

# Approximation par différences finies de l'équation de transport

- Schéma de Lax Friedrichs
- Convergence du schéma de Lax Friedrichs et Théorème de Lax
- Schémas à 2 pas de temps
- Schémas implicites

# Le schéma de Lax Friedrichs

Trouver  $\mathbf{u}(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le schéma explicite centré est instable (voir l'amphi 4). On va le modifier

$$\partial_x \mathbf{u}(x_j, t^n) \simeq \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_{j-1}^n}{2h}$$

$$\partial_t \mathbf{u}(x_j, t^n) \simeq \frac{\cancel{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}}{\Delta t} \xrightarrow{\text{On remplace } \mathbf{u}_j^n \text{ par } \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n + \mathbf{u}_{j-1}^n}{2}} \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \left(\frac{\mathbf{u}_{j+1}^n + \mathbf{u}_{j-1}^n}{2}\right)}{\Delta t}$$

On obtient le schéma de Lax Friedrichs

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \left(\frac{\mathbf{u}_{j+1}^n + \mathbf{u}_{j-1}^n}{2}\right)}{\Delta t} + \mathbf{c} \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_{j-1}^n}{2h} = 0$$

qui se réécrit

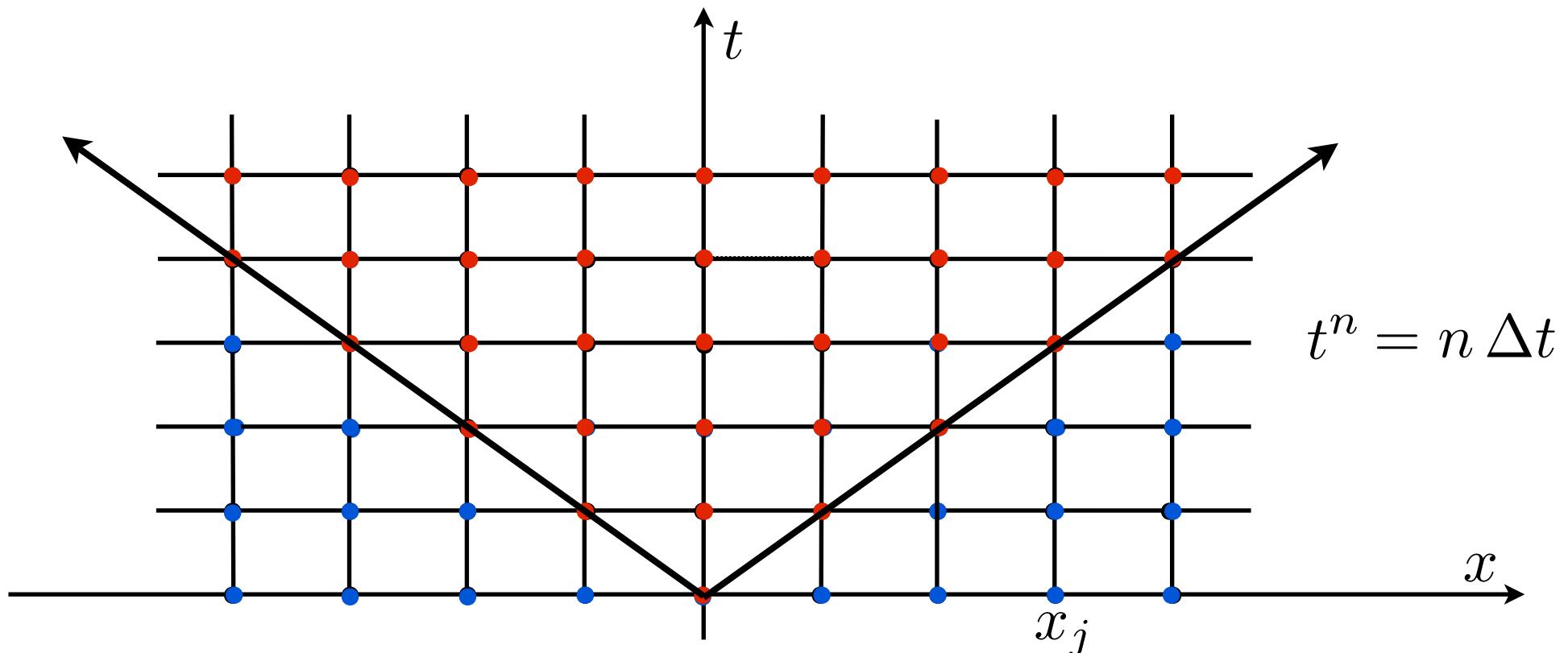
$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \mathbf{u}_{j+1}^n + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \mathbf{u}_{j-1}^n \quad \text{où } \alpha = \frac{\mathbf{c} \Delta t}{h}.$$

C'est un schéma explicite à un pas de temps.

# Le schéma de Lax Friedrichs

$$u_j^{n+1} = \left( \frac{1-\alpha}{2} \right) u_{j+1}^n + \left( \frac{1+\alpha}{2} \right) u_{j-1}^n \quad \text{où } \alpha = \frac{c \Delta t}{h}.$$

Comme pour le schéma explicite centré, on montre que la vitesse de propagation numérique est  $V_{num} = h / \Delta t$



Une condition nécessaire de convergence est donnée par la CFL

$$V_{num} \geq c \iff \alpha := \frac{c \Delta t}{h} \leq 1$$

# Consistance du schéma de Lax Friedrichs

Si on note  $\textcolor{red}{U}_j^n := \textcolor{red}{u}(x_j, t^n)$  l'erreur de troncature est donnée par

$$\textcolor{red}{\varepsilon}_j^n := \frac{\textcolor{red}{U}_j^{n+1} - \frac{\textcolor{red}{U}_{j+1}^n + \textcolor{red}{U}_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + \textcolor{green}{C} \frac{\textcolor{red}{U}_{j+1}^n - \textcolor{red}{U}_{j-1}^n}{2h}$$

Rappel :

Le schéma est **consistant** ssi  $\lim_{\Delta t, h \rightarrow 0} \textcolor{red}{\varepsilon}_j^n = 0$

Le schéma est précis d'**ordre  $k$**  en **temps** et  **$p$**  en **espace** ssi

$$\textcolor{red}{\varepsilon}_j^n = O(\Delta t^{\textcolor{blue}{p}} + h^{\textcolor{blue}{k}}) \quad ((\textcolor{blue}{p}, \textcolor{blue}{k}) \in \mathbb{N}^2)$$

# Consistance du schéma de Lax Friedrichs

Si on note  $U_j^n := \textcolor{red}{u}(x_j, t^n)$  l'erreur de troncature est donnée par

$$\varepsilon_j^n := \frac{U_j^{n+1} - \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + \textcolor{green}{C} \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h}$$

En remarquant que  $\frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} = U_j^n + \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2}$  on trouve

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^n &= \underbrace{\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \textcolor{green}{C} \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h}}_{= \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial^2 \textcolor{red}{u}}{\partial t^2} \right)_j^n + \frac{h^2}{6} \left( \frac{\partial^3 \textcolor{red}{u}}{\partial x^3} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^4)} - \frac{1}{2\Delta t} \underbrace{\left( U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n \right)}_{= h^2 \left( \frac{\partial^2 \textcolor{red}{u}}{\partial x^2} \right)_j^n + \mathcal{O}(h^4)} \\ &\quad (\text{voir l'amphi 4}) \end{aligned}$$

En réécrivant  $\frac{h^2}{2\Delta t} = \frac{\textcolor{green}{C} h}{2\alpha}$ , on obtient

$$\varepsilon_j^n = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial^2 \textcolor{red}{u}}{\partial t^2} \right)_j^n + \frac{h^2}{6} \left( \frac{\partial^3 \textcolor{red}{u}}{\partial x^3} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^4) - \frac{\textcolor{green}{C} h}{2\alpha} \left[ \left( \frac{\partial^2 \textcolor{red}{u}}{\partial x^2} \right)_j^n + \mathcal{O}(h^2) \right]$$

A  $\alpha$  fixé, le schéma est consistant et d'ordre I en temps et en espace.

# Stabilité du schéma de Lax Friedrichs

Le schéma se réécrit

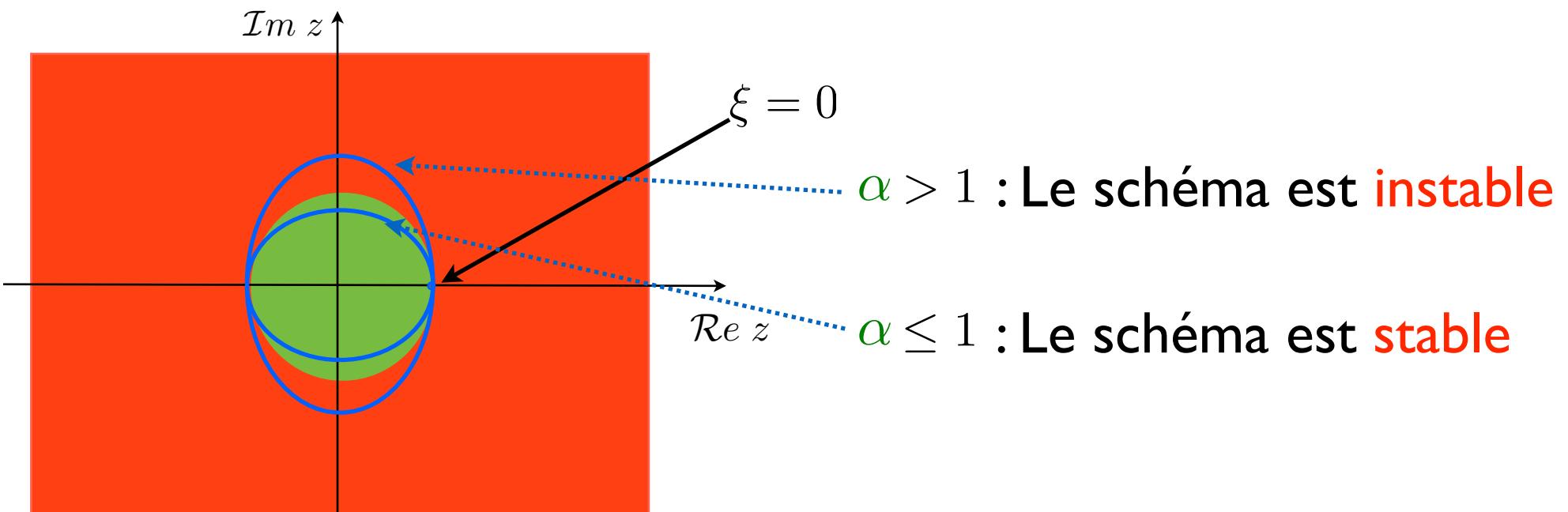
$$\textcolor{red}{u}_j^{n+1} = \left( \frac{1-\alpha}{2} \right) \textcolor{red}{u}_{j+1}^n + \left( \frac{1+\alpha}{2} \right) \textcolor{red}{u}_{j-1}^n$$

On utilise la méthode de Fourier-Von Neumann et on cherche les solution sous la forme

$$\textcolor{red}{u}_j^n = \widehat{\textcolor{red}{u}}^n(\xi) e^{i\xi x_j}$$

ce qui mène à  $\widehat{\textcolor{red}{u}}^{n+1}(\xi) = \widehat{S}_h(\xi, \Delta t) \widehat{\textcolor{red}{u}}^n(\xi)$  avec

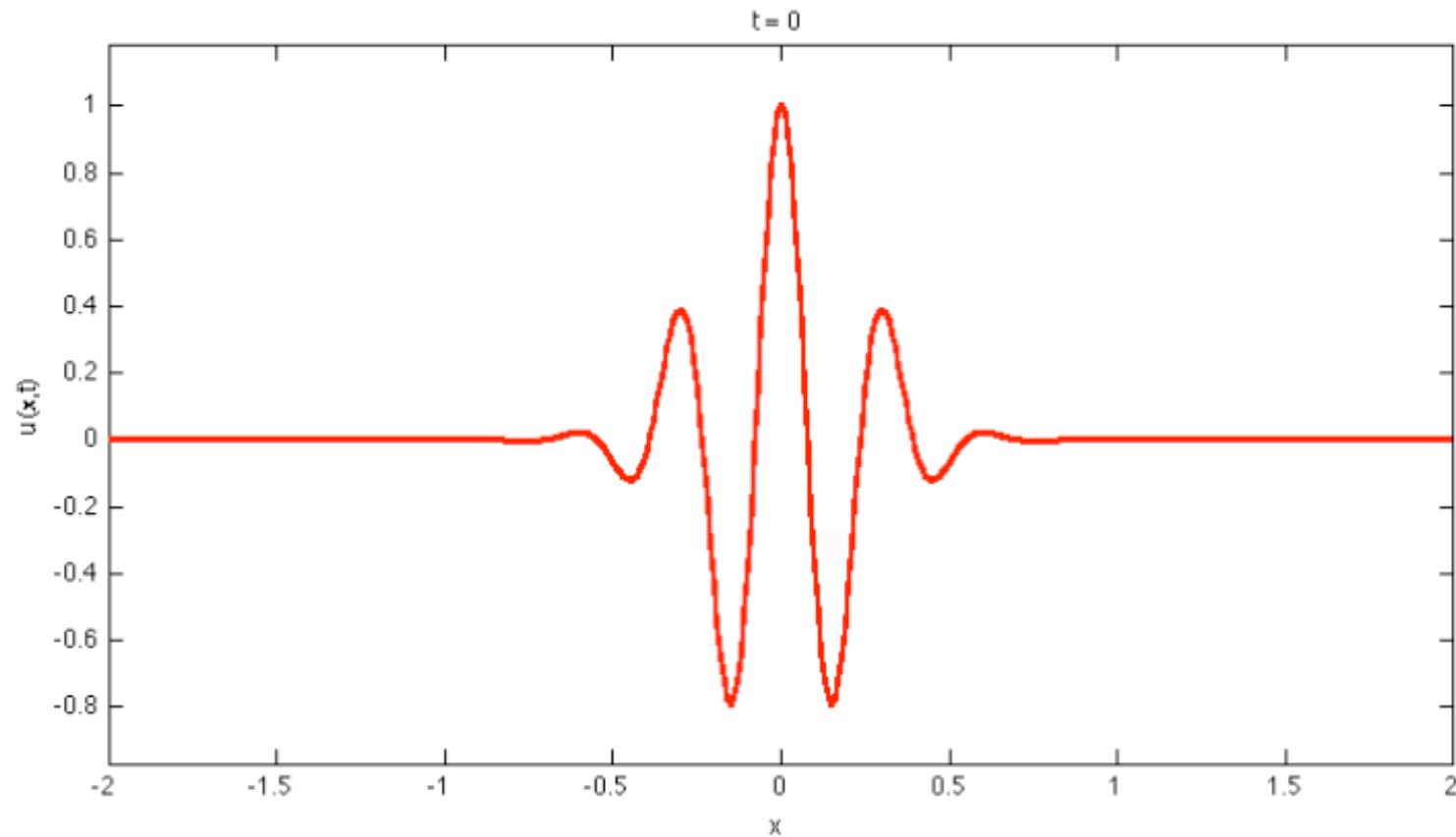
$$\widehat{S}_h(\xi, \Delta t) = \left( \frac{1-\alpha}{2} \right) e^{i\xi h} + \left( \frac{1+\alpha}{2} \right) e^{-i\xi h} = \cos \xi h - i\alpha \sin \xi h$$



# Simulations pour le schéma de Lax-Friedrichs

La solution d'un schéma **consistant et stable** approche-t-elle la solution de l'équation continue ? La réponse est **OUI**. C'est le **théorème de Lax**

**Stabilité + Consistance  $\implies$  Convergence**

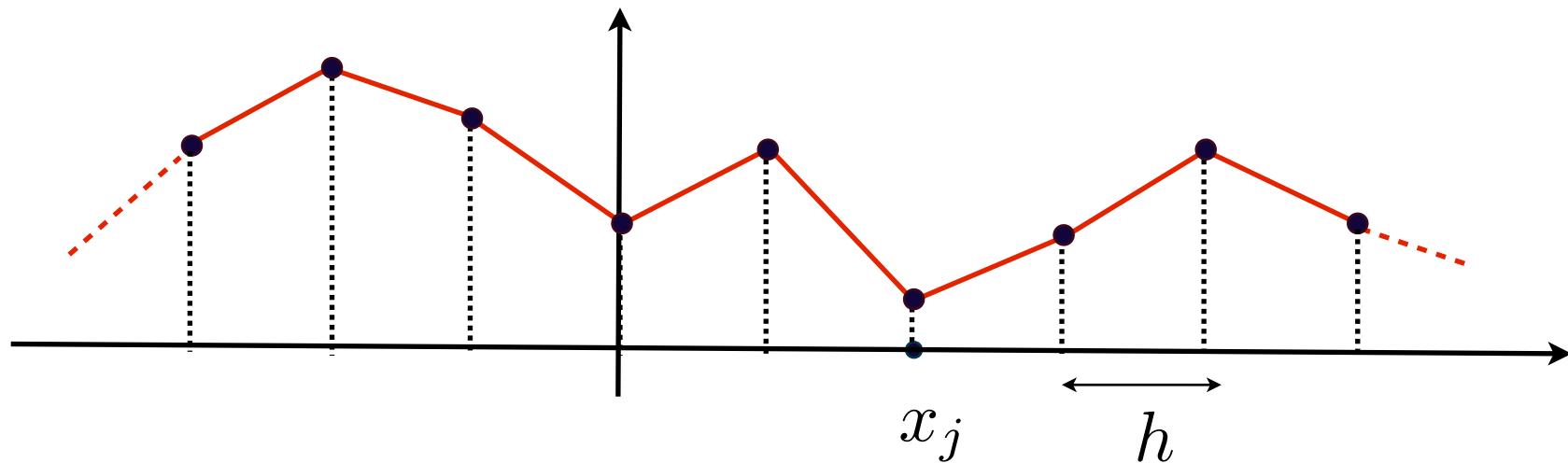


Simulations numériques :  $h=0.01$ ,  $\alpha = 0.99$

# Notions de convergence

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit , à partir des  $(\textcolor{red}{u}_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$  , une fonction  $\textcolor{red}{u}_h^n$  dans  $\textcolor{blue}{V} = L^2(\mathbb{R})$  via une **interpolation linéaire**

$$\textcolor{red}{u}_h^n \in \textcolor{blue}{V}_h = \left\{ \textcolor{red}{u}_h \in \textcolor{blue}{V} \cap C^0(\mathbb{R}) , \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \textcolor{red}{u}_h|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1 \right\}$$



Définition : Le schéma est **convergent** dans  $L^\infty(0, T; L^2)$  ssi

$$\forall \textcolor{blue}{u}_0 \in L^2, \quad \lim_{(\Delta t, h) \rightarrow 0} \sup_{t^n \leq T} \|\textcolor{red}{u}(\cdot, t^n) - \textcolor{red}{u}_h^n\|_{L^2} = 0.$$

# Convergence du schéma de Lax-Friedrichs

Le schéma de Lax Friedrichs

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) u_{j+1}^n + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) u_{j-1}^n \quad \text{où } \alpha = \frac{\Delta t}{h}.$$

se réécrit

$$u_h^{n+1}(x) = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) u_h^n(x+h) + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) u_h^n(x-h) := S_h(\Delta t) u_h^n(x)$$

L'erreur de troncature (version continue) est donnée par

$$\varepsilon_h^n(x) := \frac{u(x, t^{n+1}) - \frac{u(x+h, t^n) + u(x-h, t^n)}{2}}{\Delta t} + \mathcal{C} \frac{u(x+h, t^n) - u(x-h, t^n)}{2h}$$

si bien que la solution exacte vérifie  $\varepsilon_h^n = \frac{1}{\Delta t} [u(\cdot, t^{n+1}) - S_h(\Delta t) u(\cdot, t^n)]$

soit

$$u(\cdot, t^{n+1}) = S_h(\Delta t) u(\cdot, t^n) + \Delta t \varepsilon_h^n$$

Introduisons l'erreur :  $e_h^n = u_h^n - u(\cdot, t^n) \in L^2$

alors elle vérifie  $e_h^{n+1} = S_h(\Delta t) e_h^n + \Delta t \varepsilon_h^n$  et par récurrence

$$e_h^n = S_h(\Delta t)^n e_h^0 + \Delta t \sum_{k=1}^n S_h(\Delta t)^{n-k} \varepsilon_h^{k-1}$$

# Convergence du schéma de Lax-Friedrichs

On a donc l'estimation

$$\|\textcolor{red}{e}_h^n\|_{L^2} \leq \|S_h(\Delta t)^n\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|\textcolor{red}{e}_h^0\|_{L^2} + \Delta t \sum_{k=1}^n \|S_h(\Delta t)^{n-k}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|\textcolor{red}{\varepsilon}_h^{k-1}\|_{L^2}$$

## I. Estimation $L^2$ de l'erreur de consistance

Un développement de Taylor avec **reste intégral** montre que (la solution est supposée assez régulière)

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|\textcolor{red}{\varepsilon}_h^k\|_{L^2} \leq C(\alpha) \left( \Delta t \sup_{t \in [t^k, t^{k+1}]} \left\| \frac{\partial^2 \textcolor{red}{u}}{\partial t^2}(\cdot, t) \right\|_{L^2} + h \sup_{t \in [t^k, t^{k+1}]} \left\| \frac{\partial^2 \textcolor{red}{u}}{\partial x^2}(\cdot, t) \right\|_{L^2} \right)$$

ce qui pour la solution de l'équation de transport donne ( $\textcolor{red}{u}(x, t) = \textcolor{blue}{u}^0(x - ct) \quad \forall (x, t)$ )

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|\textcolor{red}{\varepsilon}_h^k\|_{L^2} \leq C(\alpha) (\Delta t + h) \left\| \frac{\partial^2 \textcolor{blue}{u}^0}{\partial x^2} \right\|_{L^2}$$

# Convergence du schéma de Lax-Friedrichs

On a donc l'estimation

$$\|\textcolor{red}{e}_h^n\|_{L^2} \leq \|S_h(\Delta t)^n\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|\textcolor{red}{e}_h^0\|_{L^2} + \Delta t \sum_{k=1}^n \|S_h(\Delta t)^{n-k}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|\textcolor{red}{\varepsilon}_h^{k-1}\|_{L^2}$$

## I. Estimation $L^2$ de l'erreur de consistance

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|\textcolor{red}{\varepsilon}_h^k\|_{L^2} \leq C(\alpha) (\Delta t + h) \left\| \frac{\partial^2 \textcolor{blue}{u}^0}{\partial x^2} \right\|_{L^2}$$

## 2. Estimation de $\|S_h(\Delta t)^k\|_{\mathcal{L}(L^2)}$ , $\forall k \leq n$

On a

$$S_h(\Delta t) u(x) = \left( \frac{1-\alpha}{2} \right) u(x+h) + \left( \frac{1+\alpha}{2} \right) u(x-h)$$

Si on applique la Transformée de Fourier

$$\mathcal{F}[S_h(\Delta t) u](\xi) = \hat{S}_h(\Delta t, \xi) \hat{u}(\xi)$$

ce qui donne

$$\|S_h(\Delta t) u\|_{L^2} \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{S}_h(\Delta t, \xi)| \|u\|_{L^2} \leq (1 + \nu \Delta t) \|u\|_{L^2}$$

↑  
Stabilité si  $\alpha \leq 1$

soit

$$\|S_h(\Delta t)^k\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq e^{\nu t^k} \leq e^{\nu T}, \quad \forall t^k \leq T. \quad \text{où on a utilisé } (1 + s/k)^k \leq e^s$$

# Convergence du schéma de Lax-Friedrichs

On a donc l'estimation

$$\|\textcolor{red}{e}_h^n\|_{L^2} \leq \|S_h(\Delta t)^n\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|\textcolor{red}{e}_h^0\|_{L^2} + \Delta t \sum_{k=1}^n \|S_h(\Delta t)^{n-k}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|\textcolor{red}{\varepsilon}_h^{k-1}\|_{L^2}$$

## I. Estimation $L^2$ de l'erreur de consistance

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|\textcolor{red}{\varepsilon}_h^k\|_{L^2} \leq C(\alpha) (\Delta t + h) \left\| \frac{\partial^2 \textcolor{blue}{u}^0}{\partial x^2} \right\|_{L^2}$$

## 2. Estimation de $\|S_h(\Delta t)^k\|_{\mathcal{L}(L^2)}$ , $\forall k \leq n$

$$\|S_h(\Delta t)^k\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq e^{\nu t^k} \leq e^{\nu T}, \quad \forall t^k \leq T. \quad \text{si } \alpha \leq 1$$

## 3. Estimation de $\textcolor{red}{e}_h^0 = \textcolor{blue}{u}_h^0 - \textcolor{blue}{u}^0$ . On montre que $\|\textcolor{red}{e}_h^0\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2)$ .

## Conclusion

$$\begin{aligned} \forall n, \quad t^n \leq T, \quad \|\textcolor{red}{e}_h^n\|_{L^2} &\leq C e^{\nu T} h^2 + \Delta t \sum_{k=1}^n e^{\nu T} C(\alpha) (\Delta t + h) \left\| \frac{\partial^2 \textcolor{blue}{u}^0}{\partial x^2} \right\|_{L^2} \\ &\leq T e^{\nu T} C(\alpha) (\Delta t + h) \left\| \frac{\partial^2 \textcolor{blue}{u}^0}{\partial x^2} \right\|_{L^2} \end{aligned}$$

Comme la stabilité est uniforme  $\nu = 0$ ,

$$\boxed{\sup_{t^n \leq T} \|\textcolor{red}{e}_h^n\|_{L^2} \leq T C(\alpha) (\Delta t + h) \left\| \frac{\partial^2 \textcolor{blue}{u}^0}{\partial x^2} \right\|_{L^2} \quad \text{si } \alpha \leq 1}$$

# Convergence des schémas

On vient de montrer pour le schéma de Lax Friedrichs, le théorème

## Théorème de Lax

Soit  $\mathbf{u}$  la solution de l'équation de transport supposée suffisamment régulière et  $\mathbf{u}_j^n$  la solution discrète d'un schéma telle que  $\mathbf{u}_j^0 = \mathbf{u}^0(x_j)$

Si le schéma est **consistant** et **stable** (potentiellement sous condition sur  $(\Delta t, h)$ ) alors il est convergent dans le sens où

$$\lim_{(\Delta t, h) \rightarrow 0} \sup_{t^n \leq T} \|\mathbf{u}(\cdot, t^n) - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2} = 0.$$

Si le schéma est **d'ordre p en temps et q en espace** (\*) alors

$$\exists C(T), \quad \sup_{t^n \leq T} \|\mathbf{u}(\cdot, t^n) - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2} \leq C(T) (\Delta t^p + h^q)$$

(\*) Pour les schémas à 2 pas de temps ou plus, il faut aussi que le schéma de démarrage ait le même ordre que le schéma (voir le schéma 3 du TD4).

# Le schéma de Lax Friedrichs

$$\frac{u_j^{n+1} - \left( \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \right)}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

C'est un schéma **explicite à un pas de temps**.

$$u_j^{n+1} = \left( \frac{1-\alpha}{2} \right) u_{j+1}^n + \left( \frac{1+\alpha}{2} \right) u_{j-1}^n$$

Les schémas explicites sont très peu coûteux (en terme de calcul et de stockage)

La **vitesse de propagation numérique** est  $V_{num} = h / \Delta t$

$$\text{Condition nécessaire de convergence } V_{num} \geq c \iff \alpha := \frac{c \Delta t}{h} \leq 1$$

A  $\alpha$  fixé, le schéma est consistant d'ordre I en temps et en espace

$$\varepsilon_j^n = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^n - \frac{ch}{2\alpha} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2) = -\frac{ch(1-\alpha^2)}{2\alpha} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2)$$

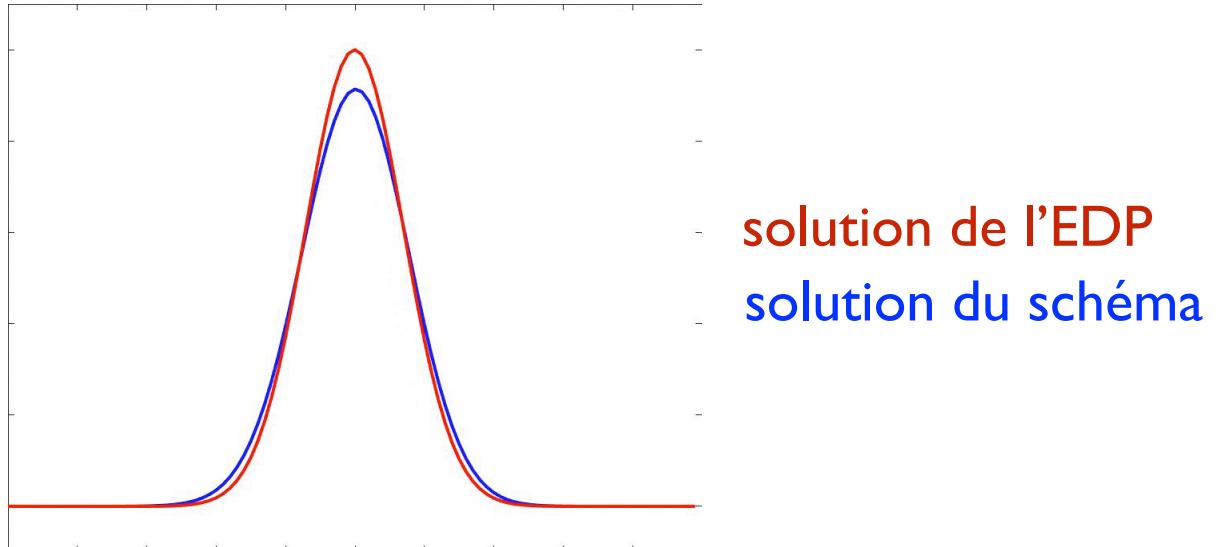
voir l'amphi 6 (eq. équivalente)

Le schéma est **stable** si et seulement si  $\alpha \leq 1$ .

Il est donc convergent d'ordre I en temps et en espace ssi  $\alpha \leq 1$

Rappel : si  $u$  est solution de l'équation de transport  $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

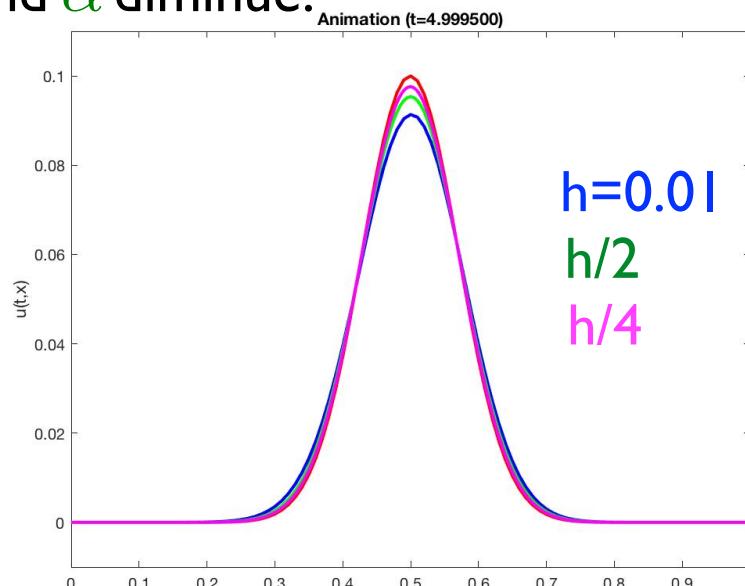
# Le schéma de Lax Friedrichs



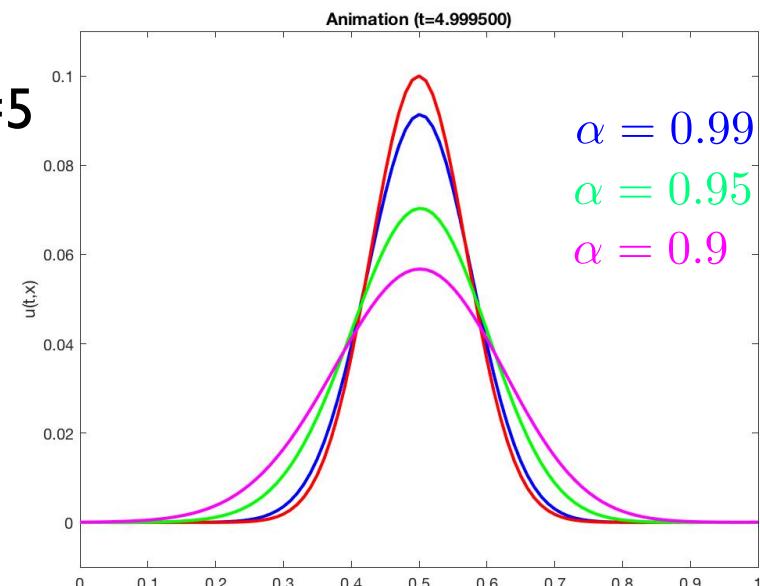
La solution au cours du temps :  $h=0.01, \alpha = 0.99$

Sous condition CFL le schéma est bien convergent quand  $(\Delta t, h) \rightarrow 0$

Mais à  $(\Delta t, h)$  fixé, on observe un phénomène de dissipation numérique qui s'accentue quand  $\alpha$  diminue.



Solution à T=5



...pour différentes valeurs de  $h$ ,  $\alpha$  fixé

... pour différentes valeurs de  $\alpha$ ,  $h$  fixé

# Le schéma de Lax Friedrichs

Dans le cas d'une vitesse variable, par exemple  $c = c(t)$ , la condition CFL doit être satisfaite en tout temps

$$\forall n, |c(t^n)| \frac{\Delta t}{h} \leq 1$$

Le rapport  $\frac{\Delta t}{h}$  est donc contraint par  $\max_t |c(t)|$ .

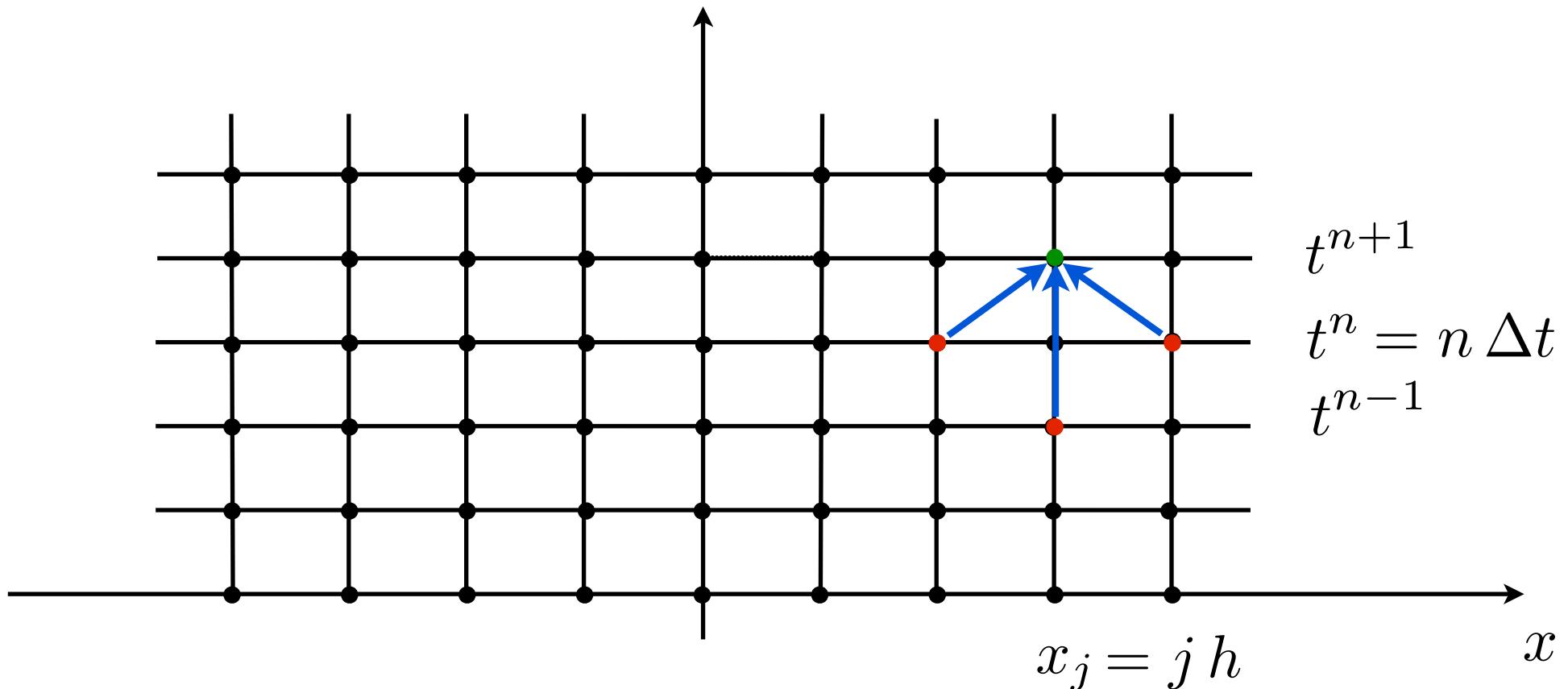
Pour des grandes variations de la vitesse, la dissipation peut être très importante.

# Remarques sur les schémas à 2 pas de temps

Un schéma est dit à **2 pas de temps** quand il fait intervenir les pas de temps  $n - 1$ ,  $n$  et  $n + 1$ .

Exemple: le schéma du TD4 Ex I

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \textcolor{green}{c} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$



# Remarques sur les schémas à 2 pas de temps

Un schéma est dit à **2 pas de temps** quand il fait intervenir les pas de temps  $n - 1$ ,  $n$  et  $n + 1$ .

Exemple: le schéma 3 du TD4

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \textcolor{green}{c} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

Ces schémas nécessitent un schéma de démarrage à 2 pas de temps:

$$\begin{cases} u_j^0 = \textcolor{blue}{u}^0(x_j), \quad \forall j \\ u_j^1 = ??? \quad \text{Il n'est pas naturel d'imposer } \textcolor{red}{u}_j^1 \text{ pour l'équation de transport.} \end{cases}$$

On peut utiliser des développements de Taylor pour la solution:

$$\begin{aligned} U_j^1 &= U_j^0 + \mathcal{O}(\Delta t) \implies \textcolor{red}{u}_j^1 = \textcolor{red}{u}_j^0 \\ \text{ou} \quad U_j^1 &= U_j^0 + \Delta t \left( \frac{\partial \textcolor{red}{u}}{\partial t} \right)_j^0 + \mathcal{O}(\Delta t^2) = U_j^0 - c\Delta t \left( \frac{\partial \textcolor{red}{u}}{\partial x} \right)_j^0 + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &\implies \textcolor{red}{u}_j^1 = \textcolor{red}{u}_j^0 - c\Delta t \textcolor{blue}{u}^{0'}(x_j) \end{aligned}$$

La précision du schéma de démarrage doit être du même ordre que le schéma pour préserver l'ordre de convergence!

# Remarques sur les schémas à 2 pas de temps

Pour étudier la stabilité, on utilise la méthode de Fourier-Von Neumann et on cherche les solutions sous la forme

$$\textcolor{red}{u}_j^n = \widehat{\textcolor{red}{u}}^n(\xi) e^{i\xi x_j}$$

Dans ce cas, on est en général ramené à la relation

$$\widehat{\textcolor{red}{u}}_h^{n+1}(\xi) + \widehat{S}_h^1(\xi, \Delta t) \widehat{\textcolor{red}{u}}_h^n(\xi) + \widehat{S}_h^2(\xi, \Delta t) \widehat{\textcolor{red}{u}}_h^{n-1}(\xi) = 0$$

dont la solution générale est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \widehat{\textcolor{red}{u}}_h^n(\xi) = [\widehat{r}_h^{(1)}(\xi, \Delta t)]^n \widehat{\textcolor{red}{u}}_h^0(\xi) + [\widehat{r}_h^{(2)}(\xi, \Delta t)]^n \widehat{\textcolor{red}{u}}_h^1(\xi)$$

où  $\widehat{r}_h^{(1)}(\xi, \Delta t), \widehat{r}_h^{(2)}(\xi, \Delta t)$  sont solutions de l'équation caractéristique

$$r^2 + \widehat{S}_h^1(\xi, \Delta t) r + \widehat{S}_h^2(\xi, \Delta t) = 0$$

**Théorème :** Un schéma à 2 pas de temps est  $L^2$  stablessi

$$\exists \nu \geq 0 \quad \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{r}_h^{(1)}(\xi, \Delta t)| \leq 1 + \nu \Delta t \quad \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{r}_h^{(2)}(\xi, \Delta t)| \leq 1 + \nu \Delta t$$

# Un schéma implicite (voir Exo1 du TD4)

$$\frac{1}{2} \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} \right) + c \frac{1}{2} \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \right) = 0$$

C'est un schéma **implicite** à **un pas de temps**.

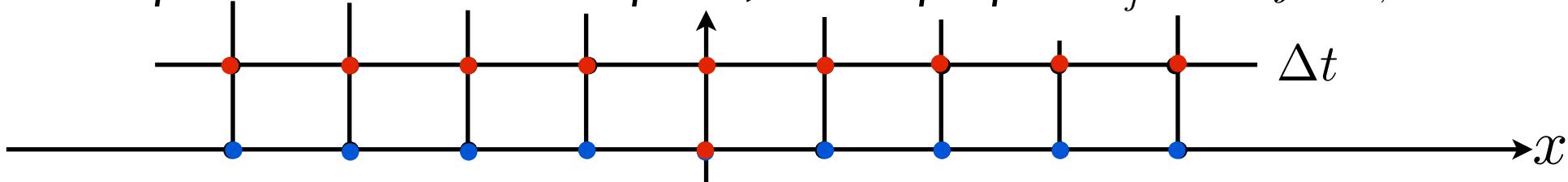
On ne peut pas calculer les  $\{u_j^{n+1}, j \in \mathbb{Z}\}$  indépendamment les uns des autres.

Système linéaire à résoudre dans le cas de conditions périodiques

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \alpha & 1 + \alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & 1 + \alpha & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 - \alpha & 1 + \alpha & 0 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 - \alpha & 1 + \alpha & \\ 1 + \alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 - \alpha \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha & 1 - \alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 + \alpha & 1 - \alpha & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 + \alpha & 1 - \alpha & 0 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \cdots & 0 & 1 + \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 + \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{bmatrix}$$

Les schémas implicites sont plus coûteux (en terme de stockage (stockage des matrices) et de calcul (il faut inverser la matrice  $\mathbb{A}$ )).

On montre que  $\mathbb{A}^{-1}$  est une matrice pleine, si bien que pour  $u_j^0 = 1$  si  $j = 0$ , 0 sinon.



La vitesse de propagation numérique est infinie.

## Un schéma implicite (voir Exo1 du TD4)

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{u}_{j+1}^{n+1} - \mathbf{u}_{j+1}^n}{\Delta t} \right) + \textcolor{green}{c} \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{u}_{j+1}^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n+1}}{h} + \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_j^n}{h} \right) = 0$$

C'est un schéma **implicite à un pas de temps**.

On ne peut pas calculer les  $\{\mathbf{u}_j^{n+1}, j \in \mathbb{Z}\}$  indépendamment les uns des autres.

Les schémas *implicites* sont plus coûteux (en terme de stockage (stockage de la matrice) et de calcul (il faut l'inverser)).

La **vitesse de propagation numérique est infinie**.

C'est en général le cas pour les schémas *implicites* (pas de condition nécessaire de CV)

Le schéma est consistant **d'ordre 2 en temps et en espace** et on a

$$\varepsilon_j^n = C(\alpha) h^2 \left( \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial x^3} \right)_{j+1/2}^{n+1/2} + \mathcal{O}(\Delta t^3 + h^3)$$

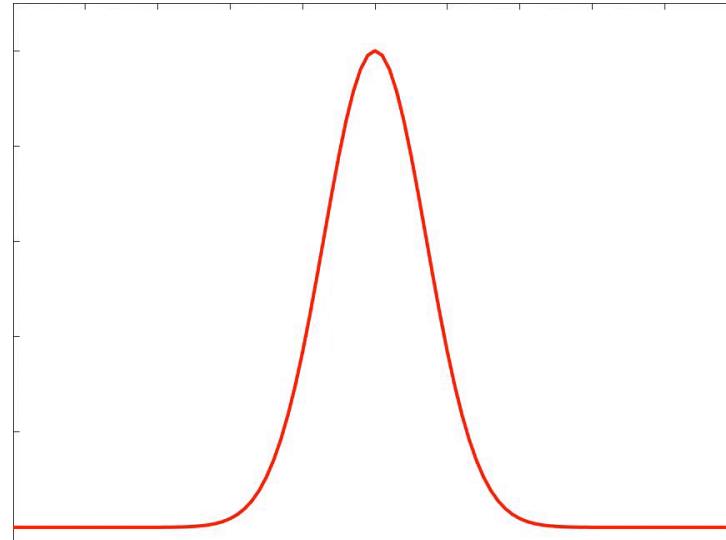
voir l'amphi 6 (eq. équivalente)

Le schéma est **inconditionnellement stable**.

Il n'y a aucune contrainte sur la discrétisation, i.e. sur le rapport  $\frac{\Delta t}{h}$

Il est donc convergent d'ordre 2 en temps et en espace.

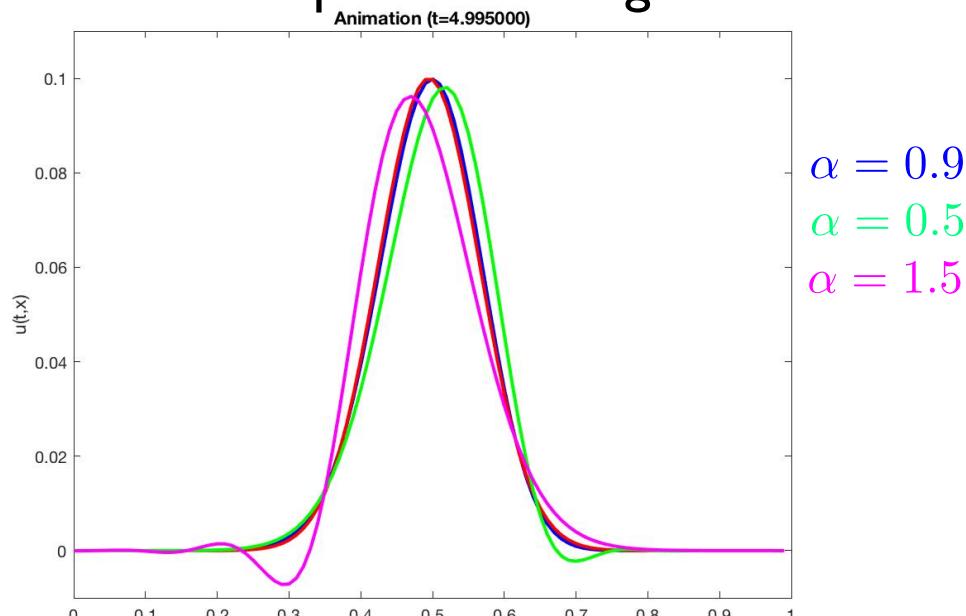
# Un schéma implicite (voir Exo1 du TD4)



solution de l'EDP  
solution du schéma

La solution au cours du temps :  $h=0.01$ ,  $\alpha = 1.5$

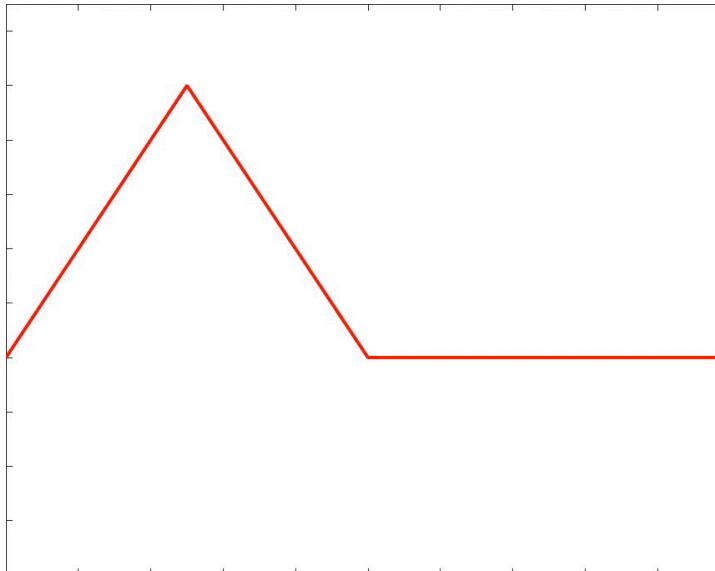
Le schéma est stable quelle que soit la valeur de  $\alpha$ . On observe un phénomène de dispersion numérique qui s'accentue quand  $\alpha$  s'éloigne de 1



Solution à T=5...

... pour différentes valeurs de  $\alpha$ ,  $h$  fixé

# Un schéma implicite (voir Exo1 du TD4)

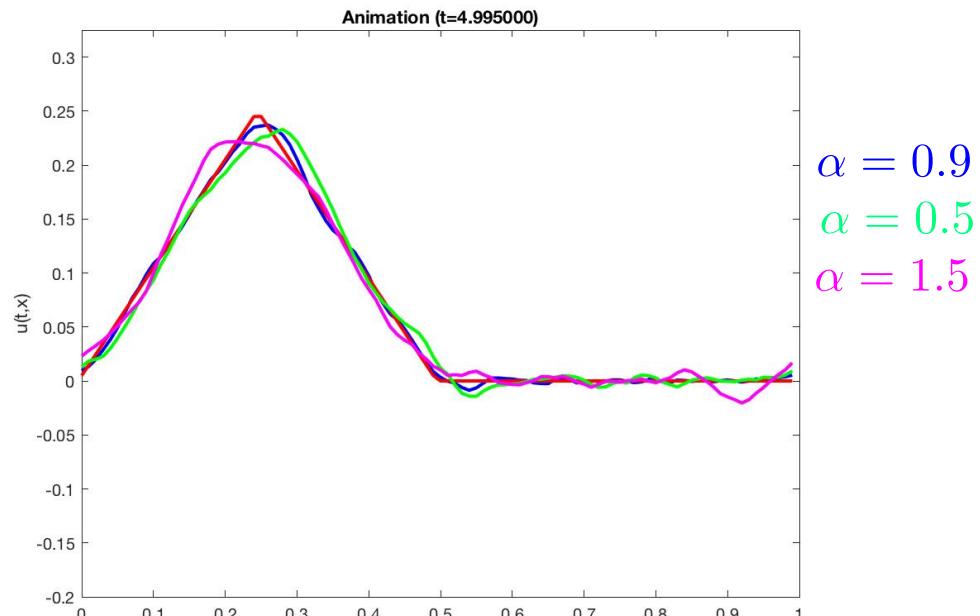


solution de l'EDP  
solution du schéma

La solution au cours du temps :  $h=0.01$ ,  $\alpha = 1.5$

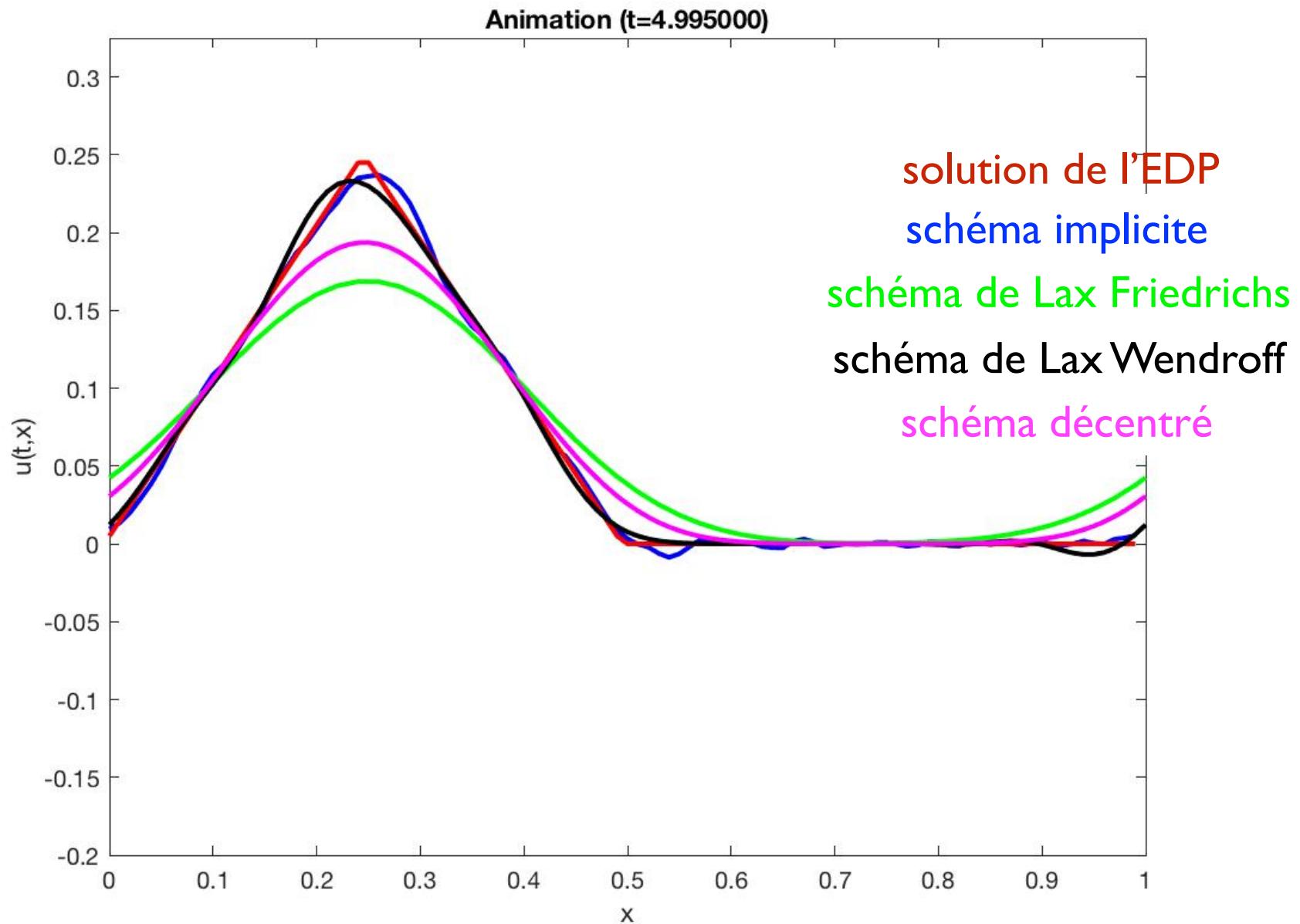
Le phénomène s'accentue pour une donnée initiale moins régulière!

Solution à  $T=5\dots$



... pour différentes valeurs de  $\alpha$ ,  $h$  fixé

# Comparaison de schémas



En plus de l'**ordre de consistance** et la **stabilité**, la **dissipation numérique** et la **dispersion numérique** constituent d'autres éléments de comparaison.