Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées Paris
PRB202 - Martingales et Algorithmes Stochastiques
PC5 - 16 décembre 2019

Exercice 1 : Ruine du joueur

Un joueur et un casino se livrent à une partie de pile ou face avec une pièce non nécessairement équilibrée; on note p la probabilité d'apparition de pile lors d'un jet.

Le joueur reçoit un euro du casino s'il obtient pile et en donne un dans le cas contraire.

Sa fortune initiale est de $a \in \mathbb{N}^*$ euros et celle du casino de $b \in \mathbb{N}^*$ euros; les parties se poursuivent jusqu'à épuisement du capital du joueur ou de celui du casino.

On modélise ce jeu de la manière suivante : si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi telles que $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = -1) = q = 1 - p\,, X_n\,, n \geq 1$ représente le gain algébrique du joueur pour le $n^{\text{ième}}$ lancer.

En posant $S_0 = 0$ et $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$, pour tout $n \geq 1\,, S_n$ constitue alors le total des gains accumulés par le joueur après n parties (pour un jeu qui ne s'arrête pas).

Nous poserons $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$, pour tout $n \geq 1$.

1. Déterminer la nature du processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant les valeurs de p.
2. Soit τ le numéro de la dernière partie avant la fin du jeu, soit $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}^*\,;\, S_n \in \{-a, b\}\}$. Montrer que τ est un $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - temps d'arrêt.
3. On suppose dans cette question que $p = q = \frac{1}{2}$.
   (a) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale de carré intégrable et préciser son crochet $(< S >_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) A l'aide du théorème central-limite, démontrer que $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$.
   (c) Prouver que $(S_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale uniformément intégrable.
   (d) Calculer alors la valeur de $\mathbb{P}(S_\tau = -a)$.
   (e) Montrer que $(S^2_{\tau\wedge n} - < S >_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale uniformément intégrable et en-déduire $\mathbb{E}[\tau]$.
4. On considère maintenant le cas où $p > q$.
   (a) Ecrire la décomposition de Doob de la $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - sous-martingale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer son compensateur noté $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) En appliquant la loi des grands nombres, montrer que τ est un $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - temps d'arrêt fini presque-sûrement.
   (c) On définit pour tout $s > 0$, le processus $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par, quel que soit $n \in \mathbb{N}\,, U_n = s^{S_n}$. Déterminer s pour que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale non constante.
   (d) Vérifier alors que $(U_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale uniformément intégrable.
   (e) En-déduire la probabilité de ruine du joueur, soit $\mathbb{P}(S_\tau = -a)$, et calculer $\mathbb{E}[\tau]$, le temps moyen du jeu.

Exercice 2 : Processus de branchement

Soit $(U_k^n)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, de carré intégrable et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Notons $\mu = \mathbb{E}[U_1^1]$ et $\mathrm{Var}(U_1^1) = \sigma^2$; dans la suite, on supposera que $\mu > 0$.

On considère alors le modèle démographique suivant : la population à l'instant n, soit $Z_n\,, n \in \mathbb{N}$ est définie par : $Z_0 = 1$ puis $Z_{n+1} = 0$ si $Z_n = 0$ et $Z_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{Z_n} U_k^{n+1}$, dans le cas contraire. Autrement dit, le $k^{\text{ième}}$ individu vivant à l'instant n , $k \in \{1, \cdots, Z_n\}$, donne naissance à U_k^{n+1} descendants puis disparaît.

Définissons la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(U_k^l\,; 1 \leq l \leq n\,, k \geq 1)$, pour tout $n \geq 1$ et considérons le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donné par $X_n = \frac{Z_n}{\mu^n}$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $(n, s) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathbb{E}[Z_{n+1}\mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}|\mathcal{F}_n] = \mu\, s\, \mathbf{1}_{\{Z_n=s\}}$.
   En-déduire que : $\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mu Z_n$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer de la même manière que $\mathbb{E}[Z_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = \sigma^2 Z_n + \mu^2 Z_n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En-déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les valeurs de $\mathbb{E}[Z_n]$ et $\mathbb{E}[Z_n^2]$.
4. Démontrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - martingale de carré intégrable et calculer son crochet $(<X>_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers une variable aléatoire intégrable X_∞ .
6. Démontrer que, si $\mu > 1$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^2 .
7. On suppose dans cette question que $\mu = 1$ et $\mathbb{P}(U_k^n = 1) < 1$, pour tout $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
   (a) Introduisons la fonction génératrice, notée ϕ, des variables aléatoires U_k^n , $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
   Montrer que, pour tout $m \geq 1$, si $p_m = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{m} U_k^n = m\right) = 1$, alors $\phi(t) = t$, pour tout $t \in [0, 1]$.
   En-déduire que $p_m < 1$, quel que soit $m \geq 1$.
   (b) On pose $\tilde{\Omega} = \cup_{N\geq 1} \cap_{n\geq N} \{X_n = X_\infty\}$; démontrer que $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$.
   (c) Déduire de ce qui précède que $\mathbb{P}(X_\infty = m) = 0$, pour tout entier $m \geq 1$.
   La martingale $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniformément intégrable dans ce cas?