**Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées ParisTech**
**PRB202 - Martingales et Algorithmes Stochastiques**
**Corrigé de la PC5 - 18 janvier 2018**

**Exercice 1 :** 1. Pour tout $n \geq 1\,, \mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \cdots, S_n)$ , ainsi $S_n$ est $\mathcal{F}_n$ - mesurable (cf corrigé question 1., Exercice 1 de la PC2).

Par ailleurs, comme $S_0 = 0$ et $X_n$ saute de 1 ou $-1$ à chaque pas de temps, on a : $|S_n| \leq n$ , quel que soit $n \in \mathbb{N}$ . On en déduit que $S_n$ est une variable aléatoire intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ .

De plus, il vient, quel que soit $n \geq 1$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]\,, \text{ car } S_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{ - mesurable,}\\ &= S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}]\,, \text{ puisque } X_{n+1} \text{ est indépendante de } \mathcal{F}_n\,,\\ &= S_n + 1 \times \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) + (-1) \times \mathbb{P}(X_{n+1} = -1)\\ &= S_n + (2p-1)\,.\end{aligned}$$

Ainsi, si $p = \frac{1}{2}$ , $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale, lorsque $p < \frac{1}{2}$ , $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - sur-martingale et pour $p > \frac{1}{2}$ , $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - sous-martingale.

2. Soit $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \,;\, S_n \in \{-a, b\}\}$ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned}\{\tau = n\} &= \{(S_1\,, \cdots, S_{n-1}) \in [-(a-1), (b-1)]^{n-1}\,;\, S_n \in \{-a, b\}\}\\ &= \{(S_1\,, \cdots, S_{n-1}, S_n) \in [-(a-1), (b-1)]^{n-1} \times (\{-a\} \cup \{b\})\}\,.\end{aligned}$$

<u>Rappel</u> : <u>Produits d'espaces mesurés et tribu borélienne</u>.

- Soit $(\Omega_1\,, \mathcal{F}_1)$ et $(\Omega_2\,, \mathcal{F}_2)$ , deux espaces mesurables. On appelle **tribu produit (tensoriel) des tribus $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$** , et on note $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ , la tribu engendrée sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ par la famille $\mathcal{C} = \{A \times B\,, A \in \mathcal{F}_1 \text{ et } B \in \mathcal{F}_2\}$ . Si $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$ , on note aussi : $\mathcal{F}^{\otimes 2} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ .
L'espace mesurable $(\Omega_1 \times \Omega_2\,, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$ s'appelle alors l'**espace produit des espaces mesurables** $(\Omega_1\,, \mathcal{F}_1)$ et $(\Omega_2\,, \mathcal{F}_2)$ .
- Dans le cas où $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$ , on peut considérer de façon naturelle deux tribus sur $\mathbb{R}^2$ , la tribu de Borel de $\mathbb{R}^2$ d'une part et la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , d'autre part. En fait, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et plus généralement, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$ , pour tout $n \geq 1$ .
- La tribu de Borel (ou tribu borélienne) de $\mathbb{R}$ , notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les familles suivantes :

$$\begin{array}{llll}(]-\infty, a[\,, a \in \mathbb{R})\,, & (]-\infty, a]\,, a \in \mathbb{R})\,, & (]a, +\infty[\,, a \in \mathbb{R})\,, & ([a, +\infty[\,, a \in \mathbb{R})\,,\\ (]a, b[\,, a < b\,, (a,b) \in R^2)\,, & ([a, b]\,, a < b\,, (a,b) \in R^2)\,, & ([a, b[\,, a < b\,, (a,b) \in R^2)\,, & (]a, b]\,, a < b\,, (a,b) \in R^2)\,.\end{array}$$

$\square$

Ainsi, $[-(a-1), (b-1)]^{n-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes(n-1)}$; par ailleurs, pour tout $d \in \mathbb{R}, \{d\} = [d, +\infty[\setminus]d, +\infty[= [d, +\infty[\cap]d, +\infty[^c$ . Comme $]d, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,, ]d, +\infty[^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , car une tribu est stable par passage au complémentaire; aussi, $\{d\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , puisqu'une tribu est également stable par intersection dénombrable donc finie. Enfin, $\{-a\} \cup \{b\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , par stabilité d'une tribu par réunion dénombrable donc finie.

On en déduit que $[-(a-1), (b-1)]^{n-1} \times (\{-a\} \cup \{b\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et $(S_1\,, \cdots, S_{n-1}, S_n)\,, n \geq 1$ , étant $(\mathcal{F}_n\,, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$-mesurable, $\{\tau = n\} = \{(S_1\,, \cdots, S_{n-1}, S_n) \in [-(a-1), (b-1)]^{n-1} \times (\{-a\} \cup \{b\})\} \in \mathcal{F}_n$ , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ .

Ainsi $\tau$ est un $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - temps d'arrêt.

3. On suppose dans cette question que $p = q = \frac{1}{2}$ .
   (a) Il a déjà été montré à la question 1. de l'Exercice 2 de la PC3 que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale de carré intégrable et son crochet $(<S>_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tel que $<S>_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1\,, <S>_n = n$ .
   (b) Posant $M = \min(a-1, b-1)$ , on a :

$$\mathbb{P}(\tau > n) \leq \mathbb{P}(|S_n| \leq M)\,.$$

<u>Rappel</u> :

- **Théorème central limite** : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de carré intégrable, indépendantes et de même loi; on pose $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$ .
Alors la suite $\left(\dfrac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ :

$$\frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{en loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

- **Convergence en loi** : Si la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la loi d'une variable aléatoire $X$ , alors la suite des fonctions de répartition $(F_n)_{n\geq 1}$ , où $F_n\,, n \geq 1$ , désigne la fonction de répartition de $X_n$ , converge ponctuellement vers la fonction de répartition $F$ de la variable aléatoire $X$ , sauf peut-être aux points de discontinuité de $F$ .

□

On a : $\mathbb{E}[X_1] = 1 \times \mathbb{P}(X_1 = 1) + (-1) \times \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ et
$\mathrm{Var}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] = (1)^2 \times \mathbb{P}(X_1 = 1) + (-1)^2 \times \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$
Comme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est la somme de $n$ v.a. i.i.d. centrées et de variance 1, on a :
$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{en loi}} \mathcal{N}(0,1)$ , soit :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq t\right) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \,. \tag{1}$$

Considérons $\epsilon > 0$ et prenons $N \geq \left(\frac{M}{\epsilon}\right)^2$ . Alors, si $n \geq N$ , il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau > n) \leq \mathbb{P}(|S_n| \leq M) &= \mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \leq \frac{M}{\sqrt{n}}\right) \,, \\
&\leq \mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \leq \epsilon\right) \,, \\
&\leq \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \epsilon\right) - \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < -\epsilon\right) \,.
\end{aligned}$$

Lorsque $n \to +\infty$, ce dernier terme tend vers, d'après (1) :

$$\int_{-\infty}^{\epsilon} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} - \int_{-\infty}^{-\epsilon} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{2\,\epsilon}{\sqrt{2\pi}} < \epsilon \,.$$

Ainsi, pour tout $n$ assez grand, on obtient :

$$\mathbb{P}(\tau > n) \leq \epsilon \,,$$

soit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\tau > n) = 0$ . Il reste à remarquer que $\{\tau = +\infty\} = \cap_{n\geq 1}\{\tau > n\}$ , ainsi, par propriété d'une mesure de probabilité, on a donc :

$$\mathbb{P}(\tau = +\infty) = \lim_{n\to+\infty} \searrow \mathbb{P}(\tau > n) = 0 \,,$$

et $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$ .

(c) Rappel :

- Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale et $\tau$ un $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - temps d'arrêt quelconque, alors $(M_n^\tau = M_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale.
- Un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit **uniformément intégrable** si :

$$\lim_{c\to+\infty} \sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{|X|\geq c\}}|X|) = 0 \,.$$

Les deux conditions qui suivent assurent l'uniforme intégrabilité.
Soit $\mathcal{H}$ une famille de variable aléatoires réelles.

**(a)** Si $\sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}(|X|^p) < +\infty$ pour un $p > 1$ , la famille $\mathcal{H}$ est uniformément intégrable.

**(b)** S'il existe une variable aléatoire $Y$ intégrable telle que $|X| \leq Y$ , p.s. , pour tout $X \in \mathcal{H}$ , la famille $\mathcal{H}$ est uniformément intégrable.

□

Comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale, le processus arrêté en $\tau$, $(S_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ , est encore une martingale.
Par ailleurs, pour tout $n \geq 1\,, \tau \wedge n \leq \tau$, ainsi $|S_{\tau\wedge n}| \leq \max(a,b)$ , d'après la définition de $\tau$, de sorte que d'après le point **(b)** du rappel précédent, $(S_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale uniformément intégrable.

(d) Rappel : **Théorème d'arrêt de Doob, seconde version.**
Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale relativement à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .
Si $\tau$ est un $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - temps d'arrêt tel que :
**(a)** $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$ ,
**(b)** $(M_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale uniformément intégrable,
alors :

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0] .$$

□

Puisque $\tau$ est un temps d'arrêt fini presque-sûrement et $(S_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale uniformément intégrable, il vient :

$$\mathbb{E}[S_\tau] = \mathbb{E}[S_0] = 0 .$$

Or, par définition de $\tau$ , $S_\tau$ ne peut prendre que les valeurs $-a$ et $b$ , avec probabilités respectives $\mathbb{P}(S_\tau = -a)$ et $\mathbb{P}(S_\tau = b)$ , sa moyenne s'écrit donc :

$$\mathbb{E}[S_\tau] = (-a)\,\mathbb{P}(S_\tau = -a) + b\,\mathbb{P}(S_\tau = b) ,$$

de sorte que :

$$-a\,\mathbb{P}(S_\tau = -a) + b\,\mathbb{P}(S_\tau = b) = 0 .$$

Par ailleurs, $\mathbb{P}(S_\tau = -a) + \mathbb{P}(S_\tau = b) = 1$ .
On obtient alors : $\mathbb{P}(S_\tau = -a) = \frac{b}{a+b}$ et $\mathbb{P}(S_\tau = b) = \frac{a}{a+b}$ .

(e) D'après le cours, $(Y_n = S_n^2 - <S>_n = S_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale.
Le premier théorème d'arrêt de Doob appliqué au temps d'arrêt borné $\tau\wedge n$ donne alors :

$$\mathbb{E}[Y_{\tau\wedge n}] = \mathbb{E}[Y_0] = 0 ,$$

soit :

$$\mathbb{E}[\tau\wedge n] = \mathbb{E}[S^2_{\tau\wedge n}] \leq (\max(a,b))^2 .$$

En passant à la limite lorsque $n\to+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient que $\mathbb{E}[\tau] < +\infty$ , soit que $\tau$ est une variable aléatoire intégrable.
En effet, d'après le théorème de convergence monotone, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\tau\wedge n] = \mathbb{E}\left[\lim\limits_{n\to+\infty}(\tau\wedge n)\right] = \mathbb{E}[\tau]$ , car $(\tau\wedge n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $\tau$ , qui est **fini**, d'après la question **2.**.
$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale, $(Y_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une martingale.
De plus, pour tout $n\geq 1$ , $|Y_{\tau\wedge n}| \leq S^2_{\tau\wedge n} + \tau\wedge n \leq (\max(a,b))^2 + \tau$ , et $(\max(a,b))^2 + \tau$ est une variable aléatoire intégrable.
On en déduit que $(Y_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale uniformément intégrable.
Le second théorème d'arrêt de Doob (rappellé ci-dessus) donne alors :

$$\mathbb{E}[Y_\tau] = \mathbb{E}[Y_0] = 0 ,$$

c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tau] &= \mathbb{E}[S_\tau^2] , \\
&= (-a)^2\,\mathbb{P}(S_\tau = -a) + b^2\mathbb{P}(S_\tau = b) , \\
&= a^2\,\frac{b}{a+b} + b^2\frac{a}{a+b} \\
&= a\,b .
\end{aligned}$$

4. On considère maintenant le cas où $p > q$ .

(a) La $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - sous-martingale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la décomposition de Doob : $S_n = M_n + A_n$ , $n\in\mathbb{N}$ , où $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale et par ailleurs, on a, $A_0 = 0$ et quel que soit $n\in\mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[S_k - S_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}] , \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_{k-1}] \text{, car } X_{k-1} \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_{k-1} \\
&= n(2p-1) .
\end{aligned}$$

(b) Rappel : **Loi des grands nombres**.
Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires intégrables indépendantes et identiquement distribuées, alors :

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}-\text{p.s.}} \mathbb{E}[X_1] .$$

$\square$

D'après la loi des grands nombres, $\frac{S_n}{n}$ tend $\mathbb{P}$-p.s. lorsque $n \to +\infty$ vers $\mathbb{E}[X_1] = 2p - 1$, qui est strictement positif puisque $p > q$.
Par conséquent, $|S_n|$ tend $\mathbb{P}$-p.s. lorsque $n \to +\infty$ vers $+\infty$ et on en déduit que :

$$\mathbb{P}(\tau > n) \leq \mathbb{P}(|S_n| \leq M) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 ,$$

de sorte que $\tau$ est un $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-temps d'arrêt fini presque-sûrement.

(c) On cherche $s > 0$ tel que $(s^{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ soit une martingale non constante.
Or, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[s^{S_{n+1}}|\mathcal{F}_n] &= s^{S_n}\mathbb{E}[s^{X_{n+1}}|\mathcal{F}_n] , \text{ car } S_n \text{ donc } s^{S_n} \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable,} \\
&= s^{S_n}\mathbb{E}[s^{X_{n+1}}] , \text{ puisque } X_{n+1} \text{ donc } s^{X_{n+1}} \text{ est indépendante de } \mathcal{F}_n , \\
&= s^{S_n}(s^1 \times \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) + s^{-1} \times \mathbb{P}(X_{n+1} = -1)) , \\
&= s^{S_n}\left(p\, s + (1-p)\,\frac{1}{s}\right) .
\end{aligned}$$

Ainsi, $(s^{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sera une martingale si $p\, s + (1-p)\,\frac{1}{s} = 1$, soit $s = 1$ ou $s = \frac{q}{p}$.
$s = 1$ nous donne une martingale constante et $s = \frac{q}{p}$ induit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale non constante.

(d) Comme $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, $(U_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale.
Considérons la fonction $f\ : r \to x^r = e^{r\,\ln(x)}$, avec $0 < x < 1$ et $r \in \mathbb{Z}$.
$f^{'}(r) = (\ln(x))e^{r\,\ln(x)} < 0$, $f$ est alors strictement décroissante sur $\mathbb{Z}$.
Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{\tau\wedge n}} \leq \max\left(\left(\frac{q}{p}\right)^r ; -a \leq r \leq b\right) = f(-a) < +\infty$, et $\frac{q}{p} < 1$, puisque $p > q$.
On en déduit que $(U_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale uniformément intégrable.

(e) Utilisant le second théorème d'arrêt de Doob, il vient :

$$\mathbb{E}[U_\tau] = \mathbb{E}[U_0] = 1 ,$$

soit :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^a \mathbb{P}(S_\tau = -a) + \left(\frac{q}{p}\right)^b \mathbb{P}(S_\tau = b) = 1 .$$

De plus, $\mathbb{P}(S_\tau = -a) + \mathbb{P}(S_\tau = b) = 1$.
On obtient : $\mathbb{P}(S_\tau = -a) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^b - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{p}{q}\right)^a}$ et $\mathbb{P}(S_\tau = b) = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^a}{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{p}{q}\right)^a}$.
Il reste à déterminer $\mathbb{E}[\tau]$.
On utilise la martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S_n - n(p-q))_{n\in\mathbb{N}}$ de la décomposition de Doob de la sous-martingale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Le premier théorème d'arrêt de Doob appliqué au temps d'arrêt borné $\tau \wedge n$ donne alors :

$$\mathbb{E}[M_{\tau\wedge n}] = \mathbb{E}[M_0] = 0 ,$$

soit :

$$\mathbb{E}[\tau \wedge n] = \frac{1}{p-q}\mathbb{E}[S_{\tau\wedge n}] \leq \frac{1}{p-q}\mathbb{E}[|S_{\tau\wedge n}|] \leq \frac{\max(a,b)}{p-q} .$$

En passant à la limite dans l'égalité précédente, on en déduit que $\mathbb{E}[\tau] < +\infty$.
$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale, $(M_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une martingale.
De plus, pour tout $n \geq 1$, $|M_{\tau\wedge n}| \leq |S_{\tau\wedge n}| + \tau \wedge n \leq \max(a,b) + \tau$, et $\max(a,b) + \tau$ est une variable aléatoire intégrable.
On en déduit que $(M_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale uniformément intégrable.
Le second théorème d'arrêt de Doob donne alors :

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0] = 0 ,$$

c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tau] &= \frac{1}{p-q}\mathbb{E}[S_\tau]\,, \\
&= \frac{1}{p-q}\left((-a)\,\mathbb{P}(S_\tau=-a)+b\mathbb{P}(S_\tau=b)\right)\,, \\
&= \frac{1}{p-q}\left(-a+(a+b)\,\mathbb{P}(S_\tau=b)\right)\,, \\
&= \frac{1}{p-q}\left[\frac{(a+b)-a\left(\frac{q}{p}\right)^b-b\left(\frac{p}{q}\right)^a}{\left(\frac{q}{p}\right)^b-\left(\frac{p}{q}\right)^a}\right]\,.
\end{aligned}$$

**<u>Exercice 2</u> :** Les **processus de branchement** ont été introduits pour modéliser l'évolution d'une population, la croissance ou la décroissance de son effectif et la probabilité que celle-ci survive ou disparaisse.

Un individu de la population considérée est défini comme étant un objet d'un certain type capable de se reproduire selon les règles suivantes. A la génération $n=0$, il n'existe qu'un seul individu. Au temps $n=1$, il meurt et est remplacé par une famille de descendants. Ces individus ont tous les mêmes propriétés et chacun survit jusqu'à $n=2$, où il laisse place à ses descendants, la deuxième génération. Ce processus se poursuit pour $n=3,4,\cdots$, tant que la population ne s'éteint pas. A chaque génération, on ne considère que les nouveaux individus, ceux de la génération précédente étant considérés comme disparus.

Notons, par $Z_n$, $n\in\mathbb{N}$, la variable aléatoire comptant le nombre d'individus de la $n$-ième génération.

La suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
Z_0 &= 1 \\
Z_{n+1} &= \begin{cases} 0\,, & \text{si } Z_n=0\,, \\ \sum_{k=1}^{Z_n} U_k^{n+1}\,, & \text{si } Z_n>0\,, \end{cases}
\end{aligned}$$

où $U_k^{n+1}$, $k\in\{1,\cdots,Z_n\}$, est le nombre de descendants du $k$-ième individu vivant à la génération $n$.

Remarquons qu'on a : $Z_1=U_1^1$.

La suite de variables aléatoires $(U_k^n)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ satisfait les conditions suivantes :

- les $U_k^n$, $(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2$, sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$,
- les $U_k^n$, $(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2$, sont identiquement distribuées et notons : $p_m=\mathbb{P}(U_k^{n+1}=m)$, $m\in\mathbb{N}$.

Les hypothèses sur les variables aléatoires $(U_k^n)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ traduisent les faits suivants :

- le comportement d'un individu donné n'est en rien influencé par celui d'autres individus, que ce soit de sa propre génération ou des générations antérieures,
- tous les individus, quel que soit la génération à laquelle ils appartiennent, se comportent à priori de la même façon, c'est-à-dire, que leur nombre de descendants suit la même loi de probabilité,
- ce comportement n'est pas non plus affecté par le nombre d'individus.

Les processus de branchement sont des modèles particulièrement utilisés en biologie (étude de la croissance d'une colonie de bactéries) et en physique nucléaire, mais trouvent leur origine dans l'étude, au 19-ième siècle, des probabilités d'extinction des noms de familles illustres en Grande Bretagne, sous l'Angleterre Victorienne.

- <u>survivance des patronymes</u> : ici, seuls les descendants mâles comptent car ils transmettent le nom et $p_m$ est la probabilité qu'un garçon ait $m$ garçons. Sir Francis Galton (à l'origine de la controversée théorie de l'eugénisme et cousin germain de Charles Darwin) et le révérand William Watson ont démontré qu'un patronyme dont les porteurs ont un nombre de garçons strictement inférieur à 1 en moyenne est amené à disparaître. Inversement, si le nombre moyen de garçons est supérieur à 1, alors la probabilité de survie de ce nom est non nulle et, en cas de survie, le nombre de porteurs du patronyme connaît une croissance exponentielle.
- <u>réactions en chaîne</u> : les individus sont des neutrons qui sont soumis aux chocs d'autres particules. Une particule touchée crée $m$ descendants avec probabilité $p_m=p$ et meurt avec probabilité $q=1-p$. Dans le pire des cas, la première particule reste inactive et le processus ne démarre pas. Dans le bon cas, il y aura $m$ particules à la première génération, $m^2$ à la deuxième, etc... Si $p$ est presque 1, le nombre de particules augmente rapidement et conduit à l'explosion.

1. $Z_0 = 1\,, Z_1 = U_1^1$ et pour tout $n \geq 1\,, Z_{n+1} = \displaystyle\sum_{s=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{s} U_k^{n+1}\right)\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}$ , si $Z_n > 0$ .

   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $Z_n$ est $\mathcal{F}_n$ - mesurable.
   $Z_1 = U_1^1$ et $\mathcal{F}_1 = \sigma(U_k^1\,; k \geq 1)$ , ainsi $Z_1$ est $\mathcal{F}_1$ - mesurable.
   Supposons que $Z_n$ est $\mathcal{F}_n$ - mesurable et démontrons que $Z_{n+1}$ est $\mathcal{F}_{n+1}$ - mesurable.
   Comme $\mathcal{F}_{n+1} = \sigma(U_k^l\,; 1 \leq l \leq n+1\,, k \geq 1)\,, U_k^{n+1}$ est $\mathcal{F}_{n+1}$ - mesurable, pour tout $k \geq 1$ , et $\displaystyle\sum_{k=1}^{s} U_k^{n+1}$ est aussi $\mathcal{F}_{n+1}$ - mesurable.
   D'après l'hypothèse de récurrence, $Z_n$ est $\mathcal{F}_n$ - mesurable; ainsi, quel que soit $s \geq 1\,, \{Z_n = s\} \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ et $\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}$ est $\mathcal{F}_{n+1}$ - mesurable.
   Pour tout $N \geq 1\,, \displaystyle\sum_{s=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{s} U_k^{n+1}\right)\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}$ est alors $\mathcal{F}_{n+1}$ - mesurable et $Z_{n+1} = \displaystyle\sup_{N\geq 1}\left(\sum_{s=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{s} U_k^{n+1}\right)\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\right)$ est également $\mathcal{F}_{n+1}$ - mesurable.
   On en conclut que $Z_n$ est $\mathcal{F}_n$ - mesurable, quel que soit $n \geq 1$ .
   Pour tout $(n,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , posons : $S_s^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{s} U_k^{n+1}$ . Comme $(U_k^n)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, $S_s^{n+1}$ est alors indépendante de la sous-tribu $\mathcal{F}_n$ , quel que soit $(n,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .
   Ainsi, pour tout $(n,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , il vient, si $Z_n > 0$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_{n+1}\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{s} U_k^{n+1}\right)\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\Big|\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\mathbb{E}[S_s^{n+1}|\mathcal{F}_n]\,,\ \text{car } \mathbf{1}_{\{Z_n=s\}} \text{ est } \mathcal{F}_n\text{ - mesurable,} \\
&= \mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\mathbb{E}[S_s^{n+1}]\,,\ \text{puisque } S_s^{n+1} \text{ est indépendante de } \mathcal{F}_n\,, \\
&= \mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\sum_{k=1}^{s}\mathbb{E}[U_k^{n+1}]\,, \\
&= \mu\, s\, \mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\,, \qquad (2)
\end{aligned}$$

   car $\mu = \mathbb{E}[U_1^1] = \mathbb{E}[U_k^{n+1}]\,, (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ .
   On déduit de l'égalité trouvée en (2) que, pour tout $(n,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , si $Z_n > 0$ :

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}|\mathcal{F}_n] = \mu\, Z_n\, \mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\,. \qquad (3)$$

   De plus, quel que soit $(n,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , on a, lorsque $Z_n > 0$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{s=1}^{+\infty}\left(Z_{n+1}\,\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\right)\Big|\mathcal{F}_n\right]\,, \\
&= \mathbb{E}\left[\lim_{N\to+\infty}\sum_{s=1}^{N}\left(Z_{n+1}\,\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\right)\Big|\mathcal{F}_n\right]\,, \\
&= \lim_{N\to+\infty}\mathbb{E}\left[\sum_{s=1}^{N}\left(Z_{n+1}\,\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\right)\Big|\mathcal{F}_n\right]\,,\ \text{d'après le théorème de convergence monotone conditionnel,} \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{s=1}^{N}\mathbb{E}\left[\left(Z_{n+1}\,\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\right)\Big|\mathcal{F}_n\right]\,,\ \text{en utilisant la linéarité de l'espérance conditionnelle,} \\
&= \sum_{s=1}^{+\infty}\left(\mu\, Z_n\,\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\right)\,,\ \text{d'après (3),} \\
&= \mu\, Z_n\,. \qquad (4)
\end{aligned}$$

2. Pour tout $(n,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , on obtient, si $Z_n > 0$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_{n+1}^2\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{s} U_k^{n+1}\right)^2\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\Big|\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\mathbb{E}[(S_s^{n+1})^2|\mathcal{F}_n]\,,\ \text{car } \mathbf{1}_{\{Z_n=s\}} \text{ est } \mathcal{F}_n\text{ - mesurable,} \\
&= \mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\mathbb{E}[(S_s^{n+1})^2]\,, \qquad (5)
\end{aligned}$$

puisque $S_s^{n+1}$ donc $(S_s^{n+1})^2$ est indépendante de $\mathcal{F}_n$.
Or, quel que soit $(n,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\mathbb{E}[(S_s^{n+1})^2] = \mathrm{Var}(S_s^{n+1}) + (\mathbb{E}[S_s^{n+1}])^2 . \tag{6}$$

Mais, les variables aléatoires $U_k^{n+1}, (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ étant indépendantes, il vient, pour tout $(n,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S_s^{n+1}) &= \sum_{k=1}^{s} \mathrm{Var}(U_k^{n+1}) ,\\ &= \sum_{k=1}^{s} \mathrm{Var}(U_1^1) , \text{ car les } U_k^{n+1}, (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ suivent la même loi,}\\ &= s\,\sigma^2 . \end{aligned} \tag{7}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_s^{n+1}] &= \sum_{k=1}^{s} \mathbb{E}[U_k^{n+1}] ,\\ &= s\,\mu . \end{aligned} \tag{8}$$

Combinant (5), (6), (7) et (8), on trouve, quel que soit $(n,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$, si $Z_n > 0$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1}^2 \mathbf{1}_{\{Z_n=s\}} | \mathcal{F}_n] &= (s\,\sigma^2 + s^2\,\mu^2)\,\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}} ,\\ &= (\sigma^2\,Z_n + \mu^2\,Z_n^2)\,\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}} . \end{aligned} \tag{9}$$

Ainsi, pour tout $(n,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a, lorsque $Z_n > 0$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{s=1}^{+\infty} \left(Z_{n+1}^2\,\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\right) \Big| \mathcal{F}_n\right] ,\\ &= \sum_{s=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\left(Z_{n+1}^2\,\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\right) \Big| \mathcal{F}_n\right] , \text{ d'après le théorème de convergence monotone conditionnel,}\\ &= \sum_{s=1}^{+\infty} \left((\sigma^2\,Z_n + \mu^2\,Z_n^2)\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}\right) , \text{ d'après (9),}\\ &= \sigma^2\,Z_n + \mu^2\,Z_n^2 . \end{aligned} \tag{10}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]] ,\\ &= \mu\,\mathbb{E}[Z_n] , \text{ d'après (4),}\end{aligned}$$

de sorte que : $\mathbb{E}[Z_n] = \mu^n\,\mathbb{E}[Z_0]$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\mathbb{E}[Z_n] = \mu^n . \tag{11}$$

Utilisant l'égalité trouvée en (10), on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1}^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{n+1}^2|\mathcal{F}_n]] ,\\ &= \sigma^2\,\mathbb{E}[Z_n] + \mu^2\,\mathbb{E}[Z_n^2] ,\\ &= \sigma^2\,\mu^n + \mu^2\,\mathbb{E}[Z_n^2] , \text{ d'après (11),}\end{aligned} \tag{12}$$

Posons $a_n = \mu^{-2n}\,\mathbb{E}[Z_n^2]$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
Il résulte de l'égalité (12) que la relation de récurrence suivante est satisfaite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$a_{n+1} = a_n + \sigma^2\,\mu^{-n-2} ,$$

On obtient alors, quel que soit $n \geq 1$,

$$a_n = a_0 + \sigma^2 \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{-k-2}$$

soit :

$$\mu^{-2n}\,\mathbb{E}[Z_n^2] = 1 + \sigma^2 \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{-k-2}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_n^2] &= \mu^{2n} + \sigma^2 \sum_{k=0}^{n-1} \mu^{2(n-1)-k}\,, \\ &= \mu^{2n} + \sigma^2 \sum_{j=n-1}^{2n-2} \mu^{j}\,. \end{aligned} \tag{13}$$

4. Par définition, $X_n = \frac{Z_n}{\mu^n}$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   Il a été montré à la question **1.** que $Z_n$ est $\mathcal{F}_n$ - mesurable, pour tout $n \geq 1$. Ainsi, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   $X_0 = 1$ et d'après l'égalité (11), quel que soit $n \geq 1$,
   $$\mathbb{E}[X_n] = \mu^{-n}\mathbb{E}[Z_n] = 1\,. \tag{14}$$
   Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors intégrable.
   Par ailleurs, pour tout $n \geq 1\,, \mathbb{E}[X_n^2] = \mu^{-2n}\mathbb{E}[Z_n^2] < +\infty$, en utilisant (13).
   Enfin, quel que soit $n \geq 1$, on a :
   $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mu^{-(n+1)}\,\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]\,, \\ &= \mu^{-(n+1)}\,\mu\, Z_n\,, \text{ d'après (4),} \\ &= \mu^{-n} Z_n\,. \end{aligned}$$
   Ainsi, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale de carré intégrable.
   Son crochet $(<X>_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $<X>_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,
   $$\begin{aligned} <X>_n &= \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{E}[X_k^2|\mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}^2)\,, \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\mu^{-2k}\,\mathbb{E}[Z_k^2|\mathcal{F}_{k-1}] - \mu^{-2(k-1)} Z_{k-1}^2)\,, \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\mu^{-2k}\,(\sigma^2\, Z_{k-1} + \mu^2\, Z_{k-1}^2) - \mu^{-2(k-1)} Z_{k-1}^2)\,, \text{ d'après (10),} \\ &= \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \mu^{-(k+1)}\, X_{k-1}\,. \end{aligned} \tag{15}$$

5. <u>Rappel</u> : Si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - sur-martingale à valeurs positives, alors $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers une variable aléatoire $Y_\infty$ vérifiant $\mathbb{E}[Y_\infty] < +\infty$.
   □
   Comme $X_n \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit du rappel précédent que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers une variable aléatoire intégrable $X_\infty$.

6. <u>Rappel</u> : **Théorème de convergence des martingales uniformément bornées dans $\mathbb{L}^2$.**
   Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale de carré intégrable telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} M_n^2 < +\infty$. Alors la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable aléatoire $\mathcal{F}_\infty$ - mesurable, notée $M_\infty$.
   □
   $(X_n^2 - <X>_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale si bien que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
   $$\mathbb{E}[X_n^2 - <X>_n] = \mathbb{E}[X_0^2 - <X>_0] = \mathbb{E}[X_0^2] = 1\,,$$
   et
   $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n^2] &= 1 + \mathbb{E}[<X>_n]\,, \\ &= 1 + \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \mu^{-(k+1)}\,\mathbb{E}[X_{k-1}]\,, \text{ d'après (15),} \\ &= 1 + \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \mu^{-(k+1)}\,, \text{ en utilisant (14).} \end{aligned}$$

Ainsi, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$ si et seulement si la série $\sum_{k\geq 1} \mu^{-(k+1)}$ est convergente, c'est-à-dire, lorsque $\mu > 1$.

On conclut du développement précédent que, si $\mu > 1$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2$ vers $X_\infty$.

7. On suppose dans cette question que $\mu = 1$ et $\mathbb{P}(U_k^n = 1) < 1$, pour tout $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

(a) Soit $\phi$, la fonction génératrice des variables aléatoires $U_k^n$, pour tout $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Quel que soit $t \in [0,1]$, on a : $\phi(t) = \sum_{l=0}^{+\infty} t^l \mathbb{P}(U_k^n = l)$.

Les variables aléatoires $U_k^n$, $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ étant indépendantes, la fonction génératrice de la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{m} U_k^n$, $m \geq 1$, notée $\phi_{\sum_{k=1}^m U_k^n}$ vérifie pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \phi_{\sum_{k=1}^m U_k^n}(t) &= \prod_{k=1}^{m} \phi_{U_k^n}(t), \\ &= (\phi(t))^m, \end{aligned} \tag{16}$$

puisque les $U_k^n$, $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ suivent la même loi.

Si pour tout $m \geq 1$, $p_m = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{m} U_k^n = m\right) = 1$, alors $\sum_{k=1}^{m} U_k^n = m$, $\mathbb{P}$- p.s..

Ainsi, quel que soit $t \in [0,1]$, $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} \phi_{\sum_{k=1}^m U_k^n}(t) &= \sum_{l=0}^{+\infty} t^l \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{m} U_k^n = l\right), \\ &= t^m. \end{aligned} \tag{17}$$

On déduit des égalités (16) et (17) que pour tout $t \in [0,1]$, $m \geq 1$ $(\phi(t))^m = t^m$, soit $\phi(t) = t$, ce qui est exclu puisqu'on reconnaît alors la fonction génératrice d'une variable aléatoire constante égale à $1$, $\mathbb{P}$- presque sûrement et d'après l'énoncé, $\mathbb{P}(U_k^n = 1) < 1$, pour tout $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. (la fonction génératrice caractérise la loi)

On conclut que $p_m < 1$, quel que soit $m \geq 1$.

(b) D'après la question **5.**, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathbb{P}$- presque-sûrement vers une variable aléatoire $X_\infty$.

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n$ est à valeurs entières; ainsi, $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}-\text{p.s.}} X_\infty$ se ré-écrit :

pour presque tout $\omega \in \Omega$, $\exists N(\omega) \geq 1$, $\forall n \geq N(\omega)$, $X_n(\omega) = X_\infty(\omega)$, soit, vu qu'il a été posé dans l'énoncé, $\tilde{\Omega} = \cup_{N\geq 1} \cap_{n\geq N} \{X_n = X_\infty\}$, $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$.

(c) En utilisant le fait que $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$, il vient, pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_\infty = m) &= \mathbb{P}(\{X_\infty = m\} \cap \tilde{\Omega}), \\ &= \mathbb{P}(\{X_\infty = m\} \cap (\cup_{N\geq 1} \cap_{n\geq N} \{X_n = X_\infty\})), \\ &= \mathbb{P}(\{X_\infty = m\} \cap (\cup_{N\geq 1} \cap_{n\geq N} \{X_n = m\})), \\ &\leq \mathbb{P}\left(\cup_{N\geq 1} \cap_{n\geq N} \{X_n = m\}\right), \\ &= \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\cap_{n\geq N} \{X_n = m\}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Comme $\mu = 1$, $X_n = Z_n$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$; si, $\forall n \geq N$, $N \geq 1$, $X_n = m$ alors $X_{n+1} = \sum_{k=1}^{m} U_k^{n+1} = m$ et $\cap_{n\geq N}\{X_n = m\} \subset \cap_{n\geq N} \left(\sum_{k=1}^{m} U_k^{n+1} = m\right)$ de sorte que, pour tout $N \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\cap_{n\geq N}\{X_n = m\}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq N} \left(\sum_{k=1}^{m} U_k^{n+1} = m\right)\right), \\ &= \prod_{n\geq N} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{m} U_k^{n+1} = m\right), \\ &= \prod_{n\geq N} p_m. \end{aligned} \tag{19}$$

Comme $p_m < 1$, quel que soit $m \geq 1$ et combinant (18) et (19), on obtient que $\mathbb{P}(X_\infty = m) = 0$, pour tout entier $m \geq 1$, soit que la variable aléatoire finie $X_\infty$ vérifie : $X_\infty = 0\,, \mathbb{P}$ - p.s. .
La martingale $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément intégrable puisque, quel que soit $n \in \mathbb{N}\,, \mathbb{E}[X_n] = 1$ alors que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}-\text{p.s.}} 0$, il ne peut donc y avoir convergence dans $\mathbb{L}^1$.