Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées Paris
PRB202 - Martingales et Algorithmes Stochastiques
PC3 - 2 décembre 2019

Exercice 1 :

On dit qu'un processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à accroissements indépendants si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire $M_{n+1} - M_n$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(M_0, \cdots, M_n)$.

1. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale de carré intégrable et à accroissements indépendants. On pose $\sigma_0^2 = \mathrm{Var}(M_0)$ et, pour tout $k \geq 1$, $\sigma_k^2 = \mathrm{Var}(M_k - M_{k-1})$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Var}(M_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sigma_k^2$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Calculer le crochet noté $(<M>_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale gaussienne, c'est-à-dire telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur $(M_0, \cdots, M_n)$ soit gaussien.
   (a) Démontrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à accroissements indépendants.
   (b) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, le processus $(Z_n^\lambda = e^{\lambda M_n - \frac{\lambda^2 <M>_n}{2}})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale.

Exercice 2 :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi telles que :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Posons $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ et $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, pour tout $n \geq 1$.

On définit par ailleurs sur $\mathbb{R}$ la fonction "signe" par $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sgn}(x) = \mathbf{1}_{\{x>0\}} - \mathbf{1}_{\{x<0\}}$ et on considère le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $M_0 = 0$ et $M_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{sgn}(S_{k-1}) X_k$, pour tout $n \geq 1$.

1. Démontrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale de carré intégrable et déterminer son crochet.
2. Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale de carré intégrable et calculer son crochet.
3. Trouver la décomposition de Doob de $(|S_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Vérifiez que pour tout $n \geq 1$, M_n est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(|S_1|, \cdots, |S_n|)$.
5. Posons $Y_k = \frac{1}{2}(X_k + 1)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Identifier la loi des variables aléatoires Y_k, $k \in \mathbb{N}$ et de $T_n = \frac{1}{2}(S_n + n)$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
6. Prouver alors que $\mathbb{P}(S_{2j+1} = 0) = 0$ et $\mathbb{P}(S_{2j} = 0) = \binom{2j}{j} 4^{-j}$, quel que soit $j \in \mathbb{N}$, où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, lorsque $(n, k) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq k \leq n$.
7. En-déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[|S_n|] = \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{2j}{j} 4^{-j}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 :

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, |Y_n - Y_{n-1}| = 1$. On suppose que $Y_0 = y_0 \in \mathbb{Z}$.

1. Soit $f \ : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ une fonction $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ - mesurable. Montrer que le processus $(f(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - adapté et intégrable.
2. On définit les dérivées discrètes premières et secondes de f en un point $x \in \mathbb{Z}$ comme suit :
$$f^{'}(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))\,,$$
$$f^{''}(x) = f(x-1) + f(x+1) - 2f(x)\,.$$
Posons, pour tout $n \geq 1\,, F_n^{'} = f^{'}(Y_{n-1})$ et $F_n^{''} = f^{''}(Y_{n-1})$.
Démontrer que quel que soit $n \geq 1$,
$$f(Y_n) - f(Y_{n-1}) = F_n^{'}(Y_n - Y_{n-1}) + \frac{1}{2}F_n^{''}\,.$$
3. En-déduire que pour tout $n \geq 1$,
$$f(Y_n) = f(y_0) + (F^{'} \bullet Y)_n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i^{''}\,, \tag{1}$$
où $((F^{'} \bullet Y)_n)_{n\geq 1}$ désigne l'intégrale stochastique discrète du processus $(F_n^{'})_{n\geq 1}$ au regard de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Supposons que f est convexe, c'est-à-dire $f^{''}(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{Z}$. Identifier alors la décomposition de Doob de la $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - sous-martingale $(f(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Dans cette question, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de plus une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale de carré intégrable et $f(x) = x^2$, pour tout $x \in \mathbb{Z}$.
En utilisant la **formule d'Itô discrète** (1), prouver que $<Y>_n = n$, quel que soit $n \geq 1$.
6. On définit $Y_n = S_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale décrite dans l'Exercice 2. Retrouver la décomposition de Doob de la $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - sous-martingale $(|S_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 :

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale bornée dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, c'est-à-dire que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|M_n|] < +\infty$.

1. Posons $X_{n,m} = \max(M_{n+m}, 0)$, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$, un entier naturel fixé. Montrer que $(X_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_{n+m})_{m\in\mathbb{N}}$ - sous-martingale bornée dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
2. Démontrer que $\mathbb{E}[X_{n,m+1}|\mathcal{F}_n] \geq \mathbb{E}[X_{n,m}|\mathcal{F}_n] \geq 0$, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. En-déduire que les limites $Y_n = \lim_{m\to+\infty} \mathbb{E}[X_{n,m}|\mathcal{F}_n]$ existent $\mathbb{P}$ - presque-sûrement pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En utilisant le théorème de convergence monotone, montrer que $\mathbb{E}[Y_n] < +\infty$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
4. Prouver que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale positive et bornée dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
5. Posons $Z_n = Y_n - M_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale bornée dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
6. En appliquant l'inégalité de Jensen conditionnelle, démontrer que $Y_n \geq \max(M_n, 0)$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
7. Conclure que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut s'écrire comme la différence de deux $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingales positives et bornées dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.