Rappels (non exhaustifs) du cours pour le TD~~4~~5

* L'état d'un système quantique est représenté par un vecteur (ket) $|\phi\rangle$ d'un espace de Hilbert.

* A chaque physique A, on associe un opérateur $\hat{A}$ qui agit sur les kets. Cet opérateur est auto-adjoint :

$$\hat{A}^{\dagger} = \hat{A}$$

Il existe toujours (au moins) une base orthonormée de vecteurs propres de $\hat{A}$. Les valeurs propres de $\hat{A}$ sont réelles.

Notons $\lambda \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de $\hat{A}$ et g_λ le degré de dégénérescence de la valeur propre λ.

On peut alors noter $|\lambda^i\rangle$ une base orthonormées de vecteurs propres de $\hat{A}$ (où i varie entre 1 et g_λ).

N'importe quel ket $|\psi\rangle$ peut se décomposer sur cette base :

$$|\psi\rangle = \sum_{\lambda} \sum_{i=1}^{g_\lambda} c_\lambda^i \, |\lambda^i\rangle \quad \text{avec} \quad c_\lambda^i \in \mathbb{C}$$

* Si on fait une mesure de la grandeur A, on peut mesurer uniquement une valeur propre λ.

La probabilité de mesurer λ est :

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{g_\lambda} |c_\lambda^i|^2 = \sum_{i=1}^{g_\lambda} |\langle \lambda^i | \varphi \rangle|^2$$

Immédiatement après la mesure, le système est projeté sur le sous-espace vectoriel des vecteurs propres associés à la valeur propre λ qui a été mesurée :

$$|\varphi\rangle_{\text{après}} = \sum_{i=1}^{\lambda} c_\lambda^i |\lambda^i\rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^{\lambda} |\lambda^i\rangle\langle\lambda^i|}_{\text{Projecteur sur le sous-espace vectoriel des vecteurs propres associés à } \lambda.} |\varphi\rangle$$

(Bien sur, il faut normalise l'état $|\varphi\rangle_{\text{après}}$)

* Entre deux mesures, le système évolue suivant l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d|\varphi\rangle}{dt} = \hat{H}|\varphi\rangle$$

* Si le Hamiltonien ne dépend pas du temps, une

méthode pour résoudre l'équation de Schrödinger est de chercher les états propres $|E\rangle$ du Hamiltoniem. (i.e. de diagonaliser le Hamiltonien).

Ces états sont dits stationnaires et leur évolution est triviale.

$$\text{Si} \quad |\psi(t=0)\rangle = |E\rangle, \quad \text{alors} \quad |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} |E\rangle$$

En général, on peut toujours écrire :

$$|\psi(t=0)\rangle = \sum_E c_E |E\rangle \qquad \text{avec} \quad c_E \in \mathbb{C}$$

Et alors $\quad |\psi(t)\rangle = \sum_E c_E \, e^{-\frac{iEt}{\hbar}} |E\rangle$

Cette méthode pour résoudre l'équation de Schrödinger est appelée "équation de Schrödinger indépendante du temps".

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|0^1\rangle + i|0^2\rangle + |1\rangle \right)$$

Si je mesure 1 $\qquad |\psi_{après}\rangle = |1\rangle$

0 $\qquad |\psi_{après}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0^1\rangle + i|0^2\rangle \right)$

Nouveauté TD5 : Inégalité de Heisenberg

A et B deux grandeurs physiques :

$$\Delta A \, \Delta B \geqslant \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|$$

Si $\hat{A}$ et $\hat{B}$ commutent, il n'y a pas de contraintes et A et B sont compatibles.

Si $\hat{A}$ et $\hat{B}$ ne commutent pas, on ne peut pas toujours avoir ΔA et ΔB arbitrairement petits.

<u>Exemple</u> : $[\hat{x}, \hat{p_x}] = i\hbar$

Donc $\Delta x \, \Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2}$