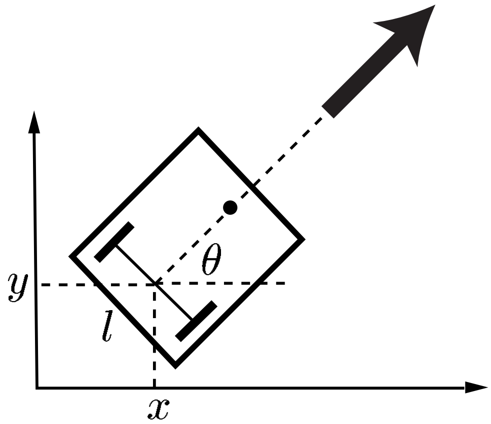
Petite Classe n^0 1

ENSTA IP Paris
http://cas.ensmp.fr/∼petit/ — *19 février 2021*

Robot à roues



On considère un robot mobile (tel qu'utilisé dans de nombreux concours de robotique). Ce robot admet sur un même essieu deux roues motorisées de manière indépendante. On note $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées cartésiennes du milieu de l'essieu, $\theta \in [0, 2\pi[$ l'angle du robot avec un axe fixe, Ω_d et Ω_g les vitesses de rotation des roues droite et gauche. On suppose que les roues roulent sans glisser ni déraper.

1. Montrer que la dynamique est

$$\frac{d}{dt}x = v\cos\theta, \quad \frac{d}{dt}y = v\sin\theta, \quad \frac{d}{dt}\theta = \omega \tag{1}$$

où (x, y, θ) est l'état et $u = (v, \omega) \in \mathbb{R}^2$ est le contrôle que l'on relira à Ω_d et Ω_g, le rayon ρ des roues et l la distance entre les roues.

2. La dynamique des moteurs est décrite par ($\nu = d, g$)

$$J\frac{d}{dt}\Omega_\nu = C_\nu + kI_\nu, \quad L\frac{d}{dt}I_\nu = -RI_\nu - k\Omega_\nu + V_\nu$$

où (J, k, R, L) sont des paramètres positifs. Le contrôle est la tension V_ν ; Ω_ν est la vitesse de rotation et I_ν le courant. C_ν est le couple extérieur supposé constant. Sous l'hypothèse J et L petits, montrer que l'on a $\Omega_\nu \approx \frac{1}{k}V_\nu + \frac{R}{k^2}C_\nu$. Dans la suite on néglige $\frac{R}{k^2}C_\nu$ et donc $\Omega_\nu \approx \frac{1}{k}V_\nu$. Réécrire le modèle de la question précédente en fonction de V_d et V_g.

3. Quels sont les points d'équilibre du système ? Écrire autour d'un point d'équilibre le système linéarisé. Étudier sa commandabilité.

4. Dans cette question on désire suivre l'axe des abscisses à une vitesse $a > 0$ constante :

$$x_r(t) = at, \quad y_r(t) = 0, \quad \theta_r(t) = 0, \quad v_r(t) = a, \quad \omega_r(t) = 0$$

Pour cela on pose $x = x_r + \Delta_x$, $y = y_r + \Delta_y$, $\theta = \theta_r + \Delta_\theta$, $v = v_r + \Delta_v$ et $\omega = \omega_r + \Delta_\omega$ où les écarts Δ_σ, $\sigma = x, y, \theta, v, \omega$ sont supposés petits.

   (a) Montrer qu'au premier ordre, les équations linéaires satisfaites par les Δ_σ sont

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Delta_x = \Delta_v \\ \frac{d}{dt}\Delta_y = a\Delta_\theta \\ \frac{d}{dt}\Delta_\theta = \Delta_\omega \end{cases} \tag{2}$$

   avec $(\Delta_v, \Delta_\omega)$ comme commande.

(b) Donner un bouclage d'état qui stabilise asymptotiquement le système ci-dessus.

5. Dans cette question on désire suivre une courbe régulière paramétrée en abscisse curviligne $s \mapsto (x_r(s), y_r(s))$. On note $\theta_r(s)$ l'angle de sa tangente et $\kappa_r(s)$ sa courbure. On rappelle que (formules de Frénet pour les courbes planes)

$$\frac{dx_r}{ds} = \cos\theta_r, \quad \frac{dy_r}{ds} = \sin\theta_r, \quad \frac{d\theta_r}{ds} = \kappa_r$$

On souhaite suivre cette courbe avec une vitesse constante $a > 0$. Aux écarts cartésiens (Δ_x, Δ_y) utilisés dans la question précédente on préfère les écarts tangentiel $\Delta_\parallel$ et normal $\Delta_\perp$ définis par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} + \Delta_\parallel \begin{pmatrix} \cos\theta_r \\ \sin\theta_r \end{pmatrix} + \Delta_\perp \begin{pmatrix} -\sin\theta_r \\ \cos\theta_r \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que les commandes de référence sont

$$v_r(t) = a, \quad \omega_r(t) = a\kappa_r(at)$$

En déduire qu'au premier ordre les écarts Δ_σ $(\sigma = \parallel, \perp, \theta, v, \omega)$ vérifient

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Delta_\parallel = a\kappa_r(at)\Delta_\perp + \Delta_v \\ \frac{d}{dt}\Delta_\perp = -a\kappa_r(at)\Delta_\parallel + a\Delta_\theta \\ \frac{d}{dt}\Delta_\theta = \Delta_\omega \end{cases} \tag{3}$$

avec $(\Delta_v, \Delta_\omega)$ comme commande.

(b) On suppose dans (3) que la courbure $\kappa_r(s)$ varie peu en fonction de s : $\kappa_r(at) \approx \bar{\kappa}_r$ est en première approximation indépendant de t. Donner un bouclage d'état stabilisant.

(c) Comment se ramener à ce qui précède si l'on souhaite parcourir la même courbe $s \mapsto (x_r(s), y_r(s))$ mais avec une vitesse variable $a(t) = \frac{d}{dt}s_r$ régulière correspondant à une loi horaire de $t \mapsto s_r(t)$ définie par avance ?