

\*\*\*

**Mécanique des milieux continus**

Travaux dirigés n°1

\*\*\*

**Exercice 1 : Les matrices de passage**

Soit dans  $\mathbb{R}^2$  les deux bases orthonormées  $b = (\underline{e}_x, \underline{e}_y)$  et  $b' = (\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$ . Le passage de la base  $b$  à la base  $b'$  s'effectue par le biais d'une rotation d'angle  $\theta$ . Soit  $\underline{\underline{R}}$  la matrice de rotation dans la base  $b$ .

- ① Que vaut cette matrice ?
- ② Montrer que  $\underline{\underline{R}} = \underline{e}_r \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_y$ .
- ③ Effectuer le produit  $(a\underline{e}_r + b\underline{e}_\theta) \cdot \underline{\underline{R}}$  en notation tensorielle et vectorielle.
- ④ Effectuer le produit  $\underline{\underline{R}} \cdot (a\underline{e}_r + b\underline{e}_\theta)$  en notation tensorielle et vectorielle.

**Exercice 2 : Décomposition RU**

Soient  $\{\underline{e}_i\}$  et  $\{\underline{e}'_i\}$  deux bases de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\underline{\underline{F}}$  le tenseur d'ordre 2 tel que pour tout  $i$  :

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{e}_i = \lambda_i \underline{e}'_i$$

- ① Montrer que  $\underline{\underline{F}}$  admet la représentation tensorielle suivante

$$\underline{\underline{F}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}'_i \otimes \underline{e}_i$$

- ② Montrer que  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{R}}$  avec

$$\underline{\underline{R}} = \sum_{i=1}^n \underline{e}'_i \otimes \underline{e}_i, \quad \underline{\underline{U}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i, \quad \underline{\underline{W}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}'_i \otimes \underline{e}'_i$$

**Exercice 3**

Soit  $\underline{\underline{T}}$  un tenseur d'ordre 2. On note  $\underline{a}_i$  l'image par  $\underline{\underline{T}}$  des éléments de la base  $\{\underline{e}_i\}$  de  $\mathbb{R}^n$  i.e.

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{e}_i = \underline{a}_i$$

- Déterminer la représentation tensorielle de  $\underline{\underline{T}}$  en fonction de  $\{\underline{e}_i\}$  et  $\{\underline{a}_i\}$ .

**Exercice 4 : Calculs tensoriels**

Les questions qui suivent sont à traiter à l'aide des opérations de base du calcul tensoriel. Au besoin, décomposer dans une base tensorielle adaptée.

1. Montrer que si  $\underline{\underline{T}}$  est antisymétrique i.e.  $'\underline{\underline{T}} = -\underline{\underline{T}}$ , alors il existe un tenseur d'ordre 1,  $\underline{\Omega}$  tel que pour tout tenseur  $\underline{v}$  d'ordre 1, on a :

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = \underline{\Omega} \wedge \underline{v}$$

(2) Montrer que  $\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}} = ' \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}$

(3) Montrer que  $'(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{W}) = '\underline{W}' \cdot \underline{\underline{T}}$

~ 4. Montrer que  $(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{W}) : \underline{U} = (\underline{\underline{W}} \cdot \underline{U}) : \underline{\underline{T}} = (\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{T}}) : \underline{\underline{W}}$

(5) Soit  $\underline{\underline{T}}$  dont la représentation dans la base orthonormée  $\{\underline{e}_i\}$  s'écrit dans la notation indicelle  $\underline{\underline{T}} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ . Soit  $\{\underline{e}'_i\}$  une autre base orthonormée. En déduire la représentation de  $\underline{\underline{T}}$  dans la base  $\{\underline{e}'_i\}$ .

6. Prévoir les ordres des tenseurs suivants

$$\begin{aligned} & \underline{a} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{b} \\ & \underline{\underline{T}} \cdot (\underline{b} \otimes \underline{a}) \\ & \underline{\underline{T}} : (\underline{b} \otimes \underline{a}) \\ & \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{W}} \cdot \underline{b} \\ & \underline{a} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{W}} \cdot \underline{b} \\ & \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{W}} \cdot \underline{b} \\ & \underline{a} \cdot \underline{\underline{\underline{K}}} \cdot \underline{b} \\ & \underline{\underline{\underline{K}}} \cdot (\underline{b} \otimes \underline{a}) \\ & \underline{\underline{\underline{K}}} : (\underline{b} \otimes \underline{a}) \end{aligned}$$

MS101 : PC1 - Corrigé  
Les tenseurs

Question 1) :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_i b_i$$

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1i} B_{i1} & A_{1i} B_{i2} & A_{1i} B_{i3} \\ A_{2i} B_{i1} & A_{2i} B_{i2} & A_{2i} B_{i3} \\ A_{3i} B_{i1} & A_{3i} B_{i2} & A_{3i} B_{i3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1i} a_i \\ A_{2i} a_i \\ A_{3i} a_i \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \mathbb{A} = (a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = (A_{i1} a_i, A_{i2} a_i, A_{i3} a_i)$$

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{a} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} K_{11i} a_i & K_{12i} a_i & K_{13i} a_i \\ K_{21i} a_i & K_{22i} a_i & K_{23i} a_i \\ K_{31i} a_i & K_{32i} a_i & K_{33i} a_i \end{pmatrix}$$

Question 2) : Il suffit de l'écrire.

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \begin{pmatrix} A_{1i} B_{i1} & A_{1i} B_{i2} & A_{1i} B_{i3} \\ A_{2i} B_{i1} & A_{2i} B_{i2} & A_{2i} B_{i3} \\ A_{3i} B_{i1} & A_{3i} B_{i2} & A_{3i} B_{i3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr}(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = A_{ij} B_{ji}$$

Question 3) :

$\mathbb{R}$  est la matrice d'une rotation d'angle  $\theta$  donc, dans la base cartésienne  $b$ , :

$$\mathbb{R} = (\vec{e_r} \quad \vec{e_\theta})_b = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}_b$$

Puisque c'est la rotation d'angle  $\theta$ , nous les relations suivantes :

$$\underline{\underline{R}} \cdot \underline{e_x} = \underline{e_r} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{R}} \cdot \underline{e_y} = \underline{e_\theta}$$

Donc, nous avons :

$$\begin{array}{lll} \underline{e_r} \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{e_x} = 1 & \text{et} & \underline{e_\theta} \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{e_y} = 1 \\ \underline{e_\theta} \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{e_x} = 0 & \text{et} & \underline{e_r} \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{e_y} = 0 \end{array}$$

Nous avons balayé une base complète à droite ( $b$ ) et une base complète à gauche ( $b'$ ), nous venons donc de trouver les coefficients de la matrice représentant  $\underline{R}$  dans les bases  $b' \times b$ . Nous pouvons alors écrire :

$$\underline{R} = 1 \underline{e}_r \otimes \underline{e}_x + 1 \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_y + 0 \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_x + 0 \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y = \underline{e}_r \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_y$$

En notation tensorielle, l'opération  $(ae_r + be_\theta) \cdot \underline{R}$  est simple :

$$(ae_r + be_\theta) \cdot \underline{R} = (ae_r + be_\theta) \cdot (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_y) = a \underbrace{(\underline{e}_r \cdot \underline{e}_r)}_1 \underline{e}_x + a \underbrace{(\underline{e}_r \cdot \underline{e}_\theta)}_0 \underline{e}_y + b \underbrace{(\underline{e}_\theta \cdot \underline{e}_r)}_0 \underline{e}_x + b \underbrace{(\underline{e}_\theta \cdot \underline{e}_\theta)}_1 \underline{e}_y = ae_x + be_y$$

En notation matricielle par contre, elle devient affreuse à écrire, pour le même "joli" résultat :

$$(a \cos \theta - b \sin \theta, a \sin \theta - b \cos \theta) \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = (a, b)$$

Maintenant, en choisissant un produit moins beau, en notation tensorielle, nous avons :

$$\begin{aligned} \underline{R} \cdot (ae_r + be_\theta) &= (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_y) \cdot (ae_r + be_\theta) \\ &= a \underbrace{(\underline{e}_r \cdot \underline{e}_r)}_1 \underline{e}_r + a \underbrace{(\underline{e}_y \cdot \underline{e}_r)}_0 \underline{e}_\theta + b \underbrace{(\underline{e}_x \cdot \underline{e}_r)}_{\cos \theta} \underline{e}_x + b \underbrace{(\underline{e}_y \cdot \underline{e}_r)}_{\sin \theta} \underline{e}_\theta \\ &= ae_r + b(\cos \theta \underline{e}_r + \sin \theta \underline{e}_\theta) \end{aligned}$$

Ce n'est pas très agréable à lire mais il y a pire, la notation matricielle du même produit :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a + b \cos \theta \\ b \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta + b \cos^2 \theta + b \cos \theta \sin \theta + b \sin^2 \theta \\ a \sin \theta + 2b \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix}$$

Comme nous pouvons le voir ce qui est possible en matriciel est possible en tensoriel, seulement les notations tensorielles sont toujours plus "légères". En effet, vous n'avez jamais besoin de projeter les tenseurs dans une base donnée pour nous en servir. Par contre, l'élève *distrait* qui exprime un tenseur dans la mauvaise base peut se retrouver avec une notation aussi lourde qu'avec des matrices. Par exemple, ici, si cet élève avait regardé  $\underline{R}$  en l'exprimant dans le système  $\underline{\epsilon}'_i \otimes \underline{\epsilon}'_j$  au lieu de  $\underline{\epsilon}_i \otimes \underline{\epsilon}_j$ , il aurait trouvé :

$$\underline{R} = \cos \theta (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + \sin \theta (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_x - \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y)$$

Cette expression est exactement la traduction tensorielle "mot à mot" de la représentation matricielle  $\underline{R}$  que nous avons donnée plus haut. Il est évident, dans ces conditions, que cet élève aurait les mêmes produits affreux à effectuer en tensoriel qu'en matriciel. Nous pouvons retenir donc que la notation matricielle est toujours la plus lourde mais que la notation tensorielle est moins lourde uniquement pour celui qui réfléchit avant d'écrire.

#### Question 4) :

Par définition, nous avons :

$$\underline{\epsilon}'_i \cdot \underline{F} \cdot \underline{\epsilon}_j = \lambda_j \delta_{ij}$$

Ces relations nous donnent les éléments de réduction de  $\underline{F}$  dans la base  $\underline{\epsilon}'_i \otimes \underline{\epsilon}_j$ . Alors :

$$\underline{F} = \lambda_i \underline{\epsilon}'_i \otimes \underline{\epsilon}_i$$

Pour ce qui est des relations, nous allons tout simplement vérifier qu'elles sont vraies :

$$\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} = (\underline{\underline{\epsilon}}'_i \otimes \underline{\underline{\epsilon}}_i) \cdot (\lambda_j \underline{\underline{\epsilon}}_j \otimes \underline{\underline{\epsilon}}_j) = \lambda_j (\underline{\underline{\epsilon}}'_i \otimes \underline{\underline{\epsilon}}_j) \underbrace{(\underline{\underline{\epsilon}}_i \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_j)}_{\delta_{ij}} = \lambda_i \underline{\underline{\epsilon}}'_i \otimes \underline{\underline{\epsilon}}_i = \underline{\underline{E}}$$

$$\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{R}} = (\lambda_j \underline{\underline{\epsilon}}'_i \otimes \underline{\underline{\epsilon}}_i) \cdot (\underline{\underline{\epsilon}}'_j \otimes \underline{\underline{\epsilon}}_j) = \lambda_i (\underline{\underline{\epsilon}}'_i \otimes \underline{\underline{\epsilon}}_j) \underbrace{(\underline{\underline{\epsilon}}'_i \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_j)}_{\delta_{ij}} = \lambda_i \underline{\underline{\epsilon}}'_i \otimes \underline{\underline{\epsilon}}_i = \underline{\underline{E}}$$

Le tenseur  $\underline{\underline{E}}$  transforme le vecteur  $\underline{\underline{\epsilon}}_i$  en  $\lambda_i \underline{\underline{\epsilon}}'_i$ , c'est-à-dire qu'il lui fait deux choses : il transforme  $\underline{\underline{\epsilon}}_i$  en  $\underline{\underline{\epsilon}}'_i$  et il le dilate d'un rapport  $\lambda_i$ . La décomposition RU permet de séparer ces deux actions : soit  $\underline{\underline{E}}$  dilate puis transforme (RU), soit il transforme puis dilate (UR). Dans ces conditions,  $\underline{\underline{R}}$  est le tenseur qui permet de passer de la base orthonormée  $\underline{\underline{\epsilon}}_i$  à la base orthonormée  $\underline{\underline{\epsilon}}'_i$ . Par définition,  $\underline{\underline{R}}$  est une rotation dans l'espace. Nous pouvons le montrer en regardant :

$${}^t \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}} = (\underline{\underline{\epsilon}}_i \otimes \underline{\underline{\epsilon}}'_i) \cdot (\underline{\underline{\epsilon}}'_j \otimes \underline{\underline{\epsilon}}_j) = (\underline{\underline{\epsilon}}_i \otimes \underline{\underline{\epsilon}}_j) \underbrace{(\underline{\underline{\epsilon}}'_i \cdot \underline{\underline{\epsilon}}'_j)}_{\delta_{ij}} = \underline{\underline{\epsilon}}_i \otimes \underline{\underline{\epsilon}}_i = \underline{\underline{I}}$$

Maintenant, en notation matricielle, c'est beaucoup moins joli : Notons  $\underline{\underline{R}}$ , la matrice de passage de la base  $b$  à la base  $b'$ ,  $\underline{\underline{R}}$  est bien la représentation matricielle du tenseur  $\underline{\underline{R}}$ . En nous appuyant sur l'analyse précédente, nous avons la relation suivante :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}_b \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}_b = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$$

En nous servant de la relation  ${}^t \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}}$ , nous avons la relation :

$$\underline{\underline{F}} = \underbrace{\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot {}^t \underline{\underline{R}}}_{= \underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{R}}$$

Vous pouvez vous amuser à faire le calcul dans le cas général pour votre plaisir personnel, la solution dans le cas des bases cartésienne et cylindrique est :

$$\underline{\underline{U}}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta & (\lambda_1 - \lambda_2) \cos \theta \sin \theta & 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \cos \theta \sin \theta & \lambda_1 \sin^2 \theta + \lambda_2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}_b$$

### Question 5) :

Les tenseurs d'ordre 1 ( $a_i$ )<sub>i</sub> sont les images par  $\underline{\underline{T}}$  de la base  $b = (\underline{\underline{\epsilon}}_i)$ . En notation tensorielle, cela revient simplement à écrire :

$$\underline{\underline{T}} = a_i \otimes \underline{\underline{\epsilon}}_i$$

En effet, nous pouvons vérifier que :

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{e}_j = (\underline{a}_i \otimes \underline{e}_i) \cdot (\underline{e}_j) = (\underline{a}_i) \underbrace{(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j)}_{\delta_{ij}} = \underline{a}_i$$

Pour comprendre, faisons le lien avec la notation matricielle. La matrice  $\mathbb{T}$  représentant le tenseur  $\underline{\underline{T}}$  dans la base  $b$  est liée à une application linéaire  $f$ . Nous avons les relations suivantes :

$$f(\vec{e}_i) = \mathbb{T} \cdot \vec{e}_i = \vec{a}_i$$

Dans ces conditions, nous pouvons écrire la matrice  $\mathbb{T}$  dans la base comme la matrice dont les colonnes sont les vecteurs images par  $f$  des vecteurs de bases  $(\vec{e}_i)_i$  :

$$\mathbb{T} = (f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3))_b = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)_b$$

C'est exactement ce que nous avons exprimé en notation tensorielle.

### Question 6) :

a) Dans le cas le plus général, le tenseur  $\underline{\underline{T}}$  a pour représentation matricielle :

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui s'exprime en notation tensorielle :

$$\underline{\underline{T}} = a (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + b (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z - \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) + c (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_z - \underline{e}_z \otimes \underline{e}_y)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} &= \{a (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + b (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z - \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) + c (\underline{e}_y \otimes \underline{e}_z - \underline{e}_z \otimes \underline{e}_y)\} \cdot (v_i \underline{e}_i) \\ &= a \{v_x \underline{e}_x \underbrace{(\underline{e}_y \cdot \underline{e}_i)}_{\delta_{yi}} - v_y \underline{e}_y \underbrace{(\underline{e}_x \cdot \underline{e}_i)}_{\delta_{xi}}\} + b \{v_x \underline{e}_x \underbrace{(\underline{e}_z \cdot \underline{e}_i)}_{\delta_{zi}} - v_z \underline{e}_z \underbrace{(\underline{e}_x \cdot \underline{e}_i)}_{\delta_{xi}}\} + c \{v_y \underline{e}_y \underbrace{(\underline{e}_z \cdot \underline{e}_i)}_{\delta_{zi}} - v_z \underline{e}_z \underbrace{(\underline{e}_y \cdot \underline{e}_i)}_{\delta_{yi}}\} \\ &= a \{v_y \underline{e}_x - v_x \underline{e}_y\} + b \{v_z \underline{e}_x - v_x \underline{e}_z\} + c \{v_z \underline{e}_y - v_y \underline{e}_z\} \\ &= \{a v_y + b v_z\} \underline{e}_x + \{c v_z - a v_x\} \underline{e}_y - \{b v_x + c v_y\} \underline{e}_z \end{aligned}$$

En posant  $\underline{\Omega} = -c \underline{e}_x + b \underline{e}_y - a \underline{e}_z$ , nous retrouvons le résultat classique :

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = \underline{\Omega} \wedge \underline{v}$$

b) Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{aligned}
\underline{v} \cdot \underline{\underline{T}} &= (v_i \underline{e}_i) \cdot (T_{jk} \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k) & {}^t \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} &= (T_{ij} \underline{e}_j \otimes \underline{e}_i) \cdot (v_k \underline{e}_k) \\
&= v_i T_{jk} (\underline{e}_k) \underbrace{\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j}_{\delta_{ij}} & &= v_k T_{ij} (\underline{e}_i) \underbrace{\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k}_{\delta_{ik}} \\
&= v_i T_{ik} \underline{e}_k & &= v_i T_{ij} \underline{e}_j
\end{aligned}$$

c) Nous avons déjà vu que

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}' = (T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot (T'_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) = T_{ij} T'_{kl} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_l) \underbrace{(\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k)}_{\delta_{jk}} = T_{ij} T'_{jl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_l$$

Donc

$${}^t(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}') = T_{ij} T'_{jl} \underline{e}_l \otimes \underline{e}_i$$

De même

$${}^t \underline{\underline{T}}' \cdot {}^t \underline{\underline{T}} = (T'_{ji} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot (T_{lk} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) = T'_{ji} T_{lk} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_l) \underbrace{(\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k)}_{\delta_{jk}} = T'_{ji} T_{lj} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_l$$

Alors, nous avons bien  ${}^t(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}') = {}^t \underline{\underline{T}}' \cdot {}^t \underline{\underline{T}}$ .

d) Effectuons le premier calcul :

$$\begin{aligned}
(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) : \underline{\underline{C}} &= \left[ (A_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot (B_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \right] : (C_{mn} \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n) \\
&= \left[ A_{ij} B_{jl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_l \right] : (C_{mn} \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n) \\
&= A_{ij} B_{jl} C_{li}
\end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que cette dernière expression est invariante par permutation circulaire des lettres  $A$ ,  $B$  et  $C$ , ce qui donne le résultat voulu. Maintenant, les parenthèses sont nécessaires car le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2 est un scalaire donc écrire  $\underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{B}} : \underline{\underline{C}})$  revient à essayer de faire le produit simplement contracté d'un tenseur d'ordre 2 ( $\underline{\underline{A}}$ ) par un scalaire ( $\underline{\underline{B}} : \underline{\underline{C}}$ ), ce qui est impossible.

Sachant cela, nous aurions pu effectuer les deux produits ainsi :

$$(\underline{A} \cdot \underline{B}) : \underline{C} = [(A_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot (B_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)] : (C_{mn} \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n)$$

$$\begin{aligned} &= A_{ij} B_{kl} C_{lm} \underbrace{(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_k)}_{\delta_{jk}} \underbrace{(\underline{e}_l \cdot \underline{e}_m)}_{\delta_{lm}} \underbrace{(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_n)}_{\delta_{in}} \\ &= A_{ij} B_{jl} C_{li} \end{aligned}$$

3

e) Nous avons d'un côté  $\underline{T} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$  et de l'autre  $\underline{T} = T'_{ij} \underline{e}'_i \otimes \underline{e}'_j$ . Par définition de ces coefficients, nous avons la relation :

$$T'_{ij} = \underline{e}'_i \cdot \underline{T} \cdot \underline{e}'_j$$

En écrivant  $\underline{T}$  avec la première relation, nous avons directement :

$$T'_{ij} = \underline{e}'_i \cdot (T_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \cdot \underline{e}'_j = T_{kl} (\underline{e}'_i \cdot \underline{e}_k) (\underline{e}_l \cdot \underline{e}'_j)$$

Il est à noter que dans les relations précédentes, écrites pour  $i$  et  $j$  quelconques, les indices  $k$  et  $l$  sont répétés.

f) Il existe des règles simples pour prévoir l'ordre du tenseur solution d'une opération :

- Compter toutes les "barres" présentent sous l'ensemble des tenseurs.
- Compter "moins deux barres" pour chaque "point" de l'expression.
- Compter 0 pour un produit tensoriel.

Mises en pratique, cela donne :

- \* 4 barres pour  $\underline{a} \cdot \underline{T} \cdot \underline{b}$  moins 4 pour les deux produits simplement contractés, le résultat est donc scalaire.
- \* 4 barres pour  $\underline{T} \cdot (\underline{b} \otimes \underline{a})$  moins 2 pour le produit simplement contracté, le résultat est un tenseur d'ordre 2.
- \*  $\underline{T} : (\underline{b} \otimes \underline{a})$  est un scalaire.
- \*  $\underline{A} \cdot \underline{B} \cdot \underline{b}$  est un tenseur d'ordre 1.
- \*  $\underline{a} \cdot \underline{A} \cdot \underline{B} \cdot \underline{b}$  est un scalaire.
- \*  $\underline{A} : \underline{B} \cdot \underline{b}$  compte 5 barres moins 6 pour les produits doublement et simplement contractés, cette opération n'est pas possible, même en mettant des parenthèses.
- \*  $\underline{a} \cdot \underline{K} \cdot \underline{b}$  est un tenseur d'ordre 1.
- \*  $\underline{K} \cdot (\underline{b} \otimes \underline{a})$  est un tenseur d'ordre 3.
- \*  $\underline{\underline{K}}$  :  $(\underline{b} \otimes \underline{a})$  est un tenseur d'ordre 1.

Maintenant, nous pouvons effectuer ces opérations, sauf une :

$$\underline{a} \cdot \underline{T} \cdot \underline{b} = (a_i \underline{e}_i) \cdot (T_{jk} \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k) \cdot (b_l \underline{e}_l) = a_i T_{ik} b_k$$

$$\underline{\underline{T}} \cdot (\underline{b} \otimes \underline{a}) = (T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot \{(b_k \underline{e}_k) \otimes (a_l \underline{e}_l)\} = T_{ij} \cdot b_j \cdot a_l \underline{e}_l$$

$$\underline{\underline{T}} : (\underline{b} \otimes \underline{a}) = (T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) : \{(b_k \underline{e}_k) \otimes (a_l \underline{e}_l)\} = T_{ij} \cdot b_j \cdot a_l$$

Nous remarquons au passage que  $\underline{a} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{b} = \underline{\underline{T}} : (\underline{b} \otimes \underline{a})$ .

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{b} = (A_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot (B_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \cdot (b_m \underline{e}_m) = A_{ij} \cdot B_{jl} \cdot b_l \underline{e}_i$$

$$\underline{a} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{b} = (a_i \underline{e}_i) \cdot (A_{jk} \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k) \cdot (B_{lm} \underline{e}_l \otimes \underline{e}_m) \cdot (b_n \underline{e}_n) = a_i \cdot A_{jk} \cdot B_{jm} \cdot b_m$$

$$\underline{a} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{b} = (a_i \underline{e}_i) \cdot (K_{jkl} \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \cdot (b_m \underline{e}_m) = a_i \cdot K_{jkl} \cdot b_l \underline{e}_k$$

$$\underline{\underline{K}} \cdot (\underline{b} \otimes \underline{a}) = (K_{ijk} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k) \cdot \{(b_l \underline{e}_l) \otimes (a_m \underline{e}_m)\} = k_{ijk} \cdot b_k \cdot a_m \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_m$$

$$\underline{\underline{K}} : (\underline{b} \otimes \underline{a}) = (K_{ijk} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k) : \{(b_l \underline{e}_l) \otimes (a_m \underline{e}_m)\} = K_{ijk} \cdot b_k \cdot a_j \underline{e}_i$$

\*\*\*

# Mécanique des milieux continus

Travaux dirigés n°2

\*\*\*

**Exercice 1**

On se place dans le référentiel  $R$  muni d'un repère cartésien orthonormé  $R(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ .  
On considère la transformation définie à l'instant  $t > 0$  par le vecteur déplacement :

$$\underline{\xi} = \alpha t(X_2 \underline{e}_1 + X_1 \underline{e}_2); \alpha > 0$$

1.1 Tracer le transformé d'un carré de côté  $a$ . Interpréter la transformation.

1.2 Calculer :

- a. Le gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}$
- b. La dilatation volumique
- c. Le tenseur de dilatation  $\underline{\underline{C}}$
- d. Le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\underline{\underline{L}}$

1.3 Préciser l'hypothèse des petites transformations et donner l'expression linéarisée du tenseur des déformations. Déterminer dans ce cas la dilatation volumique et comparer au résultat de la question 1.2.b)

**Exercice 2**

On considère la transformation définie par :

$$\underline{\underline{F}}(X_1, X_2, X_3) : \begin{cases} x_1 = X_1 + 2X_2 \tan \alpha \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

2.1 Déterminer, sans calculer le tenseur des déformations, les allongements unitaires dans les directions  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  ainsi que les glissements entre ces deux directions.

2.2 Former le tenseur gradient  $\underline{\underline{F}}$  de la transformation  $\underline{\underline{F}}$ . On utilise la décomposition polaire  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}}$ . Caractériser  $\underline{\underline{U}}$  par ses valeurs et vecteurs propres. En déduire  $\underline{\underline{R}}$ .

\*\*\*

**Mécanique des milieux continus**

Travaux dirigés n°2

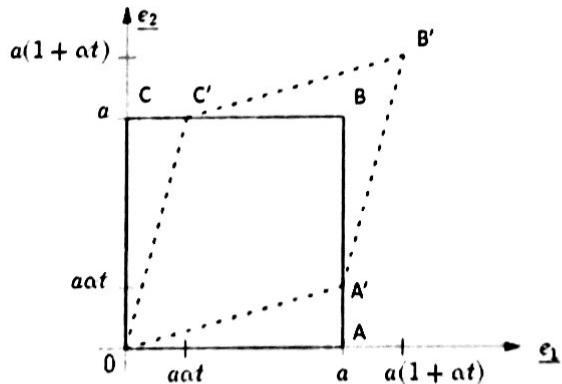
Correction

\*\*\*

**Exercice 1**

On se place dans le référentiel R muni d'un repère cartésien orthonormé  $R(\theta, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ .  
 On considère la transformation définie à l'instant  $t > 0$  par le vecteur déplacement :

$$\xi = \alpha t(X_2 \underline{e}_1 + X_1 \underline{e}_2) ; \alpha > 0$$

FIGURE 1 -- Effet de la transformation sur le carré de côté  $a$ .**Question 1 : représentation géométrique de la transformation**

Interprétation : la transformation est un glissement symétrique dans le plan  $OX_1X_2$ . Ses directions propres dans le plan sont les deux bissectrices du plan  $OX_1X_2$  (on remarque en effet que le segment  $AC$  se transforme en  $A'C'$  et que  $OB$  se transforme en  $OB'$ , que  $AC$  est orthogonal à  $OB$  et que  $A'C'$  reste orthogonal à  $OB'$ ).

**Question 2 : caractérisation de la transformation**

Les tenseurs en représentation matricielle sont donnés dans la base  $(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1)$

- a. Le gradient de la transformation

$$\underline{F} = \underline{X} + \xi = \underline{X} + \alpha t(X_2 \underline{e}_1 + X_1 \underline{e}_2)$$

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \begin{pmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ \alpha t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. La dilatation volumique

$$\frac{\partial V}{V} = J = \det \underline{\underline{F}} = 1 - \alpha^2 t^2$$

c. Le tenseur de dilatation  $\underline{\underline{C}}$

$$\underline{\underline{C}} = {}^t \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2 t^2 & 2\alpha t & 0 \\ 2\alpha t & 1 + \alpha^2 t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. Le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\underline{\underline{L}}$

$$\underline{\underline{L}} = \frac{1}{2} ({}^t \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha^2 t^2 & 2\alpha t & 0 \\ 2\alpha t & \alpha^2 t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 3 : petites transformations

L'hypothèse des petites transformations implique que :

$$\| \underline{\nabla} \xi(\underline{X}, t) \| = \| \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}} \| \ll 1$$

soit encore  $\alpha t \ll 1$ . Le tenseur linéarisé des déformations vaut alors :

$$\underline{\underline{L}} \approx \underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha t & 0 \\ \alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que dans ce cas la transformation est isochore. En effet :

$$\det \underline{\underline{F}} \approx 1 + \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) = 1$$

### Exercice 2

On considère la transformation définie par :

$$F(X_1, X_2, X_3) : \begin{cases} x_1 = X_1 + 2X_2 \tan \alpha \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Question 1 : effets de la transformation

### 1.1 Allongement unitaire dans la direction 1

Soit  $O(0,0,0)$  et  $A(1,0,0)$ , l'allongement unitaire dans la direction 1 vaut :

$$\lambda_1 = \frac{\| F(O)F(A) \| - \| OA \|}{\| OA \|} = 0$$

### 1.2 Allongement unitaire dans la direction 2

Soit  $O(0,0,0)$  et  $B(0,1,0)$ , l'allongement unitaire dans la direction 2 vaut :

$$\lambda_2 = \frac{\| F(O)F(B) \| - \| OB \|}{\| OB \|} = \sqrt{1 + 4 \tan^2 \alpha} - 1$$

### 1.3 Glissement entre les directions 1 et 2

L'angle entre les deux directions est initialement de  $\pi/2$ .

Le nouvel angle est donné par :

$$\cos(F(O)F(A), F(O)F(B)) = \frac{F(O)F(A) \cdot F(O)F(B)}{\| F(O)F(A) \| \| F(O)F(B) \|} = \frac{2 \tan \alpha}{\sqrt{1 + 4 \tan^2 \alpha}}$$

$$\sin(F(O)F(A), F(O)F(B)) = \frac{F(O)F(A) \wedge F(O)F(B)}{\| F(O)F(A) \| \| F(O)F(B) \|} \cdot \frac{OA \wedge OB}{\| OA \| \| OB \|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \tan^2 \alpha}}$$

soit encore :

$$\tan(F(O)F(A), F(O)F(B)) = \frac{1}{2 \tan \alpha}$$

Le glissement est donné par la différence entre l'angle initial de  $\pi/2$  et le nouvel angle. On définit de manière générale le glissement par :

$$\gamma = (OA, OB) - (F(O)F(A), F(O)F(B)) = \frac{\pi}{2} - (F(O)F(A), F(O)F(B))$$

soit encore :

$$\tan \gamma = \frac{1}{\tan(F(O)F(A), F(O)F(B))} = 2 \tan \alpha$$

Question 2 : caractérisation du gradient de la transformation  
Le gradient de la transformation  $F(\underline{X})$  est :

$$\underline{F} = \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 \tan \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2.1 Unicité de la décomposition $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$

On va montrer qu'il existe une décomposition unique  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$  avec  $'\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$  et  $\underline{\underline{U}} = ' \underline{\underline{U}}$  symétrique définie positive. On part alors de  $\underline{\underline{C}} = ' \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}$ . Par construction  $\underline{\underline{C}}$  est symétrique et définie positive puisque  $'\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{F}} \underline{\underline{a}} > 0, \forall \underline{\underline{a}} \neq \underline{\underline{0}}$ , toute transformation étant inversible. Par conséquent,  $\underline{\underline{C}}$  est diagonalisable à valeurs propres strictement positives et peut s'écrire  $\underline{\underline{C}} = ' \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{P}}$  où  $\underline{\underline{D}}$  est une matrice diagonale strictement positive et  $\underline{\underline{P}}$  la matrice orthogonale des vecteurs propres de  $\underline{\underline{C}}$  satisfaisant  $'\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{1}}$ . On définit alors  $\underline{\underline{U}} = ' \underline{\underline{P}} \cdot \sqrt{\underline{\underline{D}}} \cdot \underline{\underline{P}}$ , matrice symétrique définie positive,  $\sqrt{\underline{\underline{D}}}$  étant la matrice diagonale dont les valeurs sont les racines de celles de  $\underline{\underline{D}}$ . Par construction on a alors  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}^2$ . On définit alors  $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{U}}^{-1}$ . On vérifie alors bien que  $'\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}} = ' \underline{\underline{U}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{U}}^{-1} = ' \underline{\underline{U}}^{-1} \cdot \underline{\underline{U}}^2 \cdot \underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{1}}$  puisque par construction  $\underline{\underline{U}} = ' \underline{\underline{U}}$ . L'unicité de la décomposition vient de l'unicité de la construction de  $\underline{\underline{U}}$  à partir de  $\underline{\underline{C}}$ .

## 2.2 Application

Le tenseur de dilatation  $\underline{\underline{C}}$  vaut :

$$\underline{\underline{C}} = ' \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \tan \alpha & 0 \\ 2 \tan \alpha & 1 + 4 \tan^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{(1+\sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha} = \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2 = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \\ \lambda_2 = \frac{(1-\sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha} = \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2 = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

avec  $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ . Les vecteurs propres de  $\underline{\underline{C}}$  et donc de  $\underline{\underline{U}}$  sont :

$$\underline{\underline{U}}_1 = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+t \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{U}}_2 = \begin{pmatrix} -(1+t) \\ 1-t \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{U}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que :

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{U}}_i = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{U}}_i = \sqrt{\lambda_i} \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{U}}_i$$

On en déduit immédiatement que  $\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}_3 = \underline{\underline{U}}_3$  car  $\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{U}}_3 = \underline{\underline{U}}_3$ . La rotation est donc ici caractérisée par son axe  $\underline{\underline{U}}_3$ . Par ailleurs comme  $\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{U}}_1 = \sqrt{\lambda_1} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{U}}_1$ , l'image de  $\underline{\underline{U}}_1$  perpendiculaire à l'axe de la rotation par la rotation  $\underline{\underline{R}}$  est connue. Le vecteur  $\underline{\underline{U}}_1$  qui fait un angle de  $\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$  avec la direction 1 est transformé en :

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{U}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{(1+t)^2}{1-t} \\ 1+t \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui fait un angle  $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$  avec la direction 1. La rotation  $\underline{\underline{R}}$  est donc une rotation d'axe  $\underline{\underline{U}}_3$  et d'angle  $-\alpha$ .

\*\*\*

**Mécanique des milieux continus**

Travaux dirigés n° 3

\*\*\*

**Exercice 1: mouvement plan en coordonnées cylindriques**

Un original a l'idée d'exprimer la fonction décrivant le mouvement plan d'un milieu continu non pas en coordonnées cartésiennes, mais en coordonnées cylindriques. Il repère alors la position initiale d'un point matériel par les trois nombres  $(R, \Theta, Z)$  et la position d'un point à l'instant  $t$  par  $(r, \theta, z)$ . Le mouvement est ensuite défini par les relations :

$$\begin{cases} r = \sqrt{at + R^2} \\ \theta = \Theta + b \ln \left( \frac{at}{R^2} + 1 \right) \\ z = Z \end{cases} \quad (1)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives.

1. Déterminer les composantes  $(V_r, V_\theta, V_z)$  de la vitesse  $\underline{V}$  en description lagrangienne dans la base  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ .
2. Déterminer les composantes  $(V_r, V_\theta, V_z)$  de la vitesse  $\underline{V}$  en description eulérienne dans la base  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ .
3. Le mouvement est-il permanent ?
4. Déterminer, à partir de la transformation, l'équation de la trajectoire du point matériel qui à l'instant initial est repéré par  $(R, \Theta, Z)$ , sous la forme  $r = f(\theta)$ .
5. Retrouver cette même équation à partir de la seule donnée du champ eulérien  $\underline{V}$ .

**Exercice 2 : introduction à la mécanique des fluides, applications vagues**

On se place dans le cadre de fluides homogènes, incompressibles et parfaits (non visqueux et non miscibles).

1. Soit  $\Omega(t)$  un volume matériel donné à l'instant  $t$  contenant un fluide homogène parfait de masse volumique  $\rho$  constante animé par la vitesse  $\underline{v}(\underline{x}, t)$ . La quantité de mouvement totale du volume de fluide est notée  $\underline{P}$  et vaut

$$\underline{P}(t) = \int_{\Omega(t)} \rho \underline{v}(\underline{x}, t) \, dV \quad (2)$$

Calculez la variation de quantité de mouvement  $\frac{d\underline{P}}{dt}$  de ce volume de fluide.

2. Soit un système composé de 2 fluides parfaits homogènes différents (l'océan et l'air, de masses volumiques  $\rho_o$  et  $\rho_a$ ) séparés par une interface notée  $\Sigma(t)$ . Le vent crée

une discontinuité de vitesse à cette interface ( $\underline{v}_o(\underline{x}, t) \neq \underline{v}_a(\underline{x}, t)$  sur  $\Sigma$ ). Considérons un volume  $\Omega(t)$  non homogène contenant une partie de l'interface (Fig. 1). Que devient la variation de quantité de mouvement de ce volume ?

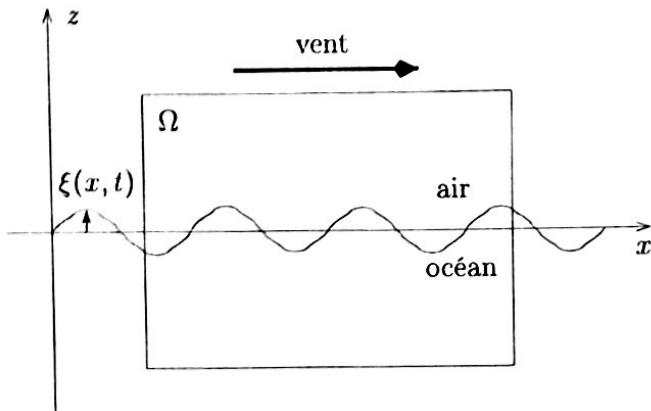


FIGURE 1 – Le vent à la surface de l'océan

3. Applications à la formation et la propagation des vagues. On se place en 2D (milieu infini et constant dans la direction ( $Oy$ )). La composante selon ( $Ox$ ) de la vitesse du vent  $U_0$  est supposée constante, tandis que celle de la vitesse de l'eau est nulle. Le vent perturbe la surface de l'eau qui présente une oscillation de surface (la houle). La surface de l'eau a maintenant pour équation  $z = \xi(x, t)$ . Donner la valeur du saut de vitesse à la surface de l'eau (indication : on pourra considérer le déplacement vu sur l'interface par une particule suivant qu'elle soit d'eau ou d'air).

### Exercice 3 (*travail à la maison*) : tourbillon ponctuel

On considère le mouvement plan d'un milieu continu en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Le champ des vitesses  $\underline{V}$  et la masse volumique  $\rho$  peuvent s'écrire :

$$\underline{V} = V_r(r, \theta, z) \underline{e}_r + V_\theta(r, \theta, z) \underline{e}_\theta, \quad \rho = \rho(r, \theta, z) \quad (3)$$

1. Écrire les relations entre les composantes  $V_r$  et  $V_\theta$  de  $\underline{V}$  et la masse volumique  $\rho$  puis leurs relations avec une fonction  $\psi$  à déterminer, appelée fonction de courant ( $\psi$  est fonction de courant  $\Rightarrow$  les lignes de courants sont données par  $\psi = cste$ ) :
  - (a) dans le cas d'un mouvement permanent (avec  $\rho$  non constant),
  - (b) dans le cas d'un mouvement isochore.
2. Application au tourbillon. Soit un champ de vitesses défini par :

$$\underline{V} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \underline{e}_\theta \quad (4)$$

Nous allons déterminer les lignes de courant de ce mouvement de trois manières différentes :

- (a) Description lagrangienne : déterminer la position à l'instant  $t$  d'un point  $M$  qui était en  $(R, \Theta, Z)$  en  $t = 0$  et sa trajectoire. En déduire les lignes de courant.
- (b) Description eulérienne : déterminer le taux de déformation  $D$ , le taux de rotation  $\Omega$ , le taux de dilatation volumique et le taux de glissement  $\gamma$  entre  $e_r$  et  $e_\theta$ . En déduire les lignes de courant.
- (c) Fonction de courant : déterminer  $\psi$  la fonction de courant du mouvement. En déduire les lignes de courant.

\*\*\*

**Mécanique des milieux continus**

Solution des travaux dirigés n° 3

\*\*\*

**Solution de l'exercice 1 : mouvement plan en coordonnées cylindriques**

1. La position d'une particule est donnée par :  $\underline{x} = r\underline{e}_r + z\underline{e}_z$ . La vitesse est obtenue par dérivation par rapport au temps du vecteur position :

$$\underline{V} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t}\underline{e}_r + r\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t}\underline{e}_z \quad (1)$$

Par définition de  $\underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_y$  et  $\underline{e}_\theta = -\sin \theta \underline{e}_x + \cos \theta \underline{e}_y$ , nous avons  $\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial t} = \dot{\theta} \underline{e}_\theta$ . De plus, il n'y a pas de mouvement selon  $\underline{e}_z$ . Le vecteur vitesse s'écrit donc  $\underline{V} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta$ .

Pour obtenir la vitesse lagrangienne, il est nécessaire d'exprimer la vitesse en fonction du vecteur position en configuration de référence. Or, l'équation du mouvement est défini par le système :

$$\begin{cases} r = \sqrt{ar + R^2} \\ \theta = \Theta + b \ln \left( \frac{at}{R^2} + 1 \right) \\ z = Z \end{cases} \quad (2)$$

On obtient donc par dérivation temporelle de l'équation (2) :

$$\underline{V}(t, R, \Theta, Z) = \frac{a}{2\sqrt{at + R^2}}\underline{e}_r + \frac{ab}{\sqrt{at + R^2}}\underline{e}_\theta \quad (3)$$

2. L'écriture de la vitesse eulérienne nécessite de remplacer dans l'expression (3) de la vitesse lagrangienne, les coordonnées en configuration de référence par les coordonnées en configuration actuelle. Nous obtenons :

$$\underline{V}(t, r, \theta, z) = \frac{a}{2r}\underline{e}_r + \frac{ab}{r}\underline{e}_\theta \quad (4)$$

3. La vitesse eulérienne est indépendante du temps donc le mouvement est permanent.
4. Pour obtenir les trajectoire, il faut éliminer le temps  $t$  de la transformation (2). Nous obtenons :

$$\begin{cases} r = R \exp \left( \frac{\theta - \Theta}{2b} \right), \quad r > 0, \quad R > 0 \\ z = Z \end{cases} \quad (5)$$

Qui est l'équation d'une spirale logarithmique dans le plan  $z = Z$ .

5. Comme le mouvement est permanent, les trajectoires sont confondues avec les lignes de courant. Les lignes de courant sont telles que  $d\underline{x} = \underline{V} dt$ , ce qui s'écrit également  $dr e_r + r d\theta e_\theta = V_r dt e_r + V_\theta dt e_\theta$ . En utilisant l'expression (4) de la vitesse eulérienne nous obtenons :

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{2b} \quad (6)$$

Cette équation différentielle, lorsqu'on l'intègre en utilisant les conditions initiales  $r = R$ ,  $\theta = \Theta$  et  $z = Z$ , permet de retrouver la trajectoire donnée dans l'équation (5).

### Solution de l'exercice 2 : introduction à la mécanique des fluides, applications vagues

1. Cette démonstration reprend celle du polycopié (pages 64-65). Tout d'abord, nous effectuons un changement de variable en utilisant la transformation de façon à ramener l'intégration sur le domaine constant  $\Omega_0$  :

$$\underline{P}(t) = \int_{\Omega_0} \rho \underline{V}(\underline{X}, t) J(X, t) dV_0 \quad (7)$$

Où  $J(X, t)$  est le jacobien de la transformation.

La dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement peut alors être transformée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{P}}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho \underline{V}(\underline{X}, t) J(X, t) dV_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{d}{dt} (\rho \underline{V}(\underline{X}, t) J(X, t)) dV_0 \quad (\text{le domaine d'intégration est constant}) \\ &= \int_{\Omega_0} \rho \frac{d}{dt} (\underline{V}(\underline{X}, t) J(X, t)) dV_0 \quad (\text{la masse volumique est constante}) \\ &= \int_{\Omega_0} \rho \left( \frac{d\underline{V}}{dt}(\underline{X}, t) J(X, t) + \underline{V}(\underline{X}, t) \dot{J}(X, t) \right) dV_0 \end{aligned}$$

Or, le jacobien de la transformation est lié à la vitesse par la relation  $\dot{J} = \operatorname{div} \underline{V} J$ . Nous obtenons :

$$\frac{d\underline{P}}{dt}(t) = \int_{\Omega_0} \rho \left( \frac{d\underline{V}}{dt}(\underline{X}, t) + \underline{V}(\underline{X}, t) \operatorname{div} \underline{V}(\underline{X}, t) \right) J(X, t) dV_0 \quad (8)$$

Nous souhaitons maintenant retourner au domaine d'intégration initial. Nous utilisons le fait que les vitesses lagragiennes et eulériennes sont égales, ainsi que leur dérivée totale par rapport au temps (i.e. l'accélération).

$$\frac{d\underline{P}}{dt}(t) = \int_{\Omega(t)} \rho \left( \frac{d\underline{v}}{dt}(\underline{x}, t) + \underline{v}(\underline{x}, t) \operatorname{div} \underline{v}(\underline{x}, t) \right) dV \quad (9)$$

Cette expression peut être modifiée en utilisant la formule de dérivée particulière :

$$\frac{dv}{dt}(\underline{x}, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{\text{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) \quad (10)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{P}}{dt}(t) &= \int_{\Omega(t)} \rho \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{\text{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) + \underline{v}(\underline{x}, t) \text{div } \underline{v}(\underline{x}, t) \right) dV \\ &= \int_{\Omega(t)} \rho \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{x}, t) + (v_{i,k} v_k + v_{k,k} v_i) \underline{e}_i \right) dV \quad (\text{avec sommation sur } k) \\ &= \int_{\Omega(t)} \rho \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{x}, t) + (v_i v_k)_{,k} \underline{e}_i \right) dV \quad (\text{dérivée du produit}) \end{aligned}$$

Où  $u_{,k} = \frac{\partial u}{\partial k}$ . Nous pouvons alors utiliser la formule d'intégration par partie de Green (forme la plus générale de ce qui est en fait la formule de la divergence). Cette formule s'écrit en notation indicelle :

$$\int_{\Omega(t)} u_{,k} dV = \int_{\partial\Omega(t)} u n_k dS \quad (11)$$

Où  $\underline{n}$  est la normale sortante au domaine  $\Omega(t)$ , et  $u$  est un champ scalaire. L'application de cette formule à  $v_i v_k$  permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{P}}{dt}(t) &= \int_{\Omega(t)} \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{x}, t) dV + \int_{\partial\Omega(t)} \rho v_i v_k n_k \underline{e}_i dS \\ &= \int_{\Omega(t)} \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{x}, t) dV + \int_{\partial\Omega(t)} \rho \underline{v}(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS \end{aligned}$$

Le résultat final comporte donc un premier terme de variation de quantité de mouvement à domaine fixe, et un second terme prenant en compte les variations dues à l'évolution du domaine d'intégration.

2. Maintenant le domaine  $\Omega(t)$  n'est plus ni homogène ni continu. Il se compose d'un volume d'eau  $\Omega_o(t)$  et d'un volume d'air  $\Omega_a(t)$  ( $\Omega(t) = \Omega_o(t) \cup \Omega_a(t)$ ). Notons  $\partial\Omega(t)$  la surface extérieure du volume complet et  $\Sigma(t) = \Omega_o(t) \cap \Omega_a(t)$  l'interface entre les deux fluides.

Chacun des deux volumes de fluide est un domaine homogène et continu auquel on peut appliquer le résultat précédent. Il suffit de remarquer que la surface extérieure du domaine  $\Omega_i(t)$  ( $i = o$  ou  $a$ ) se décompose en deux parties :  $\Sigma(t)$  (de vitesse  $\underline{W}$  et de normale extérieure  $\underline{N}_i$ ) et  $\partial\Omega_i(t) \cap \partial\Omega(t)$  (de vitesse  $\underline{V}$  et de normale extérieure  $\underline{n}$  puisque partie de  $\partial\Omega(t)$ ). Alors,

$$\frac{d\underline{P}_i}{dt} = \int_{\Omega_i(t)} \rho_i \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial t}(\underline{x}, t) dV + \int_{\partial\Omega_i(t) \cap \partial\Omega(t)} (\rho_i \underline{v}_i) \underline{n} \cdot \underline{V}(\underline{x}, t) ds + \int_{\Sigma(t)} (\rho_i \underline{v}_i) \underline{N}_i \cdot \underline{W}(\underline{x}, t) ds$$

Par linéarité, la quantité de mouvement totale du domaine vaut  $P = P_o + P_a$  et sa dérivée

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP_o}{dt} + \frac{dP_a}{dt}$$

Reste que  $\underline{W}$  est la vitesse de l'interface  $\Sigma$ , qui appartient à la fois à l'air et à l'océan. Elle vaut la même chose qu'on la regarde d'un côté ou de l'autre. Mais la normale extérieure à l'océan pointe vers l'air et la normale extérieure à l'air pointe vers l'océan. Posons  $\underline{N} = \underline{N}_a = -\underline{N}_o$ , alors :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \int_{\Omega_o(t)} \rho_o \frac{\partial \underline{v}_o}{\partial t} (\underline{x}, t) dv + \int_{\partial\Omega_o(t) \cap \partial\Omega(t)} (\rho_o \underline{v}_o) \underline{n} \cdot \underline{V}(\underline{x}, t) ds + \int_{\Sigma(t)} (\rho_o \underline{v}_o) \underline{N}_o \cdot \underline{W}(\underline{x}, t) ds \\ &\quad + \int_{\Omega_a(t)} \rho_a \frac{\partial \underline{v}_a}{\partial t} (\underline{x}, t) dv + \int_{\partial\Omega_a(t) \cap \partial\Omega(t)} (\rho_a \underline{v}_a) \underline{n} \cdot \underline{V}(\underline{x}, t) ds + \int_{\Sigma(t)} (\rho_a \underline{v}_a) \underline{N}_a \cdot \underline{W}(\underline{x}, t) ds \\ &= \int_{\Omega(t)} \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} (\underline{x}, t) dv + \int_{\partial\Omega(t)} (\rho \underline{v}) \underline{n} \cdot \underline{V}(\underline{x}, t) ds + \int_{\Sigma(t)} (\rho_a \underline{v}_a - \rho_o \underline{v}_o) \underline{N} \cdot \underline{W}(\underline{x}, t) ds \end{aligned}$$

3. Au premier ordre, l'énoncé dit que l'océan est immobile dans la direction  $(0x)$  donc  $\underline{v}_o \cdot \underline{e}_x = 0$  sur  $\Sigma(t)$  et le vent souffle à la vitesse constante  $U_0 \underline{e}_x$  donc  $\underline{v}_a \cdot \underline{e}_x = U_0$ . Nous avons donc sur l'interface :

$$[\underline{v}] \cdot \underline{e}_x = U_0$$

Reste à calculer le saut de vitesse dans la direction  $(0z)$ . Regardons un point de l'interface  $\Sigma(t)$  à la cote  $x$  à l'instant  $t$ . Il se trouve à la hauteur  $z = \xi(x, t)$ . Ce point correspond à une particule d'eau et à une particule d'air puisqu'il est à l'interface entre les deux. Regardons ce que deviennent ces particules au temps  $t + dt$  :

- ◊ Si c'est une particule d'eau,  $z_o(t) = \xi(x_o, t)$  et  $z_o(t+dt) = \xi(x_o, t+dt)$  puisque l'océan est immobile dans la direction  $\underline{e}_x$ . Alors,

$$\underline{v}_o \cdot \underline{e}_z \approx \frac{z_o(t+dt) - z_o(t)}{dt} = \frac{\xi(x_o, t+dt) - \xi(x_o, t)}{dt} \approx \frac{d\xi}{dt}$$

- ◊ Si c'est une particule d'air,  $z_a(t) = \xi(x_a, t)$ . À l'instant  $t + dt$ , la particule d'air a été emportée par le vent à la cote  $x_a + U_0 dt$ , donc sa hauteur à cet instant vaut  $z_a(t+dt) = \xi(x_a + U_0 dt, t+dt)$ . Alors,

$$\begin{aligned} \underline{v}_a \cdot \underline{e}_z &\approx \frac{z_a(t+dt) - z_a(t)}{dt} = \frac{\xi(x_a + U_0 dt, t+dt) - \xi(x_a, t)}{dt} \\ &\approx \frac{\xi(x_a + U_0 dt, t+dt) - \xi(x_a, t+dt) + \xi(x_a, t+dt) - \xi(x_a, t)}{dt} \\ &\approx U_0 \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\xi}{dt} \end{aligned}$$

(Ce résultat peut aussi être simplement retrouvé en appliquant directement la formule de la dérivée particulière présente dans le poly en pages 60-63).

Ceci nous donne ce que nous voulions car alors le saut de vitesse verticale à la surface est :

$$[\underline{v}] \cdot \underline{e}_z = U_0 \frac{d\xi}{dx}$$

### Solutions de l'exercice 3 : tourbillon ponctuel

1. Rappelons la définition d'une ligne de courant (polycopié p. 53). Le gradient de la ligne de courant  $\psi$  est orthogonal au champ de vitesse :  $\nabla\psi \cdot \underline{V} = 0$ . En coordonnées cylindriques, cela donne la relation :

$$\psi_{,r} V_r + \frac{1}{r} \psi_{,\theta} V_\theta = 0 \quad (12)$$

Pour trouver la relation entre  $\underline{V}$  et  $\rho$ , considérons l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{V}) = 0 \quad (13)$$

Nous allons maintenant particulariser cette équation dans les cas des mouvements permanents et isochores.

- Dans le cas d'un mouvement permanent  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . La relation (13) devient :

$$0 = \operatorname{div}(\rho \underline{V}) = (\rho V_r)_{,r} + \rho \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} (\rho V_\theta)_{,\theta} \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow 0 = r(\rho V_r)_{,r} + \rho V_r + (\rho V_\theta)_{,\theta} = (r\rho V_r)_{,r} + (\rho V_\theta)_{,\theta}$$

On utilise maintenant un résultat permettant de construire de manière pratique une fonction courant :

$$\exists \psi(r, \theta) \text{ fonction courant telle que } \begin{cases} \psi_{,r} = -\rho V_\theta \\ \psi_{,\theta} = r\rho V_r \end{cases} \quad (15)$$

Ce résultat nous donne directement la fonction de courant. Nous ne rentrons pas dans les détails de sa démonstration (qui sera abordée en cours de mécanique des fluides), mais vérifions simplement que la fonction obtenue est bien une fonction courant en injectant les dérivées de  $\psi$  définies par les relations (15) dans l'équation (12).

- Dans le cas d'un mouvement isochore,  $\rho = \text{cste}$ . La relation devient :

$$0 = \operatorname{div}(\underline{V}) = (V_r)_{,r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} (V_\theta)_{,\theta} \Leftrightarrow 0 = r(V_r)_{,r} + V_r + (V_\theta)_{,\theta} = (rV_r)_{,r} + (V_\theta)_{,\theta}$$

$$\Leftrightarrow \exists \psi(r, \theta) \text{ fonction scalaire telle que } \begin{cases} \psi_{,r} = -V_\theta \\ \psi_{,\theta} = rV_r \end{cases}$$

Cette fonction permet elle aussi de vérifier l'équation (12).

2. Il faut remarquer tout de suite que le mouvement proposé est permanent puisque la vitesse eulérienne est indépendante du temps.

(a) Détermination de la trajectoire en description lagrangienne :

$$\underline{V} = \frac{\partial OM}{\partial t} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta + \dot{z}\underline{e}_z \quad (16)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{r} = 0 \\ r\dot{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = R \\ \theta = \Theta + \frac{\Gamma t}{2\pi r^2} \\ z = Z \end{cases}$$

La trajectoire du point  $M_0$  est l'ensemble des points géométriques  $M(t)$  où ira ce point aux temps  $t \geq 0$ . On remarque qu'au cours du temps, seul l'angle  $\theta$  évolue, les trajectoires sont donc des cercles. Le mouvement est permanent donc les trajectoires sont aussi les lignes de courant (et accessoirement les lignes d'émission).

(b) Détermination des lignes de courant en description eulérienne.

$$\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{V} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r) = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que  $\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{V}$  est symétrique donc  $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\text{grad}}}\underline{V}$  et  $\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{0}}$ . De plus, on a facilement le taux de dilatation volumique :

$$\text{div } \underline{V} = \text{tr}(\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{V}) = \text{tr}(\underline{\underline{D}}) = 0$$

Le mouvement est donc incompressible. Le taux de glissement  $\dot{\gamma}$  entre  $\underline{e}_r$  et  $\underline{e}_\theta$  vaut quant à lui :

$$\dot{\gamma} = 2\underline{e}_r \underline{D} \underline{e}_\theta = -\frac{\Gamma}{\pi r^2}$$

On peut remarquer par ailleurs que les valeurs propres de  $\underline{\underline{D}}$  sont  $\pm \frac{\Gamma}{2\pi r^2}$  et 0 avec les vecteurs propres correspondants  $\underline{e}_r \pm \underline{e}_\theta$  et  $\underline{e}_z$ . Il n'y a donc pas de glissement entre les directions principales.

Une ligne de courant s'obtient ici avec la relation  $\frac{r d\theta}{V_\theta} = \frac{dr}{V_r} = \frac{dz}{V_z}$  qui équivaut dans notre cas à  $r = \text{cste}$ . En effet, la première quantité est finie donc les deux autres doivent être finies aussi, ainsi  $V_r = V_z = 0$  donc  $dr = dz = 0$ . En d'autres termes, les lignes de courant sont des cercles.

(c) Nous avons un mouvement permanent et isochore (puisque  $\text{div } \underline{V} = 0$ ), on peut directement appliquer le résultat :

$$\psi_{,r} = -V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \text{ et } \psi_{,\theta} = rV_r = 0$$

Une simple intégration nous donne :

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$$

avec  $r_0$  une constante d'intégration. Les lignes de courant sont obtenues en regardant les isovaleurs de  $\psi$ , or  $\psi = cste$  est équivalent à  $r = cste$ . Nous retrouvons par cette troisième méthode les cercles, qui sont les lignes de courant du tourbillon.

## MS 101 : Mécanique des milieux continus – PC4

### PPV – Théorèmes généraux

#### ***Exercice 1 : Mouvements d'une membrane sphérique***

On considère les mouvements à symétrie sphérique d'une membrane sphérique de masse  $M$  de rayon  $R(t)$  de centre  $O$  fixe dans un repère galiléen. On suppose que, dans tout mouvement virtuel de type  $\hat{U}(r) = \hat{u} \underline{e}_r$ , la puissance virtuelle des efforts intérieurs à la membrane est donnée par  $P_i(\hat{U}) = -f(R)\hat{u}$  avec  $f(R)$  une fonction donnée.

1. La membrane est isolée. Déterminer l'équation régissant le mouvement  $R(t)$ . Etudier le cas où  $f(R) = k(R - R_o)$  avec  $k$  et  $R_o$  strictement positifs.
2. La membrane est entourée d'un fluide homogène, incompressible, de masse volumique  $\rho_f$ , s'étendant à l'infini. La puissance virtuelle des efforts intérieurs au fluide est nulle pour tout mouvement virtuel respectant l'incompressibilité. La puissance virtuelle des efforts de contact entre le fluide et la membrane est aussi nulle pour tout mouvement respectant ce contact. Le système membrane-fluide est isolé.
  - (a) Déterminer l'équation régissant le mouvement  $R(t)$ . Etudier les petits mouvements autour de  $R_o$ , pour  $f(R) = k(R - R_o)$ .
  - (b) Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

#### ***Exercice 2 : Action sur une conduite recourbée***

On considère un tube recourbé parcouru par un fluide incompressible. Les parties amont et aval sont des cylindres d'axes respectifs  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  et de sections droites d'aires identiques  $S$  (voir figure 2). En amont, l'écoulement est uniforme de vitesse  $\underline{V} = V_1 \underline{e}_1$  avec  $(V_1 > 0)$ . La pression est  $p$ .

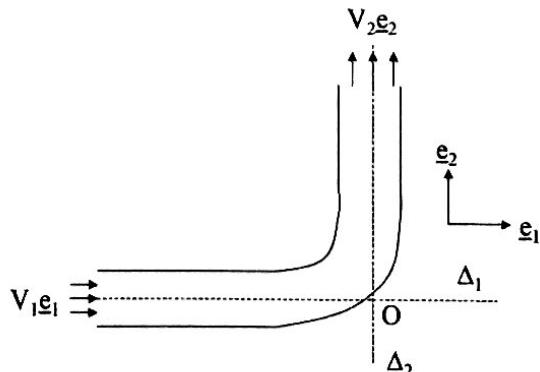


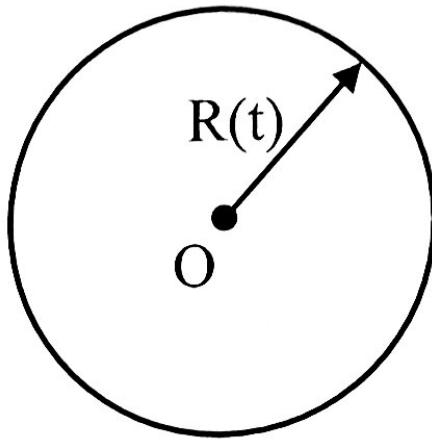
Figure 2 : Conduite recourbée

En aval, l'écoulement est également uniforme de vitesse  $\underline{V} = V_2 \underline{e}_2$  avec  $(V_2 > 0)$ . La pression est encore  $p$ .

- Montrer que  $V_1 = V_2 (=V)$ .
- Calculer la résultante et le moment résultant en  $O$  (intersection de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ ) des actions que le liquide exerce sur la portion de conduite.

MS101  
 Correction de la PC 4 - PPV / Théorèmes généraux  
 ENSTA / 2004-2005

**Exercice 1 : Mouvements d'une membrane sphérique**



**1.1 Equation régissant  $R(t)$  si la membrane est isolée :**

Principe des puissances virtuelles en référentiel galiléen :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall m.v \quad \hat{U} & \quad P_{(e)}(\hat{U}) + P_{(r)}(\hat{U}) = A(\hat{U}) \\ \forall \hat{U} \quad m.v.r \quad P_{(r)}(\hat{U}) &= 0 \end{aligned}}$$

- La membrane est isolée donc  $P_{(e)}(\hat{U}) = 0$  ;
- $P_r(\hat{U}) = -f(R)\hat{u}$  ;
- sur l'enveloppe :  $A(\hat{U}) = \int_{\text{env}} \rho \underline{\gamma} \cdot \hat{U} da$  ;

$$\underline{U} = \frac{d}{dt}(r\underline{e}_r) = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\underline{e}_\varphi = \dot{r}\underline{e}_r ; \text{ de par la symétrie sphérique}$$

$$\underline{\gamma} = \frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + (\text{grad } \underline{U}) \cdot \underline{U} = \ddot{r}\underline{e}_r$$

$$\text{sur l'enveloppe } \underline{\gamma} = \ddot{R}\underline{e}_r \text{ donc : } A(\hat{U}) = \int_{\text{env}} \rho \underline{\gamma} \cdot \hat{U} da = \int_{\text{env}} \rho \ddot{R}\underline{e}_r \cdot \hat{u}\underline{e}_r da = M\ddot{R}\hat{u}$$

$$\boxed{P_{(r)}(\hat{U}) = A(\hat{U}) \Leftrightarrow M\ddot{R} + f(R) = 0}$$

1.2. Etudier le cas où  $f(R) = k(R - R_o)$  avec  $k$  et  $R_o$  strictement positifs ?

$M\ddot{R} + f(R) = 0$  devient :  $M\ddot{R} + k(R - R_o) = 0$

ou  $\ddot{R} + \omega^2(R - R_o) = 0$  avec  $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$

La solution de cette équation différentielle d'ordre 2 est :

$$R(t) = R_o + A \cos(\omega t + \varphi)$$

2. Membrane entourée d'un fluide homogène, incompressible :

(a) Déterminer l'équation régissant le mouvement  $R(t)$ . Etudier les petits mouvements autour de  $R_o$ , pour  $f(R) = k(R - R_o)$ .

- Mouvement à symétrie sphérique :  $\underline{U} = u_r \underline{e}_r$ ,
- Mouvement respectant l'incompressibilité du fluide :  $\operatorname{div} \underline{U} = 0$

Soit :  $\frac{du_r}{dr} + 2 \frac{u_r}{r} = 0 \Rightarrow u_r = \frac{A(t)}{r^2}$

$$\underline{\gamma} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \underline{U}) \cdot \underline{U} = \left( \frac{\dot{A}}{r^2} - 2 \frac{A^2}{r^5} \right) \underline{e}_r$$

$$U(R) = \dot{R} = \frac{A(t)}{R^2} \Rightarrow A = \dot{R}R^2$$

Soit

$$\underline{U} = u_r \underline{e}_r = \frac{A(t)}{r^2} \underline{e}_r = \dot{R} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \underline{e}_r$$

et pour l'accélération :

$$\underline{\gamma} = \left( \frac{\ddot{R}R^2 + 2\dot{R}^2R}{r^2} - \frac{2\dot{R}^2R^4}{r^5} \right) \underline{e}_r$$

On choisit le mouvement virtuel  $\hat{\underline{U}}$  tel qu'il respecte l'incompressibilité et que  $\hat{\underline{U}}(r) = \hat{u} \underline{e}_r$ , d'après ce qui précède :

$$\hat{\underline{U}}(r) = \hat{u} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \underline{e}_r$$

Appliquons le principe des puissances virtuelles au système Fluide+Membrane :

- Puissance virtuelle des efforts extérieurs :  $P_{(e)}(\hat{\underline{U}}) = 0$

- Puissance virtuelle des efforts intérieurs :  $P_i(\hat{U}) = -f(R)\hat{u}$

- Puissance virtuelle des quantités d'accélération :

$$A(\hat{U}) = M\ddot{R}\hat{u} + \int_{fluid} \rho_f \left( \frac{\dot{A}}{r^2} - 2 \frac{A'}{r^3} \right) \left( \frac{R}{r} \right)^2 \hat{u} r^2 dr d\theta \sin \theta d\varphi$$

$$A(\hat{U}) = M\ddot{R}\hat{u} + 4\pi\rho_f R^2 \left[ -\frac{\dot{A}}{r} + \frac{A'^2}{2r^4} \right]_R \hat{u} = M\ddot{R}\hat{u} + 4\pi\rho_f \left( \dot{A}R - \frac{A'^2}{2R^2} \right) \hat{u}$$

$$A(\hat{U}) = M\ddot{R}\hat{u} + 4\pi\rho_f \left( \ddot{R}R^4 + 2\dot{R}^2R^2 - \frac{\dot{R}^2R^2}{2} \right) \hat{u} = M\ddot{R}\hat{u} + 4\pi\rho_f \left( \ddot{R}R^3 + \frac{3}{2}\dot{R}^2R^2 \right) \hat{u}$$

d'où :

$$\boxed{P_{(v)}(\hat{U}) = A(\hat{U}) \Leftrightarrow (M + 4\pi\rho_f R^3)\ddot{R} + f(R) + 6\pi\rho_f R^2 \dot{R}^2 = 0}$$

Etude des petits mouvements autour de  $R_o$  :

$$R(t) = R_o + u(t) \quad \text{avec} \quad u(t) \ll R$$

en remplaçant  $R(t)$  dans l'expression précédente on obtient :

$$(M + 4\pi\rho_f R_o^3)\ddot{u} + ku + 6\pi\rho_f R_o^2 \dot{u}^2 = 0 ; \text{ on néglige } \dot{u}^2$$

On obtient une équation différentiel du second ordre :

$$(M + 4\pi\rho_f R_o^3)\ddot{u} + ku = 0 \quad \text{par similarité avec l'étude de la question 1 on note :}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{M + 4\pi\rho_f R_o^3} < \omega^2$$

**Le mouvement est plus lent que le mouvement sans fluide.**

**(b) Retrouver l'équation du mouvement en utilisant le théorème de l'énergie cinétique ?**

Application du théorème de l'énergie cinétique :

$$\boxed{P_{(c)}(\underline{U}) + P_{(v)}(\underline{U}) = \frac{d}{dt} K(\underline{U})}$$

Dans notre problème :  $P_{(v)}(\underline{U}) = 0$

$$K(\underline{U}) = \frac{1}{2} \int_{\text{em}} \rho \underline{U}^2 da + \frac{1}{2} \int_{\text{fluid}} \rho_f \underline{U}^2 d\Omega$$

$$K(\underline{U}) = \frac{1}{2} \int_{env} \rho \dot{R}^2 da + \frac{1}{2} \int_{fluid} \rho_f \frac{A^2}{r^4} r^2 dr d\theta \sin \theta d\varphi = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} 4\pi \rho_f \frac{A^2}{R}$$

$$K(\underline{U}) = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + 2\pi \rho_f \dot{R}^2 R^3$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique, dans notre cas :  $\frac{d}{dt} K(\underline{U}) = P_{(t)}(\underline{U})$

On trouve alors :

$$\frac{dK}{dt} = \dot{R} (M \ddot{R} + 4\pi \rho_f R^3 \ddot{R} + 6\pi \rho_f R^2 \dot{R}^2) = P_{(t)}(\underline{U}) = -f(R) \dot{R}$$

Soit :

$$M \ddot{R} + 4\pi \rho_f R^3 \ddot{R} + 6\pi \rho_f R^2 \dot{R}^2 = -f(R)$$

### **Exercice 2 : action sur une conduite recourbée**

Montrer que  $V_1 = V_2 (=V)$  ?

Le fluide est **incompressible** ( $\text{div } \underline{V} = 0$ ) et l'écoulement est **stationnaire** ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ).

L'équation locale de la **conservation de la masse** :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \underline{V} = 0$$

devient :  $\frac{d\rho}{dt} = 0$

L'intégration sur le domaine  $\Omega_i$  (volume de fluide dans la conduite), nous donne :

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial \Omega_i} \rho \underline{V} \cdot \underline{n} dS = \int_{\partial \Omega_i} \rho \underline{V} \cdot \underline{n} dS = 0$$

Calculons cette intégrale de surface, sur le domaine limité par la conduite :  
Le fluide est parfait (non visqueux). Sur la paroi la vitesse normale est nulle ( $\underline{V} \cdot \underline{n} = 0$ ).

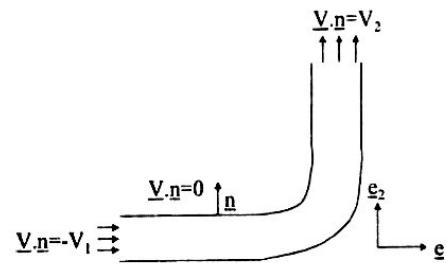


Figure 3 : Détermination de la composante normale de la vitesse

Nous obtenons :  $\int_{\partial \Omega_i} \rho \underline{V} \cdot \underline{n} dS = 0 \Rightarrow -\rho V_1 S + \rho V_2 S = 0$  soit  $V_1 = V_2$

Calculer la résultante et le moment résultant en O (intersection de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ ) des actions que le liquide exerce sur la portion de conduite ?

On cherche les actions du fluide sur la conduite ; l'outil qui nous permet de calculer ces efforts est le théorème d'Euler.

Soit le volume de fluide limité par  $\Omega_r$  :

- la paroi de la conduite ;
- la section amont  $S_1=S$  ;
- la section aval  $S_2=S$ .

On applique le théorème d'Euler pour ce volume :

$$\text{Torseur des efforts extérieurs} = \text{Torseur des quantités d'accélération}$$

$$[\underline{f}, \underline{T}, 0] = \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{V}), \rho \underline{V}(\underline{V} \cdot \underline{n}), -[\rho \underline{V}] \underline{W} \cdot \underline{N} \right]$$

or l'écoulement est permanent :  $\frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{V}) = 0$

il n'y a pas de discontinuité :  $[\rho \underline{V}] = 0$

L'égalité devient alors :  $[\underline{f}, \underline{T}, 0] = [0, \rho \underline{V}(\underline{V} \cdot \underline{n}), 0]$

Les forces extérieures exercées sur le fluide sont :

- action de la paroi sur le fluide ;
- les pressions exercées sur  $S_1$  et  $S_2$  par le reste du fluide sur notre volume ;
- les forces volumiques de pesanteur que l'on néglige :  $\underline{f} = 0$ .

La résultante des actions extérieures de contact  $\underline{T}$  est :  $\underline{R} = \int_{\partial\Omega_r} \underline{T} dS$

Le moment résultant en O est :  $\underline{M}_O = \int_{\partial\Omega_r} \underline{OM} \wedge \underline{T} dS$

D'après le théorème d'Euler, on a :

$$\begin{aligned} \underline{R} &= \int_{\partial\Omega_r} \underline{T} dS = \int_{\partial\Omega_r} \rho \underline{V}(\underline{V} \cdot \underline{n}) dS \\ \underline{M}_O &= \int_{\partial\Omega_r} \underline{OM} \wedge \underline{T} dS = \int_{\partial\Omega_r} \underline{OM} \wedge \rho \underline{V}(\underline{V} \cdot \underline{n}) dS \end{aligned}$$

$$(1) \quad \underline{R} = \int_{\text{paroi}} \underline{T} dS + \int_{S_1} \underline{T} dS + \int_{S_2} \underline{T} dS = \underline{R}_{\text{paroi} \rightarrow \text{fluide}} + \underline{F}_{S_1} + \underline{F}_{S_2}$$

d'où :

$$(2) \quad \underline{R}_{\text{fluide} \rightarrow \text{paroi}} = -\underline{R}_{\text{paroi} \rightarrow \text{fluide}} = -\underline{R} + \underline{F}_{S_1} + \underline{F}_{S_2}$$

Calculons chacun des termes :

$$(3) \quad - \underline{\text{Résultante}} : -\underline{R} = - \int_{\partial\Omega_r} \rho \underline{V}(\underline{V} \cdot \underline{n}) dS$$

- sur la paroi :  $\underline{V} \cdot \underline{n} = 0$
- sur la section  $S_1$  :  $\underline{V} \cdot \underline{n} = -V_1$
- sur la section  $S_2$  :  $\underline{V} \cdot \underline{n} = V_2$

$$-\underline{R} = - \left[ \int_{S_1} -\rho V_1^2 \underline{e}_1 dS + \int_{S_2} \rho V_2^2 \underline{e}_2 dS \right] = \rho V_1^2 S \underline{e}_1 - \rho V_2^2 S \underline{e}_2 = \rho V^2 S (\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$$

- Pression du reste du fluide sur la section  $S_1$  :  $\underline{F}_{S_1}$

$$\underline{F}_{S_1} = \int_{S_1} -p \underline{n} dS = \int_{S_1} p \underline{e}_1 dS = p S \underline{e}_1 \text{ car } \underline{n} = -\underline{e}_1$$

- Pression du reste du fluide sur la section  $S_2$  :  $\underline{F}_{S_2}$

$$\underline{F}_{S_2} = \int_{S_2} -p \underline{n} dS = \int_{S_1} -p \underline{e}_2 dS = -p S \underline{e}_2 \text{ car } \underline{n} = \underline{e}_2$$

Finalement,

$$\boxed{\underline{R}_{\text{fluide} \rightarrow \text{paroi}} = \rho V^2 S (\underline{e}_1 - \underline{e}_2) + p S \underline{e}_1 - p S \underline{e}_2 = (\rho V^2 + p) S (\underline{e}_1 - \underline{e}_2)}$$

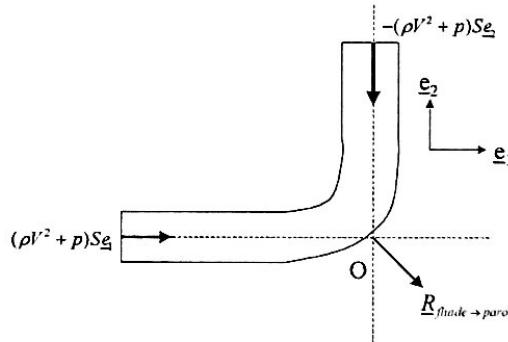


Figure 4 : Action résultante du fluide sur la paroi

Calcul du moment résultant en O de l'action du fluide sur la paroi :  $\underline{M}_{o \text{ fluide} \rightarrow \text{paroi}}$

Le moment en O des quantité d'accélération est :  $\underline{M}_O = \int_{\partial\Omega_t} \underline{OM} \wedge \rho \underline{V} (\underline{V} \cdot \underline{n}) dS$

Or :

$$\underline{M}_O = \underline{M}_{o \text{ paroi} \rightarrow \text{fluide}} + \underline{M}_{o E_{S_1}} + \underline{M}_{o E_{S_2}}$$

Mais les lignes d'action de  $\underline{E}_{S_1}$  et de  $\underline{E}_{S_2}$  passent par O, leur moment en O est donc nul.

D'où :

$$\underline{M}_{o \text{ fluide} \rightarrow \text{paroi}} = -\underline{M}_O$$

Comme  $\underline{V} \cdot \underline{n}$  est nul sur la paroi :

$$\begin{aligned} \underline{M}_O &= \int_{\partial\Omega_t} \underline{OM} \wedge \rho \underline{V} (\underline{V} \cdot \underline{n}) dS = \int_{S_1} \underline{OM} \wedge \rho V_1^2 (\underline{V} \cdot \underline{n}) dS + \int_{S_2} \underline{OM} \wedge \rho V_2^2 (\underline{V} \cdot \underline{n}) dS \\ &= \int_{S_1} \underline{OM} \wedge \rho V_1^2 \underline{e}_1 dS - \int_{S_2} \underline{OM} \wedge \rho V_2^2 \underline{e}_2 dS \end{aligned}$$

On note :  $\underline{OM} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2$

De plus :  $V_1 = V_2 = V$

$$\underline{M}_o = \int_{S_1} (x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2) \wedge \rho V^2 \underline{e}_3 dS - \int_{S_2} (x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2) \wedge \rho V^2 \underline{e}_3 dS$$

$$\underline{M}_o = - \int_{S_1} x_2 \rho V_1^2 \underline{e}_3 dS - \int_{S_2} x_1 \rho V_2^2 \underline{e}_3 dS = -\rho V^2 \int_S (x_1 + x_2) \underline{e}_3 dS$$

en passant en coordonnées cylindriques :  $x_1 = r \cos \theta$  et  $x_2 = r \sin \theta$

$$\underline{M}_o = -\rho V^2 \int_0^R \int_0^{2\pi} r(\cos \theta + \sin \theta) r dr d\theta = 0$$

d'où :

$$\boxed{\underline{M}_{o \text{ fluide} \rightarrow \text{paroi}} = 0}$$

\*\*\*

**Mecanique des milieux continus**

Travaux dirigés n°5

\*\*\*

**Exercice 1 : Valeur moyenne du tenseur des contraintes**

Un solide occupant le domaine  $\Delta$ , de volume  $V$ , est en équilibre sous l'effet d'efforts extérieurs volumiques  $f$  et surfaciques  $T$  appliqués sur la surface extérieure  $\partial\Delta$ . On définit sur le domaine  $\Delta$  un champ de vitesses virtuelles  $\underline{V}^*(\underline{x}) = V_i^*(\underline{x}) \underline{e}_i$  avec  $V_i^*(\underline{x}) = A_{ij} x_j$  (i.e.  $\underline{V}^*(\underline{x}) = \underline{A} \cdot \underline{x}$ ) où  $A_{ij} = A_{ji}$  sont des constantes.

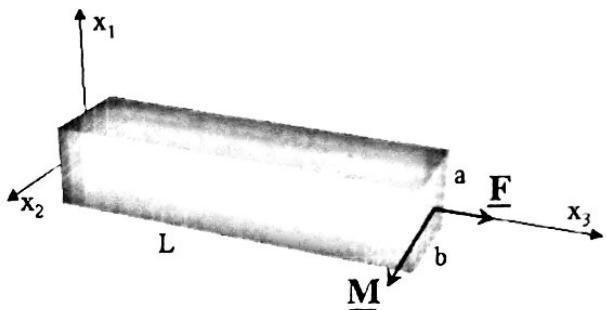
1. Exprimer le Principe des Puissances Virtuelles pour le champ de vitesses virtuelles proposé et en déduire la valeur moyenne du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$ , définie par :  $\underline{\underline{\sigma}}^{moy} = \frac{1}{V} \int_{\Delta} \underline{\underline{\sigma}} dv$
2. Application à une poutre droite de longueur  $L$ , de génératrices parallèles à  $Ox_3$  et de section  $S$  quelconque à laquelle sont appliqués les efforts suivants :
  - pas d'efforts volumiques,  $f = 0$ ,
  - surface latérale libre,
  - des efforts surfaciques sur les sections  $x_3 = 0$  et  $x_3 = L$  qui valent respectivement  $T = -\frac{F}{S} \underline{e}_3$  et  $T = \frac{F}{S} \underline{e}_3$

**Exercice 2 : Champs de contraintes dans une poutre**

Une poutre de section rectangulaire occupe le domaine :  $\Delta = \left\{ -\frac{a}{2} < x_1 < \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} < x_2 < \frac{b}{2}, 0 < x_3 < L \right\}$  et se trouve en équilibre sous l'action d'efforts extérieurs exercés uniquement sur les sections  $S_0$  ( $x_3 = 0$ ) et  $S_L$  ( $x_3 = L$ ). Sur  $S_L$ , on donne le torseur des efforts suivant ( $F$  et  $M$  scalaires donnés) :

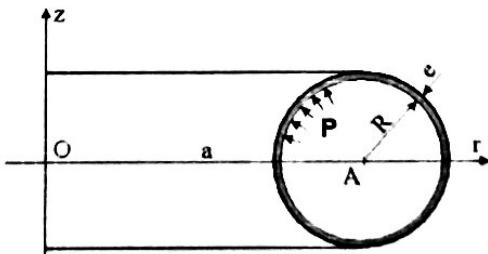
- résultante  $F\underline{e}_3$
- moment  $M\underline{e}_2$  au centre  $L(0, 0, L)$  de la face  $S_L$

1. Déterminer le torseur des efforts qui s'applique sur la section  $x_3 = 0$ .
2. Déterminer les champs de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2)$  statiquement admissibles avec les efforts donnés et qui dépendent *linéairement* de  $x_1$  et de  $x_2$ .



### Exercice 3 : Minoration des contraintes

On considère un réservoir torique ; la géométrie étant axisymétrique, on se place dans un repère cylindrique d'axe celui du tore, noté  $Oz$  ;  $r$  est le rayon vecteur dans le plan normal à  $Oz$ . Le volume de révolution occupé par le réservoir est généré par rotation autour de  $Oz$  d'une couronne de centre  $A$ , point situé à une distance  $a$  de  $Oz$ , et de rayon compris entre  $R$  et  $R + e$  ( $0 < e \ll R$ ). Le réservoir est rempli d'un fluide à la pression  $P$  seul effort appliqué au système.



1. Montrer que l'équilibre du réservoir est possible
2. On se donne un mouvement virtuel dans le repère cylindrique :  $V^*(\underline{x}) = V_r^*(\underline{x}) \underline{e}_r = k \underline{e}_r$  où  $k$  est une constante . Exprimer le P.P.V. pour ce mouvement.
3. En déduire un minorant de  $\sup_{\Omega}(\sigma_{\theta\theta})$  et commenter.

\*\*\*

**Mecanique des milieux continus**

Travaux dirigés n°5 : correction

\*\*\*

**Exercice 1 : Valeur moyenne du tenseur des contraintes**

1. Dans tout l'exercice, on est en statique :  $P_i^* + P_e^* = P_a^* = 0, \forall V^*$ . Le gradient du champ de vitesses virtuelles est  $V_{i,j}^* = A_{ij}$ . On a donc  $D_{ij}^* = A_{ij}$ , d'où :

$$P_i^*(V^*) = - \int_{\Delta} \sigma_{ij} A_{ij} dv$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit :

$$P_e^*(V^*) = \int_{\Delta} f \cdot V^* dv + \int_{\partial\Delta} T \cdot V^* dS = \int_{\Delta} f_i A_{ij} x_j dv + \int_{\partial\Delta} T_i A_{ij} x_j dS$$

soit finalement :

$$\int_{\Delta} \sigma_{ij} A_{ij} dv = \int_{\Delta} f_i A_{ij} x_j dv + \int_{\partial\Delta} T_i A_{ij} x_j dS, \quad \forall A_{ij} = A_{ji}, i,j=1,2,3$$

La valeur moyenne des différentes composantes de  $\underline{\underline{\sigma}}^{moy}$  s'obtient en annulant toutes les composantes de  $\underline{A}$  sauf une (en respectant la symétrie...) ; on obtient ainsi :

$$\times \quad \sigma_{ij}^{moy} = \frac{1}{V} \int_{\Delta} \frac{1}{2} (f_i x_j + f_j x_i) dv + \frac{1}{V} \int_{\partial\Delta} \frac{1}{2} (T_i x_j + T_j x_i) dS$$

2. Application à la poutre d'axe  $Ox_3$  : on vérifie brièvement la compatibilité des données avec l'hypothèse d'équilibre statique de la structure : les efforts volumiques et les efforts sur les faces latérales sont nuls ; les résultantes sur les extrémités sont opposées ; de même, ces efforts étant colinéaires à  $\underline{e}_3$ , on vérifie facilement que la somme des moments (en  $O$ , par exemple) est nulle. On a ici :

$$\sigma_{ij}^{moy} = \frac{1}{2SL} \int_{S_0 \cup S_L} (T_i x_j + T_j x_i) dS$$

mais  $T_i = 0$  pour  $i = 1, 2$ , d'où  $\sigma_{11}^{moy} = \sigma_{12}^{moy} = \sigma_{22}^{moy} = 0$ . On a  $T_3 = F/S$  sur  $S_L$  et  $T_3 = -F/S$  sur  $S_0$  d'où :

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{moy} &= \frac{1}{SL} \int_{S_0 \cup S_L} T_3 x_3 dS = \frac{1}{SL} \int_{S_L} \frac{F}{S} L dS = \frac{F}{S} \\ \sigma_{i3}^{moy} &= \frac{1}{2SL} \int_{S_0 \cup S_L} T_3 x_i dS = \frac{1}{2SL} \{(T_3|_{x_3=0} + T_3|_{x_3=L}) \int_S x_1 dS\} = 0 \quad (i=1,2) \end{aligned}$$

Finalement la valeur moyenne du tenseur des contraintes est :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{moy} = \frac{F}{S} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

## Exercice 2 : Champs de contraintes dans une poutre

1. Pour assurer l'équilibre global des efforts on doit équilibrer les efforts appliqués sur  $S_L$  : pour la résultante,  $\underline{F}_0 = -F\underline{e}_3$  et pour les moments (par exemple en  $O$ )  $\underline{\Gamma}_0 = -(M\underline{e}_2 + \underline{OL} \wedge \underline{Fe}_3) = -M\underline{e}_2$ , où  $\underline{F}_0$  et  $\underline{\Gamma}_0$  sont les éléments de réduction en  $O$  du torseur appliqué sur la face  $S_0$ .

2. On fait l'hypothèse d'un champ  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(x_1, x_2) = \underline{\sigma}^0 + x_1 \underline{\sigma}^1 + x_2 \underline{\sigma}^2$  linéaire en  $x_1$  et  $x_2$ . Pour que celui-ci soit statiquement admissible, il faut vérifier les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}\underline{\sigma} = 0 \quad (1) \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur les faces latérales} \quad (2) \\ \int_{S_0} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS = -F\underline{e}_3 \quad (3) \\ \int_{S_L} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS = +F\underline{e}_3 \quad (3') \\ \int_{S_0} \underline{OM} \wedge \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS = -M\underline{e}_2 \quad (4) \\ \int_{S_L} \underline{LM} \wedge \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS = +M\underline{e}_2 \quad (4') \end{array} \right.$$

Le fait que, par hypothèse,  $\underline{\sigma}$  ne dépende pas de  $x_3$  rend redondantes les conditions (3) et (3') (resp. (4) et (4')). (1) s'écrit  $\sigma_{ij,j} = \sigma_{i1}^1 + \sigma_{i2}^2 = 0$  on a donc (en représentation matricielle) l'égalité : colonne [1] de  $[\underline{\sigma}^1] = -$  colonne [2] de  $[\underline{\sigma}^1]$ . Puis les relations (2) permettent d'écrire :

$$\underline{\sigma}^0(\pm \underline{e}_1) + (\pm \frac{a}{2}) \underline{\sigma}^1(\pm \underline{e}_1) + x_2 \underline{\sigma}^2(\pm \underline{e}_1) = 0$$

pour  $x_1 = \pm a/2$  et  $\forall x_2 \in [-b/2, +b/2]$ , c'est à dire

$$\pm \underline{\sigma}^0 \cdot \underline{e}_1 + \frac{a}{2} \underline{\sigma}^1 \cdot \underline{e}_1 \pm x_2 \underline{\sigma}^2 \cdot \underline{e}_1 = 0 \quad \forall x_2$$

d'où nécessairement  $\underline{\sigma}^2 \cdot \underline{e}_1 = 0$  (colonne [1] de  $[\underline{\sigma}^2]$  nulle), puis  $\underline{\sigma}^0 \cdot \underline{e}_1 = \pm a/2 \underline{\sigma}^1 \cdot \underline{e}_1$  impose la nullité de ces deux vecteurs, soit : colonne [1] de  $[\underline{\sigma}^0]$  et colonne [1] de  $[\underline{\sigma}^1]$  nulles. En échangeant le rôle des axes  $0x_1$  et  $0x_2$ , on obtient par un raisonnement identique : colonne [2] de  $[\underline{\sigma}^1]$ , colonne [2] de  $[\underline{\sigma}^0]$  et colonne [2] de  $[\underline{\sigma}^2]$  nulles. On remarque qu'alors la condition (1) se trouve trivialement vérifiée et que, les tenseurs étant symétriques, seule leur composante (3, 3) peut être non nulle. Posons donc  $\underline{\sigma} = (\xi + \gamma x_1 + \delta x_2) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ . La condition (3) s'écrit :

$$\int_{S_0} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS = \int_{S_0} (\xi + \gamma x_1 + \delta x_2) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \cdot (-\underline{e}_3) dS = -\xi S \underline{e}_3$$

en utilisant la symétrie en  $x_1$  et  $x_2$  des faces, d'où  $\xi = F/S$ . Le calcul du moment donne :

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \underline{OM} \wedge \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS &= \int_{S_0} (x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2) \wedge (F/S + \gamma x_1 + \delta x_2) (-\underline{e}_3) dx_1 dx_2 \\ &= \gamma b \frac{a^3}{12} \underline{e}_2 - \delta a \frac{b^3}{12} \underline{e}_1 = -M \underline{e}_2 \end{aligned}$$

soit finalement  $\delta = 0$  et  $\gamma = -12M/Sa^2$  et donc le champ de contrainte solution s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{S} \left( F - \frac{6M}{a} \frac{2x_1}{a} \right) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

Les hypothèses simplificatrices choisies imposent une variation *linéaire* de la répartition des efforts surfaciques sur les extrémités  $S_0$  et  $S_L$  de la poutre. La quantité  $\xi_1 = 2x_1/a$  (resp.  $\xi_2 = 2x_2/b$ ) représente la distance relative du point au plan neutre (i.e.  $Ox_2x_3$ , resp.  $Ox_1x_3$ ) de la poutre. On peut généraliser l'expression ci-dessus pour un moment de la forme  $M_2\underline{e}_2 + M_1\underline{e}_1$  appliqué sur la face  $S_L$  de la poutre :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{S} \left( F - \frac{6M_2}{a} \xi_1 + \frac{6M_1}{b} \xi_2 \right) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

### Exercice 3 : Minoration des contraintes

1. Le système considéré  $\Omega$  est le tore creux ; les efforts volumiques sont nuls  $\underline{f} = \underline{0}$ , les efforts surfaciques sont  $\underline{T} = \underline{0}$  sur la surface extérieure  $\partial\Omega_{ext}$  et  $\underline{T} = -P\underline{n}$  sur la surface intérieure  $\partial\Omega_{int}$  (cf. figure). L'axisymétrie respectée par la géométrie de la structure et les efforts appliqués impose une résultante portée par l'axe  $Oz$  et un moment résultant nul ; la symétrie par rapport au plan  $z = 0$  impose de plus à cette résultante d'être nulle, ce qui assure l'équilibre statique du tore.

2. Le P.P.V. s'écrit  $P_i^* + P_e^* = 0, \forall V^*$  en statique. Pour un champ de vitesse de la forme  $V^*(r, \theta, z) = f(r) \underline{e}_r$ , le gradient s'écrit (rappel)  $\underline{\nabla}V^* = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{f}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$  ; ici  $f(r)$  se réduit à la constante  $k$  et donc  $\underline{\underline{D}}^* = \underline{\nabla}V^* = k \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$ . La puissance des efforts intérieurs se réduit à :

$$P_i^* = -k \int_{\Omega} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} dv$$

La puissance des efforts extérieurs s'écrit :

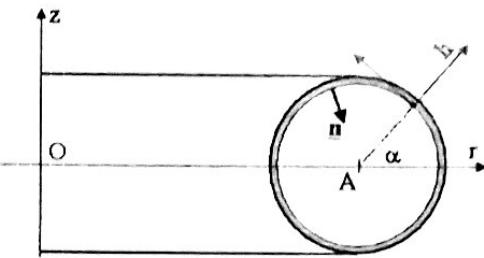
$$P_e^* = \int_{\partial\Omega_{int}} -P\underline{n} \cdot \underline{V}^* dS = -kP \int_{\partial\Omega_{int}} \underline{n} \cdot \underline{e}_r dS$$

Finalement, le P.P.V. s'écrit :

$$\int_{\Omega} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} dv + P \int_{\partial\Omega_{int}} \underline{n} \cdot \underline{e}_r dS = 0$$

3. Pour minorer les contraintes de cercalge  $\sigma_{\theta\theta}$ , il faut évaluer l'intégrale sur  $\partial\Omega_{int}$ . En introduisant les coordonnées toriques  $(\theta, \alpha)$ , où  $\theta$  est l'angle du système cylindrique et  $\alpha$  un angle qui décrit la position sur le cercle générant le tore, l'élément d'aire sur le tore est  $d^2S = rd\theta \cdot Rd\alpha$  avec  $r = a + R \cos \alpha$ , soit, en intégrant en  $\theta$  (axisymétrie),  $dS = 2\pi(a + R \cos \alpha)Rd\alpha$ . La normale sortante à  $\Omega$  pour la portion de surface concernée  $\partial\Omega_{int}$  s'écrit  $\underline{n} = -\cos \alpha \underline{e}_r - \sin \alpha \underline{e}_z$ , d'où :

$$\int_{\partial\Omega_{int}} \underline{n} \cdot \underline{e}_r dS = \int_{\alpha=0}^{2\pi} (-\cos \alpha)[2\pi(a + R \cos \alpha)R] d\alpha = -2\pi^2 R^2$$



Une autre solution, plus élégante, consiste à voir cette intégrale comme le flux sortant du champ de vecteurs  $-\underline{e}_r$  à travers la surface  $\partial\Omega_{int}$  qui délimite le volume  $\Omega_{int}$  (intérieur du tore) de normale sortante  $-\underline{n}$ ; la formule de la divergence permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_{int}} \underline{n} \cdot \underline{e}_r dS &= \int_{\Omega_{int}} \operatorname{div}(-\underline{e}_r) dv = - \int_{\Omega_{int}} \operatorname{tr}(\operatorname{grad}\underline{e}_r) dv \\ &= - \int_{\Omega_{int}} \frac{1}{r} r d\theta dr dz = -2\pi \int_{\theta=cst} dr dz = -2\pi^2 R^2\end{aligned}$$

en utilisant l'expression du gradient rappelée en 2.

Le P.P.V. s'écrit donc :

$$\int_{\Omega} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} dv = 2\pi^2 PR^2$$

et on peut écrire  $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta, z) = \sigma_{\theta\theta}(r, z) = \sigma_{\theta\theta}(\alpha, h) \approx \sigma_{\theta\theta}(\alpha)$  de par le caractère ax-symétrique du problème, puis par changement de coordonnées (cf. figure ci-dessus) et, enfin, en supposant l'épaisseur du tore faible et donc une variation faible de la contrainte dans cette épaisseur. L'élément de volume  $dv$  sur le tore peut être approximé par  $e d^2S$ , puisque  $e \ll R$  et donc écrire  $dv = e rd\theta R d\alpha$  d'où :

$$\int_{\Omega} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} dv = 2\pi e R \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} \sigma_{\theta\theta}(\alpha) d\alpha$$

autrement dit :

$$\sigma_{\theta\theta}^{moy} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{\theta\theta}(\alpha) d\alpha = \frac{PR}{2e}$$

puis :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} dv &\leq \sup_{\Omega}(\sigma_{\theta\theta}) \int_{\Omega} \frac{dv}{r} = \sup_{\Omega}(\sigma_{\theta\theta}) \int_{\Omega} d\theta dr dz \\ &= 2\pi \sup_{\Omega}(\sigma_{\theta\theta}) \pi [(R + e)^2 - R^2] \\ &= 4\pi^2 R e \sup_{\Omega}(\sigma_{\theta\theta}) (1 + \frac{e}{2R})\end{aligned}$$

et ainsi en utilisant le P.P.V. et la valeur moyenne introduite plus haut, il vient :

$$\sup_{\Omega}(\sigma_{\theta\theta}) \geq \sigma_{\theta\theta}^{moy} = \frac{PR}{2e} \geq \frac{PR}{2e} \frac{1}{1 + \frac{e}{2R}}$$

On peut remarquer que la valeur moyenne de la contrainte de cerclage  $\sigma_{\theta\theta}^{moy}$  constitue un meilleur (dans le sens d'un dimensionnement du réservoir assurant la sécurité) minorant de  $\sup_{\Omega}(\sigma_{\theta\theta})$ ; on sait de plus que cette valeur est nécessairement atteinte en un point au moins du réservoir.

\*\*\*

**Mécanique des milieux continus**

Travaux dirigés n°6

\*\*\*

**Exercice 1 : Sphère sous pression**

On considère, dans sa configuration actuelle  $C_t$ , un réservoir sphérique de rayons intérieur et extérieur  $R_i$  et  $R_e = R_i + e$ , en équilibre sous une pression interne  $p$ . La surface extérieure est libre de contraintes. Les efforts volumiques sont supposés négligeables.

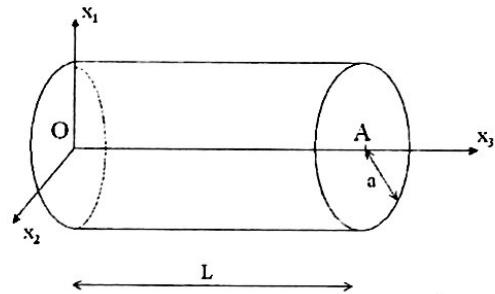
1. a) Expliciter les données aux contours.  
 b) Expliciter dans le système de coordonnées sphériques ( $O, r, \theta, \phi$ ) toutes les équations (équations de champ et conditions aux limites) satisfaites par le champ de contraintes  $\underline{\sigma}$ .  
 c) Vérifier la compatibilité des données avec l'équilibre du réservoir.
  2. En utilisant les symétries du problème et du repère choisi montrer que le champ de contraintes est de la forme :
- $$\underline{\sigma}(r, \theta, \phi) = \sigma_{rr}(r) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \sigma_{\phi\phi}(r) \underline{e}_\phi \otimes \underline{e}_\phi$$
- avec  $\sigma_{\theta\theta}(r) = \sigma_{\phi\phi}(r)$ .
3. Ré-écrire toutes les équations vérifiées par ce champ. Dans la suite on le suppose continu.
  4. On suppose que le réservoir est de faible épaisseur ( $e \ll R_i$ ). La contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  est alors considérée comme constante dans l'épaisseur. Calculer sa valeur
    - a) directement grâce aux équations locales,
    - b) en appliquant le principe des puissances virtuelles avec un mouvement virtuel défini par :

$$\underline{V}^* = v^* \underline{e}_r$$

où  $v^*$  est constant dans le domaine,  
 c) en écrivant l'équilibre global d'une demi-sphère.

### Exercice 2 : Contraintes dans une poutre en torsion

On considère une poutre de longueur  $L$ , de section circulaire de rayon  $a$  dans sa configuration d'équilibre soumise à des efforts extérieurs exclusivement exercés sur les sections d'extrémités. Sur la section  $S_L$ , définie par  $x_3 = L$ , le torseur a une résultante nulle et un moment résultant par rapport au centre de la section de la forme  $C\underline{e}_3$ ,  $C$  étant donné.



1. Déterminer les efforts extérieurs sur la section  $S_0$  définie par  $x_3 = 0$ .

2. A quelle condition le champ de contraintes

$$\underline{\sigma} = -k\{x_2(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) - x_1(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)\}$$

(avec  $k$  une constante à déterminer) est-il en équilibre avec les efforts extérieurs appliqués à la poutre ?

3. On suppose que la contrainte de résistance du matériau constitutif de la poutre est donnée par :

$$\sup_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| < 2\sigma_0$$

soit

$$\sigma_1 - \sigma_3 < 2\sigma_0 \text{ où } \sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$$

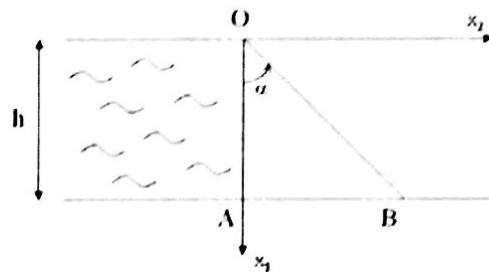
avec  $\sigma_i$  les contraintes principales et  $\sigma_0$  une constante caractéristique du matériau.

Déterminer le couple  $C$  pour lequel la condition de résistance est atteinte au moins en un point.

### Exercice 3 : Contraintes dans un barrage

La section droite d'un barrage est un triangle OAB rectangle en A tel que  $OA = h$  et  $\angle AOB = \alpha$ . Le barrage est en équilibre sous les efforts extérieurs suivants :

- la pression de l'eau qu'il retient, s'exerçant sur la face verticale (poids volumique de l'eau :  $\rho g \underline{c}_1$ ),
- les efforts de pesanteur (poids volumique du matériau constitutif du barrage :  $2\rho g \underline{c}_1$ ),
- les actions du sol sur la base horizontale ne sont pas précisées,
- la pression atmosphérique est négligée.



Déterminer l'extrémum du cisaillement sur les facettes contenant  $\underline{e}_3$  dans le cadre suivant :

- \*  $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$
- \*  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  et  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  étant des fonctions linéaires de  $(x_1, x_2)$  indépendantes de  $x_3$ .

\*\*\*

# Mécanique des milieux continus

## Travaux dirigés n°6 - Corrigé

\*\*\*

### Exercice 1 : Sphère sous pression

- $\underline{f} = \underline{0}$
- surface extérieure libre de contraintes
- pression interne  $p$
- équilibre

Dans tout l'exercice on se placera dans la base  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\phi)$ .

1. a) Les surfaces extérieures au réservoir sont  $\partial D_t = S_i \cup S_e$ . On a :

- sur  $S_i$  :  $\underline{T} = -p \underline{n} = p \underline{e}_r$ ,
- sur  $S_e$  :  $\underline{T} = \underline{0}$ .

b) Les équations de la statique donnent ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in D_t : \operatorname{div} \underline{\sigma} = 0 \\ \text{sur une éventuelle surface de discontinuité } \Sigma \text{ de normale } \underline{N} : [\underline{\sigma}] \cdot \underline{N}(x) = 0 \\ \forall x \in S_i : \underline{\sigma}(R_i, \theta, \phi) \cdot (-\underline{e}_r) = p \underline{e}_r \\ \forall x \in S_e : \underline{\sigma}(R_e, \theta, \phi) \cdot \underline{e}_r = 0 \end{array} \right.$$

En développant, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi} + \sigma_{r\theta}\cot\theta}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi})\cot\theta + 3\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{3\sigma_{r\phi} + 2\sigma_{\theta\phi}\cot\theta}{r} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$[\underline{\sigma}] \cdot \underline{N} = 0 \text{ sur } \Sigma \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}(R_i, \theta, \phi) = -p \\ \sigma_{\theta r}(R_i, \theta, \phi) = 0 \\ \sigma_{\phi r}(R_i, \theta, \phi) = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}(R_e, \theta, \phi) = 0 \\ \sigma_{\theta r}(R_e, \theta, \phi) = 0 \\ \sigma_{\phi r}(R_e, \theta, \phi) = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

c) Afin de vérifier la compatibilité des données du problème avec l'équilibre du réservoir, il faut déterminer le torseur des efforts extérieurs sur le réservoir.

On a :

$$\underline{\mathcal{R}^{\text{ext}}} = \int_{D_t} \underline{f} dV + \int_{\partial D_t} \underline{T} dS = \int_{S_i} p \underline{e}_r dS = p \int_{S_i} \underline{e}_r dS = \underline{0} \text{ (par symétrie)}$$

$$\underline{\mathcal{M}_0^{\text{ext}}} = \int_{D_t} \underline{OM} \wedge \underline{f} dV + \int_{\partial D_t} \underline{OM} \wedge \underline{T} dS = \int_{S_i} \underline{OM} \wedge p \underline{e}_r dS = \underline{0} \text{ (car } \underline{OM} = R_i \underline{e}_r)$$

Le torseur des efforts extérieurs calculé en 0 est nul. L'équilibre du réservoir est donc bien vérifié.

2. La symétrie sphérique du problème implique que  $\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, \phi) = \underline{\underline{\sigma}}(r)$ . Par ailleurs, comme il existe une symétrie totale du problème par rapport à  $\theta$  et  $\phi$ , on a également les relations :

$$\begin{cases} \sigma_{\theta r}(r) = \sigma_{\phi r}(r) \\ \sigma_{\theta \phi}(r) = \sigma_{\phi \theta}(r) \text{ (également obtenue par symétrie de } \underline{\underline{\sigma}}) \\ \sigma_{\theta \theta}(r) = \sigma_{\phi \phi}(r) \end{cases}$$

On peut donc écrire  $\underline{\underline{\sigma}}$  sous la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}(r) & \sigma_{r\theta}(r) & \sigma_{r\phi}(r) \\ \sigma_{r\theta}(r) & \sigma_{\theta\theta}(r) & \sigma_{\theta\phi}(r) \\ \sigma_{r\phi}(r) & \sigma_{\theta\phi}(r) & \sigma_{\phi\phi}(r) \end{bmatrix}$$

L'équation (1) peut alors se ré-écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\sigma_{r\theta} \cot \theta}{r} = 0 \\ \frac{d\sigma_{r\theta}}{dr} + \frac{3}{r}\sigma_{r\theta} = 0 \\ \frac{d\sigma_{r\phi}}{dr} + \frac{1}{r}(3\sigma_{r\phi} + 2\sigma_{\theta\phi} \cot \theta) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

L'équation (5.2) se résoud en  $\sigma_{\theta r}(r) = C e^{-3 \ln r} = \frac{C}{r^3}$  avec  $C$ -cste. De par les conditions limites  $\sigma_{\theta r}(R_i) = \sigma_{\theta r}(R_e) = 0$  on en tire  $C=0$  et

$$\underline{\sigma_{\theta r}(r) = 0 = \sigma_{\phi r}(r)}$$

En remplaçant dans l'équation (5.3) on a alors  $2 \frac{\sigma_{\theta\phi}(r) \cot \theta}{r} = 0 \forall \theta$  d'où

$$\underline{\sigma_{\theta\phi}(r) = 0}$$

Finalement on trouve bien :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) \end{bmatrix}$$

3. A partir de la forme de  $\underline{\sigma}$  ci-dessus on obtient les équations que doit vérifier ce champ :

$$\begin{cases} \text{sur } D_t \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \\ (\text{sur } \Sigma \sigma_{rr} \text{ est continu}) \\ \text{sur } S_i \sigma_{rr}(R_i) = -p \\ \text{sur } S_e \sigma_{rr}(R_e) = 0 \end{cases}$$

4. On fait l'hypothèse que  $e \ll R_i$ . On a alors  $\sigma_{\theta\theta} = \text{cste}$  dans l'épaisseur.

a) Résolution directe à partir des équations locales :

On a l'équation :  $\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}\sigma_{rr} = \frac{2}{r}\sigma_{\theta\theta}$ .

Le résolution de l'équation sans second membre donne  $\sigma_{rr}(r) = A e^{-2\ln r} = \frac{A}{r^2}$  avec  $A = \text{cste}$ .

Une solution triviale de l'équation différentielle étant  $\sigma_{\theta\theta}$  on a donc

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{A}{r^2} + \sigma_{\theta\theta}$$

La détermination des 2 inconnues  $A$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  est réalisée à partir des conditions limites. On a en effet le système de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} \frac{A}{R_e^2} + \sigma_{\theta\theta} = 0 \\ \frac{A}{R_i^2} + \sigma_{\theta\theta} = -p \end{cases} \quad (6)$$

Sa résolution nous donne  $A = -\frac{R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} p \simeq -p \frac{R_i^3}{2e}$  (car  $R_e^2 - R_i^2 \simeq 2R_i e$ ). En substituant dans l'une des 2 équations de (6) on trouve :

$$\sigma_{\theta\theta} \simeq p \frac{R_i}{2e}$$

b) Résolution en utilisant le principe des puissances virtuelles :

On choisit d'appliquer le principe des puissances virtuelles en utilisant le mouvement virtuel  $\underline{V}^* = v^* \underline{e}_r$  (où  $v^*$  est constante dans le domaine).

Le PPV s'écrit :

$$\mathcal{P}_e^*(\underline{V}^*) + \mathcal{P}_{int}^*(\underline{V}^*) = \mathcal{P}_a^*(\underline{V}^*) = 0 \quad (\text{équilibre statique}) \quad (7)$$

Or

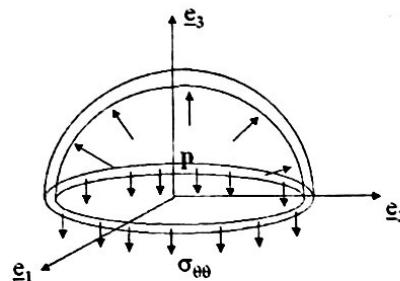
$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e^*(\underline{V}^*) &= \int_{D_t} \underline{f} \cdot \underline{V}^* dV + \int_{\partial D_t} \underline{T} \cdot \underline{V}^* dS \\ &= \int_{S_i} p \underline{e}_r \cdot v^* \underline{e}_r dS = \int_{S_i} p v^* dS = 4\pi R_i^2 p v^* \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{int}^*(V^*) &= - \int_{D_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}^* dV \text{ où } \underline{\underline{D}}^* = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{grad}}} V^* + {}^t \underline{\underline{\text{grad}}} V^*) = \frac{v^*}{r} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\phi \otimes \underline{e}_\phi) \\
 &= -v^* \int_{D_t} \left( \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\sigma_{\phi\phi}}{r} \right) dV = -v^* \int_{D_t} 2 \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} (r d\theta) (r \sin \theta d\phi) dr \\
 &\simeq -2v^* \sigma_{\theta\theta} \int_{r=R_i}^{R_e} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r \sin \theta d\phi d\theta dr \simeq -4\pi \sigma_{\theta\theta} v^* [(R_i + e)^2 - R_i^2] \\
 &\simeq -8\pi e R_i v^* \sigma_{\theta\theta}
 \end{aligned}$$

On trouve alors, comme précédemment,  $\underline{\sigma}_{\theta\theta} \simeq \frac{pR_i}{2c}$

c) Résolution en utilisant l'équilibre global d'une demi-sphère :  
L'équilibre donne



$$\int_{S_{sym}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{e}_3) dS + \int_{S_i} p \underline{e}_r dS = 0 \quad (8)$$

En projetant l'équation (8) sur  $\underline{e}_3$  on trouve :

$$\int_{S_i} \underline{e}_3 \cdot p \underline{e}_r dS = \int_{S_{sym}} \sigma_{\theta\theta} dS \quad (9)$$

Le calcul des 2 termes de l'équation (9) donne

$$\int_{S_i} p \underline{e}_r \cdot \underline{e}_3 dS = p \int_{S_i} \cos \theta R_i^2 \sin \theta d\theta d\phi = p \pi R_i^2$$

$$\int_{S_{sym}} \sigma_{\theta\theta} dS = \sigma_{\theta\theta} \pi (R_e^2 - R_i^2) \simeq 2\pi R_i e \sigma_{\theta\theta}$$

D'où, à nouveau,  $\underline{\sigma}_{\theta\theta} \simeq \frac{pR_i}{2c}$

## Exercice 2 : Contraintes dans une poutre en torsion

- équilibre
- efforts extérieurs exclusivement exercés sur les sections des extrémités
- sur  $S_L$  le torseur des efforts extérieurs s'écrit  $\left\{ \begin{array}{l} \underline{R} = \underline{0} \\ \underline{M} = C\underline{e}_3 \end{array} \right\}_A$

1. Torseur des efforts extérieurs exercés sur la section  $S_0$  :

La poutre étant en équilibre, on doit vérifier, réduit en n'importe quel point N, les relations  $\left\{ \begin{array}{l} \sum \underline{F} = \underline{0} \\ \sum \underline{M} = \underline{0} \end{array} \right\}_N$  et donc en particulier en O

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{R}_{\rightarrow S_0} + \underline{R}_{\rightarrow S_L} = \underline{0} \\ \underline{M}_{\rightarrow S_0} + \underline{M}_{\rightarrow S_L} + \underline{R}_{\rightarrow S_L} \wedge \underline{OA} = \underline{0} \end{array} \right\}_0$$

$$\text{On a donc comme torseur résultant en O : } \left\{ \begin{array}{l} \underline{0} \\ -C\underline{e}_3 \end{array} \right\}_0$$

*Dans les questions 2 et 3 nous nous placerons dans la base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$*

2. On pose comme champ de contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = -k \{ x_2 (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) - x_1 (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2) \} \quad (10)$$

avec k une constante à déterminer.

Pour que la poutre soit en équilibre il faut vérifier les différentes équations de la statique.

- Dans  $\Omega$ , comme  $\underline{f} = \underline{0}$ ,  $\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$  est bien vérifiée.

- Sur  $S_{lat}$  :  $\underline{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = -k \begin{bmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ x_2 \cos \theta - x_1 \sin \theta & & \end{bmatrix} = -k \begin{bmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ r \sin \theta \cos \theta - r \cos \theta \sin \theta & & \end{bmatrix} = \underline{0}$$

La condition de surface libre pour  $S_{lat}$  est donc bien vérifiée en considérant le champ de contraintes sous la forme définie en (10).

- Sur  $S_L$  :  $\underline{n} = \underline{e}_3$  et  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \begin{bmatrix} -k x_2 \\ k x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\underline{R} = \int_{S_L} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS = \int_{S_L} \begin{bmatrix} -k x_2 \\ k x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{aligned}
\underline{M}_A &= \int_{S_L} \underline{AN} \wedge \begin{bmatrix} -kx_2 \\ kx_1 \\ 0 \end{bmatrix} dS = \int_{S_L} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -kx_2 \\ kx_1 \\ 0 \end{bmatrix} dS \\
&= \int_{S_L} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix} dS \\
&= C \underline{e}_3
\end{aligned} \tag{11}$$

En projetant (11) sur  $\underline{e}_3$  il vient

$$\int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} k r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) r dr d\theta = \frac{k\pi a^4}{2} = C$$

D'où

$$k = \frac{2C}{\pi a^4}$$

- Sur  $S_0$  on vérifie bien, avec un raisonnement similaire à celui qui a été tenu pour  $S_L$ , que le champ de contraintes défini par (10) avec  $k = \frac{2C}{\pi a^4}$  permet bien d'avoir  $\underline{R} = \underline{0}$  et  $\underline{M}_0 = -C \underline{e}_3$ .

3. Afin de déterminer le couple  $C$  pour lequel la condition de résistance est atteinte il faut, dans un premier temps, déterminer les contraintes principales de  $\underline{\sigma}$ .

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -kx_2 \\ 0 & -\lambda & kx_1 \\ -kx_2 & kx_1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda k^2(x_1^2 + x_2^2) = -\lambda[\lambda^2 - k^2(x_1^2 + x_2^2)]$$

Les contraintes principales sont  $\begin{cases} 0 \\ |k|\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ -|k|\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{cases}$

On a donc  $\sup_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| = 2|k|\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

Afin de garantir la tenue de la structure *en tout point* on doit avoir  $2|k|a < 2\sigma_0$  soit

$$|C| < \frac{\pi a^3 \sigma_0}{2}$$

Rq : Le problème aurait également pu être résolu en coordonnées cylindriques puisqu'il s'agit d'une poutre cylindrique de section circulaire de génératrice suivant

$e_3$  soumise à une torsion. La forme initiale (10) de  $\underline{\sigma}$  peut alors se ré-écrire en

$$\begin{aligned}
 \underline{\sigma} &= -k \{x_2(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) - x_1(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)\} \\
 &= -k \{r \sin \theta [(\cos \theta \underline{e}_r - \sin \theta \underline{e}_\theta) \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes (\cos \theta \underline{e}_r - \sin \theta \underline{e}_\theta)] \\
 &\quad - r \cos \theta [(\sin \theta \underline{e}_r + \cos \theta \underline{e}_\theta) \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes (\sin \theta \underline{e}_r + \cos \theta \underline{e}_\theta)]\} \\
 &= k r (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta)
 \end{aligned} \tag{12}$$

Nous nous placerons maintenant dans la base  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$

On vérifie bien, à partir de la forme (12), que :

- Dans  $\Omega$ ,  $\underline{\text{div}} \underline{\sigma} = 0$

- Sur  $S_{lat}$ ,  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = k r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

- Sur  $S_L$ ,  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = k r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k r \\ 0 \end{bmatrix}$

d'où

$$\underline{R} = \int_{S_L} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS = 0$$

$$\underline{M}_A = \int_{S_L} (r \underline{e}_r \wedge k r \underline{e}_\theta) dS = \int_{S_L} k r^2 r \underline{e}_z dr d\theta = \frac{k \pi a^4}{2} \underline{e}_z = C \underline{e}_z \text{ et } k = \frac{2C}{\pi a^4}$$

- Sur  $S_0$ , même raisonnement que pour  $S_L$

Pour la détermination du couple limite on a :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & k r \\ 0 & k r & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - k^2 r^2)$$

Les valeurs principales sont  $0, |k| r$  et  $-|k| r$ .

On retrouve bien, pour éviter la rupture, la condition :  $|C| < \frac{\pi a^3 \sigma_0}{2}$

### Exercice 3 : Contraintes dans un barrage

- efforts appliqués :
  - \* volumiques :  $\underline{f} = 2 \rho g \underline{\underline{e}}_1$
  - \* surfaciques : sur OB :  $\underline{T} = \underline{0}$   
sur AB :  $\underline{T} = ?$   
sur OA :  $\underline{T} = \rho g x_1 \underline{\underline{e}}_2$
- équilibre

Hypothèses :

- $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$
- $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  et  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  fonctions linéaires de  $(x_1, x_2)$ , indépendantes de  $x_3$ .

Dans tout l'exercice on se placera dans la base  $(\underline{\underline{e}}_1, \underline{\underline{e}}_2, \underline{\underline{e}}_3)$ .

On a :  $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$

où  $\sigma_{11}(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c$   
 $\sigma_{12}(x_1, x_2) = dx_1 + ex_2 + f$   
 $\sigma_{22}(x_1, x_2) = gx_1 + kx_2 + i$

Les équations d'équilibre que doit vérifier le champ  $\underline{\underline{\sigma}}$  sont :

- dans  $\Omega$ ,  $\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \underline{0}$  qui s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + 2 \rho g = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

et en substituant par les formes de  $\sigma_{11}, \sigma_{12}$  et  $\sigma_{22}$  on obtient

$$a + e = -2 \rho g \quad (13)$$

$$d + k = 0 \quad (14)$$

- sur OA :  $\underline{n} = -\underline{\underline{e}}_2$ ,  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \begin{vmatrix} -\sigma_{12} \\ -\sigma_{22} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \rho g x_1 \\ 0 \end{vmatrix}$

d'où

$$\begin{cases} \sigma_{12}(x_1, 0) = 0 \\ \sigma_{22}(x_1, 0) = -\rho g x_1 \end{cases} \quad \forall x_1 \in [OA] \text{ et } \begin{cases} d x_1 + f = 0 \\ g x_1 + i = -\rho g x_1 \end{cases} \quad \forall x_1 \in [0, L]$$

On a alors :  $\begin{cases} d = f = i = 0 \\ g = -\rho g \end{cases}$

et par (14) :  $k=0$

• sur OB :  $x_1 = r \cos \alpha$ ,  $x_2 = r \sin \alpha$  et  $\underline{n} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \sigma_{11} + \cos \alpha \sigma_{12} \\ -\sin \alpha \sigma_{12} + \cos \alpha \sigma_{22} \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où  $\begin{cases} -\sin \alpha(a r \cos \alpha + b r \sin \alpha + c) + \cos \alpha e r \sin \alpha = 0 \\ -\sin \alpha e r \sin \alpha + \cos \alpha(-\rho g r \cos \alpha) = 0 \end{cases} \quad \forall r$

et  $\begin{cases} c = 0 \\ e = \frac{-\rho g}{\tan^2 \alpha} \\ a + b \tan \alpha = e = \frac{-\rho g}{\tan^2 \alpha} \end{cases}$

En utilisant la relation (13), il vient que :

$$\begin{cases} a = \rho g \left( \frac{1}{\tan^2 \alpha} - 2 \right) \\ b = \frac{e-a}{\tan \alpha} = \frac{2\rho g}{\tan \alpha} \left( 1 - \frac{1}{\tan^2 \alpha} \right) \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \rho g \left( \frac{1}{\tan^2 \alpha} - 2 \right) x_1 + \frac{2\rho g}{\tan \alpha} \left( 1 - \frac{1}{\tan^2 \alpha} \right) x_2 \\ \sigma_{12} = \frac{-\rho g}{\tan^2 \alpha} x_2 \\ \sigma_{22} = -\rho g x_1 \end{cases}$$

Une fois  $\underline{\sigma}$  déterminé, il est maintenant possible de calculer le cisaillement maximum sur les facettes contenant  $\underline{e}_3$ . On a

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \sup_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| \quad (15)$$

avec  $\sigma_i$  les contraintes principales

Rq :  $\sigma_3 = \sigma_{33}$

Détermination de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  :

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\sigma_{11} + \sigma_{22})\lambda + \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = 0$$

$$\Delta = (\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 4(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2$$

Les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont donc  $\frac{1}{2}[\sigma_{11} + \sigma_{22} \pm \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}]$

$$\tau_{max} = \frac{\rho g}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}\right)^2 (x_1 - \frac{2}{\tan \alpha} x_2)^2 + \frac{4 x_2^2}{\tan^4 \alpha}}$$

Déterminons maintenant son maximum sur toute la structure c'est à dire pour tous les points tels que  $\begin{cases} x_1 \in [0, h] \\ x_2 \in [0, x_1 \tan \alpha] \end{cases}$ .

Pour cela, considérons dans un premier temps

$$g_{x_1}(x_2) = \left(1 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}\right)^2 \left(x_1 - \frac{2}{\tan \alpha} x_2\right)^2 + \frac{4x_2^2}{\tan^4 \alpha},$$

fonction de  $x_2$  à  $x_1$  fixé ( $x_2 \in [0, x_1 \tan \alpha]$ ).

Il s'agit d'un polynôme de degré 2 en  $x_2$  avec un coefficient en  $x_2$  positif. De par ce fait, le maximum est atteint au bord.

$$g_{x_1}(0) = \left(1 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}\right)^2 x_1^2$$

$$g_{x_1}(x_1 \tan \alpha) = \left(1 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}\right)^2 x_1^2 + \frac{4x_1^2}{\tan^2 \alpha} \geq g_{x_1}(0)$$

Le maximum de  $g_{x_1}$  est ainsi atteint en  $x_2 = x_1 \tan \alpha$ .

Déterminons maintenant le  $\max_{x_1} [g_{x_1}(x_1 \tan \alpha)] = \max_{x_1} [x_1^2 \left(1 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}\right)^2]$ . Celui-ci est trivialement atteint pour une valeur maximale de  $|x_1|$  soit en  $x_1 = h$ . On a donc au final :

$$\underline{\tau_{max} = \frac{\rho g h}{2} \left(1 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}\right)}$$