AUT202 - Automatique : dynamique et contrôle des systèmes

Commande optimale et filtre de Kalman

Nicolas Petit

Centre Automatique et Systèmes
MINES Paris, PSL University
nicolas.petit@minesparis.psl.eu

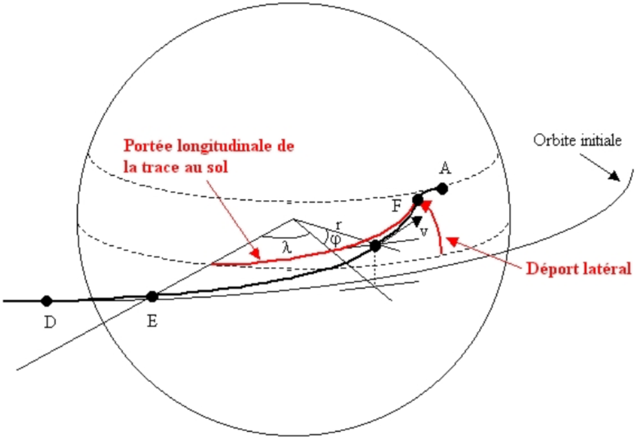
Mercredi 2 mars 2022

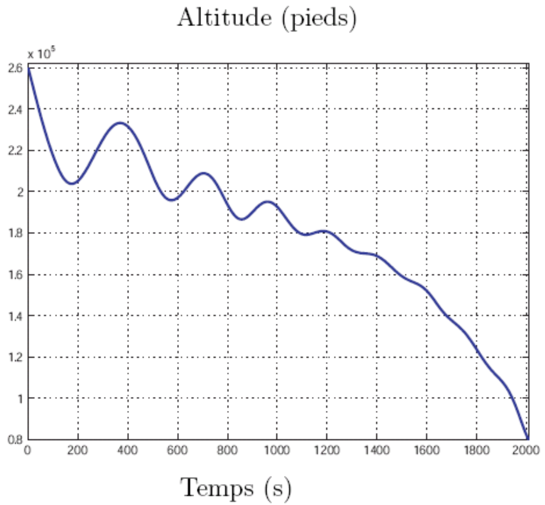
https://cas.mines-paristech.fr/~petit/tmp/2mars.pdf

Plan

Optimisation de transitoires

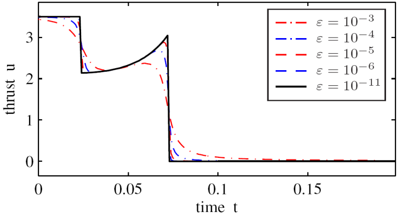
Exemple : réentrée atmosphérique, optimisation d'une trajectoire (loi horaire)





"Rebonds atmosphériques", osc. phugoïde, Zhukovskii 1891

Le problème de Goddard



Optimisation de dimension finie

$$\min_{\left\{\begin{array}{c} x \in \mathbb{R}^n \\ h_1(x) = 0, \ldots, h_p(x) = 0 \end{array}\right.} J(x)$$

- on rajoute des multiplicateurs de Lagrange $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$
- on introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = J(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(x) = J(x) + \lambda^T h(x)$$

- on explicite les conditions de stationnarité du Lagrangien en faisant comme si les variables x et λ pouvaient varier librement. Ces conditions sont $\delta\mathcal{L} = 0$ pour toutes variations infinitésimales δx et $\delta\lambda$ des variables x et λ

Optimisation de dimension finie

$$
\min_{\left\{\begin{array}{c} x \in \mathbb{R}^n \\ h_1(x) = 0, \ldots, h_p(x) = 0 \end{array}\right.} J(x)
$$

- on rajoute des multiplicateurs de Lagrange $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$
- on introduit le Lagrangien

$$
\mathcal{L}(x, \lambda) = J(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(x) = J(x) + \lambda^T h(x)
$$

- on explicite les conditions de stationnarité du Lagrangien en faisant comme si les variables x et λ pouvaient varier librement. Ces conditions sont $\delta\mathcal{L} = 0$ pour toutes variations infinitésimales δx et $\delta\lambda$ des variables x et λ

Optimisation de dimension finie

$$\left\{\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & J(x) \\ h_1(x) = 0, \ldots, h_p(x) = 0 & \end{array}\right.$$

- on rajoute des multiplicateurs de Lagrange $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$
- on introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = J(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(x) = J(x) + \lambda^T h(x)$$

- on explicite les conditions de stationnarité du Lagrangien en faisant comme si les variables x et λ pouvaient varier librement. Ces conditions sont $\delta\mathcal{L} = 0$ pour toutes variations infinitésimales δx et $\delta\lambda$ des variables x et λ

Optimisation de dimension finie

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & J(x) \\ h_1(x) = 0, \dots, h_p(x) = 0 \end{cases}$$

- on rajoute des multiplicateurs de Lagrange $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$
- on introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = J(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(x) = J(x) + \lambda^T h(x)$$

- on explicite les conditions de stationnarité du Lagrangien en faisant comme si les variables x et λ pouvaient varier librement. Ces conditions sont $\delta\mathcal{L} = 0$ pour toutes variations infinitésimales δx et $\delta\lambda$ des variables x et λ

Théorème de stationnarité

Si (x^*, λ^*) est un point stationnaire du Lagrangien $\mathcal{L}(x, \lambda) = J(x) + \lambda^T h(x)$ (i.e. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$, (n+p équations)) alors x^* est un point stationnaire de J sous les contraintes h, i.e. un candidat à être solution de

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & J(x) \\ h_1(x) = 0, \ldots, h_p(x) = 0 \end{cases}$$

Calcul des variations et adjoint

$$\min_{x,u} \ell(x(t_f)) + \int_0^{t_f} L(x(t),u(t))\,dt$$

$$\begin{cases} [0,t_f] \ni t \mapsto (x(t),u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ x(0) = x^0 \\ f_1(x(t),u(t)) - \frac{d}{dt}x_1(t) = 0,\ t \in [0,t_f] \\ \vdots \\ f_n(x(t),u(t)) - \frac{d}{dt}x_n(t) = 0,\ t \in [0,t_f] \end{cases}$$

On introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(x,u,\lambda) = \ell(x(t_f)) + \int_0^{t_f} L(x(t),u(t))\,dt$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^{t_f} \lambda_i(t) \left(f_i(x(t),u(t)) - \frac{d}{dt}x_i(t) \right) dt$$

Le Lagrangien $\mathcal{L}$ est une fonctionnelle

On écrit les conditions de stationnarité de $\mathcal{L}$ pour toutes variations

- $t \mapsto \delta\lambda(t)$
- $t \mapsto \delta u(t)$
- $t \mapsto \delta x(t)$ ($\delta x(0) = 0$)

Conditions de stationnarité (1)

Pour toute fonction $t \mapsto \delta\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ on doit avoir

$$\delta\mathcal{L} = \int_0^{t_f} \delta\lambda^T(t) \left(f(x(t), u(t)) - \frac{d}{dt}x(t) \right) \, dt = 0$$

La seule possibilité [1] est qu'à chaque instant $t \in [0, t_f]$,

$$f(x(t), u(t)) - \frac{d}{dt}x(t) = 0$$

1. On se reportera au lemme de du Bois-Reymond.

Conditions de stationnarité (2)

Pour toute fonction $t \mapsto \delta u(t) \in \mathbb{R}^m$, on doit avoir

$$\delta\mathcal{L} = \int_0^{t_f} \left(\left.\frac{\partial L}{\partial u}\right|_{(x(t),u(t))} \delta u(t) + \lambda^T(t) \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x(t),u(t))} \delta u(t) \right) dt = 0$$

En mettant δu en facteur on obtient

$$\delta\mathcal{L} = \int_0^{t_f} \left(\left.\frac{\partial L}{\partial u}\right|_{(x(t),u(t))} + \lambda^T(t) \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x(t),u(t))} \right) \delta u(t)\, dt = 0$$

Ceci donne la condition de stationnarité sur u

$$\frac{\partial L}{\partial u}(x,u) + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u}(x,u) = 0, \quad t \in [0, t_f]$$

Conditions de stationnarité (3)

Pour toute fonction $t \mapsto \delta x(t) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\delta x(0) = 0$, on doit avoir

$$0 = \delta \mathcal{L} = \frac{\partial \ell}{\partial x}(x(t_f))\delta x(t_f) +$$

$$\int_0^{t_f} \left[\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{(x(t),u(t))} \delta x(t) + \lambda^T(t) \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x(t),u(t))} \delta x(t) - \frac{d}{dt}\delta x(t) \right) \right] dt$$

Intégration par partie

$$-\int_0^{t_f} \lambda^T(t) \frac{d}{dt}\delta x(t)\, dt = -[\lambda^T \delta x]_0^{t_f} + \int_0^{t_f} \frac{d}{dt}\lambda^T(t)\, \delta x(t)\, dt$$

$$= -\lambda^T(t_f)\delta x(t_f) + \int_0^{t_f} \frac{d}{dt}\lambda^T(t)\, \delta x(t)\, dt$$

(car $\delta x(0) = 0$)

Pour toute fonction $t \mapsto \delta x(t)$ telle que $\delta x(0) = \delta x(t_f) = 0$, on a

$$\int_0^{t_f} \left[\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{(x(t),u(t))} + \lambda^T(t) \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x(t),u(t))} + \frac{d}{dt}\lambda^T(t) \right] \delta x(t)\, dt = 0$$

On en déduit

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{(x(t),u(t))} + \lambda^T(t) \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x(t),u(t))} + \frac{d}{dt}\lambda^T(t) = 0$$

c.-à-d.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^T_{(x,u)} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T_{(x,u)} \lambda + \frac{d}{dt}\lambda = 0, \;\; t \in [0, t_f]$$

Enfin, avec $\delta x(t_f) \neq 0$ on obtient de $\delta \mathcal{L} = 0$ la condition finale

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \ell}{\partial x}(x(t_f))$$

Problème aux deux bouts

En somme, les conditions de stationnarité sont, pour $t \in [0, t_f]$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = f(x(t), u(t)) \\ \dfrac{d}{dt}\lambda(t) = -\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^T_{(x(t),u(t))}\lambda(t) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)^T_{(x(t),u(t))} \\ 0 = \left(\dfrac{\partial L}{\partial u}\right)_{(x(t),u(t))} + \lambda^T\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)_{(x(t),u(t))} \end{cases}$$

avec comme conditions au bord

$$x(0) = x^0, \quad \lambda(t_f) = \frac{\partial \ell}{\partial x}(x(t_f))$$

Il s'agit d'un problème aux deux bouts, ce n'est pas un *problème de Cauchy*

Linéarisé tangent autour d'une trajectoire $(x_r(t), u_r(t))$

Optimisation

La trajectoire elle même est issue d'une optimisation

$$\begin{cases} \Delta x(0) = \Delta x^0 \\ \frac{d}{dt}\Delta x(t) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_r(t), u_r(t))\right)}_{A(t)} \cdot \Delta x(t) + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u}(x_r(t), u_r(t))\right)}_{B(t)} \cdot \Delta u(t) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}x = A(t)x + B(t)u(t)$$

Problème à résoudre

Étant donné un point de départ (perturbation), on cherche les meilleures corrections (autour de la trajectoire)

Contrôleur LQ

En particulier, pour un système linéaire (instationnaire)

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u$$

et un coût quadratique à minimiser

$$\frac{1}{2}x^T(t_f)S_f x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left(x^T(t)Rx(t) + u^T(t)Qu(t)\right)$$

compromis tolérance sur l'erreur d'état, effort sur la commande
S_f, R sont sym. positives, Q est sym. définie pos.

Problème aux deux bouts

$f = Ax + Bu$, $L = \frac{1}{2}(x^T Rx + u^T Qu)$ et $\ell = \frac{1}{2}x^T S_f x$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A(t)x(t) - BQ^{-1}B^T\lambda(t) \\ \frac{d}{dt}\lambda(t) &= -Rx(t) - A^T(t)\lambda(t) \end{aligned}\right\}$$

avec les conditions limites bilatérales

$$x(0) = x^0, \quad \lambda(t_f) = S_f x(t_f)$$

L'*état adjoint* λ est de la même dimension que x. La commande optimale est alors donnée par

$$u(t) = -Q^{-1}B^T(t)\lambda(t)$$

Solution explicite sous forme linéaire

$$\lambda(t) = S(t)x(t)$$

avec $S(t_f) = S_f$

En substituant, on obtient

$$\frac{d}{dt}S(t)x(t) + S(t)A(t)x(t) - S(t)B(t)Q^{-1}B^T(t)S(t)x(t)$$
$$= -Rx(t) - A^T(t)S(t)x(t)$$

Il suffit alors de choisir S solution de l'équation différentielle matricielle *de Riccati* en temps rétrograde (quadratique en l'inconnue S)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}S(t) = -S(t)A(t) + S(t)B(t)Q^{-1}B^T(t)S(t) - R - A^T(t)S(t) \\ &S(t_f) = S_f \end{aligned}\right\}$$

pour obtenir finalement la commande optimale

$$u(t) = -Q^{-1}B^T(t)S(t)x(t)$$

Énoncé

Contrôleur LQ

Soit $\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u$ avec $x(0)$ comme condition initiale, et le critère à minimiser

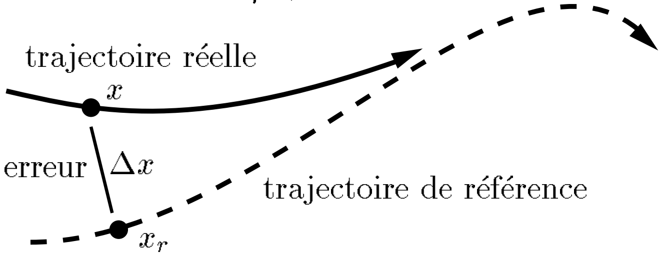
$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)S_f x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left(x^T(t)Rx(t) + u^T(t)Qu(t)\right) dt$$

où $A(t)$ est une matrice $n \times n$, $B(t)$ est une matrice $n \times m$, S_f et R sont symétriques positives, Q est symétrique définie positive. La solution à ce problème de minimisation est la loi de *feedback optimal*

$$u(t) = -Q^{-1}B^T(t)S(t)x(t)$$

où S est définie par l'*équation différentielle de Riccati* rétrograde, et la valeur du critère qui lui est associée est $J^{opt} = \frac{1}{2}x^T(0)S(0)x(0)$

$$u = u_r + \Delta u \ ?$$



Corrections optimales :

$$\Delta u(t) = -Q^{-1} B^T(t) S(t) \Delta x(t)$$

Coût total de la correction :

$$\frac{1}{2} x^T(0) S(0) x(0)$$

Régulateur LQR

Passage à la limite $t_f \to +\infty$ on va utiliser la commande LQ en feedback, l'horizon étant naturellement glissant

$$\int_0^{+\infty} \left(x^T(t)Rx(t) + u^T(t)Qu(t) \right) dt$$

où R est sym. positive, Q sym. définie positive et le système est linéaire stationnaire

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu$$

où l'état $x \in \mathbb{R}^n$, la commande $u \in \mathbb{R}^m$ et les matrices A et B sont de tailles $n \times n$ et $n \times m$

Régulateur LQR

$$\min_u \int_0^{+\infty} \left(x^T(t)Rx(t) + u^T(t)Qu(t) \right) dt, \quad \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu$$

i) (A, B) est *commandable* *ii)* R est sym. pos. *iii)* Q est sym. déf. pos. *iv)* $\exists$ une racine de R telle que $(R^{1/2}, A^T)$ est commandable

Solution : loi de feedback optimal

$$u(t) = -Q^{-1}B^T S^0 x(t)$$

où S^0 est l'unique solution symétrique stabilisante de l'équation de Riccati algébrique

$$0 = SA + A^T S - SBQ^{-1}B^T S + R$$

et la valeur du critère qui lui est associée est $x^T(0)S^0x(0)$

Preuve : construction d'une solution

1. comparaison avec un placement de pôles : exp. stabilisant, il fournit une intégrale convergente. $t \mapsto \min_u \int_0^t$ est majorée et croissante donc convergente. Limite : $x^T(0)\Sigma_\infty x(0)$
2. Σ_∞ est solution de l'équation de Riccati algébrique
$$0 = SA + A^T S - SBQ^{-1}B^T S + R$$
3. Σ_∞ est sym. déf. pos. sous l'hypothèse de commandabilité
4. $V(x) = x^T \Sigma_\infty x$ est fonction de Lyapounov. L'ensemble $\frac{d}{dt}V(x) = 0$ est donné par
$$R^{1/2}x(0) = 0 = R^{1/2}Ax(0) = ... = R^{1/2}A^{n-1}x(0)$$
qui est réduit à $\{0\}$
5. Unicité de la solution de l'éq. de Riccati stabilisante : lemme d'algèbre linéaire
6. Calcul du coût optimum

Exemple

Problème

Considérons le système $\frac{d}{dt}x = \frac{-1}{\tau}x + u$ et le critère quadratique à minimiser $\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(ax^2 + bu^2)dt$ où $a \geq 0$, $b > 0$

Solution

L'équation (ici scalaire) de Riccati algébrique associée est

$$0 = -\frac{2}{\tau}S - \frac{S^2}{b} + a$$

possède 2 solutions $S_\pm = \frac{-b}{\tau} \pm \sqrt{\frac{b^2}{\tau^2} + ab}$. La commande associée est $u = \left(\frac{1}{\tau} \mp \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \frac{a}{b}}\right)x$. La commande optimale correspond à S_+

$a \to +\infty$, $\max|u| \to +\infty$

Résumé : Optimiser une trajectoire

1. De manière générale : un problème aux deux bouts
2. Admet une solution analytique pour dynamique linéaire et coût quadratique
3. Requière des outils numériques pour les autres cas

Produit intéressant : le régulateur LQR

Implicitement place les pôles (les valeurs propres en boucle fermée) de manière optimale.

plus facile que de choisir les valeurs propres (la stabilité est robuste)

Alternative numérique

Adjoindre puis discrétiser

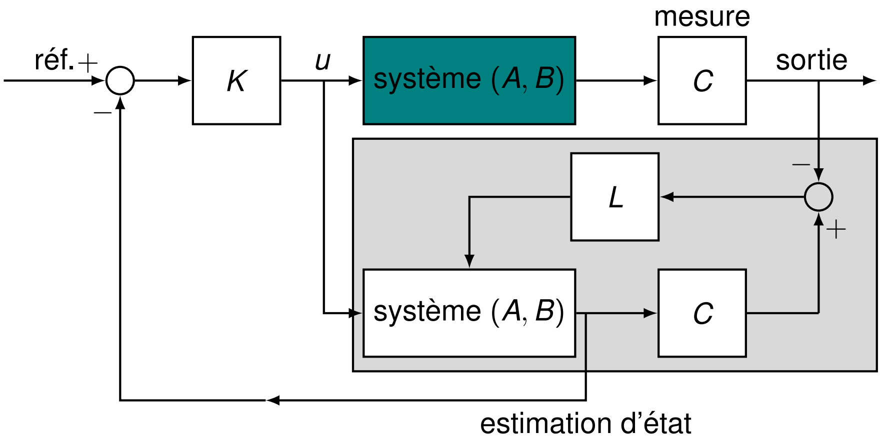
Adjoint : λ
Solveur : discrétisation des conditions

ou

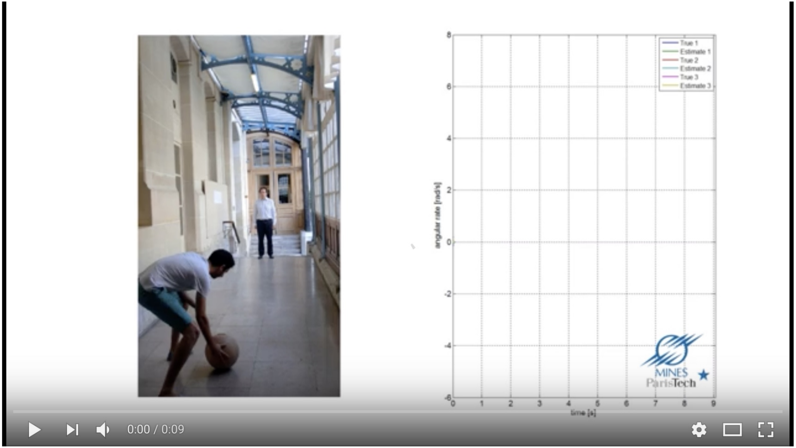
Discrétiser puis adjoindre

Chercher les inconnues x, u sous forme discrétisée
Solveur créera les multiplicateurs au cours de la résolution.

Observateur-contrôleur



Exemple fusion de données



Filtre de Kalman

- L'observateur asympotique est un filtre

$$\hat{x} = x - \tilde{x}, \quad \frac{d}{dt}\tilde{x} = (A - LC)\tilde{x} + L\rho$$

lorsque $y = Cx + \rho$

- Méthode de réglage d'un observateur. Le théorème de placement de pôles dit qu'on peut librement choisir les valeurs propres. Où les placer ? Là ou c'est optimal du point de vue du bruit (défauts des capteurs)
- Technique proche de la commande LQR qui place les valeurs propres de manière optimale en limitant (compromis) l'effort de la commande (limite des actionneurs)

Informations disponibles

(1)-Modèle

équations représentant le comportement réel avec une certaine incertitude

(2)-Mesures

signaux mesurés/échantillonés/bruités avec un certain bruit (voir expérience)

Formalisme du filtre de Kalman

Système linéaire stationnaire incertain

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) + \xi(t), \quad y(t) = Cx(t) + \varrho(t)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, et $\xi(t) \in \mathbb{R}^q$ et $\varrho(t) \in \mathbb{R}^p$ sont des signaux stochastiques, bruits blancs gaussiens centrés

$$\begin{aligned} E(\xi(t)) &= 0, \qquad \mathrm{cov}\,(\xi(t), \xi(\tau)) = M_\xi(t)\,\delta(t-\tau) \\ E(\varrho(t)) &= 0, \qquad \mathrm{cov}\,(\varrho(t), \varrho(\tau)) = M_\varrho\,\delta(t-\tau) \end{aligned}$$

δ mesure de Dirac, M_ξ, M_ϱ matrices de variance sym. déf. positives

$\Rightarrow$ $x(t)$ est un processus stochastique

Variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire (V.A.) scalaire

- espérance $E(X)$ de X ou moyenne
  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$
- variance $Var(X)$
  $Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 p(x)dx$
- écart type $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$
- Une V.A. X de moyenne m et de variance σ dont la densité de probabilité $p(x)$ suit une loi gaussienne :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

est appelée V.A. gaussienne

Vecteur aléatoire

Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, ..., X_q)^T$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^q$

- Vecteur des moments d'ordre 1 :
  $E(\boldsymbol{X}) = (E(X_1), E(X_2), ..., E(X_q))^T$
- Matrice des moments d'ordre 2 centrés, appelée matrice de covariance :

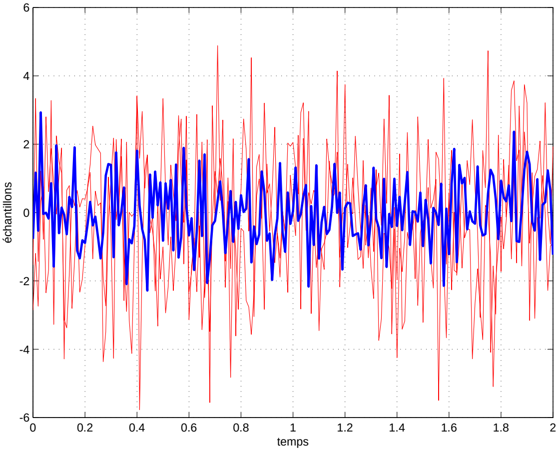
$$COV(\boldsymbol{X}) = E((\boldsymbol{X} - E(\boldsymbol{X}))(\boldsymbol{X} - E(\boldsymbol{X})^T))$$

$$COV(\boldsymbol{X})_{i,j} = \int_{R^2} (x_i - E(X_i))(x_j - E(X_j))dF(x_i, x_j)$$

La matrice de covariance d'un vecteur aléatoire X est symétrique et positive.

Bruits blancs gaussiens centrés (scalaires)

$$E\left(\xi(t)\right) = 0, \qquad \mathrm{cov}\left(\xi(t), \xi(\tau)\right) = M_\xi \; \delta(t-\tau)$$
$$E\left(\varrho(t)\right) = 0, \qquad \mathrm{cov}\left(\varrho(t), \varrho(\tau)\right) = M_\varrho \; \delta(t-\tau)$$



Estimation stochastique

On connaît : les entrées, les mesures et le modèle
Les mesures doivent être en accord

- avec le modèle : principe des observateurs
- avec la structure du bruit

Il faut en tenir compte dans les gains
On va utiliser un observateur particulier

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu - K(t)(C\hat{x} - y)$$

$\hat{x}$ est un processus stochastique dépendant de K : estimateur de x
On va chercher à minimiser la variance de son erreur :
$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$variance = E\left(\tilde{x}^T\tilde{x}\right), \qquad J = \mathrm{trace}[E(\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t))]$$

Équation de la variance

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = Ax + Bu + \xi(t), \qquad y = Cx + \varrho(t) \\ \frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu - K(t)(C\hat{x} - y) \end{cases}$$

L'erreur $\tilde{x} = x - \hat{x}$ satisfait

$$\frac{d}{dt}\tilde{x} = (A - K(t)C)\tilde{x} + \xi(t) + K(t)\varrho(t)$$

C'est un processus stochastique, sa variance (matrice) est

$$\Sigma(t) = E(\tilde{x}(t)\tilde{x}(t)^T)$$

Équation différentielle (déterministe) de la variance

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Sigma(t) =& (A - K(t)C)\Sigma(t) + \Sigma(t)(A - K(t)C)^T \\ &+ \underbrace{\mathrm{variance}(\xi(t) + K(t)\varrho(t))}_{M_\xi + K(t)M_\varrho K(t)^T} \end{aligned}$$

Problème d'optimisation

Étant donnée la dynamique (déterministe), sur l'intervalle d'observation $[0, t_f]$

$$\frac{d}{dt}\Sigma = (A - K(t)C)\Sigma + \Sigma(A - K(t)C)^T + M_\xi + K(t)M_\varrho K(t)^T$$

on cherche la loi horaire $[0, t_f] \ni t \mapsto K(t)$ qui minimise

$$\mathrm{trace}(\Sigma(t_f)) = E(\tilde{x}^T(t_f)\tilde{x}(t_f))$$

Optimisation

C'est un problème de planification optimale, l'état est $\Sigma(t)$ (taille $n \times n$), et le contrôle est $K(t)$ (n composantes)

Lagrangien et problème aux deux bouts

$$\mathcal{L} = \mathrm{trace}(\Sigma(t_f)) + \text{"} \int_0^{t_f} \lambda^T \left((\ldots) - \frac{d}{dt}\Sigma(t) \right) dt\text{"}$$

Problème aux deux bouts

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Sigma = (\ldots) \\ \dfrac{d}{dt}\lambda_{ij} = -\left(\dfrac{\partial(\lambda^T(\ldots))}{\partial \Sigma_{ij}} \right) \\ 0 = \dfrac{\partial}{\partial K_i}\left(\lambda^T(\ldots) \right) \\ \Sigma(0) = \text{donnée (connaissance a priori)} \\ \lambda_{ij}(t_f) = \dfrac{\partial(\mathrm{trace}(\Sigma(t_f)))}{\partial \Sigma_{ij}} \end{cases}$$

Calcul du gain optimal

Les conditions $0 = \frac{\partial}{\partial K_i}\left(\lambda^T(\ldots)\right)$ sont assez simples car $\lambda_{ij \neq i} = 0$. Au final on obtient K par “dérivation” de

$$(A - K(t)C)\Sigma + \Sigma(A - K(t)C)^T + M_\xi + K(t)M_\varrho K(t)^T$$

c.-à-d.

$$-2\Sigma C^T + 2K(t)M_\varrho = 0$$

d’où

$$K = \Sigma C^T M_\varrho^{-1}$$

λ n’est qu’un intermédiaire

Résumé du filtre

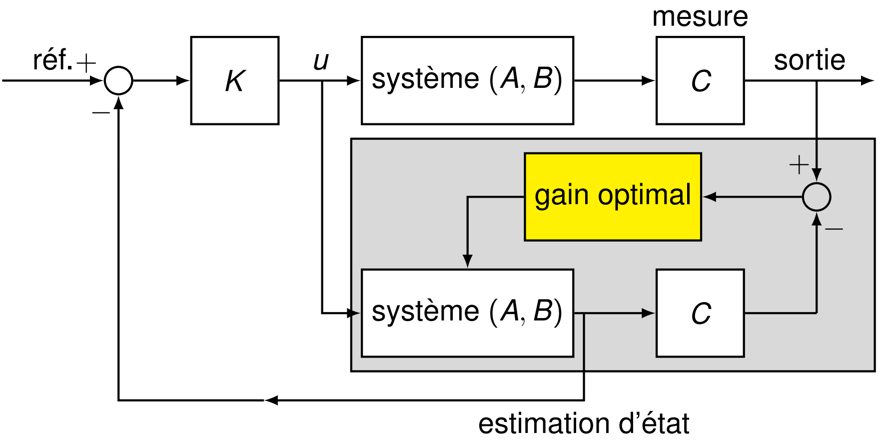
Filtre de Kalman (filtre non biaisé minimisant la variance de l'erreur)

Système dynamique avec $\hat{x}$ et Σ comme états

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= Ax + Bu + \xi(t), \qquad y = Cx + \varrho(t) \\ \frac{d}{dt}\hat{x} &= A\hat{x} + Bu + K(t)(y - C\hat{x}) \\ K(t) &= \Sigma(t)C^T M_\varrho^{-1} \\ \frac{d}{dt}\Sigma(t) &= (A - K(t)C)\Sigma(t) + \Sigma(t)(A - K(t)C)^T \\ &\quad + M_\xi + K(t)M_\varrho K(t)^T \end{aligned}\right.$$

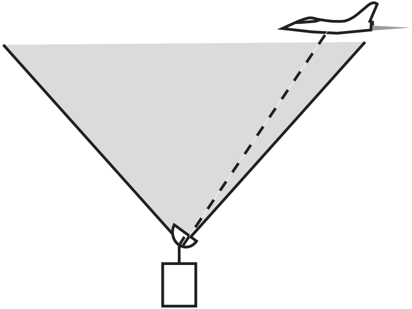
Conditions initiales $\hat{x}(0), \Sigma(0)$. Sortie $\hat{x}(t)$

Mise en place



Exemple

Suivi radar (1D) d'une cible non manœuvrante



$\frac{d^2}{dt^2}x = 0$, position mesurée (avec bruit), vitesse inconnue.

Question

obtenir le meilleur suivi de la cible

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \frac{d}{dt}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \frac{d}{dt}x \end{pmatrix}$$

Observable, mais bruit de mesure

$$y = [1 \quad 0]\begin{pmatrix} x \\ \frac{d}{dt}x \end{pmatrix} + \varrho$$

$M_\varrho = 1$

$$K(t) = \Sigma(t)C^T,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma = (A - \Sigma(t)C^T C)\Sigma(t) + \Sigma(t)(A - \Sigma(t)C^T C)^T + \Sigma(t)C^T C\Sigma(t)^T$$

Condition initiale : $x(0)$ uniformément distribuée sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ et $\frac{d}{dt}x(0)$ uniformément distribuée sur $[-4, 4]$

$$\Sigma(0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

Solution analytique

$$\Sigma(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix}$$

p_{ij} fraction rationnelles. Gain optimal

$$K(t) = \Sigma(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 1 = \begin{pmatrix} p_{11}(t) \\ p_{12}(t) \end{pmatrix}$$

Observateur optimal (filtre de Kalman)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \frac{d}{dt}\hat{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_{11}(t) & 1 \\ -p_{12}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \frac{d}{dt}\hat{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11}(t) \\ p_{12}(t) \end{pmatrix} y(t)$$

Cas asymptotique : observation de $]-\infty, t]$

De manière générale

$$
\begin{aligned}
K(t) &= \Sigma(t) C^T M_\varrho^{-1} \\
\frac{d}{dt}\Sigma &= (A - K(t)C)\Sigma(t) + \Sigma(t)(A - K(t)C)^T \\
&\quad + M_\xi + K(t) M_\varrho K(t)^T
\end{aligned}
$$

se simplifie. L'équation de Riccati différentielle

$$
\frac{d}{dt}\Sigma = A\Sigma(t) + \Sigma(t)A^T + M_\xi - \Sigma C^T M_\varrho^{-1} C \Sigma^T(t)
$$

lorsque l'intervalle d'observation $[0, t]$ est remplacé par $]-\infty, t]$, devient une équation de Riccati algébrique. On peut la résoudre sous certaines hypothèses

Filtre de Kalman asymptotique

Si le système linéaire stationnaire $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu + \xi$, $y = Cx + \varrho$ est observable alors, étant données les matrices de covariance M_ξ et M_ϱ des bruits blancs gaussiens centrés ξ et ϱ, le meilleur observateur asymptotique (au sens stochastique défini précédemment) est

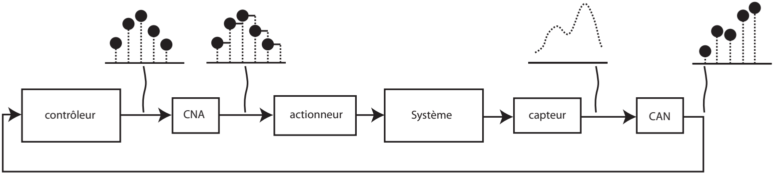
$$\frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu + K(y(t) - C\hat{x})$$

avec $K = \Sigma C^T M_\varrho^{-1}$ avec Σ solution de l'équation de Riccati algébrique

$$0 = A\Sigma + \Sigma A^T + M_\xi + \Sigma C^T M_\varrho^{-1} C \Sigma^T(t)$$

Passage du continu au discret

En vue de l'implémentation pratique



$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k] \quad (1)$$
$$y[k] = Cx[k] \quad (2)$$

$$A_d = \exp(AT_e), \quad B_d = \int_0^{T_e} \exp(At)Bdt$$

Formalisme et question posée

Soit le système en temps discret

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + \xi[k], \quad y[k] = Cx[k] + \rho[k]$$

Quelle est la meilleure estimée de $x[k]$ sachant les mesures $y[0], y[1], ..., y[k]$?

Filtre de Kalman en temps discret

Initialisation $\begin{cases} \hat{x}_p[0] = \hat{x}_r[0] = E(x^0) \\ \Sigma_p[0] = \Sigma_r[0] = \mathrm{var}(x^0) \end{cases}$

Propagation $\begin{cases} \hat{x}_p[k+1] = A\hat{x}_r[k] + Bu[k] \\ \Sigma_p[k+1] = A\Sigma_r[k]A^T + M_\xi \end{cases}$

Recalage (si pas de mesure, pas de recalage)

$$\begin{cases} K = \Sigma_p[k+1]C^T \left(C\Sigma_p[k+1]C^T + M_\rho \right)^{-1} \\ \hat{x}_r[k+1] = \hat{x}_p[k+1] + K(y[k+1] - C\hat{x}_p[k+1]) \\ \Sigma_r[k+1] = \left(\Sigma_p[k+1]^{-1} + C^T M_\rho^{-1} C \right)^{-1} \end{cases}$$

l'estimation recherchée de $x[k]$ est simplement $\hat{x}_r[k]$.

Variantes et Extensions les plus courantes

1. Forme de Joseph : lemme d'inversion matriciel sur $\Sigma_r[k+1] = \left(\Sigma_p[k+1]^{-1} + C^T M_\rho^{-1} C\right)^{-1}$

$$\Sigma_r[k+1]$$

$$= \Sigma_p[k+1] - \Sigma_p[k+1]C^T \left(C\Sigma_p[k+1]C^T + M_\rho\right)^{-1} C\Sigma_p[k+1]$$

car (formule de Sherman-Morrison-Woodbury)

$$(A+UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U\left(C^{-1} + VA^{-1}U\right)VA^{-1}$$

2. Filtre de Kalman étendu : les matrices du système linéarisé sont obtenues par linéarisation du modèle de connaissance *autour de l'estimée courante*

National Medal of Science 2009