AO101 - TP2 :

Exercice 1 :

1. Soit $N \in \mathbb{N}$, soit $Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_N \\ y_1 \\ | \\ y_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N}$, on pose :

$$P(Z) := \frac{1}{2}\,\omega \sum_{i=1}^{N} \left((x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2 \right) + g_0\mu \sum_{i=0}^{N+1} y_i$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\,\omega \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right) - 2\omega \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i\, x_{i+1} + \sum_{i=1}^{N-1} y_i\, y_{i+1} \right)\right) + g_0\mu \sum_{i=1}^{N} y_i$$
$$- \omega\ (x_0\, x_1 + x_N\, x_{N+1} + x_0\, x_1 + y_N\, y_{N+1}) + \frac{1}{2}\omega\,(x_0^2 + x_{N+1}^2 + x_0^2 + y_{N+1}^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle\, 2\omega I_{2N}\, Z \mid Z\,\rangle - 2\,\omega \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i\, x_{i+1} + \sum_{i=1}^{N-1} y_i\, y_{i+1} \right)\right) + \left\langle g_0\,\mu \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix} \mid Z \right\rangle$$

$$- \left\langle \omega \begin{pmatrix} x_0 \\ (0) \\ x_{N+1} \\ y_0 \\ (0) \\ y_{N+1} \end{pmatrix} \mid Z \right\rangle + \frac{1}{2}\omega\,(x_0^2 + x_{N+1}^2 + x_0^2 + y_{N+1}^2)$$

Définissons alors :

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & (0) & \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ & (0) & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}),\ g := g_0\mu \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix} - \omega \begin{pmatrix} x_0 \\ (0) \\ x_{N+1} \\ y_0 \\ (0) \\ y_{N+1} \end{pmatrix} \text{ et } P_0 := \tfrac{1}{2}\,\omega\ (x_0^2 + x_{N+1}^2 + x_0^2 + y_{N+1}^2)$$

Pour obtenir :

$$P(Z) = \frac{1}{2}\left(\langle\, 2\,\omega I_{2N}\, Z \mid Z\,\rangle - 2\omega \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i\, x_{i+1} + \sum_{i=1}^{N-1} y_i\, y_{i+1} \right)\right) + \langle\, g \mid Z\,\rangle + P_0$$

Finalement, en remarquant que :

$$\left\langle \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} Z \mid Z \right\rangle = 2 \sum_{i=1}^{N-1} x_i\, x_{i+1} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} y_i\, y_{i+1}$$

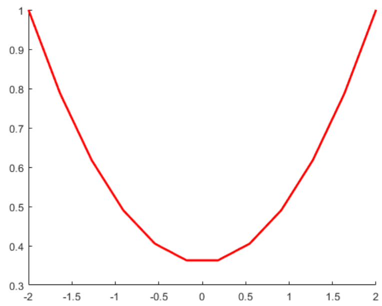
On conclut que :

$$\underline{P(Z) = \tfrac{1}{2}\,(\langle\, HZ \mid Z\,\rangle) + \langle\, g \mid Z\,\rangle + P_0}$$

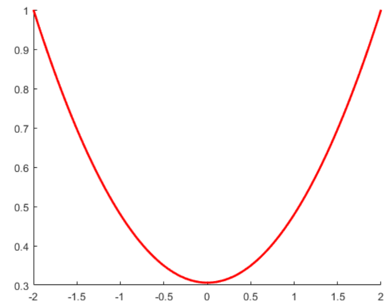
Avec $H := \omega \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & (0) & \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ & (0) & & -1 & 2 & -1 \\ & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Voir code source Matlab

3. Résultats :



N = 10, Temps : 0.01, Itérations : 10, Résidu : 3.72e-12



N = 100, Temps : 0.01, Itérations : 100, Résidu : 6.77e-10

N = 1000, Temps : 2.94, Itérations : 1000, Résidu : 1.45e-7

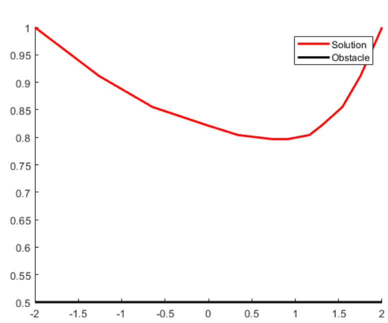
Exercice 2 :

1. L'ensemble K est le demi-plan défini par $K := \left\{ Z := (x_1, -, x_N, y_1, -, y_N) \in \mathbb{R}^{2N} \mid \forall\, i \in [\![1,\ N]\!],\ y_i \geq \frac{1}{2} \right\}$, le projecteur P_K est donc l'application :

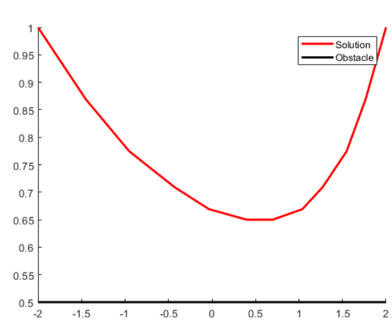
$$P_K : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2N} \\ Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_N \\ y_1 \\ | \\ y_N \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_N \\ max(y_1, 1/2) \\ | \\ max(y_N, 1/2) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Le critère d'arrêt choisi ici est $||\, z_k\ -\ z_{k-1} \,|| < \eta$

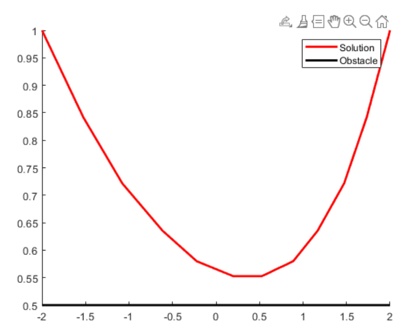
Résultats :



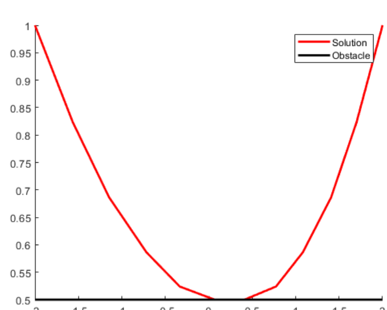
Itération : 10, $||\, z_k\ -\ z_{k-1} \,||$ = 2.2e-1, $||\, \nabla J(z_k) \,||$ = 3.38e2



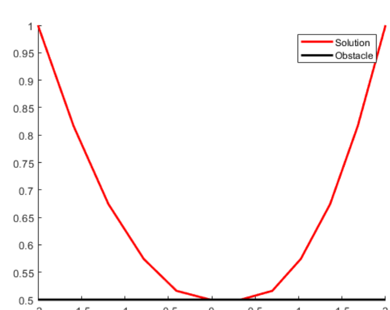
Itération : 20, $||\, z_k\ -\ z_{k-1} \,||$ = 1.27e-1,$||\, \nabla J(z_k) \,||$ = 1.96e2



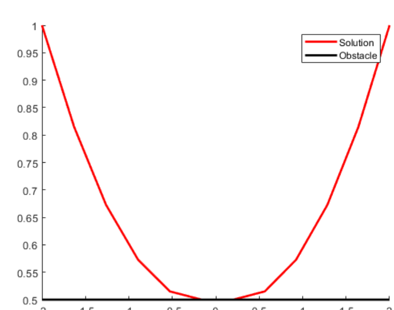
Itération : 30, $||\, z_k\ -\ z_{k-1} \,||$ = 8.32e-2, $||\, \nabla J(z_k) \,||$ = 1.28e2



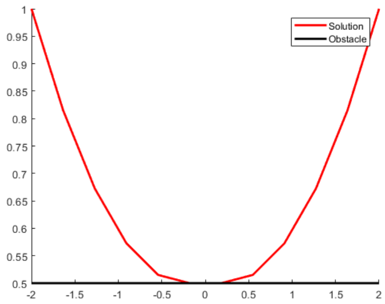
Itération : 40, $||\, z_k\ -\ z_{k-1} \,||$ = 5.41e-2, $||\, \nabla J(z_k) \,||$ = 8.52e1



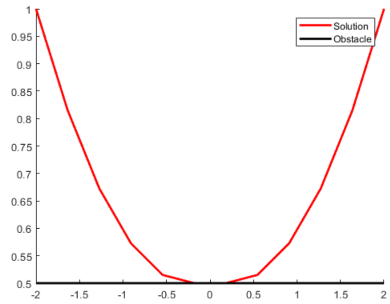
Itération : 50, $||\, z_k\ -\ z_{k-1} \,||$ = 3.54e-2, $||\, \nabla J(z_k) \,||$ = 6.15e1



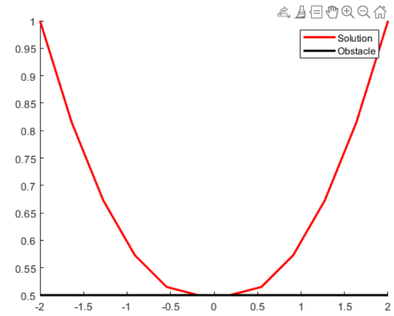
Itération : 100, $||\, z_k\ -\ z_{k-1} \,||$ = 4.48e-3, $||\, \nabla J(z_k) \,||$ = 3.06e1



Itération : 150, $||\, z_k \,-\, z_{k-1}\, || =$ 5.67e-4, $||\, \nabla J(z_k)\, || =$ 2.99e1



Itération : 200, $||\, z_k \,-\, z_{k-1}\, || =$ 7.17e-5, $||\, \nabla J(z_k)\, || =$ 2.98e1



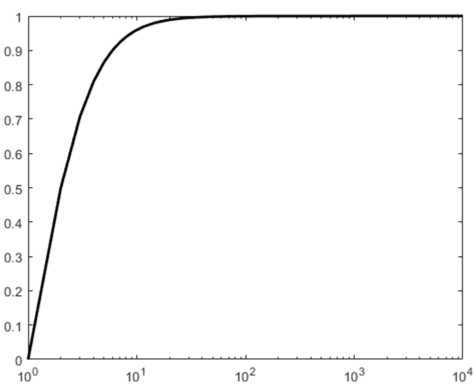
Itération : 248, $||\, z_k \,-\, z_{k-1}\, || =$ 9.85e-6, $||\, \nabla J(z_k)\, || =$ 2.98e1

2. On cherche une condition sur η telle que à la fin de l'algorithme (ie quand $||\, z_k - z_{k-1}\, || < \eta$) on ait $||\, z_k - z^*\, || < \varepsilon := 10^{-4}$

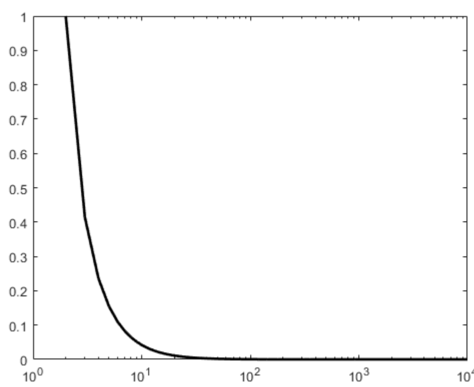
   D'après l'inégalité $||\, z_k \,-\, z^*\, || \leq \frac{\gamma}{1-\gamma} ||\, z_k \,-\, z_{k-1}\, ||$, il suffit de prendre $\eta := \frac{1-\gamma}{\gamma}\,\varepsilon$ pour avoir la précision voulue à la fin de l'exécution.

$$\begin{aligned}\gamma &:= \frac{\lambda_N \,-\, \lambda_1}{\lambda_N \,+\, \lambda_1} \\ &= \frac{4\, cos^2\left(\frac{\pi}{2\,(N+1)}\right) \,-\, 4\, sin^2\left(\frac{\pi}{2\,(N+1)}\right)}{4\, cos^2\left(\frac{\pi}{2\,(N+1)}\right) \,+\, 4\, sin^2\left(\frac{\pi}{2\,(N+1)}\right)} \\ &= \underline{2\, cos^2\left(\frac{\pi}{2\,(N+1)}\right) \,-\, 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1 \,-\, \gamma}{\gamma}\varepsilon \\ &= \underline{\frac{2\, sin^2\left(\frac{\pi}{2\,(N+1)}\right)}{2\, cos^2\left(\frac{\pi}{2\,(N+1)}\right) - 1}\,\varepsilon}\end{aligned}$$

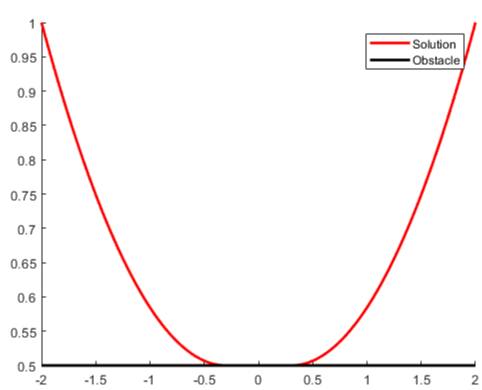


γ en fonction de N



η en fonction de N

3. Résultat :



N = 100, Temps : 0.12, Itérations : 18993,

$||\, z_k \,-\, z_{k-1}\, || =$ 1.00e-6, $||\, \nabla J(z_k)\, || =$ 1.48e1

4. Pour $N = 10$, le nombre d'itérations reste raisonnable, mais il explose pour $N = 100$. Cette méthode n'est donc pas réaliste pour de grandes valeurs de N.

1 Exercice 3 :

1. Voir code source Matlab, la résolution du système se fait avec l'opération \ pour gagner du temps de calcul.

2. Soit $Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_N \\ y_1 \\ | \\ y_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} Z \in K &\iff C\,Z \leq f \\ &\iff \forall\, i \in [\![\, 1,\, N \,]\!],\ -y_i \leq f_i \\ &\iff \forall\, i \in [\![\, 1,\, N \,]\!],\ y_i \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en conclut que l'ensemble K est le même quand dans l'exercice 2, et comme la fonctionnelle est également la même, les problèmes d'optimisation sous contrainte des exercices 2 et 3 sont équivalents et les deux algorithmes doivent retourner une solution du problème.

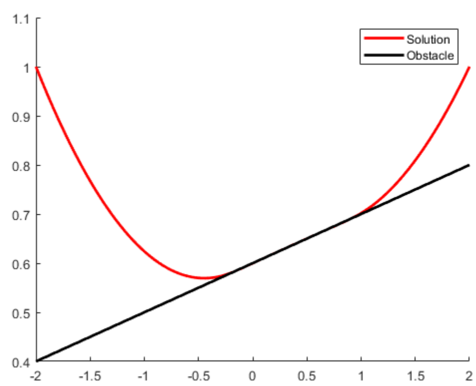
Or K est un convexe fermé et P est coercive, donc le problème étudié admet une unique solution. Les deux algorithmes renvoient donc cette même unique solution.

3. Tableau comparatif des temps d'exécution des algorithmes pour différents paramètres :

algorithme	N = 10	N = 100	N = 250	N = 500
Gradient projeté (η = 1e-6)	0.01	0.12	1.74	5.43
UZAWA (η = 1e-3, ε = 1e-5)	0.01	0.06	0.53	2.47
UZAWA (η = 1e-4, ε = 1e-5)	0.01	0.25	2.68	17.61

4. On note $K' := \big\{ Z := (x_1, -, x_N, y_1, -, y_N) \in \mathbb{R}^{\,2N} \mid \forall\, i \in [\![\, 1,\, N \,]\!],\ y_i - 0.1\, x_i \geq 0.6 \,\big\}$ et on pose $f' := \begin{pmatrix} -0.6 \\ \vert \\ -0.6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\,2N}$ et $C' := \big(\, 0.1 I_N \quad -I_N \,\big) \in M_{N,\,2N}(\mathbb{R})$

Avec les mêmes calculs que pour 2., il vient que $\underline{K' = \big\{ Z \in \mathbb{R}^{\,2N} \mid C'\, Z \leq f' \,\big\}}$



N = 100, Itérations : 195, Résidu = 9.65e-6, η = 1e-3, ε = 1e-5

5. A travers des deux exercices et du tableau comparatif de la question 3, on voit que la méthode UZAWA, bien que plus simple à implémenter (trouver la projection sur un ensemble est difficile en général), est moins performante.

Il est donc préférable d'utiliser la méthode du gradient projeté quand la projection est connue et simple à calculer, et garder la méthode UZAWA dans les cas où cette projection ne se calcule pas facilement.