***

Thermélasticité linéaire

Correction du travaux dirigés n3

***

Exercice 1 : Équilibre d'un réservoir sphérique

1. Pas de conditions aux limites en déplacement, la seule contrainte sur $\underline{\xi}$ est donc qu'il vérifie la symétrie sphérique, soit :

$$\underline{\xi}(r) = u(r)\underline{e}_r.$$

Le champ de déformations s'écrit :$\underline{\underline{\epsilon}} = u'\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{u}{r}\left(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\phi \otimes \underline{e}_\phi\right)$. En appliquant la loi de comportement, il vient :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left[\lambda\left(u' + \frac{2u}{r}\right) + 2\mu u'\right]\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \left[\lambda\left(u' + \frac{2u}{r}\right) + 2\mu\frac{u}{r}\right]\left(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\phi \otimes \underline{e}_\phi\right).$$

2. Pour que le champ soit statiquement admissible, il doit vérifier l'équation d'équilibre et les conditions aux limites, sur les surfaces intérieure et extérieure, soit :

$$\mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0} \tag{1}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}.\underline{e}_r = -p_e\underline{e}_r \qquad \text{en} \quad r = b \tag{2}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}.(-\underline{e}_r) = p_i\underline{e}_r \qquad \text{en} \quad r = a \tag{3}$$

L'équation (1) selon $\underline{e}_\theta$ et $\underline{e}_\phi$ ne donne aucune information (0=0). Selon $\underline{e}_r$, on obtient :

$$(\lambda + 2\mu)\left[u'' + \frac{2}{r}u' - \frac{2}{r^2}u\right] = 0,$$

ce qui donne une équation différentielle que doit vérifier u. En cherchant les fonctions de r sous la forme $u(r) = r^n$ qui vérifient cette équation, on trouve qu'obligatoirement $n = 1$ ou $n = -2$. L'équation différentielle étant du second ordre, on en déduit que toutes les solutions s'écrivent sous la forme :

$$u(r) = Ar + \frac{B}{r^2}.$$

On détermine les constantes A et B en reportant dans (2) et (3). On trouve :

$$A = \frac{p_i a^3 - p_e b^3}{(3\lambda + 2\mu)(b^3 - a^3)} \tag{4}$$

$$B = \frac{p_i - p_e}{4\mu}\frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} \tag{5}$$

ce qui permet d'écrire explicitement les contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{rr} = \frac{p_i a^3 - p_e b^3}{b^3 - a^3} - \frac{p_i - p_e}{r^3}\frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} \tag{6}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\theta\theta} = \underline{\underline{\sigma}}_{\phi\phi} = \frac{p_i a^3 - p_e b^3}{b^3 - a^3} + \frac{p_i - p_e}{2r^3}\frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} \tag{7}$$

3. On développe les quantités précédentes selon :

$$a = R\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad b = R\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad \text{et} \quad r = R(1 - y),$$

où $\varepsilon = e/R << 1$ et $y = \frac{R-r}{R} << 1$ sont deux infiniments petits. Après calcul on obtient :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{rr} = (p_e - p_i)\frac{R - r}{e} - \frac{1}{2}(p_i + p_e)$$

On remarque que $\underline{\underline{\sigma}}_{rr}$ varie linéairement le long de l'épaisseur.

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\theta\theta} = (p_i - p_e)\frac{R}{2e}$$

On remarque que les contraintes selon θ et ϕ sont un ordre de grandeur plus grandes que celles selon r puisqu'il subsiste un terme en $1/\varepsilon$.

4. Le cisaillement maximal est défini par : $\tau_{\max} = \frac{1}{2}\max|\underline{\underline{\sigma}}_{rr} - \underline{\underline{\sigma}}_{\theta\theta}|$. D'après la question précédente, $\underline{\underline{\sigma}}_{rr}$ est négligeable devant $\underline{\underline{\sigma}}_{\theta\theta}$, si bien que l'expression du cisaillement maximal devient :

$$\tau_{\max} = \frac{|p_i - p_e|\,R}{4e} \leq \tau_{crit}$$

Application numérique : avec les valeurs données, l'épaisseur doit être d'au moins 2.5 mm.

Exercice 2 : Échauffement d'une plaque circulaire trouée

1. La température est linéaire : $\tau = \frac{\Delta\mathbf{T}}{H}\,z$. Les conditions aux limites se traduisent par : $\xi_r^d(r = R) = 0$; $T_\theta^d(r = R) = 0$; $T_z^d(r = R) = 0$. Les autres surface sont libres de contrainte, on a bien :

$$S_{T_i} \cup S_{\xi_i} = \partial\Omega \quad \text{et} \quad S_{T_i} \cap S_{\xi_i} = \emptyset \qquad i = [1, 2, 3]\ . \tag{8}$$

On peut donc en conclure que le problème est bien posé.

2. Le champ de déplacement proposé est CA si $f(R) = 0$.

3. Les composantes du tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sont :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = zf'(r) \quad ; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{zf(r)}{r} \\ \varepsilon_{zz} = \beta z \quad ; \quad \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} = \dfrac{1}{2}\left(f(r) + g'(r)\right) \end{cases} \tag{9}$$

Les autres composantes sont nulles.

On en déduit le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ par la loi de comportement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = (\lambda\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}})\ \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\mu\ \underline{\underline{\varepsilon}} - k\tau\ \underline{\underline{\mathbb{1}}} \quad \text{avec} \quad k = \frac{E\alpha}{1 - 2\nu}\ . \tag{10}$$

ce qui s'écrit pour les composantes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = (\lambda\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}) + 2\mu\ \varepsilon_{rr} - k\tau \\ \sigma_{zz} = (\lambda\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}) + 2\mu\ \varepsilon_{zz} - k\tau \\ \sigma_{\theta\theta} = (\lambda\ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{\varepsilon}}) + 2\mu\ \varepsilon_{\theta\theta} - k\tau \\ \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = 2\mu\ \varepsilon_{rz} = \mu\ \left[f(r) + g'(r)\right]\ . \end{cases} \tag{11}$$

4. La condition de surface libre en $z = \pm H/2$ donne deux relations. La première s'écrit :

$$\forall\, r\ \in\ [a, R[:\quad f(r) + g'(r) = 0. \tag{12}$$

De la seconde on tire :

$$\beta = \frac{1}{\lambda + 2\mu}\left[k\frac{\Delta\mathbf{T}}{H} - \lambda\left(f'(r) + \frac{f(r)}{r}\right)\right]\ . \tag{13}$$

La condition de glissement sans frottement fournit : $g'(R) = 0$. Enfin la condition de surface libre en $r = a$ donne :

$$(\lambda + 2\mu)f'(a) - k\frac{\Delta\mathbf{T}}{H} + \lambda\left(\beta + \frac{f(a)}{a}\right) = 0 \tag{14}$$

5. Les équations d'équilibre au sein de la plaque s'écrivent : $\mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$. La troisième composante redonne l'équation (13), la première donne l'équation différentielle demandée pour f. On en déduit : $f(r) = Ar + B/r$, et la condition $f(R) = 0$ donne immédiatement : $B = -AR^2$. En reportant l'expression de f dans (13), il vient : $\beta = \frac{1}{\lambda+2\mu}\left[k\frac{\Delta\mathbf{T}}{H} - 2\lambda A\right]$. En reportant dans (14), on obtient la valeur de A :

$$A = k\frac{\Delta\mathbf{T}}{H}\frac{a^2}{(3\lambda + 2\mu)a^2 + (\lambda + 2\mu)R^2}\ . \tag{15}$$

Enfin l'équation (12) permet de trouver g : $g(r) = -A\left(\frac{r^2}{2} - R^2\ln r\right) + C$, où la constante C correspond à un mouvement rigidifiant selon z. Une translation nulle est obtenue pour $g(R) = 0$, soit

$$g(r) = A\left[\frac{R^2 - r^2}{2} + R^2\ln\frac{r}{R}\right] \tag{16}$$

Les quantités $f(r)$, $g(r)$ et β étant déterminées, le champ de déplacement est connu. Les tenseurs $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ s'écrivent alors :

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\underline{\varepsilon}} = z\ A\ \left[\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta\right] + z\ \beta\ \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \\ &\underline{\underline{\sigma}} = -2\mu Az\frac{R^2}{a^2}\left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta\right] \end{aligned}} \tag{17}$$