CSPs sous ou sur contraints

Julien Alexandre dit Sandretto

Department U2IS

ENSTA Paris

IA302-2020-2021

Introduction

Intéressant de distinguer les problèmes bien contraints (ou carrés) des problèmes **sur ou sous contraints** :

Les méthodes de résolution (certaines ne fonctionnent que sur des systèmes carrés) ou la nature même de la solution peut varier !

Introduction

Systèmes d'équations : un système carré est un système à n inconnues pour n équations (indépendantes), peut avoir zéro, un nombre fini ou une infinité de solutions.

Exemple

Exemple récurrent dans ce cours : l'intersection de cercles

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = d^2$ avec (x_0, y_0) le centre et d son rayon

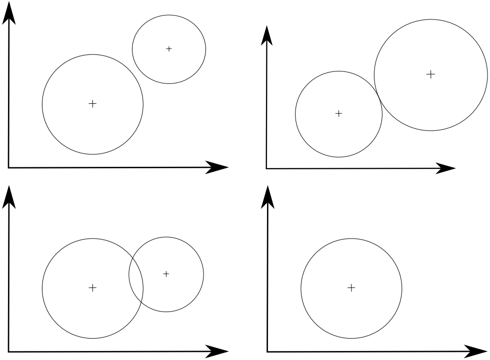
Contrainte : les points appartenant à un cercle vérifient
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - d^2 = 0$

Exemple

Avec deux contraintes de cercle, combien de solutions pouvons nous avoir ?

Exemple

Aucune si les cercles ne s'intersectent pas, une si ils s'intersectent en un point, deux, voire une infinité si ils sont confondus !



CSPs sous contraints

n équations pour m variables, où $n < m$: en général une infinité de solutions, bornée ou non

Solution = ensemble (borné ou non, compact ou non, convexe ou non, etc) : équivalent système bien contraint résolu par intervalles

Une seule solution : faire un choix parmi cet ensemble $\Rightarrow$ fonction de coût donc problème d'optimisation

Exemple de CSPs sous contraints

Si l'on ne considère qu'une seule équation de cercle, l'ensemble solution est le cercle lui même. Nous pouvons alors ajouter une fonction de coût comme par exemple $g(x, y) = y$. Le problème a résoudre est ainsi défini par : $\min y$, avec y tel que $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - d^2 = 0$.

Pour $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et $d = 1$, la solution sera donc $(0, -1)$

L'optimisation ne fait pas partie de ce cours, nous n'irons donc pas plus loin sur le sujet des systèmes sous contraints.

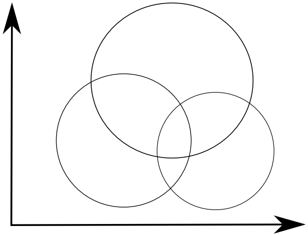
CSPs sur contraints

n équations (indépendantes) pour m variables où $n > m$: en général pas de solutions

Indépendance pour systèmes nonlinéaires :
Pour avoir une solution, les trois cercles doivent s'intersecter en un seul point. Maintenant, que se passe t'il si on enlève un cercle ? Rien, la solution est toujours la même !

CSPs sur contraints

Si l'on considère trois équations de cercle indépendantes (pour deux variables x et y), alors le système n'a pas de solution.



CSPs sur contraints

Résolution d'un CSP sur contraint, la réponse “aucune solution” est intéressante, mais pas suffisante

Toujours fournir une réponse : **théorie de l'explication**

$\Rightarrow$ Expliquer pourquoi il n'y a pas de solution : à cause de quelle(s) contrainte(s)

Théorie de l'explication

Considérant un CSP défini par $\{\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C}\}$, une explication est un ensemble de contraintes $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ et $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{E})$ n'a pas de solution.

Plus évident pour $\mathcal{E} =$ensemble des contraintes $\mathcal{C}$

Plus intéressant $=$ le plus petit ensemble possible (l'explication minimale)

La théorie des explications permet ainsi d'expliquer pourquoi le CSP n'a pas de solution, mais nous n'avons toujours pas de solution à fournir à l'utilisateur...

Théorie de l'explication

Deux approches :

- la **relaxation**
- la solution **“au moins pire”**

Théorie de l'explication

La **relaxation**

semble la plus correcte, si on a pu déterminer l'explication $\mathcal{E}$ minimale, alors la solution au CSP $\{\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C}/\mathcal{E}\}$ (On sait que ce CSP a une solution)

Théorie de l'explication

la solution **"au moins pire"**

Pas dénuée de sens :
Absence de solution n'est pas dûe à certaines contraintes infaisables mais plutôt au fait que toutes sont un peu fausses (modèle approché, mesures plus fausses que prévu, incertitudes mal bornées, etc), alors une solution "moyenne" peut être intéressante (approche la plus courante dans la résolution de systèmes sur contraints avec l'utilisation des moindres carrés)

Théorie de l'explication

Intéressant dans la théorie des explications = possibilité de discuter avec l'utilisateur : lui fournir une explication, lui demander si il souhaite relacher certaines contraintes, lesquelles, si il veut une solution moyenne, etc.

On est vraiment dans l'aide à la décision !

Solutions possibles (contraintes par contraintes)

Chaque contrainte C_i donne X_i :

$X_1 = [1,4], X_2 = [2,4], X_3 = [2,7], X_4 = [6,9], X_5 = [3,4], X_6 = [3,7]$

Par exemple, voici deux méthodes possibles :

Intersection relaxée (q-intersection)

$X^{\{q\}} = \bigcap^{\{q\}} X_i$, intersection de q intervalles parmi n

$X^{\{0\}} = \emptyset, X^{\{1\}} = [3,4], X^{\{2\}} = [3,4], X^{\{3\}} = [2,4] \cup [6,7], X^{\{4\}} = [2,7],$

$X^{\{5\}} = [1,9], X^{\{6\}} =]-\infty,\infty[$

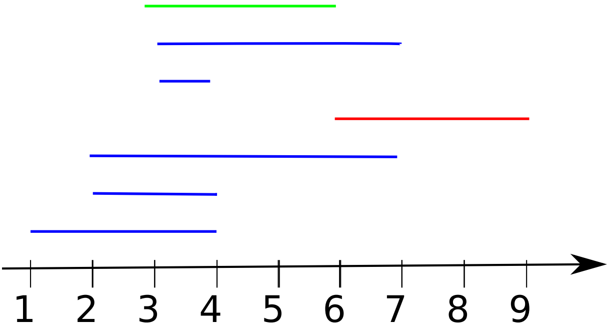
Barycentre (moyenne arithmétique)

$X_b = \frac{\sum_n X_i}{n}$, moyenne des n intervalles

$X_b = [2.8, 5.9]$

Intersection relaxée (q-intersection)

rouge X_4 (outlier) et vert X_b



Théorie de l'explication

Reprenons l'exemple des cercles vu précédement :

- $\mathcal{X} = \{x, y\}$
- $\mathcal{D} = [1, 3.5] \times [1, 2]$
- $\{(x-2)^2 + (y-2)^2 - 1.5^2 = 0, (x-3)^2 + (y-3)^2 - 2^2 = 0, (x-3.5)^2 + (y-0.8)^2 - 1^2 = 0\}$

Ce CSP n'a en effet aucune solution.

TP : écrire un programme d'aide à la décision

En utilisant Ibex, écrivez un programme en C++ qui aidera un utilisateur à décider de l'endroit où ces 3 cercles s'intersectent. Ce programme devra :

- Prouver que le CSP n'a pas de solutions ;
- Expliquer pourquoi ;
- Proposer à l'utilisateur de choisir entre au moins deux approches pour trouver une solution acceptable ;
- Lui fournir cette solution (ou cet ensemble de solutions), quelque soit son choix ;
- Lui fournir également un indicateur pour qu'il puisse juger de cette solution.