 (Théorème de Jordan)** *Soit  $\gamma$  un lacet simple (non orienté) . Alors l'ouvert  $\Omega := \mathbb{C} \setminus \Gamma$  admet deux composantes connexes, l'une non bornée  $\Omega_e$  (qu'on peut appeler extérieur de  $\gamma$ ), l'autre bornée  $\Omega_i$  (qu'on peut appeler intérieur de  $\gamma$ ), dont  $\gamma$  est la frontière commune. De plus il existe une orientation de  $\gamma$  (appelée orientation directe) qui fait de  $\gamma$  le bord orienté du compact  $\overline{\Omega_i}$ .*

De façon imagée on peut voir un lacet simple  $\gamma$  comme l'image d'un cercle par une déformation élastique (typiquement une application suffisamment régulière de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ ), laquelle peut être complexe mais qui possède une propriété d'injectivité : deux points initialement distincts restent distincts après déformation. Ainsi l'image de l'intérieur du cercle initial donne-t-elle l'intérieur  $\Omega_i$  de  $\gamma$ , et l'orientation directe de  $\gamma$  est celle qui est héritée via la transformation élastique de l'orientation trigonométrique directe du cercle initial. Ces notions intuitives sont illustrées par la figure 4.5.

Un autre exemple est celui d'un multi-lacet constitué de l'union d'un lacet simple  $\gamma_0$  d'intérieur  $\Omega_0$  et de  $L$  lacets simples  $\gamma_\ell$  qui ne s'intersectent pas et sont contenus dans

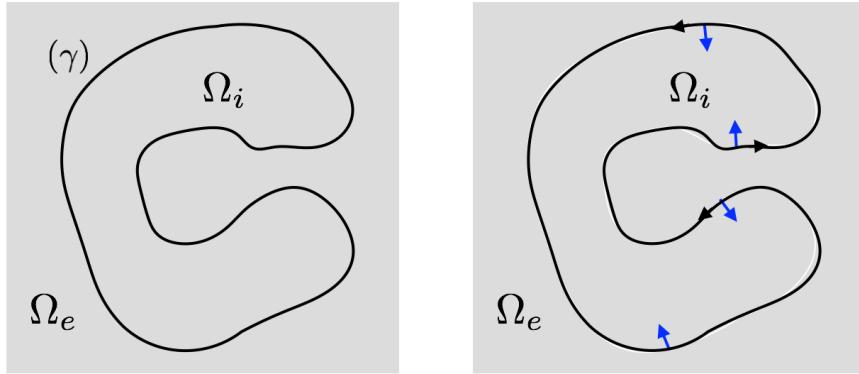


FIGURE 4.5 – un lacet simple (gauche) et l’orientation qui en fait le bord orienté de son intérieur (droite). En bleu, le vecteur normal  $n(z)$  associé à cette orientation.



FIGURE 4.6 – Le multi-lacet de gauche est le bord orienté de  $\Omega$ , pas celui de droite.

$\Omega_i$ .

Plus précisément, si on oriente  $\gamma_0$  de façon directe et chacun des  $\gamma_\ell$  de façon indirecte, alors le multi-lacet  $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_L$  est le bord orienté de l’ouvert borné  $\Omega = \Omega_0 \setminus \overline{\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_L}$  où  $\Omega_\ell$  est l’intérieur du lacet  $\gamma_\ell$ . Il est important de retenir que, comme la figure 4.6 l’illustre, l’orientation de chaque lacet compte.

#### 4.4.2 Théorème de Cauchy

Nous allons établir ce théorème en passant par une approche radicalement différente de celle de la démonstration du théorème 4.7 (qui passait par l’existence d’une primitive) : nous allons revenir à l’identification de  $\mathbb{C}$  avec  $\mathbb{R}^2$  et à la théorie de l’intégration des fonctions de deux variables. Plus précisément nous allons nous appuyer sur les formules de Green qui, rappelons-le, généralisent en dimension supérieure l’intégration par parties pour les fonctions d’une variable réelle. Nous allons plus précisément utiliser la formule de Stokes, qui généralise la formule

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a),$$

et dont toutes les formules de Green découlent.

**Rappel : Formule de Stokes.** Nous rappelons ici la formule de Stokes vue dans le cours MA102. On suppose que  $\gamma$  est le bord orienté de  $\Omega$  et que  $\mathbf{v}(x, y)$  un désigne champ de vecteurs défini de  $\overline{\Omega}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , de classe  $C^1$  dans  $\overline{\Omega}$ , alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx dy = - \int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot n \, d\sigma \quad (4.29)$$

**Remarque 4.22** *Dans le cours MA102, la formule (4.29) est donnée avec le signe + dans le membre de droite. Ceci est dû au fait que le vecteur normal considéré est le vecteur normal unitaire sortant, et non rentrant comme ici.*

**Théorème 4.23** *Soit  $\gamma$  un multi-lacet qui est le bord orienté d'un ouvert borné  $\Omega$ . Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un voisinage de  $\overline{\Omega}$ , alors*

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0. \quad (4.30)$$

**DÉMONSTRATION.** Posons  $P(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy)$  et  $Q(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy)$ . En appliquant la formule de Stokes aux deux champs de vecteurs  $\mathbf{v}_1 = (Q, P)^t$  et  $\mathbf{v}_2 = (-P, Q)^t$ , qui sont évidemment de classe  $C^1$  dans  $\overline{\Omega}$ , nous obtenons, si  $n(x + iy) = n_x(x, y) + i n_y(x, y)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (\partial_x Q + \partial_y P) \, dx dy = - \int_{\gamma} (Q n_x + P n_y) \, d\sigma \\ \int_{\Omega} (\partial_y Q - \partial_x P) \, dx dy = - \int_{\gamma} (Q n_y - P n_x) \, d\sigma \end{array} \right.$$

D'après les relations de Cauchy-Riemann (2.10), les membres de gauche des deux égalités ci-dessus sont identiquement nuls. On en déduit

$$(a) \quad \int_{\gamma} (Q n_x + P n_y) \, d\sigma = 0, \quad (b) \quad \int_{\gamma} (Q n_y - P n_x) \, d\sigma = 0 \quad (4.31)$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que (4.31) nous fournit bien le résultat annoncé. Or si  $g(t) = g_r(t) + i g_i(t) : [a_\ell, b_\ell]$  (où  $(g_r, g_i)$  sont les parties réelles et imaginaires de  $g$ ) est un paramétrage du lacet  $\gamma_\ell$  (nous omettons de mettre un indice  $\ell$  à la fonction  $g$  pour ne pas alourdir la notation), nous avons d'après (3.11) (par abus de notation nous notons aussi  $g(t)$  le couple  $(g_r(t), g_i(t))$  :

$$(n_x + i n_y)(g(t)) = i (g'_r(t) + i g'_i(t)) / |g'(t)|,$$

ce qui implique

$$n_x(g(t)) = -g'_i(t) / |g(t)|, \quad n_y(g(t)) = g'_r(t) / |g'(t)|. \quad (4.32)$$

Comme par définition, pour  $u \in C^0(\gamma)$ ,  $\int_{\gamma_\ell} u \, d\sigma = \int_{a_\ell}^{b_\ell} u(g(t)) |g'(t)| \, dt$ , il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\gamma_\ell} (Q n_x + P n_y) \, d\sigma = \int_{a_\ell}^{b_\ell} [P(g(t)) g'_r(t) - Q(g(t)) g'_i(t)] \, dt, \\ \int_{\gamma_\ell} (Q n_y - P n_x) \, d\sigma = \int_{a_\ell}^{b_\ell} [P(g(t)) g'_i(t) + Q(g(t)) g'_r(t)] \, dt. \end{array} \right.$$

et par conséquent, (4.31) se réécrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & \sum_{\ell=1}^N \int_{a_\ell}^{b_\ell} [P(g(t)) g'_r(t) - Q(g(t)) g'_i(t)] \, dt = 0, \\ (b) & \sum_{\ell=1}^N \int_{a_\ell}^{b_\ell} [P(g(t)) g'_i(t) + Q(g(t)) g'_r(t)] \, dt = 0. \end{array} \right. \quad (4.33)$$

Nous effectuons maintenant la combinaison linéaire  $(a) + i(b)$  pour obtenir

$$\sum_{\ell=1}^N \int_{a_\ell}^{b_\ell} P(g(t)) (g'_r(t) + i g'_i(t)) \, dt + \sum_{\ell=1}^N \int_{a_\ell}^{b_\ell} Q(g(t)) (ig'_r(t) - g'_i(t)) \, dt = 0$$

soit encore

$$\sum_{\ell=1}^N \int_{a_\ell}^{b_\ell} [P(g(t)) + i Q(g(t))] (g'_r(t) + i g'_i(t)) \, dt = 0$$

ce qui n'est autre que (4.30), via le paramétrage  $g(t)$  (cf.(3.13)).

□

Le lecteur pourra réaliser à la lecture de la preuve que le résultat reste valable pour  $f \in H(\Omega) \cup C^1(\bar{\Omega})$ . On peut encore améliorer un peu le résultat avec le corollaire suivant (que nous appellerons théorème de Cauchy dans le cadre de ce cours)

**Corollaire 4.24 (Théorème de Cauchy)** *Soit  $\gamma$  un multi-lacet qui est le bord orienté d'un ouvert borné  $\Omega$ . Soit  $f \in H(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , alors*

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0. \quad (4.34)$$

DÉMONSTRATION. Nous allons nous contenter de donner les idées de la preuve car l'exposition des détails techniques s'avèrerait fort rébarbative (voir néanmoins la remarque 4.25). L'idée est simple et bien illustrée par la figure 4.7. On introduit pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ouvert

$$\Omega_{\varepsilon} = \{z \in \Omega / d(z, \gamma) := \inf_{\zeta \in \gamma} |z - \zeta| > \varepsilon\}$$

qui "tend vers"  $\Omega$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Pour peu que l'on montre que son bord  $\gamma_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon$  est un multi-lacet et constitue le bord orienté de  $\Omega_\varepsilon$  (c'est là que ça sera difficile en général), on peut appliquer (on a tout fait pour) le théorème 4.23 avec le lacet  $\gamma_\varepsilon$ . Ensuite l'idée est de passer à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0, moralement

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = 0 \quad \longrightarrow \quad \int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

et c'est pour ce passage à la limite qu'on utilise que  $\gamma_\varepsilon$  "tend vers"  $\gamma$  et que  $f$  est continue jusqu'au bord de  $\Omega$ .

□

**Remarque 4.25** Nous encourageons le lecteur à rédiger, à titre d'exercice, les détails de la démonstration du corollaire 4.24 dans le cas particulier où chaque lacet  $\gamma_\ell$  admet une paramétrisation  $g(t)$  de classe  $C^2$ . On pourra alors démontrer que, dès que  $\varepsilon$  est inférieur au plus petit rayon de courbure (en valeur absolue) le long de  $\gamma$ , qui est bien défini compte-tenu de la régularité du paramétrage, alors  $\gamma_\varepsilon$  n'est autre que le multi-lacet défini par

$$\gamma_\varepsilon = \gamma_{\varepsilon,1} \cup \dots \cup \gamma_{\varepsilon,N}, \quad \gamma_{\varepsilon,\ell} := \{g(t) + \varepsilon n(g(t)), t \in [a_\ell, b_\ell]\}, \quad 1 \leq \ell \leq N.$$

**Quelques applications.** L'exemple le plus classique est l'invariance d'une intégrale par *déformation de contour*. Pour donner un sens rigoureux à cela, prenons l'exemple de deux lacets simples  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  orientés de façon directe, d'intérieurs respectifs  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  tels que

$$\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2.$$

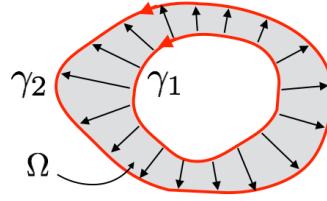
De façon imagée,  $\gamma_2$  peut être vue comme l'image de  $\gamma_1$  par une déformation continue (voir aussi figure 4.7) : imaginer une famille de contours  $\gamma(s)$ ,  $s \in [0, 1]$ , où  $\gamma(0) = \gamma_1$  et  $\gamma(1) = \gamma_2$ ,  $\gamma(s)$  dépendant continument de  $s$  de telle façon que  $\gamma(s) \cap \gamma(s') = \emptyset$  si  $s \neq s'$ . Ainsi l'ouvert  $\Omega$  entre  $\Omega_1$  et  $\overline{\Omega}_2$  est-il l'ensemble balayé par les  $\gamma(s)$ ,  $s \in ]0, 1[$  :

$$\Omega = \Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_2 \equiv \bigcup_{s \in ]0, 1[} \gamma(s)$$

Alors, l'application du théorème de Cauchy permet d'affirmer que

$$f \in H(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad \Longrightarrow \quad \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad (4.35)$$

Il suffit d'observer pour cela que  $\gamma_1 \cup \tilde{\gamma}_2$  est le bord orienté de  $\Omega$ . Dans le même esprit, soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux chemins ayant la même origine **a** et la même extrémité **b**. Supposons que l'intersection entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  soit réduite à ces deux points (figure 4.8, dessin de gauche), de telle sorte que  $\gamma_2 \cup \tilde{\gamma}_1$  est un lacet simple (nous invitons le lecteur à construire un paramétrage de ce lacet, à titre d'exercice). Si vous désignons par  $\Omega$

FIGURE 4.7 – Déformation du contour  $\gamma_1$  en  $\gamma_2$ .FIGURE 4.8 – Lacets de mêmes origine et extrémité. En gris : le domaine  $\Omega$  d'holomorphie

l'intérieur de ce lacet simple (autrement dit, l'ouvert délimité par ces deux lacets), alors, toujours grâce au théorème de Cauchy, la conclusion (4.35) reste valable.  
De façon plus générale, supposons toujours que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ont même origine et même extrémité, mais que (figure 4.8, dessin de droite)

$$\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{\mathbf{a}_0 \equiv \mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N \equiv \mathbf{b}\}.$$

On peut découper chaque chemin en  $N$  sous-chemins

$$\gamma_1 = \gamma_1^1 \cup \dots \cup \gamma_1^N, \quad \gamma_2 = \gamma_2^1 \cup \dots \cup \gamma_2^N,$$

où  $\gamma_1^\ell \subset \gamma_1$  et  $\gamma_2^\ell \subset \gamma_2$  ont pour origine  $\mathbf{a}_{\ell-1}$  et extrémité  $\mathbf{a}_\ell$ . Chaque chemin  $\gamma_\ell = \gamma_1^\ell \cup \tilde{\gamma}_2^\ell$  est un lacet simple d'intérieur  $\Omega_\ell$  dont  $\gamma_1^\ell \cup \tilde{\gamma}_2^\ell$  est le bord orienté. Si nous posons alors

$$\Omega := \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N,$$

alors la conclusion (4.35) reste aussi valable. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = \sum_{\ell=1}^N \int_{\gamma_\ell} f(z) dz$$

et que chaque terme de la somme du membre de droite est nulle grâce au théorème de Cauchy.

### 4.4.3 Formule de Cauchy

**Théorème 4.26 (Formule de Cauchy)** *Soit  $\gamma$  un multi-lacet qui est le bord orienté d'un ouvert borné  $\Omega$ . Soit  $f \in H(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ , alors*

$$\forall z \in \Omega, \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (4.36)$$

DÉMONSTRATION. La preuve est très similaire, sinon quasiment identique, à celle du théorème 4.13. Choisissons  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que  $\overline{B(z, \varepsilon)}$  soit inclus dans  $\Omega$  (cf. figure 4.9). L'ouvert  $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{B(z, \varepsilon)}$  admet pour bord orienté  $\gamma \cup \tilde{\gamma}_\varepsilon$  où  $\gamma_\varepsilon$  est le cercle de centre  $z$  et rayon  $\varepsilon$ , orienté de façon directe. Nous pouvons appliquer le corollaire 4.24 à la fonction

$$\zeta \rightarrow \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \in H(\Omega_\varepsilon) \cup C^0(\overline{\Omega_\varepsilon})$$



FIGURE 4.9 – Les ouverts  $\Omega$  (gauche) et  $\Omega_\varepsilon$  (droite)

Nous en déduisons que

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

d'où le résultat par passage à la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  (cf. lemme 4.12).  $\square$

Par dérivation sous le signe intégral, nous déduisons le

**Corollaire 4.27** *Soit  $\gamma$  un multi-lacet qui est le bord orienté d'un ouvert borné  $\Omega$ . Soit  $f \in H(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ , alors*

$$\forall z \in \Omega, \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (4.37)$$

La formule de Cauchy est un outil essentiel de la théorie des fonctions analytiques. Elle débouche en particulier sur la formule des résidus (une sorte de généralisation de la formule de Cauchy) qui sera exposée au prochain chapitre et qui constitue un outil extrêmement puissant de calcul d'intégrales.

# Chapitre 5

## Le théorème des résidus

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux fonctions de la variable complexe qui sont holomorphes, sauf en certains points où elles sont singulières. Après avoir introduit la notion de développement en série de Laurent, nous décrirons précisément les différents types de singularités qui peuvent se produire, puis nous démontrerons un résultat fondamental de ce cours, à savoir le théorème des résidus. Ce théorème permet d'évaluer la valeur de l'intégrale d'une telle fonction sur un lacet entourant un certain nombre de singularités ponctuelles. C'est un théorème extrêmement utile qui fournit, comme on le verra, un moyen puissant d'évaluer diverses intégrales de fonctions de la variable réelle.

### 5.1 Séries de Laurent

Une série de Laurent est une série de la forme

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

ou plus généralement

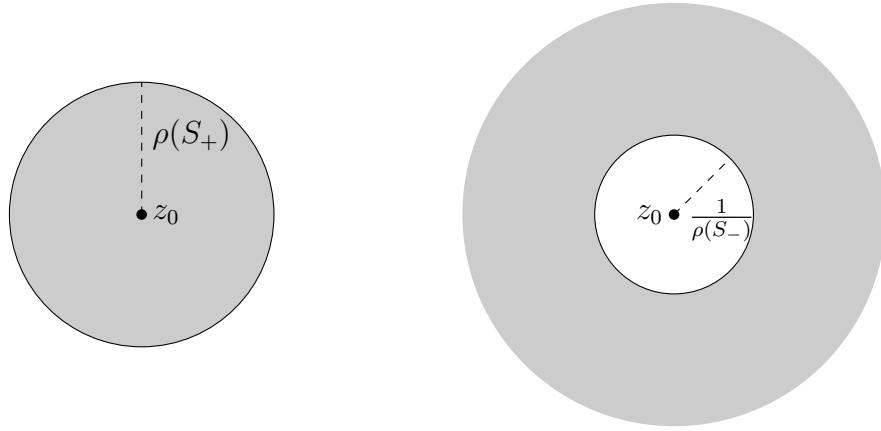
$$S(z - z_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

où les  $a_n$  sont des nombres complexes. C'est donc une généralisation naturelle des séries entières, mais cette fois avec des indices positifs et négatifs. Si l'on pose :

$$S_+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ et } S_-(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^n,$$

il est clair que

$$S(z - z_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = S_+(z - z_0) + S_-((z - z_0)^{-1}).$$

FIGURE 5.1 – Domaines de convergences des séries  $S_+(z - z_0)$  et  $S_-(1/(z - z_0))$ 

Il en résulte que si  $\rho(S_+)$  et  $\rho(S_-)$  désignent les rayons de convergence des séries  $S_+$  et  $S_-$ , alors le domaine de convergence de la série de Laurent  $S(z - z_0)$  est la couronne (éventuellement vide)

$$\mathcal{C} = \left\{ z \in \mathbb{C}; \frac{1}{\rho(S_-)} < |z - z_0| < \rho(S_+) \right\}.$$

Pour que cette couronne soit non vide, il faut que les deux rayons soient non nuls et que leur produit soit strictement supérieur à 1. Dans ce cas, la fonction définie par la série de Laurent s'écrit donc comme la somme d'une fonction analytique dans le disque de rayon  $\rho(S_+)$  et d'une fonction analytique à l'extérieur du disque de rayon  $1/\rho(S_-)$ .

Ainsi, tout comme pour les séries entières, la série de Laurent définit une fonction holomorphe dans sa couronne de convergence.

Réiproquement, nous pouvons démontrer qu'une fonction holomorphe dans une couronne peut y être développée en série de Laurent :

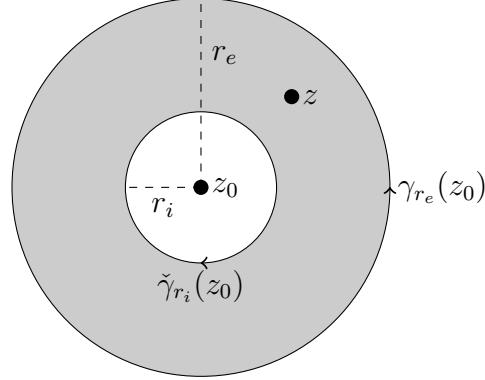
**Théorème 5.1** *Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  et soient  $r_i$  et  $r_e$  deux réels strictement positifs tels que  $0 < r_i < r_e < \infty$ . Alors toute fonction  $f$  holomorphe dans la couronne*

$$\mathcal{C}_{r_i, r_e}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; r_i < |z - z_0| < r_e\}$$

*est développable en série de Laurent dans  $\mathcal{C}_{r_i, r_e}(z_0)$  et ce développement est unique.*

**Remarque 5.2** *La phrase “ $f$  est développable en série de Laurent dans  $\mathcal{C}_{r_i, r_e}(z_0)$ ” signifie en particulier que la série de Laurent est convergente pour  $z \in \mathcal{C}_{r_i, r_e}(z_0)$ . Comme une série de Laurent est la somme d'une série entière en  $z - z_0$  et d'une série entière en  $(z - z_0)^{-1}$ , on vérifie facilement en utilisant les résultats connus pour les séries entières que la série de Laurent est uniformément convergente dans toute couronne  $\mathcal{C}_{r'_i, r'_e}(z_0)$  avec  $r'_i > r_i$  et  $r'_e < r_e$ .*

DÉMONSTRATION. 1- Commençons par traiter le cas où  $f$  est continue jusqu'au bord de la couronne  $\mathcal{C}_{r_i, r_e}(z_0)$ . On procède comme pour montrer qu'une fonction holomorphe est analytique. On considère le bord orienté de la couronne  $\mathcal{C}_{r_i, r_e}(z_0)$  qui est donné par  $\gamma_{r_e}(z_0) \cup \check{\gamma}_{r_i}(z_0)$ , où  $\gamma_{r_e}(z_0) = \{z_0 + r_e e^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  est parcouru dans le sens direct, et  $\check{\gamma}_{r_i}(z_0)$  est parcouru en sens inverse.



D'après la formule de Cauchy (4.36), on sait alors que :

$$\forall z \in \mathcal{C}_{r_i, r_e}(z_0) \quad f(z) = f_e(z) - f_i(z)$$

où

$$f_e(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_e}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{et} \quad f_i(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_i}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Il apparaît clairement sur ces formules que  $f_e$  se prolonge analytiquement à tout l'intérieur du disque  $D_{r_e}(z_0)$ , alors que  $f_i$  se prolonge analytiquement à tout l'extérieur du disque  $D_{r_i}(z_0)$ , et tend vers 0 à l'infini.

On montre alors, comme dans la preuve du caractère analytique des fonctions holomorphes, que comme

$$\frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{r_e} < 1, \quad \forall \zeta \in \gamma_{r_e}(z_0),$$

la fonction  $f_e(z)$  admet le développement en série entière suivant :

$$f_e(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^e (z - z_0)^n \quad \text{où} \quad a_n^e = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_e}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

De façon analogue, comme

$$\frac{|\zeta - z_0|}{|z - z_0|} < 1 \quad \forall \zeta \in \gamma_{r_i}(z_0),$$

on a

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Comme la convergence est uniforme, on peut intervertir la somme avec l'intégrale et on voit que la fonction  $f_i(z)$  admet le développement suivant :

$$f_i(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^i (z - z_0)^{-n} \text{ où } a_n^i = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_i}(z_0)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta.$$

On a montré au passage que les séries entières  $\sum a_n^e z^n$  et  $\sum a_n^i z^n$  ont des rayons de convergences respectifs au moins égaux à  $r_e$  et  $1/r_i$ .

2 - Pour montrer que ce développement en série de Laurent est unique, supposons que  $f$  admette deux développements en série de Laurent dans la couronne  $\mathcal{C}_{r_i, r_e}(z_0)$  :

$$f(z) = f_e(z) - f_i(z) = \tilde{f}_e(z) - \tilde{f}_i(z),$$

où  $f_e$  et  $\tilde{f}_e$  sont analytiques dans le disque  $D_{r_e}(z_0)$ , et  $f_i$  et  $\tilde{f}_i$  sont analytiques à l'extérieur du disque  $D_{r_i}(z_0)$  et tendent vers 0 à l'infini. Alors on a pour tout  $z \in \mathcal{C}_{r_i, r_e}(z_0)$  :

$$f_e(z) - \tilde{f}_e(z) = f_i(z) - \tilde{f}_i(z).$$

D'après le principe du prolongement unique, on a donc une fonction entière (i.e. analytique dans tout le plan complexe)  $g(z)$  telle que  $g(z) = f_e(z) - \tilde{f}_e(z)$  dans le disque  $D_{r_e}(z_0)$ , et  $g(z) = f_i(z) - \tilde{f}_i(z)$  à l'extérieur du disque  $D_{r_i}(z_0)$ . De plus, cette fonction tend vers 0 à l'infini. D'après le théorème de Liouville, elle est donc identiquement nulle.

3 - Si  $f$  n'est pas continue jusqu'au bord de la couronne  $\mathcal{C}_{r_i, r_e}(z_0)$ , il suffit de remarquer que tout point  $z \in \mathcal{C}_{r_i, r_e}(z_0)$  appartient aussi à une couronne strictement plus petite  $\mathcal{C}_{r_i + \varepsilon, r_e - \varepsilon}(z_0)$  pour  $\varepsilon$  assez petit. Dans cette couronne,  $f$  est holomorphe et continue jusqu'au bord. D'après le point 1 de la preuve,  $f$  y admet donc un développement en série de Laurent, et d'après le point 2, ce développement est unique et ne dépend donc pas de  $\varepsilon$ .

□

## 5.2 Singularités ponctuelles

Nous allons maintenant nous intéresser aux fonctions qui sont holomorphes dans un disque pointé  $\dot{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < r\}$ . Notre objectif est de décrire ce qui peut advenir pour une telle fonction lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ . Pour cela, on commence par remarquer que ces fonctions admettent un développement en série de Laurent (c'est un corollaire évident du théorème précédent) :

**Corollaire 5.3** *Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  et soit  $f$  une fonction holomorphe dans le disque pointé  $\dot{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < r\}$ . Alors  $f$  est développable en série de Laurent dans*

$\dot{D}_r(z_0)$  :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Plus précisément

- la fonction  $S_+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  est analytique dans le disque de rayon  $r$ ,
- la fonction  $S_-(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$  est entière et

$$f(z) = S_+(z - z_0) + S_- \left( \frac{1}{z - z_0} \right)$$

Enfin, de deux choses l'une : soit  $f$  est analytique dans le disque  $D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$ , soit  $f$  est non bornée au voisinage de  $z_0$ .

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que si  $f$  est holomorphe dans le disque pointé  $\dot{D}_r(z_0)$ , elle est à plus forte raison holomorphe dans toute couronne  $\mathcal{C}_{r_i, r}(z_0)$  avec  $0 < r_i < r$ . Il en résulte que  $f$  admet un développement en série de Laurent dans cette couronne et, puisque  $r_i$  peut être pris aussi petit que l'on veut, la série entière  $S_-(z)$  a un rayon de convergence infini. Autrement dit,  $S_-(z)$  est une fonction entière qui vaut 0 en 0 (puisque son terme d'indice  $n = 0$  est nul). Or si  $f(z)$  est bornée, alors  $S_-(z)$  l'est également. Il en résulte que  $S_-$  est identiquement nulle d'après le théorème de Liouville. Dans ce cas,

$$f(z) = S_+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

donc  $f(z)$  se prolonge analytiquement à tout le disque  $D_r(z_0)$ . □

Soit  $f$  une fonction holomorphe dans le disque pointé  $\dot{D}_r(z_0)$  et soit

$$f(z) = S_+(z - z_0) + S_- \left( \frac{1}{z - z_0} \right)$$

son développement en série de Laurent. Alors on se trouve dans un et un seul des trois cas suivants :

1. Soit  $S_-$  est identiquement nulle. Dans ce cas,  $f(z)$  se prolonge analytiquement à tout le disque  $D_r(z_0)$  (on dit parfois que la singularité de  $f$  en  $z_0$  est fictive).

2. Soit  $S_-(z)$  est un polynôme de degré  $m$ . Cela signifie que le développement de  $f$  en série de Laurent autour de  $z_0$  est de la forme :

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ avec } a_{-m} \neq 0.$$

On dit dans ce cas que  $f$  admet un pôle d'ordre  $m$  en  $z_0$ .

3. Soit le développement de  $f$  en série de Laurent autour de  $z_0$  contient une infinité de coefficients d'indice négatif non nuls. On dit alors que  $f$  admet une singularité essentielle en  $z_0$ .

Le lemme ci-dessous va nous permettre de savoir dans quel cas on se trouve, sans avoir besoin de calculer le développement en série de Laurent de  $f$  :

**Lemme 5.4** *Soit  $f$  une fonction holomorphe dans le disque pointé  $\dot{D}_r(z_0)$ . Alors :*

1. *si  $(z - z_0)f(z)$  tend vers 0 quand  $z$  tend vers  $z_0$ , alors  $f$  se prolonge analytiquement à tout le disque  $D_r(z_0)$ , et réciproquement ;*
2. *s'il existe un entier  $m > 0$  tel que  $(z - z_0)^m f(z)$  admette une limite non nulle en  $z_0$ , alors  $f$  admet un pôle d'ordre  $m$  en  $z_0$ , et réciproquement ;*
3. *si quel que soit l'entier  $m$ , la fonction  $(z - z_0)^m f(z)$  n'est pas bornée dans le disque pointé  $\dot{D}_r(z_0)$ , alors  $f$  admet une singularité essentielle en  $z_0$ .*

DÉMONSTRATION.

1. Supposons que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

On introduit la fonction  $h(z)$  définie comme suit :  $h(z) = (z - z_0)^2 f(z)$  si  $z \neq z_0$ , et  $h(z_0) = 0$ . Il est clair que  $h$  une fonction holomorphe dans le disque pointé  $\dot{D}_r(z_0)$ . De plus :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

Donc  $h$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable dans tout le disque  $D_r(z_0)$ . Comme de plus  $h(z_0) = h'(z_0) = 0$ , il en résulte que  $h(z)$  admet un développement en série entière autour de  $z_0$  de la forme :

$$h(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

On en déduit que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}(z - z_0)^n \quad \forall z \in \dot{D}_r(z_0),$$

donc  $f(z)$  se prolonge analytiquement à tout le disque  $D_r(z_0)$ .

2. Supposons qu'il existe un entier  $m > 0$  tel que  $(z - z_0)^m f(z)$  admette une limite non nulle en  $z_0$ . Dans ce cas,  $(z - z_0)^{m+1} f(z)$  tend vers 0 et donc, d'après ce qui précède,  $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$  se prolonge analytiquement à tout le disque  $D_r(z_0)$  et prend une valeur non nulle en  $z_0$ . Le développement en série entière de  $g$  nous fournit le développement en série de Laurent de  $f$  sous la forme :

$$f(z) = \frac{\ell}{(z - z_0)^m} + \sum_{n=-m+1}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

où  $\ell = g(z_0) \neq 0$ .

3. Enfin, si quel que soit l'entier  $m$ , la fonction  $(z - z_0)^m f(z)$  n'est pas bornée, on n'est dans aucun des deux cas précédents donc la singularité de  $f$  en  $z_0$  est essentielle.

□

**Exemple 5.5** 1. On sera souvent dans le cas où  $f$  est définie comme le quotient de deux fonctions analytiques  $u$  et  $v$ . Plus précisément, soient  $u$  et  $v$  deux fonctions analytiques (non identiquement nulles) dans  $D_r(z_0)$  telles que  $u(z_0) \neq 0$  et  $v(z_0) = 0$ . Alors on sait qu'il existe  $r > 0$  tel que  $v(z)$  ne s'annule pas dans le disque pointé  $\dot{D}_r(z_0)$ . On peut donc y définir la fonction  $f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$ .

Par ailleurs,  $v(z) = (z - z_0)^m g(z)$  pour un certain entier  $m$  strictement positif, qui est l'ordre de  $z_0$  (en tant que zéro de  $v$ ) et pour une certaine fonction  $g(z)$  analytique dans  $D_r(z_0)$ , telle que  $g(z_0) \neq 0$ . On a alors :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(z)}{g(z)} = \frac{u(z_0)}{g(z_0)} \neq 0.$$

On conclut finalement que  $f(z)$  admet un pôle d'ordre  $m$  en  $z_0$ .

2. Un exemple de singularité essentielle en  $z_0 = 0$  est fourni par la fonction

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{-n}}{n!}.$$

On peut noter que le comportement de  $f$  au voisinage de 0 est plus compliqué que dans le cas d'un pôle. Ainsi, s'il est vrai que  $f$  n'est pas bornée, en revanche  $|f(z)|$  ne tend pas vers l'infini quand  $z$  tend vers 0. En effet, si l'on pose  $z = \rho e^{i\theta}$ , on voit que  $|f(z)| = e^{\cos \theta / \rho}$ . Le comportement de  $|f(z)|$  au voisinage de  $z = 0$  est donc totalement différent suivant le signe de  $\cos \theta$ . En particulier, si  $z$  tend vers 0 en venant du demi-plan complexe  $\Re(z) < 0$ ,  $f(z)$  tend exponentiellement vite vers 0.

Le lemme 5.4 permet de montrer le résultat étonnant suivant :

**Lemme 5.6** *Soit  $f$  une fonction holomorphe dans le disque pointé  $\dot{D}_r(z_0)$ . Alors  $f$  admet une singularité essentielle en  $z_0$  si et seulement si  $f(\dot{D}_r(z_0))$  est dense dans  $\mathbb{C}$ .*

DÉMONSTRATION. Pour montrer la contraposée, on suppose que  $f(\dot{D}_r(z_0))$  n'est pas dense dans  $\mathbb{C}$ . Cela signifie qu'il existe un disque de centre  $a$  et de rayon  $\varepsilon > 0$  qui n'intersecte pas  $f(\dot{D}_r(z_0))$ . Autrement dit :

$$|f(z) - a| > \varepsilon \quad \forall z \in \dot{D}_r(z_0).$$

On pose alors

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a}.$$

On a  $|g(z)| < 1/\varepsilon$  pour tout  $z \in \dot{D}_r(z_0)$ , donc d'après le lemme 5.4,  $g(z)$  se prolonge en une fonction holomorphe dans tout le disque  $D_r(z_0)$ . De deux choses l'une :

- soit  $g(z_0) \neq 0$ . Alors  $f$  est elle-même bornée au voisinage de  $z_0$ , donc holomorphe dans tout le disque  $D_r(z_0)$  ;
- soit  $g(z_0) = 0$ . Alors  $g$  s'écrit sous la forme :

$$g(z) = h(z)(z - z_0)^m$$

où  $m$  est l'ordre du zéro, et  $h$  une fonction analytique non nulle en  $z_0$ . On a alors :

$$(z - z_0)^m f(z) = a(z - z_0)^m + \frac{1}{h(z)},$$

dont on déduit d'après le lemme 5.4 que  $f$  admet un pôle d'ordre  $m$  en  $z_0$ .

On voit donc que  $f$  ne peut pas admettre une singularité essentielle en  $z_0$ . □

### 5.3 Théorème des résidus

Nous allons maintenant nous intéresser à l'intégrale sur le bord orienté d'un compact d'une fonction holomorphe dans le compact, sauf en des points isolés où la fonction peut présenter des singularités. La formule de Cauchy fournit déjà un résultat de cette nature, puisqu'elle porte sur l'intégrale de  $f(z)/(z - z_0)$  avec  $f$  holomorphe : il s'agit donc d'une fonction admettant un pôle simple (c'est-à-dire d'ordre 1) en  $z_0$ . Le théorème des résidus que nous énonçons plus bas peut être vu comme une généralisation de la formule de Cauchy.

**Définition 5.7** Soit  $f$  une fonction holomorphe dans le disque pointé  $\dot{D}_r(z_0)$  et soit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

son développement en série de Laurent. Le coefficient  $a_{-1}$  est appelé résidu de  $f$  en  $z_0$  et est noté  $\text{Res}(f; z_0)$ .

On a alors le résultat suivant :

**Lemme 5.8** Soit  $f$  une fonction holomorphe dans le disque pointé  $\dot{D}_r(z_0)$ . Alors pour tout  $\rho < r$  :

$$\int_{\gamma_\rho(z_0)} f(z) dz = 2i\pi \text{Res}(f; z_0) \quad (5.1)$$

où  $\gamma_\rho(z_0) = \{z_0 + \rho e^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  est parcouru dans le sens direct.

**DÉMONSTRATION.** D'après le théorème 5.1,  $f$  est développable en série de Laurent dans  $\dot{D}_r(z_0)$ . Comme la convergence de cette série est uniforme sur  $\gamma_\rho(z_0)$ , on a :

$$\int_{\gamma_\rho(z_0)} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_{\gamma_\rho(z_0)} (z - z_0)^n dz.$$

Or

$$\int_{\gamma_\rho(z_0)} (z - z_0)^n dz = i \int_0^{2\pi} \rho^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta,$$

et il est clair que cette intégrale est nulle pour tout  $n \neq -1$ , et vaut  $2i\pi$  si  $n = -1$ .  $\square$

On peut maintenant énoncer et démontrer le **Théorème des résidus** :

**Théorème 5.9** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de classe  $C^1$  par morceaux, de bord orienté  $\gamma$  et soit  $\mathcal{P} = \{z_1, \dots, z_P\}$  un ensemble de  $P$  points de  $\Omega$ . On considère une fonction  $f$  holomorphe dans  $\Omega \setminus \mathcal{P}$  et continue dans  $\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}$ . Alors :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{m=1}^P \text{Res}(f; z_m) \quad (5.2)$$

**DÉMONSTRATION.** Comme  $\Omega$  est un ouvert, il existe  $r$  assez petit tel que les disques fermés  $\overline{D}_\rho(z_m)$  pour  $m = 1, \dots, P$  soient tous contenus dans  $\Omega$  et disjoints deux à deux. En appliquant le théorème de Cauchy au bord orienté de  $\Omega \setminus \cup_{m=1}^P \overline{D}_\rho(z_m)$ , on obtient l'égalité suivante :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{m=1}^P \int_{\gamma_{\rho}(z_m)} f(z) dz$$

où  $\gamma_\rho(z_m) = \partial D_\rho(z_m)$  est parcouru dans le sens direct. On conclut en utilisant (5.1).  $\square$

L'intérêt de ce théorème est que l'on a remplacé le calcul d'une intégrale sur un lacet par le calcul d'un nombre fini de résidus. Voyons maintenant comment l'on calcule effectivement un résidu.

**Cas d'un pôle simple** : si  $z_0$  est un pôle simple de  $f$ , cela signifie que le développement en série de Laurent de  $f$  autour de  $z_0$  est de la forme

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Alors il est clair que :

$$\text{Res}(f; z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

**Cas d'un pôle multiple** : Commençons par un pôle double. Dans ce cas, le développement en série de Laurent de  $f$  autour de  $z_0$  est de la forme

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

On a donc :

$$(z - z_0)^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}(z - z_0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{(n+2)}.$$

En dérivant cette expression, on trouve que :

$$\frac{d}{dz} ((z - z_0)^2 f(z)) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+2)(z - z_0)^{(n+1)}.$$

D'où cette fois :

$$\text{Res}(f; z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} ((z - z_0)^2 f(z)).$$

Plus généralement, pour un pôle d'ordre inférieur ou égal à  $m$ , on montre que :

$$\text{Res}(f; z_0) = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^m f(z))^{(m-1)}.$$

**Application au calcul d'intégrales.** Le théorème des résidus permet de calculer très simplement de nombreuses intégrales, même lorsque l'on ne dispose pas d'une primitive explicite de la fonction à intégrer. Supposons par exemple que l'on veuille calculer

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes tels que  $\deg Q \geq \deg P + 2$  et tels que  $Q$  n'a pas de racines réelles. On note  $z_1, z_2, \dots, z_P$  les racines de  $Q$  de partie imaginaire positive et

$$R_0 = \max_{m=1, \dots, P} |z_m|.$$

Enfin, pour  $R > 0$ , on note  $\mathcal{C}_R$  le demi-cercle de centre 0 et de rayon  $R$  situé dans le demi-plan complexe  $\Im z > 0$  et parcouru dans le sens direct. Alors, pour tout  $R > R_0$ , d'après le théorème des résidus, on a :

$$\int_{-R}^{+R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \int_{\mathcal{C}_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2i\pi \sum_{m=1}^P \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}; z_m\right).$$

Comme on vérifie aisément qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout de  $R$  :

$$\left| \int_{\mathcal{C}_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq \frac{C}{R},$$

on obtient finalement que :

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2i\pi \sum_{m=1}^P \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}; z_m\right).$$

On obtient par exemple avec cette méthode que :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = 2i\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}; i\right) = 2i\pi \frac{1}{2i} = \pi.$$

## 5.4 Le principe de l'argument

Nous allons voir que le théorème des résidus permet de compter le nombre de racines d'une fonction holomorphe situées à l'intérieur d'un contour donné. C'est un résultat extrêmement utile en pratique.

**Théorème 5.10** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{C}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et de bord orienté  $\gamma$ . Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un ouvert contenant  $\bar{\Omega}$ . On suppose que  $f$  ne s'annule pas sur  $\gamma$ . Alors :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} = \mathcal{Z}(f, \Omega)$$

où  $\mathcal{Z}(f, \Omega)$  désigne le nombre de zéros de  $f$  situés dans  $\Omega$ , comptés avec leur ordre de multiplicité.

DÉMONSTRATION. On note  $z_1, z_2, \dots, z_N$  les zéros de  $f$  situés dans  $\Omega$ , qui sont en nombre fini d'après le principe des zéros isolés. D'après le théorème des résidus :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{m=1}^N \text{Res} \left( \frac{f'(z)}{f(z)}; z_m \right).$$

Calculons le résidu de  $f'(z)/f(z)$  en l'un des points  $z_m$  où  $f$  s'annule. On sait qu'il existe une fonction analytique  $h(z)$  telle que au voisinage de  $z_m$  :

$$f(z) = (z - z_m)^{\ell_m} h(z)$$

où  $\ell_m$  désigne la multiplicité de  $z_m$  comme zéro de  $f$ . On a alors :

$$f'(z) = \ell(z - z_m)^{(\ell_m-1)} h(z) + (z - z_m)^{\ell_m} h'(z),$$

d'où

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\ell_m}{z - z_m} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

On en déduit que  $z_m$  est un pôle simple de  $f'(z)/f(z)$  et que :

$$\text{Res} \left( \frac{f'(z)}{f(z)}; z_m \right) = \lim_{z \rightarrow z_m} (z - z_m) \frac{f'(z)}{f(z)} = \ell_m.$$

Le théorème s'en déduit. □

On peut raffiner ce résultat en considérant une fonction  $f$  admettant elle-même des pôles dans  $\Omega$ . Nous introduisons tout d'abord la définition suivante :

**Définition 5.11** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . On dit qu'une fonction  $f(z)$  est méromorphe dans  $\Omega$  si elle est holomorphe dans  $\Omega \setminus \mathcal{P}$  où  $\mathcal{P}$  est un ensemble de points isolés où  $f$  admet un pôle d'ordre fini.

On montre alors le

**Théorème 5.12** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{C}$ , de classe  $C^1$  par morceaux et de bord orienté  $\gamma$ . Soit  $f$  une fonction méromorphe dans un ouvert contenant  $\bar{\Omega}$ . On suppose enfin que  $f$  ne s'annule pas sur  $\gamma$ . Alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} = \mathcal{Z}(f, \Omega) - \mathcal{P}(f, \Omega)$$

où  $\mathcal{Z}(f, \Omega)$  (resp.  $\mathcal{P}(f, \Omega)$ ) désigne le nombre de zéros (resp. de pôles) de  $f$  situés dans  $\Omega$ , comptés avec leur ordre de multiplicité.

DÉMONSTRATION. On note  $z_1, z_2, \dots, z_N$  les zéros de  $f$  et  $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{\tilde{N}}$  les pôles de  $f$  situés dans  $\Omega$ . D'après le théorème des résidus, on a cette fois :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{m=1}^N \text{Res} \left( \frac{f'(z)}{f(z)}; z_m \right) + \sum_{m=1}^{\tilde{N}} \text{Res} \left( \frac{f'(z)}{f(z)}; \tilde{z}_m \right).$$

Pour le résidu de  $f'(z)/f(z)$  en l'un des points  $z_m$  où  $f$  s'annule, on a vu que :

$$\text{Res} \left( \frac{f'(z)}{f(z)}; z_m \right) = \ell_m$$

où  $\ell_m$  désigne la multiplicité de  $z_m$  comme zéro de  $f$ .

Calculons maintenant le résidu de  $f'(z)/f(z)$  en l'un des points  $\tilde{z}_m$  où  $f$  admet un pôle. On sait qu'il existe une fonction analytique  $h(z)$  telle que au voisinage de  $\tilde{z}_m$  :

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - \tilde{z}_m)^{\tilde{\ell}_m}}$$

où  $\tilde{\ell}_m$  désigne l'ordre de  $\tilde{z}_m$  comme pôle de  $f$ . On a alors :

$$f'(z) = \frac{-\tilde{\ell}_m h(z)}{(z - \tilde{z}_m)^{\tilde{\ell}_m+1}} + \frac{h'(z)}{(z - \tilde{z}_m)^{\tilde{\ell}_m}},$$

d'où

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-\tilde{\ell}_m}{z - \tilde{z}_m} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

On en déduit que

$$\text{Res} \left( \frac{f'(z)}{f(z)}; \tilde{z}_m \right) = -\tilde{\ell}_m$$

et on conclut aisément. □



# Chapitre 6

## Logarithme, racines carrées, coupures

### 6.1 Le logarithme complexe

La construction du logarithme complexe apporte une réponse à l'une (quelconque) des trois questions suivantes :

1. Peut-on construire une primitive de la fonction  $1/z$  ?
2. Peut-on construire un prolongement analytique de la fonction  $\ln x, x \in \mathbb{R}_*^+$  ?
3. Peut-on construire l'inverse de la fonction exponentielle  $e^z$  ?

Nous allons voir qu'en répondant à la première question, nous répondrons du même coup aux deux suivantes. Nous verrons de même qu'il n'y a pas une réponse unique à ces questions et qu'on peut en fait construire plusieurs logarithmes complexes.

#### 6.1.1 Le logarithme comme primitive de $1/z$

Attaquons maintenant la première question. Notre but est de trouver un domaine  $\Omega$  du plan complexe, le plus grand possible, dans lequel on peut définir une fonction holomorphe  $F$  vérifiant

$$\forall z \in \Omega, \quad F'(z) = \frac{1}{z}. \tag{6.1}$$

En outre, avec en tête la question 2, nous allons demander à ce que le domaine  $\Omega$  contienne la demi-droite réelle  $\mathbb{R}_*^+$ . Bien sûr, une primitive étant définie à une constante près, nous pourrons imposer, toujours en rapport avec la question 2,

$$F(1) = 0. \tag{6.2}$$

Ainsi, de façon évidente (par intégration le long de l'axe réel, voir (6.5) plus loin), si on construit une fonction  $F$  satisfaisant (6.1) et (6.2), nous aurons aussi donné une réponse à la question 2.

Cela va nous amener dans un premier temps à définir la **détermination principale** du logarithme complexe.

Avant d'aller plus loin, notons tout d'abord que si nous nous étions posé la question de construire une primitive de la fonction  $z^n$  pour  $n$  entier relatif, la réponse eût été immédiate pour  $n \neq 1$  :

$$F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad \text{avec } \Omega = \mathbb{C} \text{ si } n \geq 0, \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ si } n \leq -2.$$

Seul le cas  $n = -1$  présente une difficulté. Ce constat est à relier avec l'observation, déjà faite à la section 3.2.1, que, si  $\gamma$  est un lacet simple (orienté de façon directe) qui entoure l'origine

$$\int_{\gamma} z^n dz = 0 \quad \text{pour } n \neq -1 \quad \text{alors que} \quad \int_{\gamma} z^{-1} dz = \frac{1}{2i\pi}.$$

En faisant référence au théorème 4.1, on en déduit que si  $1/z$  admet une primitive dans un ouvert  $\Omega$ , ce dernier ne peut contenir de lacet entourant l'origine. En d'autres termes, pour construire un tel ouvert, il faut priver le plan complexe d'un sous-ensemble empêchant de faire le tour de l'origine. Pour ce faire, et si on veut inclure dans  $\Omega$  la demi-droite  $\mathbb{R}_*^+$ , un candidat naturel (mais évidemment non unique) est :

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \Gamma, \quad \text{avec } \Gamma = \mathbb{R}_-. \tag{6.3}$$

Ici, la demi-droite réelle négative  $\Gamma$  porte le nom de **coupure** du plan complexe. La fonction  $1/z$  est en particulier holomorphe dans  $\Omega$ .

Le domaine  $\Omega$  défini par (6.3) possède la propriété que, pour tout  $z$  dans  $\Omega$ , le segment  $[1, z]$  ne contient pas l'origine, ce qui implique en particulier que la fonction  $\zeta \mapsto 1/\zeta$  est continue le long de ce segment. Ceci nous autorise à introduire la fonction

$$\forall z \in \Omega, \quad \log z := \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{6.4}$$

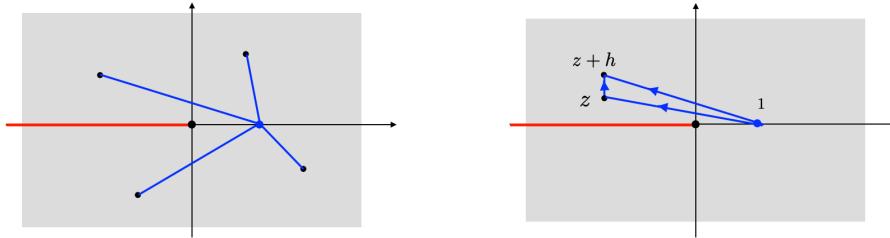
Par construction, cette fonction coïncide avec le logarithme népérien sur  $\mathbb{R}_*^+$  puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}. \tag{6.5}$$

**Théorème 6.1** *La fonction  $\log z$  définie par (6.4) est holomorphe dans  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  et*

$$\forall z \in \Omega, \quad (\log z)' = \frac{1}{z}. \tag{6.6}$$

**DÉMONSTRATION.** La démonstration est pour ainsi dire identique à celle du théorème 4.2 en remplaçant **a** par 1. Il suffit de remarquer que l'hypothèse de convexité du domaine  $\Omega$ , qui n'est plus vraie avec (6.3), peut être remplacée par l'observation que pour tout  $z$  dans  $\Omega$ , pour  $|h|$  assez petit, le triangle de sommets  $\{1, z, z+h\}$  est inclus dans  $\Omega$  (cf. figure 6.1). □

FIGURE 6.1 – Le plan complexe privé de la coupure  $\Gamma = \mathbb{R}_*^-$  (en rouge)

### 6.1.2 Inversion de l'exponentielle et applications

Nous montrons maintenant pourquoi la construction de la section précédente fournit une réponse (partielle) à la question 3.

Considérons la fonction  $\phi(z) = e^{\log z}$ ,  $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ , où  $\log z$  est définie par (6.4). La fonction  $e^z$  étant entière, en vertu du théorème de composition des fonctions holomorphes (théorème 2.12), la fonction  $\Phi(z)$  est holomorphe dans  $\Omega$ . En outre, comme  $\log x \equiv \ln x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_*^+$ ,  $\Phi(z) = z$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ . L'ouvert  $\Omega$  étant connexe, en vertu du théorème des zéros isolés (corollaire 1.15) appliqué à la fonction  $z \mapsto \Phi(z) - z$ , on en déduit que

$$\forall z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-, \quad e^{\log z} = z, \quad (6.7)$$

autrement dit, la fonction  $\log z$  est un inverse à droite de la fonction exponentielle dans  $\Omega$  (en ce sens nous répondons partiellement à la section 3). L'existence d'un tel inverse à droite montre bien entendu que

- la fonction  $z \mapsto \log z$  est injective dans  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ ,
- la fonction  $z \mapsto e^z$  est surjective de  $\mathbb{C}$  dans  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  (cf. remarque 6.2).

**Remarque 6.2** Attention,  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  ne décrit pas entièrement l'image de la fonction exponentielle. Le lecteur vérifiera à titre d'exercice que  $e^z$  est surjective de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , ensemble qui décrit l'image de la fonction  $e^z$  lorsque  $z$  parcourt le plan complexe. La formule (6.7) dit que  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  est l'image par la fonction exponentielle de tout point dans l'image de la fonction logarithme. Nous reviendrons plus loin sur ce point (voir remarque 6.7).

Inversement, l'existence d'un inverse à droite  $F(z)$  de la fonction  $e^z$  dans un domaine  $D$  du plan complexe, i.e. telle que

$$F(e^z) = z, \quad \forall z \in D \quad (6.9)$$

est liée à l'injectivité de la fonction exponentielle dans  $D$  : clairement (6.9) entraîne l'injectivité de  $e^z$  dans  $D$ .

La fonction  $e^z$  étant périodique de période  $2i\pi$ , il est clair que le domaine  $D$  ne peut

pas être le plan complexe en entier et qu'il est même nécessaire de se restreindre, par exemple, à une bande du plan complexe parallèle à l'axe réel et dont la hauteur (la dimension transverse) est inférieure ou égale à  $2\pi$ . Ceci nous amène à introduire l'ensemble

$$B_0 := \{z \in \mathbb{C} / -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}. \quad (6.10)$$

**Théorème 6.3** *La fonction  $e^z$  est une bijection de  $B_0$  dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  dont l'inverse est la fonction  $\log z$ . En particulier  $\log z$  est une bijection de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  dans  $B_0$ .*

DÉMONSTRATION. Observons tout d'abord que  $e^z$  envoie  $B_0$  dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . En effet  $e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$  montre que  $e^{x+iy} \in \mathbb{R}_-$  entraîne  $\sin y = 0$ , c'est à dire  $y = 0$  si on suppose que  $x + iy \in B_0$ . Dans ce cas  $e^{x+iy} = e^x \notin \mathbb{R}_-$ .

Nous pouvons donc définir  $\Psi(z) := \log e^z, z \in B_0$ . Par composition de fonctions holomorphes, la fonction  $\Psi(z)$  est holomorphe dans  $B_0$ . Toujours parce que  $\log x \equiv \ln x, \forall x \in \mathbb{R}_*^+$ ,  $\Psi(z) = z$  sur  $\mathbb{R}$ . L'ouvert  $B_0$  étant connexe, en vertu du théorème des zéros isolés (corollaire 1.15) appliqué à la fonction  $z \mapsto \Psi(z) - z$ , on en déduit que

$$\forall z \in B_0, \quad \log e^z = z. \quad (6.11)$$

En regroupant (6.7) et (6.11), on voit que  $e^z$  est bijective de  $B_0$  dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  dont l'inverse est  $\log z$ . On a démontré du même coup que  $\log z$  est une bijection de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  dans  $B_0$ . □

**Remarque 6.4** *Une lecture un peu trop rapide de la démonstration qui précède pourrait laisser l'impression au lecteur que l'on aurait pu faire le même raisonnement avec n'importe quelle bande du plan de hauteur  $2\pi$ . Il n'en est rien. Le point clé est la première étape de la démonstration : l'implication  $e^z \in \mathbb{R}_- \Rightarrow \operatorname{Im} z = 0$  n'est vraie que parce que  $z$  appartient à  $B_0$ . Si la bande considérée contient une ligne  $L_k := \{x + (2k+1)i\pi, x \in \mathbb{R}\}, k \in \mathbb{Z}$ , il n'est plus vrai que l'image de la fonction exponentielle est incluse dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  car l'image de  $L_k$  par  $e^z$  est précisément  $\mathbb{R}_-$  :  $e^{x+(2k+1)i\pi} = -e^x$ , qui décrit  $\mathbb{R}_-$  quand  $x$  décrit  $\mathbb{R}$ .*

En exploitant la périodicité de la fonction exponentielle, on peut énoncer un résultat similaire à celui du théorème 6.3 en remplaçant la bande  $B_0$  par la bande

$$B_k := \{z \in \mathbb{C} / -\pi + 2k\pi < \operatorname{Im} z < \pi + 2k\pi\} \equiv B_0 + 2ik\pi\mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6.12)$$

**Théorème 6.5** *Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , la fonction  $e^z$  est une bijection de  $B_k$  dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  dont l'inverse est la fonction  $\log z + 2ik\pi$ .*

DÉMONSTRATION. La translation  $\tau_{-k} : z \mapsto z - 2ik\pi$  est une bijection de  $B_k$  dans  $B_0$  et  $e^z$  une bijection de  $B_0$  dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  (théorème 6.3). Par composition,  $e^{\tau_{-k}z}$  est une bijection de  $B_k$  dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . Comme  $e^{\tau_{-k}z} = e^z$ ,  $e^z$  est une bijection de  $B_k$  dans

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$

Pour calculer l'inverse de cette bijection, supposons que  $\zeta = e^z$  avec  $z \in B_k$ . On a aussi  $\zeta = e^{z-2ik\pi}$  avec  $z - 2ik\pi \in B_0$ . D'après le théorème 6.3,  $z - 2ik\pi = \log \zeta$ , c'est à dire  $z = \log \zeta + 2ik\pi$ .

□

Une application importante du théorème 6.3 est le calcul pratique du logarithme d'un nombre complexe à partir de sa représentation polaire  $z = \rho e^{i\theta}$  (c'est cette façon de procéder qui est le plus souvent la plus simple en pratique). Notons tout d'abord que l'ensemble  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  se caractérise par

$$\Omega \equiv \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- = \{\rho e^{i\theta}, \rho > 0, -\pi < \theta < \pi\}. \quad (6.13)$$

Nous avons alors le corollaire suivant du théorème 6.3, lequel est parfois utilisé comme définition (assez intuitive convenons-en) du logarithme complexe.

**Corollaire 6.6** *On a la formule*

$$\forall (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_*^+ \times ]-\pi, \pi[, \quad \log(\rho e^{i\theta}) = \ln \rho + i\theta. \quad (6.14)$$

DÉMONSTRATION. Par propriété de l'exponentielle,  $e^{(\ln \rho + i\theta)} = e^{\ln \rho} e^{i\theta} = \rho e^{i\theta}$ . On conclut en inversant cette formule à l'aide du théorème 6.3, ce qui est licite puisque  $\ln \rho + i\theta \in B_0$  et  $\rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ .

□

Rappelons que dans l'écriture  $z = \rho e^{i\theta}$  avec  $\rho > 0, \theta \in \mathbb{R}$ ,  $\rho$  n'est autre que le module de  $z$ ,  $\rho = |z|$ , alors que  $\theta$  n'est défini qu'à  $2k\pi$  près. On caractérise entièrement  $\theta$  si on impose par exemple  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ . Ce choix est consistant avec le fait de couper le plan complexe par la demi-droite  $\mathbb{R}_-$ . On dit que  $\theta$  est l'**argument principal** de  $z$  (en connexion directe avec la détermination principale du logarithme complexe), et on note  $\theta := \text{Arg } z$ . Avec cette notation, la formule (6.14) devient

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad \log z = \ln |z| + i \text{Arg } z. \quad (6.15)$$

On peut également donner l'expression du logarithme d'un complexe en fonction de ses parties réelle et imaginaire  $x$  et  $y$ . Compte tenu de (6.15), il suffit d'exprimer le module et l'argument principal de  $z$  en fonction de  $x$  et  $y$ . De façon évidente, si  $\rho e^{i\theta} = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ,  $\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ . Obtenir une expression pour  $\theta$  n'est pas si évident. La bonne idée consiste à passer par l'angle moitié  $t = \theta/2$  qui appartient à l'intervalle  $]-\pi/2, \pi/2[$ , intervalle sur lequel la fonction tangente est une bijection dont l'image est l'axe réel en entier. Autrement dit, pour connaître  $\theta$ , il suffit de connaître  $\tan t$ . Pour ce faire, on observe que

$$x = \rho(2\cos^2 t - 1), \quad y = 2\rho \sin t \cos t,$$

d'où  $2\rho \cos^2 t = x + \rho$  et  $2\rho \sin t \cos t = y$ . En divisant la seconde égalité par la première (notons que  $2\rho \cos^2 t = x + \rho$  ne s'annule pas) nous obtenons  $\tan t = \frac{y}{(x+\rho)}$ . On en déduit

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad \log z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 2i \arctan \left( \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right). \quad (6.16)$$

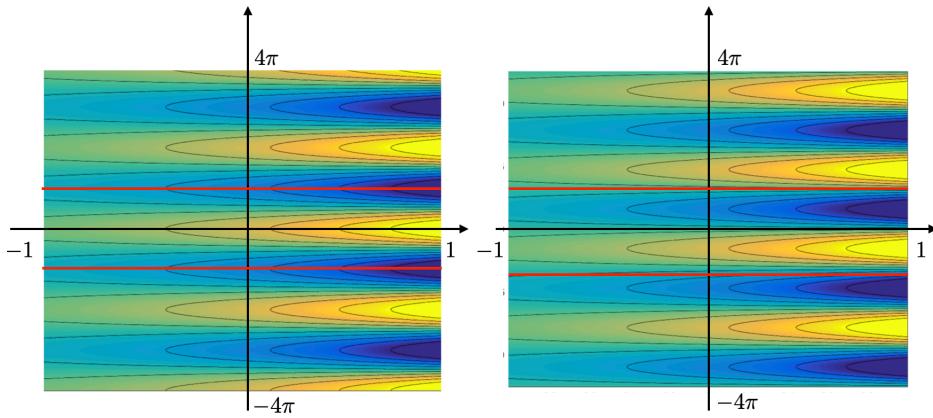


FIGURE 6.2 – Lignes de niveau des parties réelles (gauche) et imaginaire (droite) de  $e^z$

Nous encourageons le lecteur, à titre d'exercice, à retrouver le caractère holomorphe de la fonction logarithme à l'aide des relations de Cauchy-Riemann (théorème 2.6).

Attirons l'attention du lecteur sur le fait que la fonction logarithme est discontinue à travers la coupure  $\mathbb{R}_*$ . Pour montrer cela, considérons  $x < 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Nous avons  $x + i\varepsilon = \rho_\varepsilon e^{i\theta_\varepsilon}$  avec  $\rho_\varepsilon = (x^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$  et  $\theta_\varepsilon \in ]-\pi, \pi[$ . Par un argument géométrique évident, nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \theta_\varepsilon = \pi$$

Comme  $\rho_\varepsilon$  tend vers  $|x|$ , il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}_*, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log(x + i\varepsilon) = \log|x| + i\pi. \quad (6.17)$$

La fonction  $\log z$  est bien discontinue à travers la coupure  $\mathbb{R}_*$  puisque, par le même argument,

$$\forall x \in \mathbb{R}_*, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log(x - i\varepsilon) = \log|x| - i\pi. \quad (6.18)$$

Le saut de discontinuité est constant le long de la coupure

$$\forall x \in \mathbb{R}_*, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log(x + i\varepsilon) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log(x - i\varepsilon) = 2i\pi. \quad (6.19)$$

Notons que le saut de discontinuité est purement imaginaire, i. e. la partie réelle est continue. Ces propriété est illustrée par la figure 6.3 où on représente dans le plan complexe, les lignes de niveau des parties réelle et imaginaire de la fonction  $\log z$ .

**Remarque 6.7** *Nous avons défini ci dessus la fonction  $\text{Arg } z$  dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . On peut la prolonger à tout  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  par continuité dans le demi-plan complexe supérieur ce qui mène à*

$$\forall x \in \mathbb{R}_*, \quad \text{Arg } x = \pi.$$

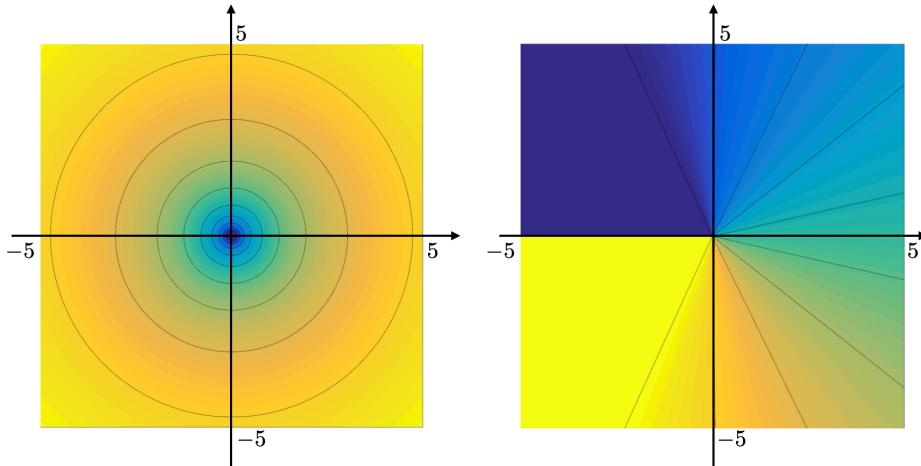


FIGURE 6.3 – La fonction  $\log z$  : partie réelle à gauche, partie imaginaire à droite

On peut alors prolonger la fonction  $\log z$  à tout  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  à l'aide de la formule (6.15) ce qui donne  $\log x = \ln|x| + i\pi$  pour  $x < 0$ . La formule (6.7) se prolonge alors en

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^-, \quad e^{\log x} = e^{\ln|x|+i\pi} = -|x| = x. \quad (6.20)$$

Autrement dit, (6.7) est vraie pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , ce qui signifie que la fonction  $\log z$  ainsi prolongée est un inverse à droite de  $e^z$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

La dernière question que nous allons aborder dans cette section est de savoir que devient pour le logarithme complexe la fameuse propriété du logarithme népérien

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+, \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y. \quad (6.21)$$

Comme nous allons le voir, cette propriété n'est **plus vraie en général** dans  $\mathbb{C}$  : méconnaître ce piège est source de nombreuses erreurs.

Le résultat correct est donné par le

**Théorème 6.8** Soient  $(z_1, z_2)$  deux nombres complexes dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  tels que

$$\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \neq \pm\pi. \quad (6.22)$$

- (i) Si  $-\pi < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 < \pi$ ,  $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$ ,
- (ii) Si  $-2\pi < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 < -\pi$ ,  $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 + 2\pi$ ,
- (iii) Si  $\pi < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 < 2\pi$ ,  $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 - 2\pi$ .

DÉMONSTRATION. Notons tout d'abord que la condition (6.22) n'est autre qu'une reformulation de la propriété  $z_1 z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ , le domaine de définition (et d'analyticité)

de la fonction  $\log z$ . Par ailleurs comme  $-\pi < \operatorname{Arg} z_1, \operatorname{Arg} z_2 < \pi$ ,  $-2\pi < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 < 2\pi$ , de telle sorte que, compte tenu de (6.22), les items (i), (ii), (iii) de l'énoncé couvrent tous les cas possibles.

La démonstration est élémentaire, il suffit de prendre soin des différents arguments des nombres complexes que l'on manipule. Dans ce qui suit, nous poserons

$$z_j = \rho_j e^{i\theta_j}, \quad \rho_j = |z_j|, \quad \theta_j = \operatorname{Arg} z_j \in ]-\pi, \pi[, \quad j = 1, 2.$$

Bien sûr on a toujours  $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ . Dans le cas (i), comme  $\theta_1 + \theta_2 \in ]-\pi, \pi[$ , il s'ensuit d'après (6.15) que  $\log(z_1, z_2) = \ln(\rho_1 \rho_2) + i(\theta_1 + \theta_2) = \ln \rho_1 + i\theta_1 + \ln \rho_2 + i\theta_2$  ce qui est le résultat annoncé puisque  $\log z_j = \ln \rho_j + i\theta_j$ .

Dans le cas (ii), on peut aussi écrire  $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2+2\pi)}$  avec  $\theta_1 + \theta_2 + 2\pi \in ]-\pi, \pi[$ , de telle sorte que  $\log(z_1, z_2) = \ln(\rho_1 \rho_2) + i(\theta_1 + \theta_2 + 2\pi) \equiv (\ln \rho_1 + i\theta_1) + (\ln \rho_2 + i\theta_2) + 2i\pi$  ce qui est bien le résultat annoncé.

Enfin, dans le cas (iii), on peut écrire  $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2-2\pi)}$  avec  $\theta_1 + \theta_2 - 2\pi \in ]-\pi, \pi[$ , de telle sorte que  $\log(z_1, z_2) = \ln(\rho_1 \rho_2) + i(\theta_1 + \theta_2 - 2\pi) \equiv (\ln \rho_1 + i\theta_1) + (\ln \rho_2 + i\theta_2) - 2i\pi$  ce qui est encore le résultat annoncé.

□

### 6.1.3 Autres déterminations du logarithme

Le choix de la demi-droite  $\mathbb{R}_-$  comme coupure du plan complexe, bien qu'il nous ait permis d'adopter la formule (6.4) pour définir le logarithme et qu'il reste le choix le plus commun dans la littérature, reste malgré tout arbitraire et une infinité d'autres choix sont possibles. Dans cette section, nous allons considérer le cas où ces coupures restent des demi-droites, en l'occurrence :

$$\Gamma_\alpha := e^{i\alpha} \mathbb{R}_-. \tag{6.23}$$

La coupure principale considérée aux sections précédentes correspond à  $\alpha = 0$ . Pour construire un logarithme avec coupure  $\Gamma_\alpha$  pour  $-\pi < \alpha < \pi$ , il suffit d'observer que la rotation  $z \mapsto e^{i\alpha} z$  envoie  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  dans  $\Omega_\alpha = \mathbb{C} \setminus \Gamma_\alpha$ , qui se décrit aussi par

$$\Omega_\alpha = \{z = \rho e^{i\theta}, \rho > 0, -\pi + \alpha < \theta < \pi + \alpha\}. \tag{6.24}$$

En particulier  $\Omega_\alpha$  contient la demi-droite réelle  $\mathbb{R}^+$  pour  $-\pi < \alpha < \pi$ . Nous pouvons alors définir un autre logarithme complexe, noté ici  $\log_\alpha$  pour le distinguer du précédent (attention, il ne s'agit pas là d'une notation universelle), par

$$\forall z \in \Omega_\alpha := \mathbb{C} \setminus \Gamma_\alpha, \quad \log_\alpha z := \log(e^{-i\alpha} z) + i\alpha, \tag{6.25}$$

Les propriétés de cette fonction  $\log_\alpha$  sont résumées dans le

**Théorème 6.9** *La fonction  $\log_\alpha$  possède les propriétés suivantes ;*

(i)  *$\log_\alpha z$  est holomorphe dans  $\Omega_\alpha$  et  $(\log_\alpha z)' = \frac{1}{z}$ .*

(ii) *Pour  $z = \rho e^{i\theta}$ ,  $\rho > 0$ ,  $-\pi + \alpha < \theta < \pi + \alpha$ ,  $\log_\alpha z = \ln \rho + i\theta$ .  
En particulier,  $\log_\alpha x = \ln x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ .*

(iii)  *$\log_\alpha z$  à une discontinuité de  $2i\pi$  à travers la coupure  $\Gamma_\alpha$ .*

DÉMONSTRATION. (i) Le caractère holomorphe de  $\log_\alpha$  est une conséquence immédiate du caractère holomorphe de la composition de  $\log z$  et  $z \mapsto e^{-i\alpha} z$ . Le calcul de la dérivée se fait par la formule de la dérivée d'une fonction composée.

(ii) C'est simplement un jeu de définitions et d'écriture. Comme  $e^{-i\alpha} z = \rho e^{i(\theta-\alpha)}$  avec  $-\pi + \alpha < \theta < \pi + \alpha$ , on a  $-\pi < \theta - \alpha < \pi$  et donc, en utilisant (6.14),

$$\log_\alpha z = \log(e^{-i\alpha} z) + i\alpha = \ln \rho + i(\theta - \alpha) + i\alpha = \ln \rho + i\theta$$

Pour  $\theta = 0$ , on voit que  $\log_\alpha z$  est un prolongement analytique du logarithme népérien.

(iii) C'est évident d'après les propriétés de la fonction  $\log z$ . □

La ligne brisée réunion des deux demi-droites  $\mathbb{R}_-$  et  $e^{i\alpha} \mathbb{R}_-$  partage le plan complexe en deux composantes connexes coniques. Sur celle qui contient la demi-droite réelle positive, les fonctions  $\log z$  et  $\log_\alpha z$  coïncident, sur l'autre elles diffèrent de  $2\pi$ . Plus précisément, si  $\text{Arg } z \in ]-\pi, \pi[$  est l'argument principal du logarithme, on vérifie aisément que :

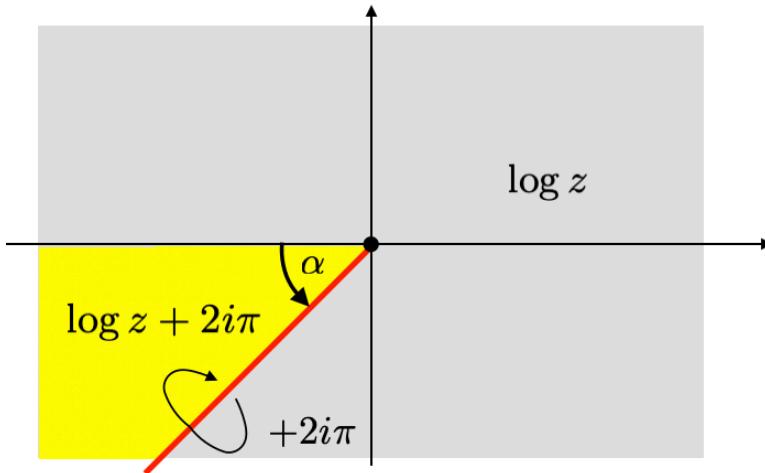
$$\begin{aligned} \text{Si } -\pi + \alpha < \text{Arg } z < \pi, \quad & \log_\alpha z = \log z, \\ \text{Si } -\pi < \text{Arg } z < -\pi + \alpha, \quad & \log_\alpha z = \log z + 2i\pi. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Ces propriétés sont illustrées par la figure 6.4.

## 6.2 Théorèmes de Rouché et de l'image ouverte

### 6.2.1 Théorème de Rouché

Le théorème de Rouché est un des théorèmes les plus célèbres de l'analyse complexe. Il peut se révéler particulièrement utile pour prouver l'existence de solutions d'équations dans  $\mathbb{C}$ , tout en les localisant, pourvu qu'elles impliquent des fonctions analytiques. Il permet notamment de démontrer le théorème de l'image ouverte qui fera l'objet de la prochaine section. Sa démonstration s'appuie sur le logarithme complexe et sur le principe de l'argument (cf. section 5.4).

FIGURE 6.4 – Le lien entre les fonctions  $\log z$  et  $\log_\alpha z$ .

**Théorème 6.10** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{C}$  de bord orienté  $\gamma$ . Soient  $(f, g)$  deux fonctions analytiques dans un voisinage  $\tilde{\Omega}$  de  $\bar{\Omega}$ . On suppose que

$$\forall z \in \gamma, \quad |f(z) - g(z)| < |g(z)|. \quad (6.27)$$

Alors  $f$  et  $g$  ont le même nombre de zéros dans  $\Omega$  :

$$\mathcal{Z}(f, \Omega) = \mathcal{Z}(g, \Omega). \quad (6.28)$$

DÉMONSTRATION. D'après (6.27), par continuité de  $f$  et  $g$  et par compacité de  $\gamma$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\gamma$ , inclus dans  $\tilde{\Omega}$ , tel que (voir Figure 6.5)

$$\forall z \in \mathcal{V}, \quad |f(z) - g(z)| < |g(z)|. \quad (6.29)$$

Cette inégalité montre que ni  $f$  ni  $g$  ne peuvent s'annuler dans  $\mathcal{V}$  (c'est immédiat pour  $g$ , raisonner par l'absurde pour  $f$ ). Ceci nous permet de définir dans  $\mathcal{V}$  la fonction holomorphe

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \in H(\mathcal{V}).$$

L'inégalité (6.27) nous dit que la fonction  $h$  envoie  $\mathcal{V}$  dans le disque ouvert  $D(1, 1)$  de centre 1 et de rayon 1 (diviser (6.27) par  $|g(z)|$ ), ce qu'illustre la figure 6.5. Comme  $D(1, 1) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  (le domaine d'analyticité de la fonction  $\log z$ ) nous pouvons donc introduire la fonction holomorphe  $\log h(z) \in H(\mathcal{V})$  dont la dérivée est donnée par (cf. remarque 6.11)

$$(\log h(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}. \quad (6.30)$$

En appliquant le théorème 4.1 (attention, il ne faut pas, ici, invoquer le théorème de Cauchy mais l'existence d'une primitive), il vient

$$\int_{\gamma} (\log h(z))' dz = 0 \quad \text{ce qui implique} \quad \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz.$$

On conclut avec le principe de l'argument (théorème 5.10).

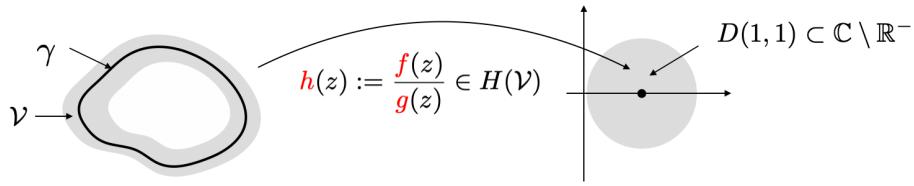


FIGURE 6.5 – La fonction  $h(z)$

□

**Remarque 6.11** Pour démontrer (6.30), la façon correcte de procéder consiste à passer par  $(\log h(z))' = h'(z)/h(z)$  et faire le calcul. Une autre méthode, a priori plus simple, consisterait à écrire  $\log h(z) = \log f(z) - \log g(z)$ , mais ceci n'est pas correct en général. La première observation est qu'on ne sait pas a priori si  $\log f(z)$  et  $\log g(z)$  sont bien définis dans  $\mathcal{V}$ . S'ils le sont, c'est à dire si les ensembles  $\{f(z), z \in \mathcal{V}\}$  et  $\{g(z), z \in \mathcal{V}\}$  sont inclus dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ , à la lumière du théorème 6.8, la seule chose que l'on puisse affirmer est que la fonction  $d(z) := \log h(z) - (\log f(z) - \log g(z))$  prend ses valeurs dans  $\{-2\pi, 0, 2\pi\}$ . Si on suppose, ce qui n'est pas restrictif, que  $\mathcal{V}$  est connexe, alors comme la fonction  $d(z)$  est continue elle est constante. On peut alors conclure en écrivant que  $d'(z) = 0 \dots$

**Remarque 6.12** Dans (6.27), l'inégalité stricte est importante : prenons l'exemple suivant

$$\Omega = \{z = x + iy \mid x^2 + y^2/2 < 1\}, \quad f(z) = 1 - z, \quad g(z) = z.$$

Sur  $\partial\Omega$ ,  $|g(z)| = |z| \geq 1$  alors que  $|f(z) - g(z)| = 1$ . On a donc  $|f(z) - g(z)| \leq |g(z)|$  pour tout  $z \in \partial\Omega$ , l'inégalité étant stricte sauf en  $\pm 1$ . De fait, la conclusion du théorème n'est pas satisfaite puisque  $\mathcal{Z}(f, \Omega) = 0$  alors que  $\mathcal{Z}(g, \Omega) = 1$ .

De même qu'on a avec le théorème 5.12 une version du théorème 5.10 pour les fonctions méromorphes, on a une version du théorème de Rouché pour les fonctions méromorphes (la preuve, quasi-identique à celle du théorème 6.10, est laissée au lecteur).

**Théorème 6.13** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{C}$  de bord orienté  $\gamma$ . Soient  $(f, g)$  deux fonctions méromorphes dans un voisinage  $\tilde{\Omega}$  de  $\overline{\Omega}$ . On suppose que

$$\forall z \in \gamma, \quad |f(z) - g(z)| < |g(z)|. \quad (6.31)$$

Alors

$$\mathcal{Z}(f, \Omega) - \mathcal{P}(f, \Omega) = \mathcal{Z}(g, \Omega) - \mathcal{P}(g, \Omega). \quad (6.32)$$

L'application typique du théorème de Rouché est la suivante : supposons que l'on veuille résoudre le problème

$$(P) \quad \text{Trouver } z \in \Omega \text{ tel que } f(z) = 0.$$

où  $f$  est holomorphe dans un voisinage de  $\bar{\Omega}$ . Le théorème de Rouché permet de dénombrer les solutions de  $(P)$  pour peu qu'on connaisse une fonction  $g(z)$ , également holomorphe dans un voisinage de  $\bar{\Omega}$ , dont on connaîtrait le nombre de zéros dans  $\Omega$  (parce qu'on saurait les calculer analytiquement par exemple) et pour laquelle on saurait démontrer l'inégalité (6.27). En quelque sorte, on considère l'équation  $f(z) = 0$  comme une perturbation de l'équation  $g(z) = 0$  (voir remarque 6.14). La démonstration du théorème de l'image ouverte (section ci-après) donnera un exemple d'application de cette idée.

**Remarque 6.14** *D'habitude quand on parle de perturbation d'une équation il y a implicitement un petit paramètre. Par exemple, l'équation  $g(z) + \varepsilon f(z) = 0$  sera considérée, pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, comme une perturbation de  $g(z) = 0$  et on pourra espérer de démontrer l'existence d'une solution de  $g(z) + \varepsilon f(z) = 0$  pour  $\varepsilon$  assez petit par un théorème style "fonctions implicites". Ici, c'est ce qui est assez surprenant, rien de tout cela : il n'y a pas de petit paramètre, il suffit de vérifier (6.27).*

### 6.2.2 Théorème de l'image ouverte

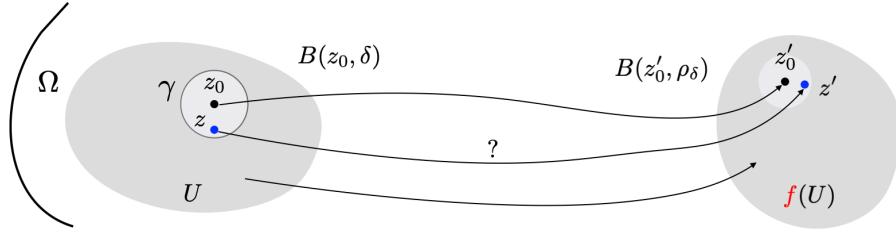
En topologie, il est bien connu, c'est même une définition de la continuité, que l'image réciproque d'un ensemble ouvert par une fonction continue est elle-même un ensemble ouvert. Pour les images directes, il est bien connu que le résultat est faux en général : l'image d'un ouvert par une application continue n'est pas forcément un ensemble ouvert. Toutefois, le résultat devient vrai lorsqu'on considère des fonctions analytiques dans le plan complexe : c'est le théorème de l'image ouverte.

**Théorème 6.15** *Toute fonction holomorphe dans un ouvert connexe  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  et qui n'est pas constante est ouverte, c'est-à-dire qu'elle transforme tout ouvert de  $\Omega$  en un ouvert de  $\mathbb{C}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $U$  un ouvert inclus dans  $\Omega$ , il s'agit de montrer que  $f(U)$  est ouvert, c'est à dire au voisinage de chacun de ses points.

Soit  $z'_0 \in f(U)$ . Par définition, il existe  $z_0 \in U$  tel que  $f(z_0) = z'_0$ . Comme  $U$  est ouvert, il existe  $\delta > 0$  tel que la boule ouverte  $B(z_0, \delta)$  de centre  $z_0$  et rayon  $\delta$  soit incluse dans  $U$ . D'après le principe des zéros isolés,  $f$  est non constante dans  $B(z_0, \delta)$  ; en effet, s'il existait  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $f(z) = a$  dans  $B(z_0, \delta)$ , d'après le principe appliqué à la fonction  $f(z) - a$ , holomorphe dans  $U$  qui est connexe, on aurait  $f(z) = a$  dans tout  $\Omega$ , ce qui est contraire à l'hypothèse du théorème.

Toujours grâce au principe des zéros isolés, on peut choisir  $\delta$  assez petit tel que  $\zeta = z_0$

FIGURE 6.6 – Images par  $h(z)$ 

soit le seul zéro de  $\zeta \mapsto f(\zeta) - z'_0$  dans  $\overline{B(z_0, \delta)}$  : sinon on pourrait construire une suite  $z_n$  de zéros de  $f(\zeta) - z'_0$  qui convergerait vers  $z_0$ , ce qui contredirait le principe des zéros isolés puisque  $f(\zeta) - z'_0$  n'est pas constante dans  $B(z_0, \delta)$ . En particulier,  $f(\zeta) - z'_0$  ne s'annule pas le long du bord  $\partial B(z_0, \delta)$  qui est compact. Par conséquent

$$\rho_\delta := \inf_{\zeta \in \partial B(z_0, \delta)} |f(\zeta) - z'_0| > 0.$$

Nous allons montrer que la boule ouverte  $B(z'_0, \rho_\delta)$  est incluse dans  $f(U)$  ce qui conclura la preuve. Cela équivaut à montrer que pour tout  $z' \in B(z'_0, \rho_\delta)$ , il existe  $z \in U$  tel que  $f(z) = z'$ . Il est naturel de chercher  $z'$  dans  $B(z_0, \delta)$ , auquel cas il s'agit de montrer que le problème

$$\text{Trouver } z \in B(z_0, \delta) \text{ tel que } f(z) - z' = 0, \quad (6.33)$$

admet au moins une solution (voir la figure 6.6). Nous allons en fait montrer que cette équation admet une solution unique en considérant, comme  $z'$  est proche de  $z'_0$ , que cette équation est une perturbation de l'équation  $f(z) - z'_0 = 0$ . Pour cela nous allons utiliser le théorème de Rouché 6.10 avec  $\gamma = \partial B(z_0, \delta)$ , les deux fonctions  $f$  et  $g$  de l'énoncé du théorème 6.10 étant respectivement  $f(z) - z'$  and  $f(z) - z'_0$ , qui sont bien holomorphes dans un voisinage de  $\overline{B(z_0, \delta)}$  (à savoir l'ouvert  $\Omega$ ). Par définition de  $\delta$ , la seconde fonction,  $f(z) - z'_0$  a un seul zéro (à savoir  $z_0$ ) dans  $B(z_0, \delta)$ . Pour conclure que  $f(z) - z'$  a également un unique zéro dans  $B(z_0, \delta)$ , il suffit de vérifier l'inégalité (6.27), à savoir

$$\forall z \in \partial B(z_0, \delta), \quad |(f(z) - z'_0) - (f(z) - z')| < |f(z) - z'_0|. \quad (6.34)$$

Or le terme de gauche de l'inégalité (6.34) n'est autre que  $|z'_0 - z'| < \rho_\delta$  alors que par définition même de  $\rho_\delta$ , le terme de droite vérifie  $|f(z) - z'_0| > \rho_\delta$ . Cette observation démontre donc l'inégalité (6.34), ce qui achève la démonstration du théorème.  $\square$

Il est à noter que l'équivalent dans  $\mathbb{R}$  du théorème 6.15 est grossièrement faux. Ainsi, la fonction  $\cos x$  est analytique sur  $\mathbb{R}$  mais l'image par cette fonction de  $\mathbb{R}$  (ou de tout intervalle ouvert de longueur strictement supérieure à  $2\pi$ ) est le segment  $[-1, 1]$  qui est fermé. Il n'y a pas de contradiction avec le théorème 6.15 puisqu'un ouvert de  $\mathbb{R}$  n'est pas ouvert dans  $\mathbb{C}$ .

## 6.3 La racine carrée complexe

A l'instar de ce que nous avons fait à la section 6.1, nous nous intéressons à la question :

Peut-on trouver une extension analytique  $f(z)$  de la fonction  $x \rightarrow \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}^+$ ?

De façon plus précise, comme dans le cas du logarithme, il s'agit de trouver un domaine connexe du plan complexe  $\Omega$  le plus grand possible, qui contient  $\mathbb{R}^+$  et dans lequel on peut construire une fonction holomorphe  $f(z)$  qui coïncide avec  $\sqrt{x}$  sur  $\mathbb{R}^+$ . Notons que, comme  $f(x)^2 = x$  pour  $x \in \mathbb{R}^+$ , par le principe des zéros isolés, on aura  $f(z)^2 = z$  dans tout  $\Omega$ , ce qui signifie que  $f(z)$  coïncidera avec l'une des deux racines du nombre complexe  $z$ .

### 6.3.1 Détermination principale.

Une idée naturelle consiste à rappeler que

$$\sqrt{x} = e^{\frac{1}{2} \ln x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_*^+.$$

Ainsi, on obtiendra une extension analytique de  $\sqrt{x}$  à partir d'une extension analytique du logarithme. Par exemple, si on choisit la détermination principale du logarithme, on définit la détermination principale de la racine complexe :

**Définition 6.16** *Par définition, la détermination principale de la racine complexe est la fonction définie dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  par*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad \sqrt{z} := e^{\frac{1}{2} \log z}. \quad (6.35)$$

**Théorème 6.17** *La fonction  $\sqrt{z}$  définie par (6.35) est holomorphe dans  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  et*

$$\forall z \in \Omega, \quad (\sqrt{z})^2 = z, \quad (\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}. \quad (6.36)$$

**DÉMONSTRATION.** Le caractère holomorphe de  $\sqrt{z}$  est une propriété de la composition de deux fonctions holomorphes (théorème 2.12), la propriété  $(\sqrt{z})^2 = z$  a été démontrée plus haut et la formule pour  $(\sqrt{z})'$  résulte de la dérivée d'une fonction composée (théorème 2.5). □

Evidemment, à partir de la définition (6.35) et des formules (6.14) (ou (6.15)), on déduit des formules de calcul pratique de la racine d'un nombre complexe (sous entendu avec sa détermination principale) en coordonnées polaires, formule qui est la plus utilisée car très simple (le point important dans la formule ci-dessous est l'intervalle dans lequel on fait varier  $\theta$ ) :

$$\forall (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_*^+ \times ]-\pi, \pi[, \quad \sqrt{\rho e^{i\theta}} = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}. \quad (6.37)$$

Cette formule montre en particulier que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-, \quad \operatorname{Re} \sqrt{z} > 0.$$

Cette propriété caractérise en fait la détermination principale de la racine complexe. Le résultat précis est le suivant

**Corollaire 6.18** *On a l'équivalence :*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-, \quad f(z)^2 = z \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} f(z) > 0 \iff f(z) = \sqrt{z}. \quad (6.38)$$

La formule en coordonnées cartésiennes est donnée (exercice, on pourra par exemple utiliser la caractérisation (6.38)) par

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad \sqrt{z} = \left( \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + y^2} + x) \right)^{\frac{1}{2}} + i \left( \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + y^2} - x) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.39)$$

Nous encourageons à nouveau le lecteur à vérifier le caractère holomorphe de la fonction  $\sqrt{z}$  à l'aide des relations de Cauchy-Riemann.

A l'aide de la formule (6.37), il est facile de voir que la détermination principale de la racine carrée complexe est, comme le logarithme, discontinue à travers la coupure  $\mathbb{R}_-$ . En effet

$$\forall x \in \mathbb{R}_*, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{x + i\varepsilon} = i\sqrt{|x|} \quad (6.40)$$

La fonction  $\sqrt{z}$  ainsi construite est bien discontinue à travers la coupure  $\mathbb{R}_*$  puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}_*, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{x - i\varepsilon} = -i\sqrt{|x|} \quad (6.41)$$

Le saut de discontinuité est purement imaginaire le long de la coupure, mais non constant

$$\forall x \in \mathbb{R}_*, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{x + i\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{x - i\varepsilon} = 2i\sqrt{|x|}. \quad (6.42)$$

Ces propriétés sont illustrées par les figures 6.7 et 6.8. Pour terminer sur la détermination principale de la racine complexe, interrogeons-nous, à l'instar de ce que nous avons fait avec la formule (6.21) pour le logarithme, ce que devient dans le plan complexe la formule

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+, \quad \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}. \quad (6.43)$$

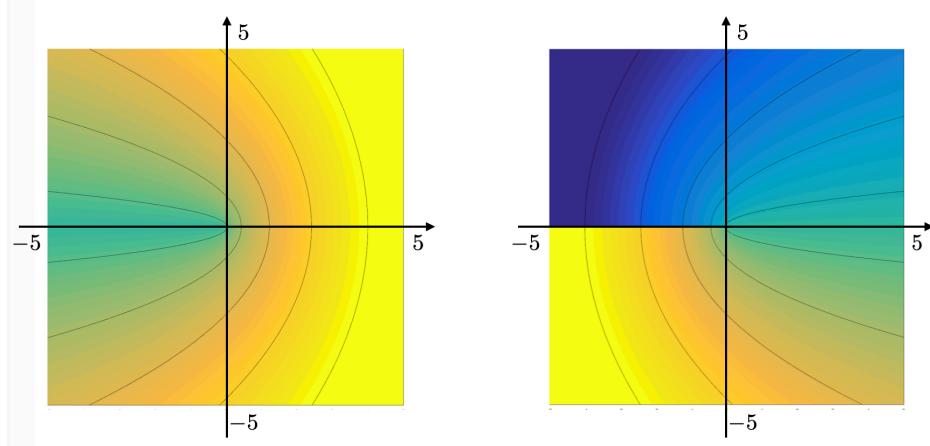
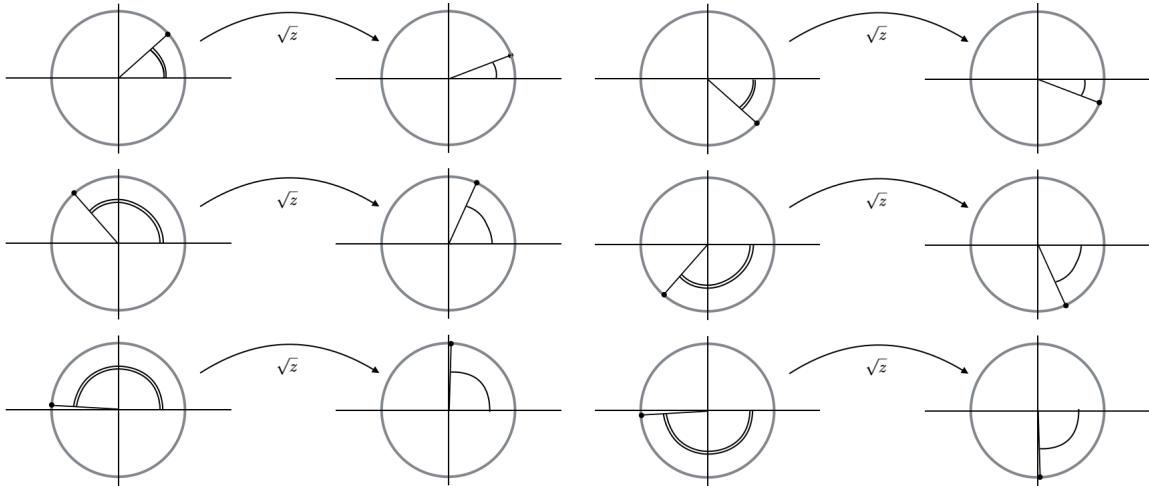
A nouveau, cette propriété n'est **plus vraie en général** dans le plan complexe. Nous laissons au soin du lecteur de démontrer le

**Théorème 6.19** *Soient  $(z_1, z_2)$  deux nombres complexes dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  tels que*

$$\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \neq \pm\pi. \quad (6.44)$$

$$(i) \quad Si -\pi < \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 < \pi, \quad \sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{z_1} \sqrt{z_2},$$

$$(ii) \quad Si |\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2| > \pi, \quad \sqrt{z_1 z_2} = -\sqrt{z_1} \sqrt{z_2}.$$

FIGURE 6.7 – La fonction  $\sqrt{z}$  : partie réelle à gauche, partie imaginaire à droiteFIGURE 6.8 – Action de la fonction  $\sqrt{z}$  sur le disque unité. À gauche dans le plan complexe supérieur, à droite dans le plan complexe inférieur.

### 6.3.2 Autres déterminations.

Il est évident qu'à chaque détermination du logarithme complexe, on peut associer une détermination de la racine complexe. Ainsi on peut définir une racine complexe, que nous noterons ici  ${}_\alpha \sqrt{z}$ , présentant une coupure sur la demi-droite  $e^{i\alpha} \mathbb{R}^-, -\pi < \alpha \leq \pi$ , à l'aide de la formule

$$\forall z \in \Omega_\alpha := \mathbb{C} \setminus \Gamma_\alpha, \quad {}_\alpha \sqrt{z} := e^{\frac{1}{2} \log_\alpha z} \quad (6.45)$$

où la coupure  $\Gamma_\alpha$  est définie par (6.23) et la fonction  $\log_\alpha z$  par (6.25). Le lecteur vérifiera aisément que  ${}_\alpha \sqrt{z}$  est holomorphe dans  $\Omega_\alpha$ , que  $({}_\alpha \sqrt{z})^2 = z$ , que sa dérivée vaut  $1/(2{}_\alpha \sqrt{z})$ .

De plus, le calcul pratique, en coordonnées polaires, de  $\alpha\sqrt{z}$  se fait par la formule

$$\forall (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_*^+ \times ]-\pi + \alpha, \pi + \alpha[, \quad \alpha\sqrt{\rho e^{i\theta}} = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}. \quad (6.46)$$

La fonction  $\alpha\sqrt{z}$  présente une discontinuité à travers la coupure  $\Gamma_\alpha$  au sens où

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \alpha\sqrt{\rho e^{i(\alpha-\epsilon)}} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\alpha}{2}}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \alpha\sqrt{\rho e^{i(\alpha+\epsilon)}} = -\sqrt{\rho} e^{i\frac{\alpha}{2}},$$

Notons que le saut de discontinuité à travers  $e^{i\alpha}\mathbb{R}^-$  n'est ni constant, ni réel (sauf pour  $\alpha = \pi$ ) ni imaginaire (sauf pour  $\alpha = 0$ ). A l'instar de la propriété (6.26) pour le logarithme, le lecteur vérifiera que

$$\begin{cases} \text{Si } -\pi + \alpha < \operatorname{Arg} z < \pi, & \alpha\sqrt{z} = \sqrt{z}, \\ \text{Si } -\pi < \operatorname{Arg} z < -\pi + \alpha, & \alpha\sqrt{z} = -\sqrt{z}. \end{cases} \quad (6.47)$$

Enfin, (6.46) montre que l'image de  $\Omega_\alpha$  par  $\alpha\sqrt{z}$  est un demi-plan complexe ouvert qui varie avec  $\alpha$  dans le sens où il tourne d'un angle  $\beta/2$  (dans le sens direct) lorsque  $\alpha$  augmente de  $\beta$ , i. e. quand la coupure tourne de l'angle  $\beta$ . Cette propriété est illustrée par la figure 6.9. En particulier, on voit que si la détermination principale de la racine

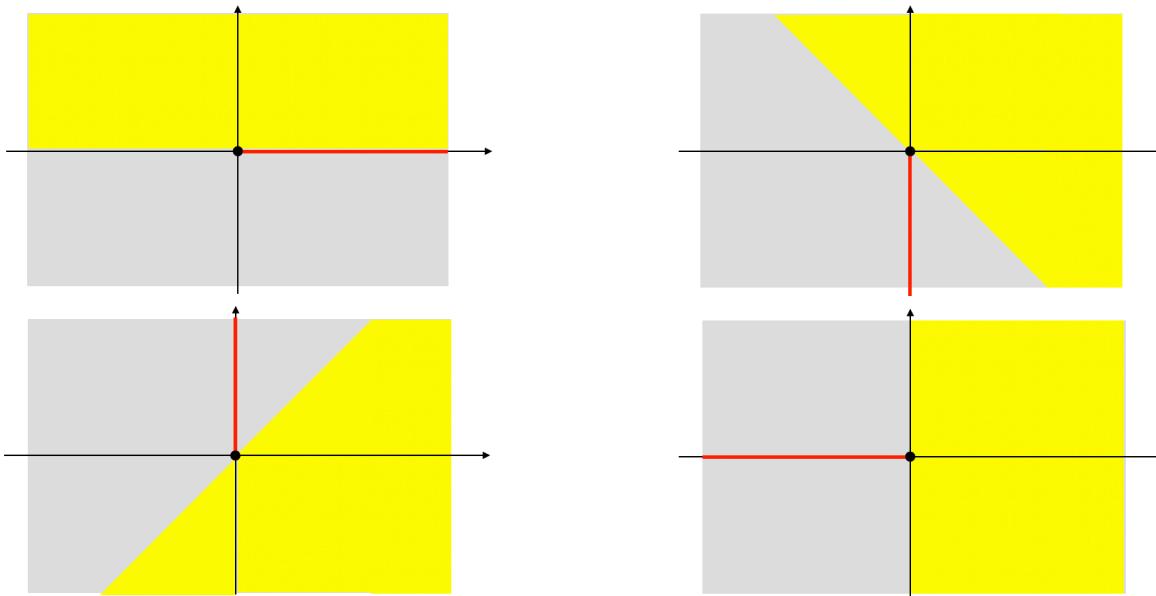


FIGURE 6.9 – La coupure de  $\alpha\sqrt{z}$  est matérialisée en rouge, son image en jaune.

complexe donne toujours la racine de partie réelle positive, pour construire la racine carrée dont la partie imaginaire reste positive, il faut faire coïncider la coupure avec le demi-axe réel positif.



# Chapitre 7

## Transformations conformes

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre aux fonctions holomorphes utilisées en tant que changement de variables du plan complexe. On parle alors de transformations conformes. Nous allons voir qu'une fois encore, les fonctions holomorphes vont présenter des propriétés remarquables, qui les rendent très utiles comme changement de variables. En particulier, une fonction harmonique (c'est-à-dire à Laplacien nul) demeure harmonique par un tel changement de variables. Ainsi, les transformations conformes permettent de résoudre de nombreux problèmes bidimensionnels en électrostatique, mécanique des fluides ou thermique, en transformant un domaine de géométrie compliquée en un domaine simple, où les calculs peuvent être menés à l'aide de la séparation de variables.

### 7.1 Inversion de fonctions holomorphes

Pour qu'une fonction  $f$  définie sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}$  et à valeurs complexes puisse être utilisée comme changement de variables du plan, il faut qu'elle définitte un difféomorphisme en tant qu'application du plan dans lui-même. C'est le sujet que nous traitons dans cette première section.

On notera systématiquement  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , où  $u$  et  $v$  sont à valeurs réelles. En utilisant l'idenitification entre  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}^2$ , on va identifier  $f$  à l'application suivante de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  dans  $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$  :

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(x, y) \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \tilde{x} &= u(x, y) \\ \tilde{y} &= v(x, y) \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(x, y) \iff \tilde{x} + i\tilde{y} = f(x + iy).$$

Supposons que  $F$  soit de classe  $\mathcal{C}^1$ . Le théorème d'inversion locale nous dit alors que si la différentielle de  $F$  est inversible en un point  $(x_0, y_0)$ , alors  $F$  est localement inversible, avec  $F^{-1}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  : de façon équivalente, il existe une fonction  $f^{-1}$  de la variable

complexe telle que l'équation  $f(z) = \tilde{z}$  est équivalente à l'équation  $z = f^{-1}(\tilde{z})$  pour  $z$  dans un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $z_0 = x_0 + iy_0$ , et  $\tilde{z}$  dans  $f(\mathcal{V})$ . Si la différentielle de  $F$  est inversible en tout point de  $\Omega$  et si, de plus,  $F$  est injective, on est assuré de l'existence d'un inverse global.

Que nous apporte le fait de savoir que  $f$  est holomorphe ?

Remarquons tout d'abord que la différentielle de  $F$  est représentée par la matrice jacobienne :

$$DF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

qui peut se réécrire en utilisant les relations de Cauchy-Riemann suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (7.1)$$

sous la forme suivante :

$$DF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible si son déterminant est non nul et l'on obtient :

$$\det DF(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right)^2$$

or

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right)^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right|^2 = |f'(x_0 + iy_0)|^2.$$

On a donc montré que si en  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $f'(z_0) \neq 0$ , alors  $f$  est localement inversible en  $z_0$ . On remarque que dans ce cas,  $Df(x_0, y_0)$  s'écrit sous la forme :

$$DF(x_0, y_0) = |f'(x_0 + iy_0)| \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

où l'on a posé :

$$\cos \alpha = \frac{1}{|f'(x_0 + iy_0)|} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ et } \sin \alpha = \frac{1}{|f'(x_0 + iy_0)|} \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

C'est-à-dire que si  $f$  holomorphe et  $f'(z_0)$  non nul,  $DF(x_0, y_0)$  est la matrice d'une similitude directe, correspondant à la composée d'une rotation d'angle  $\alpha$  et d'une homothétie de rapport  $|f'(x_0 + iy_0)|$ . C'est donc également le cas de la matrice :

$$D(F^{-1})(F(x_0, y_0)) = DF(x_0, y_0)^{-1},$$

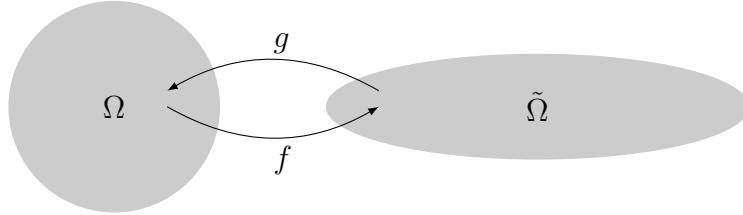
ce qui prouve que les relations de Cauchy-Riemann sont également vraies pour  $f^{-1}$ . Autrement dit,  $f^{-1}$  est également holomorphe. On peut donc finalement énoncer le

**Lemme 7.1** *Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un ouvert  $\Omega$ . Si pour  $a \in \Omega$ ,  $f'(a) \neq 0$ , alors il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de  $a$  et une fonction holomorphe  $g$  dans  $f(\mathcal{V})$  (qui est également un ouvert) telle que  $g(f(z)) = z$  pour tout  $z \in \mathcal{V}$ .*

Les outils spécifiques vus dans les chapitres précédents permettent de démontrer le théorème plus précis suivant :

**Théorème 7.2** *Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un ouvert connexe  $\Omega$ . Si  $f$  est injective sur  $\Omega$ , alors  $f'$  ne s'annule en aucun point de  $\Omega$  et il existe une fonction  $g$  holomorphe dans l'ouvert  $\tilde{\Omega} = f(\Omega)$  telle que  $g(f(z)) = z$  pour tout  $z \in \Omega$ ,  $f(g(\tilde{z})) = \tilde{z}$  pour tout  $\tilde{z} \in \tilde{\Omega}$  et*

$$g'(\tilde{z}) = \frac{1}{f'(g'(\tilde{z}))} \quad \forall \tilde{z} \in \tilde{\Omega}.$$



DÉMONSTRATION. La preuve s'appuie essentiellement sur le théorème de Rouché (théorème 6.10).

On raisonne par contraposée. Supposons que  $f$  est injective et que  $f'(a) = 0$  pour  $a \in \Omega$ . Pour  $\tilde{z}$  proche de  $f(a)$ , on s'intéresse aux éventuelles racines  $z \in \Omega$  de la fonction  $F(z) = f(z) - \tilde{z}$ . Pour utiliser le théorème de Rouché, on introduit la seconde fonction  $G(z) = f(z) - f(a)$  qui est analytique dans  $\Omega$  et s'annule en  $a$ . Comme  $f$  n'est pas constante (puisque  $f$  est injective),  $a$  est un zéro isolé de  $G$ , de multiplicité au moins 2 puisque  $f'(a) = 0$ , d'où l'existence d'une fonction  $h$  analytique dans  $\Omega$  telle que

$$G(z) = (z - a)^m h(z) \quad \text{avec } m \geq 2 \text{ et } h(z) \neq 0 \text{ pour } |z - a| \leq \rho,$$

pour un certain  $\rho > 0$ . On applique alors le théorème de Rouché aux fonctions  $F$  et  $G$ , sur le cercle  $|z - a| = \rho$ . En effet, on a :

$$|F(z) - G(z)| = |\tilde{z} - f(a)| < |G(z)| \text{ si } |z - a| = \rho$$

si  $|\tilde{z} - f(a)|$  est pris suffisamment petit. On en déduit que pour  $\tilde{z}$  proche de  $f(a)$ , soit l'équation  $f(z) = \tilde{z}$  au moins deux racines, soit l'équation  $f(z) = \tilde{z}$  a une racine au moins double. La première hypothèse est impossible car  $f$  est injective. Donc  $f$  a une racine au moins double dans tout un voisinage de  $a$ , ce qui entraîne que  $f'$  est

identiquement nulle (dans  $\Omega$  connexe). Mais alors  $f$  est constante, mais ceci n'est pas possible puisque  $f$  est injective.

□

Autrement dit, pour qu'une fonction holomorphe  $f$  soit inversible en tant que fonction de  $\Omega$  dans  $f(\Omega)$ , il est nécessaire que  $f'$  ne s'annule pas dans  $\Omega$ . Nous avons déjà expérimenté cela sur l'exemple particulier de la racine carrée. En effet, la fonction  $f(z) = z^2$  a une dérivée qui s'annule en 0. Et il est clair qu'elle n'est injective dans aucun ouvert contenant l'origine (puisque  $z^2 = (-z)^2$ ). Mais on voit aussi sur cet exemple que la condition  $f'$  ne s'annule pas n'est pas suffisante pour assurer l'injectivité, puisqu'un domaine ne contenant pas l'origine peut contenir deux points  $z$  et  $-z$  opposés l'un de l'autre.

On peut aussi remarquer que pour les fonctions dérivables de la variable réelle, aucun des résultats de ce théorème n'est vrai. En effet, il n'est pas nécessaire que  $f'$  ne s'annule pas pour que  $f$  soit injective. Ainsi par exemple,  $f(x) = x^3$  est une bijection sur  $\mathbb{R}$  alors que sa dérivée s'annule en 0. Cet exemple montre également que l'inverse d'une fonction bijective et dérivable sur  $\mathbb{R}$  n'est pas nécessairement dérivable.

## 7.2 Propriétés des transformations conformes

Dans toute la suite, on suppose que  $f$  est une fonction holomorphe et injective sur un ouvert  $\Omega$  et on utilise la notation  $f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$  où  $u$  et  $v$  sont à valeurs réelles. Nous nous proposons maintenant de voir quels bénéfices il peut y avoir à utiliser le changement de variables :

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= u(x, y) \\ \tilde{y} &= v(x, y)\end{aligned}\tag{7.2}$$

Un tel changement de variables est appelé une transformation conforme pour des raisons qui vont apparaître dans la suite.

La première propriété qui est généralement mise en avant dans la littérature est la suivante :

**Propriété 1** : le changement de variable (7.2) préserve les angles et l'orientation.

**DÉMONSTRATION.** Précisons le sens de cette assertion. Supposons que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  munis des paramétrages  $g_1$  et  $g_2$  définis sur  $[0, 1]$  soient deux chemins lisses qui se croisent en un et un seul point  $z_0$ . Autrement dit, on a :

$$z_0 = g_1(t_1) = g_2(t_2) \text{ pour } t_1, t_2 \in ]0, 1[.$$

Les vecteurs tangents à ces deux chemins en  $z_0$  sont donnés par :

$$\tau_j = \frac{g'_j(t_j)}{|g'_j(t_j)|} \text{ pour } j = 1, 2.$$

Ce sont des nombres complexes de module 1, donc de la forme :

$$\tau_j = e^{i\theta_j} \text{ avec } -\pi \leq \theta_j < \pi.$$

Supposons pour fixer les idées que  $0 < \theta_1 \leq \theta_2 < \pi$ . Alors on vérifie que l'angle entre les deux chemins en  $z_0$  a l'expression suivante (pour la détermination principale du log) :

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{i} \log \left( \frac{\tau_2}{\tau_1} \right).$$

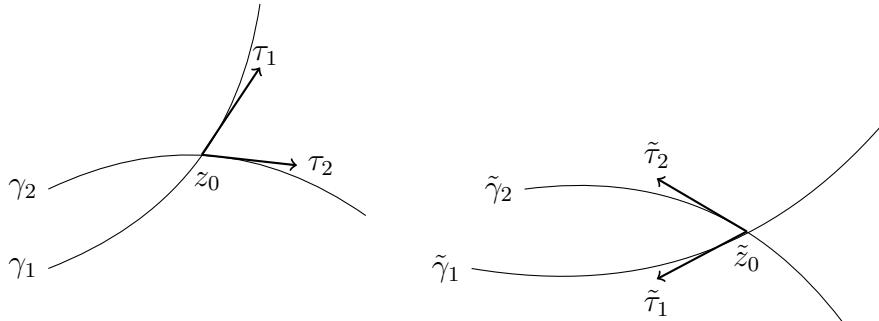
Le changement de variable transforme  $\gamma_1$  en  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\gamma_2$  en  $\tilde{\gamma}_2$ , de paramétrages  $f \circ g_1$  et  $f \circ g_2$ . Ces deux nouveaux chemins se croisent en  $\tilde{z}_0 = f(z_0)$ . Le résultat important est que les vecteurs tangents à ces deux chemins en  $\tilde{z}_0$  sont :

$$\tilde{\tau}_j = \frac{(f \circ g_j)'(t_j)}{|(f \circ g_j)'(t_j)|} = \frac{f'(z_0)}{|f'(z_0)|} \tau_j \text{ pour } j = 1, 2.$$

On en déduit que :

$$\frac{\tilde{\tau}_2}{\tilde{\tau}_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1},$$

ce qui prouve que l'angle entre les deux courbes au point d'intersection est conservé par le changement de variables.



□

On peut montrer que réciproquement, un changement de variables différentiable qui conserve les angles orientés est associé à une fonction holomorphe.

C'est à cause de cette première propriété que l'on appelle un changement de variables associé à une fonction holomorphe une transformation *conforme*, c'est-à-dire qui conserve la forme (en latin).

Une seconde propriété qui explique l'intérêt des transformations conformes pour l'étude des équations aux dérivées partielles est la suivante :

**Propriété 2** : une transformation conforme transforme une fonction harmonique en fonction harmonique.

Soient  $\varphi$  une fonction de  $(x, y)$  définie sur  $\Omega$  et  $\tilde{\varphi}$  une fonction de  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  définie sur  $\tilde{\Omega}$ , telles que

$$\varphi(x, y) = \tilde{\varphi}(u(x, y), v(x, y)) \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Alors

$$\Delta\varphi(x, y) = |f'(z)|^2 \Delta\tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

où  $z = x + iy$ ,  $\tilde{x} = u(x, y)$  et  $\tilde{y} = v(x, y)$ .

En particulier, si l'une des deux fonctions est à Laplacien nul, c'est le cas de l'autre également.

DÉMONSTRATION. Ceci se prouve aisément par le calcul en utilisant les relations de Cauchy-Riemann. En effet, par dérivation de fonctions composées, on trouve d'abord (en omettant les variables pour simplifier les écritures) :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}} \Delta u \\ &+ \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}} \Delta v \end{aligned}$$

Les relations de Cauchy-Riemann permettent de montrer que  $\Delta u = \Delta v = 0$ , que les deux termes de dérivées croisées s'annulent, puis que les quatre termes restants fournissent le résultat recherché.

□

On peut aussi montrer la

**Propriété 3** : si la dérivée normale de  $\varphi$  s'annule sur une courbe, alors il en est de même de celle de  $\tilde{\varphi}$  sur la courbe transformée.

DÉMONSTRATION. En effet, notons  $\gamma$  le bord de  $\Omega$  et  $\tilde{\gamma} = f(\gamma)$  le bord de  $\tilde{\Omega}$ . Si  $\tau$  et  $n$  désignent les vecteurs unitaires tangent et normal à  $\gamma$  en  $z$ , et  $\tilde{\tau}$  et  $\tilde{n}$  les vecteurs unitaires tangent et normal à  $\tilde{\gamma}$  en  $\tilde{z} = f(z)$ , on a d'une part

$$n = i\tau \text{ et } \tilde{n} = i\tilde{\tau},$$

et d'autre part, d'après ce qui a été vu pour établir la Propriété 1 :

$$\tilde{\tau} = \frac{f'(z)}{|f'(z)|}\tau \text{ et } \tilde{n} = \frac{f'(z)}{|f'(z)|}n.$$

On a donc :

$$|f'(z)|\Re e(\tilde{n}) = \Re e(f'(z)n) \text{ et } |f'(z)|\Im m(\tilde{n}) = \Im m(f'(z)n).$$

En utilisant les relations de Cauchy-Riemann, on a :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

et on obtient donc que

$$\begin{aligned}|f'(z)|\Re e(\tilde{n}) &= \frac{\partial u}{\partial x}\Re e(n) + \frac{\partial u}{\partial y}\Im m(n), \\ |f'(z)|\Im m(\tilde{n}) &= \frac{\partial v}{\partial y}\Im m(n) + \frac{\partial v}{\partial x}\Re e(n).\end{aligned}$$

On peut alors exprimer la dérivée normale de  $\varphi$  au point  $z$  :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Re e(n) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\Im m(n) = \left( \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Re e(n) + \left( \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Im m(n).$$

En utilisant les expressions ci-dessus de la normale, on en déduit l'identité suivante :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}} |f'(z)|\Re e(\tilde{n}) + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}} |f'(z)|\Im m(\tilde{n}) = |f'(z)| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{n}}.$$

□

On a donc montré que :

$$\begin{aligned}\Delta \varphi(x, y) &= |f'(z)|^2 \Delta \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x, y) &= |f'(z)| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{n}}(\tilde{x}, \tilde{y}),\end{aligned}$$

où  $z = x + iy$ ,  $\tilde{x} = u(x, y)$  et  $\tilde{y} = v(x, y)$ .

Grâce à ces propriétés, on voit que l'on peut transformer un problème de Laplace ou de Poisson avec une condition de Dirichlet ou de Neumann posé dans une géométrie compliquée en un problème similaire posé dans une géométrie plus simple, où la solution est calculable plus facilement, par une formule analytique.

## 7.3 Exemples de quelques transformations conformes usuelles

### 7.3.1 Les homographies

Une famille importante de transformations conformes est la famille des homographies :

$$z \rightarrow f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

avec  $ad - bc \neq 0$ . On voit que  $f$  est définie et holomorphe dans tout le plan complexe privé du point  $z^* = -d/c$ . De plus :

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

Donc  $f'$  ne s'annule jamais, ce qui est rappelons-le une condition nécessaire pour l'inversibilité. Plus précisément, si  $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ , l'équation

$$\frac{az + b}{cz + d} = \tilde{z}$$

admet une et une seule solution pour tout  $\tilde{z} \neq \tilde{z}^*$ , où  $\tilde{z}^* = a/c$ , donnée par :

$$f^{-1}(\tilde{z}) = \frac{-d\tilde{z} + b}{c\tilde{z} - a}.$$

Donc une homographie définit une transformation conforme de son ensemble de définition  $\mathbb{C} \setminus \{z^*\}$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{\tilde{z}^*\}$ .

**Remarque 7.3** *On vérifie aisément que la composée de deux homographies et une homographie.*

Une propriété intéressante des homographies est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 7.4** *Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des droites et des cercles du plan complexe et soit une homographie allant de  $\mathbb{C} \setminus \{z^*\}$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{\tilde{z}^*\}$ . Alors l'image d'un élément de  $\mathcal{F}$  (éventuellement privé de  $z^*$ ) par cette homographie est un élément de  $\mathcal{F}$  (éventuellement privé de  $\tilde{z}^*$ ).*

**DÉMONSTRATION.** Autrement dit, il s'agit de montrer que l'image d'un cercle ou d'une droite par une homographie est un cercle ou une droite.

Pour cela, on remarque qu'une homographie est obtenue par composition des opérations suivantes :

- Translations :  $z \rightarrow z + \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}$
- Rotations :  $z \rightarrow e^{i\theta}z$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$
- Homothéties :  $z \rightarrow rz$  avec  $r \in \mathbb{R}$
- Inversion :  $z \rightarrow 1/z$

En effet, c'est clair si  $c = 0$  et si  $c \neq 0$ , on remarque que :

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{1}{c} \left( a - \frac{ad - bc}{cz + d} \right)$$

Or il est clair que les translations, les rotations et les homothéties transforment des droites en droites, et des cercles en cercles. Il reste donc à s'intéresser aux inversions. Pour montrer que  $\mathcal{F}$  est stable par inversion, il est commode de remarquer que tout élément de  $\mathcal{F}$  est caractérisé par une équation du type :

$$sz\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + t = 0 \tag{7.3}$$

où  $s$  et  $t$  sont des nombres réels et  $\beta$  un nombre complexe tel que  $|\beta|^2 > st$ . En effet, si  $z = x + iy$  et  $\beta = p + iq$ , l'équation précédente se réécrit :

$$s(x^2 + y^2) + 2(px - qy) + t = 0$$

qui est l'équation d'une droite si  $s = 0$  et d'un cercle sinon. On conclut en remarquant que si  $z$  est solution de (7.3), alors, en divisant par  $z\bar{z}$ , on trouve que  $1/z$  est solution d'une équation du même type :

$$s + \beta \frac{1}{\bar{z}} + \bar{\beta} \frac{1}{z} + t \frac{1}{\bar{z}z} = 0.$$

Mais on remarque que comme les rôles de  $s$  et  $t$  sont échangés, une droite peut être transformée en un cercle et inversement.  $\square$

Considérons par exemple l'homographie

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}. \quad (7.4)$$

On a dans ce cas  $z^* = -i$  et  $\tilde{z}^* = 1$ . On voit immédiatement que pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  est un nombre complexe de module 1. On en déduit que  $f$  transforme l'axe réel en le cercle unité (privé de 1). Comme l'image d'un ensemble connexe par une application continue reste connexe,  $f$  doit transformer le demi-plan complexe  $\Im z > 0$  soit en le disque unité ouvert, soit en l'extérieur du disque unité. On peut conclure, en remarquant que  $f(i) = 0$ , que l'image du demi-plan  $\Im z > 0$  est bien le disque unité  $|z| < 1$ . Et par conséquent,

$$f^{-1}(\tilde{z}) = -i \frac{\tilde{z} + 1}{\tilde{z} - 1}$$

transforme le disque unité en le demi-plan  $\Im z > 0$ .

**Remarque 7.5** Une application immédiate de l'existence d'une telle transformation est que l'on peut étendre le principe de symétrie de Schwarz au cas d'une interface circulaire. Plus précisément, soit  $\tilde{\Omega}$  un ouvert inclus dans le disque unité, borné en partie par un arc  $\tilde{L}$  inclus dans le cercle unité. Et soit  $\tilde{\varphi}$  une fonction holomorphe dans  $\tilde{\Omega}$ , continue sur  $\tilde{\Omega}$  et prenant des valeurs réelles sur  $\tilde{L}$ . Alors  $\varphi = \tilde{\varphi} \circ f$  (où  $f$  est la fonction (7.4)) est holomorphe dans le domaine  $\Omega = f^{-1}(\tilde{\Omega})$  du demi-plan complexe supérieur, continue jusqu'au bord et réelle sur la portion  $L = \overline{f^{-1}(\tilde{L})}$  de l'axe réel. On peut donc la prolonger de l'autre côté par la fonction  $\varphi_e(z) = \varphi(\bar{z})$  et c'est un prolongement analytique. De même,  $\tilde{\varphi}_e = \varphi_e \circ f^{-1}$  est alors un prolongement analytique de  $\tilde{\varphi}$  à l'extérieur du disque unité.

### 7.3.2 Autres transformations

Voici rapidement quelques exemples de transformations souvent utilisées dans la littérature :

**La transformation de Joukowsky** Cette transformation est utilisée en aérodynamique pour calculer un écoulement incompressible irrotationnel autour d'une aile d'avion. Elle est de la forme :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

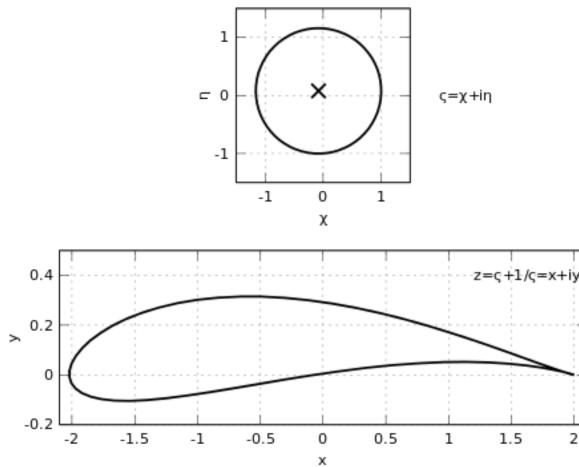
On voit que cette fonction  $f$  est définie partout sauf à l'origine. Sa dérivée

$$f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$$

s'annule en 1 et en  $-1$ . Et  $f$  n'est pas injective dans son domaine de définition puisque  $f(z) = f(1/z)$ . Mais on vérifie aisément que  $f$  est injective sur tout ouvert  $U$  tel que si  $z \in U$ , alors  $1/z \notin U$ , comme par exemple chacun des deux domaines  $\{|z| < 1\}$  et  $\{|z| > 1\}$ .

L'image du cercle  $\{|z| = 1\}$  est le segment réel  $[-1, 1]$ . Cette remarque permet de calculer très facilement un écoulement irrotationnel et uniforme à l'infini autour d'un cylindre.

Plus généralement, l'image d'un cercle non centré à l'origine ressemble à un profil d'aile d'avion, ce qui permet d'accéder à l'écoulement autour de ce profil.



**La transformation de Schwarz-Christoffel** C'est une transformation conforme qui transforme le demi-plan complexe supérieur en l'intérieur d'un polygone.

## 7.4 Le théorème de l'application conforme de Riemann

On a vu quelques exemples de transformations conformes qui transforment un domaine du plan complexe en un autre. On peut se demander plus généralement, étant donnés deux ouverts de  $\mathbb{C}$ , s'il existe toujours une transformation conforme transformant l'un

en l'autre. Un élément de réponse est fourni par le théorème de l'application conforme de Riemann. Nous allons énoncer ce théorème sans le démontrer, car sa preuve, bien qu'accessible, est assez longue. Pour l'énoncer, nous avons besoin d'introduire la définition suivante :

**Définition 7.6** *On dit qu'un ouvert connexe  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  est simplement connexe si pour tout lacet simple contenu dans  $\Omega$ , l'intérieur du lacet est également contenu dans  $\Omega$ .*

Autrement dit, un ouvert simplement connexe est un ouvert sans trous. Le disque unité ou le demi-plan complexe supérieur sont des ouverts simplement connexes. En revanche, une couronne n'est pas simplement connexe.

**Théorème 7.7** *Soit  $\Omega$  un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$  différent de  $\mathbb{C}$ . Alors il existe une fonction holomorphe  $f$  qui est une bijection entre  $\Omega$  et le disque unité ouvert  $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ .*

En revanche, il est clair que le résultat n'est plus vrai si  $\Omega = \mathbb{C}$ . En effet, si  $f$  est une fonction holomorphe de  $\mathbb{C}$  dans  $D$ , alors c'est une fonction entière bornée, donc constante d'après le théorème de Liouville. Ce ne peut donc pas être une bijection entre  $\mathbb{C}$  dans  $D$  !

Notons aussi que d'après le théorème, il existe toujours une transformation conforme entre deux ouverts simplement connexes.

Au vu de ce théorème, on serait tenté de penser qu'il existe toujours une transformation conforme entre deux ouverts dès que ces deux ouverts ont les mêmes propriétés topologiques. C'est faux comme le montre le cas des couronnes. En effet, on peut montrer qu'il n'existe une transformation conforme entre deux couronnes que si elles ont le même rapport  $R_{ext}/R_{int}$  entre le rayon du cercle extérieur et celui du cercle intérieur.



## Annexe A

# Résultats techniques sur les chemins

### A.1 Preuve du lemme sur les paramétrages

Notre but est de démontrer le lemme 3.7. Pour chaque couple  $(g_1, g_2) \in \mathcal{P}(\gamma)$ , il s'agit de construire la bijection  $\theta$ . L'intuition de la preuve est simple (moralement  $\theta = g_1^{-1} \circ g_2$ ). Sa rédaction est plus délicate. Nous allons la donner dans le cas d'un lacet ouvert ( $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ) et laissons au lecteur le soin de l'adapter au cas d'un lacet (seule la première étape de la démonstration ci-dessous doit être modifiée). La bijection  $\theta$  va être construite par morceaux.

Pour pour chaque  $k = 1, 2$ , nous déignerons par  $\{t_j^k, 0 \leq j \leq N_k\}$  l'ensemble des points singuliers du paramétrage  $g_k$ .

Par définition 3.1, on peut décomposer  $\gamma$  en sous-arcs

$$\gamma = \bigcup_{j=0}^{N_k-1} \gamma_k^j, \quad \gamma_k^j := \{g_k(t), t \in [t_j^k, t_{j+1}^k]\}$$

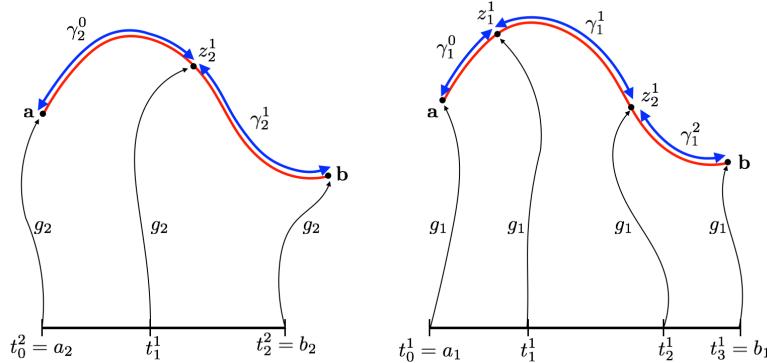
et en outre  $g_k^j := g_k|_{[t_j^k, t_{j+1}^k]}$  est une bijection de  $[t_j^k, t_{j+1}^k]$  de classe  $C^1$  dans  $\gamma_k^j$ .

*Étape 1 :* Pour des raisons de continuité et d'injectivité locale, il est clair que  $\{g_1(a_1), g_1(b_1)\} = \{g_2(a_1), g_2(b_1)\}$ . Nous n'allons traiter dans la suite que le cas où  $g_1(a_1) = g_2(a_1)$  et  $g_1(a_1) = g_2(a_1)$ . Dans ce cas, la bijection  $\theta$  va être croissante. Le second cas ( $\theta$  est alors décroissante) est laissé au lecteur.

*Étape 2 :* Construction des points singuliers de la bijection  $\theta$  dans  $[a_2, b_2]$ . Ceux-ci vont être constitués de la réunion des  $N_2$  points singuliers  $t_j^2$  du paramétrage  $g_2$  et de  $N_1$  points  $t_j^{1,*}$ , construits ci-après, associés à chaque point singulier  $t_j^1$  de  $g_1$  (ce sont les images réciproques par  $g_2$  des points  $z_j^1$ ).

Après numérotation par valeurs croissantes, nous noterons , avec  $M \leq N_1 + N_2 - 2$ .

$$\{t_0^* = a_2 < t_1^* < \dots < t_M^* = b_2\} := \{t_j^{1,*}, 0 \leq j \leq N_1\} \cup \{t_j^2, 0 \leq j \leq N_2\} \quad (\text{A.1})$$

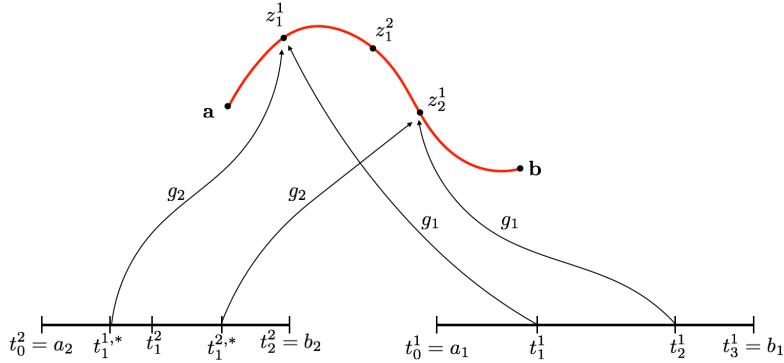
FIGURE A.1 – Les découpages en  $\gamma_j^k$ 

Plus précisément, chaque point  $t_j^{1,*}$  est construit comme suit : comme  $\gamma$  est la réunion des sous arcs  $\{\gamma_2^i, 0 \leq i \leq N_1 - 1\}$ , il existe un unique entier  $i_j \leq N_1 - 1$  tel que

$$z_j^1 := g_1(t_j^1) \in \gamma_2^{i_j} := g_2([t_{i_j}^2, t_{i_j+1}^2]) \quad (\text{sous-arc de } \gamma)$$

Comme  $g_2^i := g_2|_{[t_i^2, t_{i+1}^2]}$  est une bijection de  $[t_i^2, t_{i+1}^2]$  dans  $\gamma_2^i$ , nous pouvons définir

$$t_j^{1,*} := (g_2^{i_j})^{-1}(z_j^1), \quad (\text{voir aussi figure A.2}). \quad (\text{A.2})$$

FIGURE A.2 – Construction de  $t_j^{1,*}$ 

De la même façon, en intervertissant les rôles de  $g_1$  et  $g_2$  on définit un nouveau découpage de  $[a_1, b_1]$  avec les points singuliers de  $g_1$  et les images réciproques par  $g_1$  des points  $z_j^2$ )

$$\{t_0^{**} = a_1 < t_1^{**} < \dots < t_M^{**} = b_1\} := \{t_j^{2,*}, 0 \leq j \leq N_2\} \cup \{t_j^1, 0 \leq j \leq N_1\} \quad (\text{A.3})$$

*Étape 3* : Définition de  $\theta$  par morceaux.

Ce qui précède amène à un nouveau découpage de  $\gamma$ , à savoir (voir aussi figure A.1)

$$\gamma = \bigcup_{k \leq M-1} \gamma_k, \quad \gamma_k = g_2([t_k^*, t_{k+1}^*])$$

Il faut comprendre que le travail réalisé jusqu'ici a servi à identifier des intervalles assez petits pour que les fonctions  $g_2$  et  $g_1 \circ \theta$  y soient  $C^1$ , à dérivée non nulle et injectives.

Par construction, pour chaque  $k$ , chaque intervalle  $[t_k^*, t_{k+1}^*]$  est inclus dans un intervalle  $[t_{i_k}^1, t_{i_k+1}^1]$  (ou de façon équivalente  $\gamma_k$  est inclus dans  $\gamma_{i_k}^1$ ). Nous pouvons alors définir la restriction de la fonction  $\theta$  à  $[t_k^*, t_{k+1}^*]$  par

$$\theta|_{[t_k^*, t_{k+1}^*]} := (g_1^{i_k})^{-1} \circ g_2 \quad (\text{A.4})$$

de telle sorte que, par construction,  $g_2 = g_1 \circ \theta$  dans  $[t_k^*, t_{k+1}^*]$ . Le lecteur pourra se convaincre que la fonction réalise une bijection croissante de  $[t_k^*, t_{k+1}^*]$  dans  $[t_k^{**}, t_{k+1}^{**}]$  (en particulier  $\theta(t_k^*) = t_k^{**}$ ).

On reconstruit alors globalement  $\theta$  par recollement de ses restrictions aux intervalles

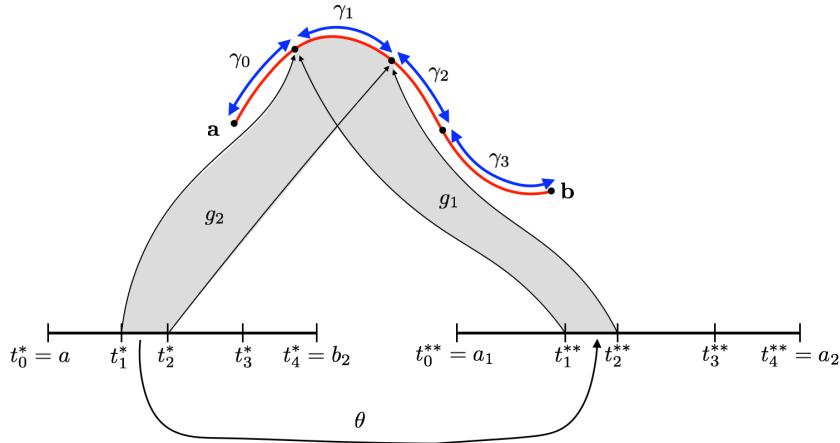


FIGURE A.3 – Construction de la bijection  $\theta$

$[t_k^*, t_{k+1}^*]$ . On peut alors vérifier que  $\theta$  réalise une bijection croissante de  $[a_2, b_2]$  dans  $[a_1, b_1]$

*Étape 3 : Dérivabilité de  $\theta$ .* Il nous reste à vérifier que  $\theta$  est bien dérivable en tout point de  $[t_k^*, t_{k+1}^*]$  et que cette dérivée ne s'annule pas. Le lecteur pourra observer que, pour chaque intervalle  $[t_k^*, t_{k+1}^*]$ , il existe deux entiers  $i_1 < N_1 - 1$  et  $i_2 < N_2 - 1$  tels que :

$$[t_k^{**}, t_{k+1}^{**}] \subset [t_{i_2}^2, t_{i_2+1}^2] \equiv \theta([t_k^*, t_{k+1}^*]) \subset [t_{i_1}^1, t_{i_1+1}^1]$$

est aussi inclus dans un intervalle  $[t_{i_k}^2, t_{i_k+1}^2]$  Par conséquent,  $g_1$  est dérivable en  $\theta(t)$  et donc, pour tout  $h$  assez petit, nous pouvons écrire

$$g_1(\theta(t+h)) = g_1(\theta(t)) + g'_1(\theta(t)) (\theta(t+h) - \theta(t)) + (\theta(t+h) - \theta(t)) \varepsilon(\theta(t+h) - \theta(t)),$$

avec  $\lim_{s \rightarrow 0} \varepsilon(s) = 0$ , soit encore

$$g_2(t+h) = g_2(t) + g'_1(\theta(t)) (\theta(t+h) - \theta(t)) + (\theta(t+h) - \theta(t)) \varepsilon(\theta(t+h) - \theta(t))$$

Par conséquent, comme  $g'_1(\theta(t)) \neq 0$ , nous pouvons écrire

$$\frac{\theta(t+h) - \theta(t)}{h} = g'_1(\theta(t))^{-1} \left(1 + \varepsilon(\theta(t+h) - \theta(t))\right)^{-1} \left[\frac{g_2(t+h) - g_2(t)}{h}\right]$$

En passant à la limite quand  $h \rightarrow 0$ , on montre ainsi que  $\theta(t)$  est dérivable en  $t$  et que

$$\theta'(t) = g'_1(\theta(t))^{-1} g'_2(t) \neq 0,$$

ce qui correspond à la seconde ligne de (3.3).

## A.2 Preuve du théorème 3.13

Comme tout chemin est une réunion finie de chemins simples (lemme 3.9), on peut se limiter à un chemin simple. Soit  $g$  un paramétrage de  $\gamma$ , nous allons montrer que si  $t \in ]a, b[$  n'est pas un point singulier, alors pour  $\varepsilon > 0$  assez petit,  $g(t) + \varepsilon n(t)$ , où  $n(t) \equiv n(g(t))$ , n'appartient pas à  $\gamma$  ce qui démontre a fortiori que  $\gamma$  n'est pas un voisinage de  $g(t)$ .

Supposons par l'absurde que, pour tout  $\varepsilon$  assez petit, il existe  $t_\varepsilon \in [a, b]$  tel que

$$g(t_\varepsilon) = g(t) + \varepsilon n(t) \tag{A.5}$$

Quitte à extraire une sous-suite de valeurs de  $\varepsilon$ , nous pouvons supposer que  $t_\varepsilon$  converge vers  $t^* \in [a, b]$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. En passant à la limite dans (A.5), nous obtenons  $g(t) = g(t^*)$  et donc  $t^* = t$  puisque le chemin est simple. Or, l'égalité (A.5) se réécrit aussi

$$(t_\varepsilon - t) g'(t) (1 + o(t_\varepsilon - t)) = \varepsilon n(t) \tag{A.6}$$

d'où nous déduisons, en passant au module, que  $|t_\varepsilon - t| \sim \varepsilon |g'(t)|^{-1}$ . Quitte à modifier à nouveau la suite  $\varepsilon$  pour que  $t_\varepsilon - t$  ait un signe constant, nous aurons  $t_\varepsilon - t \sim \pm \varepsilon |g'(t)|^{-1}$ , auquel cas nous déduisons de (A.6) que  $n(t) = \pm \tau(t)$  ce qui est impossible.

## A.3 Longueur d'une courbe

De façon assez naturelle, la longueur d'un chemin est définie comme la limite de la longueur d'une suite de lignes brisées constituées de segments joignant les points consécutifs d'une suite de découpages de  $\gamma$ ,  $\mathbf{z}_n \in \mathcal{Z}(\gamma)$  dont le pas  $h(\mathbf{z}_n)$  tend vers 0. Assurons au découpage la longueur notée  $\ell(\mathbf{z})$  de la ligne brisée associée, soit

$$\ell(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^N |z_{j+1} - z_j|$$

nous souhaitons alors définir la longueur de  $\gamma$  par  $|\gamma| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell(\mathbf{z}_n)$ .

Supposons pour simplifier que  $\gamma$  admet un paramétrage de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  et montrons que cette limite existe et qu'elle est donnée par (3.23). il suffit de noter que si

$$\mathbf{z}_n = \{z_0^n, \dots, z_{N_n}^n\} \equiv \{g(t_0^n), \dots, g(t_{N_n}^n)\},$$

alors  $\ell(\mathbf{z}_n) = \sum_{j=1}^{N_n} |f(t_j^n) - f(t_{j-1}^n)|$  alors que  $\tau_n := \sup_{j=1}^{N_n} |t_j^n - t_{j-1}^n| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Or, en utilisant l'identité

$$g(t_j^n) - g(t_{j-1}^n) = g'(t_j^n) (t_j^n - t_{j-1}^n) + \varepsilon_j^n, \quad \varepsilon_j^n = \int_{t_j^n}^{t_{j-1}^n} |g'(s) - g'(t_j^n)| ds,$$

nous obtenons l'encadrement

$$|g'(t_j^n)| (t_j^n - t_{j-1}^n) - |\varepsilon_j^n| \leq |g(t_j^n) - g(t_{j-1}^n)| \leq |g'(t_j^n)| (t_j^n - t_{j-1}^n) + |\varepsilon_j^n|.$$

Nous observons alors que si

$$\omega(g, \delta) = \sup_{|t-t'| \leq \delta} |g(t) - g(t')|$$

désigne le module de continuité uniforme de  $g$  sur  $[a, b]$  alors

$$\sum_{n=1}^{N_n} |\varepsilon_j^n| \leq (b-a) \omega(g, \tau_n) \quad (\rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty)$$

Par conséquent  $\ell(\mathbf{z}_n) = \sum_{j=1}^{N_n} (t_j^n - t_{j-1}^n) |f'(t_j^n)| + \delta \ell(\mathbf{z}_n)$ , avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta \ell(\mathbf{z}_n) = 0$ .

En utilisant le résultat bien connu pour les sommes de Riemann, on obtient alors (3.23).



## Annexe B

# Régularité des fonctions harmoniques

Notre but est ici de démontrer le

**Théorème B.1** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  et  $u$  une fonction continue dans  $\Omega$ . On suppose que  $u$  est harmonique, c'est-à-dire que*

$$\Delta u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \tag{B.1}$$

*alors  $u$  est de classe  $C^\infty$  dans  $\Omega$ .*

La preuve de ce théorème va s'appuyer sur deux lemmes. Le premier a déjà été vu dans le cours d'analyse.

**Lemme B.2** *La fonction  $E(x) := \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} |x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$  vérifie*

$$\Delta E = \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2). \tag{B.2}$$

Le second est un résultat de densité. Dans ce qui suit on désigne par  $B_R$  la boule ouverte de  $\mathbb{R}^2$  centrée en 0 de rayon  $R > 0$ .

**Lemme B.3** *Soit  $u \in C^0(\overline{B_R})$  et harmonique dans  $B_R$ . Pour tout  $R' < R$  il existe une suite*

$$u_\varepsilon \in C_0^\infty(B_R) \quad (\text{définie pour } \varepsilon > 0 \text{ assez petit})$$

*telle que*

$$\Delta u_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(B_{R'}) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty(B_{R'})} = 0.$$

DÉMONSTRATION. Considérons par ailleurs la fonction

$$\rho(x) = A \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad \text{avec } \operatorname{supp} \rho \subset B(0, 1)$$

où la constante  $A > 0$  est choisie telle que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho(x) dx = 1.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , la fonction  $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  vérifie

$$\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad \text{supp } \rho_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon), \quad \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(x) dx = 1.$$

La famille  $\rho_\varepsilon$  est ce que l'on appelle une suite régularisante (quand  $\varepsilon$  tend vers 0).

Considérons la suite de fonctions

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad u_\varepsilon(x) := \int_{B_{R'}} \rho_\varepsilon(x - y) u(y) dy.$$

Nous observons tout d'abord que  $u_\varepsilon$  est de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^2$ . En effet, l'application réitérée du théorème de dérivation sur le signe somme nous permet de montrer que (les détails sont laissés au lecteur), pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,

$$\partial^\alpha u_\varepsilon(x) := \int_{B_{R'}} \partial^\alpha \rho_\varepsilon(x - y) u(y) dy.$$

Par ailleurs  $u_\varepsilon$  est à support dans  $B_{R'+\varepsilon} \subset B_R$  dès que  $\varepsilon < R - R'$ . Nous ferons cette hypothèse pour la suite.

Montrons enfin que  $u_\varepsilon$  est harmonique dans  $B_{R'}$ . Dans ce qui suit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{R'}$  désigne le crochétage de dualité dans  $D'(B_{R'})$ . Pour tout  $\theta \in \mathcal{D}(B_{R'})$ , que l'on confondra systématiquement à son prolongement par 0 en dehors de  $B_{R'}$ , nous avons par définition du Laplacien au sens des distributions

$$\langle \Delta u_\varepsilon, \theta \rangle_{R'} = \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon(x) \Delta \theta(x) dx$$

Si nous notons toujours  $u$  le prolongement de  $u$  par 0 en dehors de  $B_R$ , la fonction  $(x, y) \mapsto \rho_\varepsilon(x - y) u_\varepsilon(y) \Delta \theta(x)$  est dans  $L^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ . En effet, comme

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(x - y) |u_\varepsilon(y)| dy \leq \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)},$$

on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(x - y) |u_\varepsilon(y)| |\Delta \theta(x)| dx dy \leq \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \|\Delta \theta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

L'application du théorème de Fubini nous permet donc d'écrire

$$\langle \Delta u_\varepsilon, \theta \rangle_{R'} = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(x - y) u(y) \Delta \theta(x) dx dy. \tag{B.3}$$

Si nous introduisons la fonction test

$$\theta^\varepsilon(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(y - x) \theta(x) dx,$$

qui est  $C^\infty$  à support compact inclus dans  $B_R$  et vérifie

$$\Delta\theta^\varepsilon(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \Delta\rho_\varepsilon(y-x) \theta(x) dx \equiv \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(y-x) \Delta\theta(x) dx,$$

la seconde égalité résultant d'une double intégration par parties.

Nous concluons alors grâce à la suite d'égalités (la première n'est qu'une réécriture de (B.3), grâce au théorème de Fubini), où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$  désigne bien sûr le crochet de dualité dans  $D'(B_R)$ ,

$$\langle \Delta u_\varepsilon, \theta \rangle_{R'} = \int_{\mathbb{R}^2} u(y) \Delta\theta^\varepsilon(y) dy \equiv \langle u, \Delta\theta_\varepsilon \rangle_R = \langle \Delta u, \theta_\varepsilon \rangle_R = 0$$

où nous avons, pour finir, utilisé que  $\Delta u = 0$  dans  $D'(B_R)$ .

Il reste à démontrer que  $u_\varepsilon$  converge vers  $u$  uniformément dans  $B_{R'}$ .

Or, comme  $\int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(x) dx = 1$ , nous avons

$$\forall x \in B_R, \quad u_\varepsilon(x) - u(x) = \int_{B_R} \rho_\varepsilon(x-y) (u(y) - u(x)) dy$$

Introduisons le module de continuité uniforme de  $u$  dans la boule  $B_R$ , soit, pour tout  $\eta > 0$

$$\omega(u; R, \eta) := \sup \{ |u(x) - u(y)|, (x, y) \in B_R^2, |x - y| < \eta \}$$

qui vérifie  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \omega(u; R, \eta) = 0$  (c'est la définition de la continuité uniforme).

D'après les propriétés de support de  $\rho_\varepsilon$ , on voit que pour  $x \in B_{R'}$  et puisque  $\varepsilon < R - R'$

$$\rho_\varepsilon(x-y) \neq 0 \implies |x| \leq R, |y| \leq R \text{ et } |x-y| < \varepsilon.$$

Nous en déduisons la majoration

$$|x| < R' \implies |u_\varepsilon(x) - u(x)| = \omega(u; R, \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(x-y) dy \equiv \omega(u; R, \varepsilon)$$

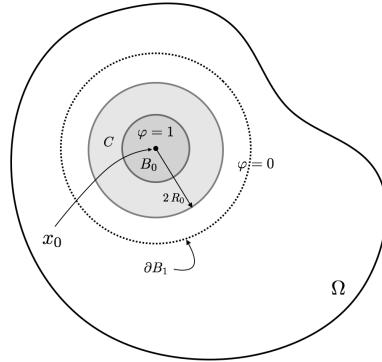
ce qui achève la démonstration. □

**Démonstration du théorème B.1** Nous allons démontrer que  $u$  est de classe  $C^\infty$  au voisinage de tout point  $x_0 \in \Omega$ . Soient  $R_0 > 0$  et  $R_1 > 2R_0$  tels que

$$B(x_0, 2R_0) \subset B_1 := B(x_0, R_1) \subset \Omega$$

de telle sorte que, en particulier  $u \in C^0(\overline{B_1})$ . Soit  $B_0 := B(x_0, R_0)$ , nous allons utiliser dans ce qui suit une fonction de troncature  $\varphi$  telle que (voir aussi remarque B.4 et figure B.1)

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \varphi(x) = 1, \quad \forall x \in B_0, \quad \text{et} \quad \text{supp } \varphi \subset \overline{B(x_0, 2R_0)}$$

FIGURE B.1 – Les boules  $B_0$  et  $B_1$  et la fonction de troncature

Dans la suite, nous noterons

$$C = B(x_0, 2R_0) \setminus \overline{B}_0, \quad \text{de telle sorte que} \quad \text{supp } \nabla \varphi \subset \overline{C}.$$

Divisons la démonstration en deux étapes.

**Étape 1 :** Représentation intégrale de  $u$  dans la boule  $B_0$ .

La formule qui suit donne une formule pour  $u(x)$  en tout point de  $B_0$  à l'aide d'une intégrale n'impliquant que ses valeurs à l'intérieur de la couronne  $C$  et la solution élémentaire  $E$  :

$$u(x) = - \int_C E(x-y) \Delta \varphi(y) u(y) dy - 2 \sum_{i=1}^2 \int_C u(y) \partial_i E(x-y) \partial_i \varphi(y) dy. \quad (\text{B.4})$$

Pour établir cette formule, l'idée formelle est de remarquer que

$$\Delta(\varphi u) = (\Delta \varphi) u + 2 \nabla \varphi \cdot \nabla u \quad \text{dans } \Omega.$$

Le problème est qu'on sait seulement, a priori, que  $u$  est continue. C'est pourquoi nous allons utiliser un argument d'approximation impliquant le lemme B.3.

D'après ce lemme, que nous appliquons avec  $B_R = B_1$  et  $B_{R'} = B(x_0, 2R_0)$ , nous pouvons considérer une suite  $u^\varepsilon$  telle que

$$u^\varepsilon \in C_0^\infty(B_1), \quad \Delta u^\varepsilon = 0 \text{ dans } B(x_0, 2R_0) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty(B(x_0, 2R_0))} = 0.$$

En confondant  $u^\varepsilon$ , ainsi que  $\varphi$  avec son prolongement par 0 hors de  $B_1$ , la fonction  $\varphi$  étant à support dans  $B(x_0, 2R_0)$ , il vient

$$\Delta(\varphi u^\varepsilon) = (\Delta \varphi) u^\varepsilon + 2 \nabla \varphi \cdot \nabla u^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega$$

Soit  $x \in B_0$  et  $E_x(y) = E(y - x) \in L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ . En raisonnant au sens des distributions dans  $\Omega$ , il vient

$$\langle E_x, \Delta(\varphi u^\varepsilon) \rangle = \langle E_x, (\Delta\varphi) u^\varepsilon \rangle + 2 \langle E_x, \nabla\varphi \cdot \nabla u^\varepsilon \rangle.$$

Comme, d'après le lemme B.2,  $\Delta E_x = \delta_x$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , et comme  $\varphi(x) = 1$ , il vient donc

$$u^\varepsilon(x) = \int_\Omega E_x(y) \Delta\varphi(y) u^\varepsilon(y) dy + 2 \int_\Omega E_x(y) \nabla\varphi(y) \cdot \nabla u^\varepsilon(y) dy.$$

On va maintenant se débarasser du gradient de  $u^\varepsilon$  dans la formule ci-dessus, ce qui peut se faire soit par intégrations par parties successives soit, de façon équivalente, en raisonnant au sens des distributions.

La fonction  $y \mapsto E_x(y)\nabla\varphi(y)$  s'annulant au voisinage de  $x$ , il s'agit d'une fonction test dans  $\mathcal{D}(\Omega)^2$ , de telle sorte que l'égalité précédente se réécrit aussi

$$u^\varepsilon(x) = \int_\Omega E_x(y) \Delta\varphi(y) u^\varepsilon(y) dy + 2 \langle \nabla u^\varepsilon, E_x \nabla\varphi \rangle.$$

Or, nous avons

$$\langle \nabla u^\varepsilon, E_x \nabla\varphi \rangle = \sum_{i=1}^2 \langle \partial_i u^\varepsilon, E_x \partial_i \varphi \rangle = - \sum_{i=1}^2 \langle u^\varepsilon, \partial_i (E_x \partial_i \varphi) \rangle$$

soit encore, en développant le second membre

$$\langle \nabla u^\varepsilon, E_x \nabla\varphi \rangle = - \sum_{i=1}^2 \langle u^\varepsilon, \partial_i E_x \partial_i \varphi \rangle - \langle u^\varepsilon, E_x \Delta\varphi \rangle$$

ce qui nous permet d'écrire, comme de plus  $\nabla\varphi$  et  $\Delta\varphi$  sont à support dans  $\overline{C}$ ,

$$u^\varepsilon(x) = - \int_C E_x(y) \Delta\varphi(y) u^\varepsilon(y) dy - 2 \sum_{i=1}^2 \int_C u^\varepsilon(y) \partial_i E(x - y) \partial_i \varphi(y) dy.$$

En exploitant la convergence uniforme de  $u^\varepsilon$  vers  $u$  (dans  $B(x_0, 2R_0)$  qui contient  $C$ ) quand  $\varepsilon$  tend vers 0, nous pouvons passer à la limite dans cette égalité pour obtenir (B.4).

**Étape 2 :** Régularité  $C^\infty$  de  $u$ . Pour déduire de (B.4) que  $u$  est régulière, le point clé est que dans la représentation intégrale (B.4),  $x - y$  ne s'annule jamais ce qui fait que  $x \in B_0 \mapsto E(x - y)$  est très régulière.

Ainsi, pour montrer que  $u$  est continument différentiable, il suffit de remarquer qu'on

peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme au membre de droite de l'égalité ci-dessus. En effet en posant

$$G(x, y) = -E(x - y) \Delta\varphi(y) u(y) - 2 \sum_{i=1}^2 u(y) \partial_i E(x - y) \partial_i \varphi(y)$$

nous avons

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) dy.$$

On remarque alors que  $x \mapsto G(x, y)$  est bien différentiable dans  $B_0$  et que

$$\partial_j G(x, y) = -\partial_j E(x - y) \Delta\varphi(y) u(y) - 2 \sum_{i=1}^2 u(y) \partial_{ij}^2 E(x - y) \partial_i \varphi(y).$$

Introduisons maintenant la boule  $B'_0 \subset B_0$  de centre  $x_0$  et rayon  $R_0/2$ , de telle sorte que

$$\forall (x, y) \in B'_0 \times C, \quad R_0/2 < |x - y| < 3R_0.$$

Nous en déduisons la majoration uniforme sur  $B_0 \times C$  :

$$|\partial_j G(x, y)| \leq \|\partial_j E\|_{L^\infty(D_0)} \|u \Delta\varphi\|_{L^\infty(C)} + 2 \sum_{i=1}^2 \|\partial_{ij}^2 E\|_{L^\infty(D_0)} \|u \partial_i \varphi\|_{L^\infty(C)}$$

où nous avons posé

$$D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 / R_0/2 < |x| < 3R_0\}$$

Comme  $C$  est un domaine borné, nous pouvons utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme et obtenir

$$\partial_j u(x) = - \int_{\Omega} \partial_j E(x - y) \Delta\varphi(y) u(y) dy - 2 \sum_{i=1}^2 \int_C u(y) \partial_{ij}^2 E(x - y) \partial_i \varphi(y) dy.$$

Par boot-strap on obtient, pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,

$$\partial^\alpha u(x) = \int_{\Omega} \partial^\alpha E(x - y) \Delta\varphi(y) u(y) dy - 2 \sum_{i=1}^2 \int_C u(y) (\partial_i \partial^\alpha E)(x - y) \partial_i \varphi(y) dy.$$

**Remarque B.4** *Le lecteur vérifiera à titre d'exercice, qu'on peut prendre*

$$\varphi(x) = \int_{|x|<3R_0/4} \rho_\varepsilon(x - y) dy$$

où  $\rho_\varepsilon$  est définie comme dans la démonstration du lemme B.3 et où on choisit  $\varepsilon < R_0/4$ .

# Bibliographie

- [1961] H. CARTAN, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris, 1961.
- [2001] J.-M. BONY, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2001.
- [1966] W. RUDIN, *Real and complex analysis*, Mc Graw Hill, 1966.