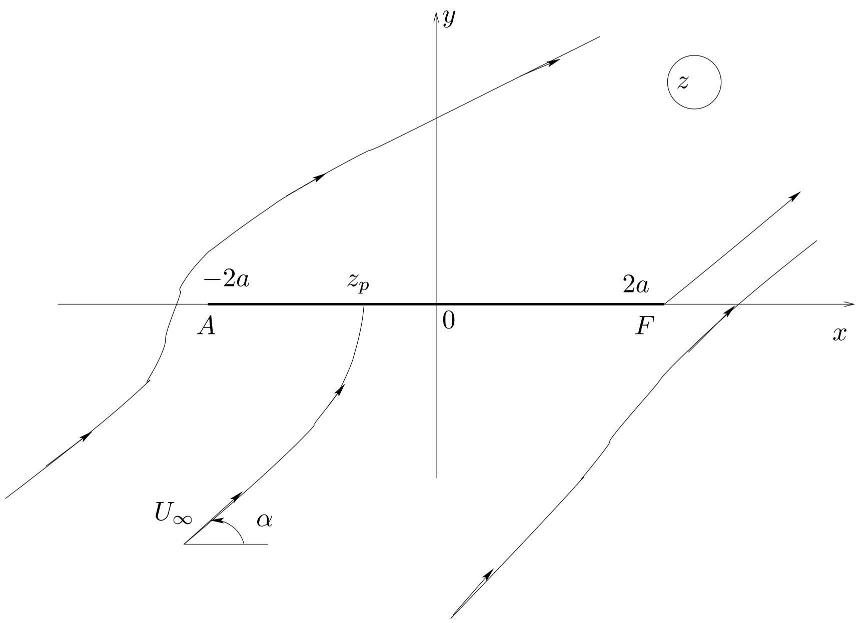
PC5: Correction.

MF101

On considère un écoulement bidimensionnel irrotationnel, stationnaire, de fluide parfait incompressible, autour d'une plaque de longueur $4a$. La vitesse $\vec{U}_\infty$ du fluide à l'infini est constante et fait un angle α avec la plaque plane.



1. Les axes sont précisés sur la figure ci-dessus, on effectue la transformation de Joukowsky:

$$z = \mathcal{Z} \ + \ \frac{a^2}{\mathcal{Z}} \tag{1}$$

qui transforme le segment $-2a \leq x \leq 2a$ du plan z, en un cercle de rayon a dans le plan $\mathcal{Z}$. Dans une transformation conforme les angles sont conservés, comme $z = \mathcal{Z}$ lorsque $|\mathcal{Z}| \to \infty$ et comme :

$$\frac{df}{dz} \ = \ \frac{dF}{dZ}\frac{dZ}{dz} \tag{2}$$

amont, $\frac{dZ}{dz}$ est de l'ordre de l'unité et donc à l'infini amont la vitesse $\vec{U}_\infty$ est conservée. On en déduit le potentiel complexe dans le plan $\mathcal{Z}$, on rappelle qu'un potentiel complexe n'est défini qu'à une constante arbitraire près:

$$F(\mathcal{Z}) = \ U_\infty \left[\mathcal{Z}e^{-i\alpha} \ + \ \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\mathcal{Z}}\right] - \frac{i\Gamma}{2\pi} log(\mathcal{Z}) \tag{3}$$

La condition de Kutta impose qu'une ligne de courant parte du bord de fuite F de la plaque. Les lignes de courant dans le plan $\mathcal{Z}$ sont les images des lignes de courant du plan z. L'image du point F $(z = 2a)$ est alors sur le cercle $Z = ae^{i\theta}$, et compte tenu de (1) cela n'est possible que pour $Z = a$. De ce point partira une ligne de courant image de celle partant dans le plan z de F, $Z = a$ est alors nécessairement un point d'arrêt. De plus on sait que les points d'arrêt sur le cercle ont pour affixe d'affixe $\mathcal{Z} \ = \ ae^{i\gamma}$ et sont donnés par (cf PC4):

$$\Gamma \ = \ 4\pi a U_\infty sin(\gamma - \alpha) \tag{4}$$

L'image du point F est le point $\mathcal{Z} = a$, donc $\gamma = 0$ vérifie (4) ce qui fixe la circulation sur le cercle , qui se conserve dans une transformation conforme, on a donc:

$$\Gamma \;=\; -\,4\pi a U_\infty sin(\alpha) \tag{5}$$

2. Le cercle possède un autre point d'arrêt dont l'argument est solution de l'équation:

$$sin(\alpha - \gamma) \;=\; sin(\alpha) \tag{6}$$

On retrouve $\gamma = 0$ et $\gamma = 2\alpha + \pi$. L'image de ce deuxième point d'arrêt sur le cercle est sur la plaque et définit le point d'arrêt sur la plaque. L'affixe du point d'arrêt sur la plaque est donc:

$$z_p = -2acos(2\alpha) \tag{7}$$

3. La vitesse complexe de l'écoulement sur la plaque est définie par:

$$w(z) = \frac{df}{dz} = \frac{dF}{d\mathcal{Z}}\,\frac{d\mathcal{Z}}{dz} \tag{8}$$

$\frac{d\mathcal{Z}}{dz}$ est donnée en dérivant (2) et $\frac{dF}{d\mathcal{Z}}$ par (3). La vitesse complexe sur la plaque est obtenue en posant $\mathcal{Z} = ae^{i\gamma}$ soit

$$w(z) = U_\infty\,\frac{cos(\alpha - \gamma/2)}{cos(\gamma/2)} \tag{9}$$

On remarque qu'au bord de fuite F (image de $Z = a$ donc correspondant à $\gamma = 0$), la vitesse complexe définie par $w(z) = u - iv$ n'est pas nulle et que l'on a $U_F = U_\infty cos\alpha$. Le seul point d'arrêt sur la plaque est le point z_p.

4. Les formules de Blasius permettent de calculer la résultante $\mathcal{F}$ et le moment résultant $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{F} \;=\; \mathcal{F}_x - i\mathcal{F}_y \;=\; \frac{i\rho}{2}\,\int_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2\,dz \tag{10}$$

et

$$\mathcal{M} \;=\; \frac{-\rho}{2}\,\mathcal{R}\{\int_C z\left(\frac{df}{dz}\right)^2\,dz\} \tag{11}$$

avec $\mathcal{R}$ qui désigne la partie réelle de l'intégrale. On a :

$$\frac{df}{dz} = \frac{dF}{d\mathcal{Z}}\,\frac{d\mathcal{Z}}{dz} \;=\; \left[U_\infty(e^{-i\alpha} \;-\; \frac{a^2e^{i\alpha}}{\mathcal{Z}^2}) - \frac{i\Gamma}{2\pi\mathcal{Z}}\right]\,\frac{1}{1-\frac{a^2}{\mathcal{Z}^2}} \tag{12}$$

En effet,

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dz} \;=\; \left(\frac{dz}{d\mathcal{Z}}\right)^{-1} \tag{13}$$

Compte tenu de (1):

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dz} \;=\frac{1}{1-\frac{a^2}{\mathcal{Z}^2}} \tag{14}$$

On obtient alors (12).
Nous ne souhaitons pas expliciter $f(z)$, de plus on pourrait vérifier que $Z = -a$ est une singularité sur le cercle pour (12). Pour déterminer la force (10), nous utilisons une des propriétés de l'intégration dans le plan complexe, nous modifions le contour en un cercle de rayon arbitrairement grand centré sur l'origine. Pour $|z|$ grand, (1) on a $z \sim \mathcal{Z}$ et on pourra alors faire des développements limités de (14). L'ordre dominant dans (10) pour $|z|$ grand devient alors à l'ordre dominant:

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = \;\left(U_\infty e^{-i\alpha} \;-\; \frac{i\Gamma}{2\pi z}\right)^2 \tag{15}$$

La seule singularité est donc en $z = 0$ et l'on peut appliquer le théorème des résidus:

$$\mathcal{F} \ = \ \frac{i\rho}{2}\, 2i\pi \left(-\frac{i\Gamma U_\infty e^{-i\alpha}}{\pi} \right) \ = \ i\rho\Gamma U_\infty e^{-i\alpha} \tag{16}$$

L'expression de la circulation est donnée en (5), on a donc en appelant $\vec{F}$ la force hydrodynamique due aux efforts de pression:

$$\vec{F} \ = \ \begin{pmatrix} -4\pi\rho a U_\infty^2 sin(\alpha)^2 \\ 4\pi\rho a U_\infty^2 sin(\alpha)cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Cette force est bien perpendiculaire à la vitesse à l'infini, il n'y a pas de traînée, mais seulement une portance (composante de la force perpendiculaire à l'écoulement amont. Pour déterminer le point d'application de la force on utilise le moment (11). En déformant le contour comme pour la force, pour $|z|$ grand, on a :

$$z\left(\frac{df}{dz}\right)^2 \ = \ \left[U_\infty(e^{-i\alpha} \ - \ \frac{a^2 e^{i\alpha}}{z^2}) - \frac{i\Gamma}{2\pi z} \right] \ \frac{z}{1-\frac{a^2}{z^2}} \tag{18}$$

dans cette expression, $|z|$ grand donc on peut faire un développement limité de $\frac{z}{1-\frac{a^2}{z^2}}$, et on a:

$$z\left(\frac{df}{dz}\right)^2 \ \sim \ \left[U_\infty^2 e^{-2i\alpha} \ - \frac{i\Gamma U_\infty e^{-i\alpha}}{\pi z} - \ \frac{2a^2 U_\infty}{z^2} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z^2} \right] \ z(1+\frac{a^2}{z^2}) \tag{19}$$

La seule singularité de cette fonction dans le contour est $z = 0$, on a alors:

$$Res\left[z\left(\frac{df}{dz}\right)^2, z=0 \right] \ = \ 2a^2 U_\infty^2 e^{-2i\alpha} - 2a^2 U_\infty^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \tag{20}$$

Pour calculer le moment, on cherche la partie réelle de $2i\pi Res\left[z\left(\frac{df}{dz}\right)^2, z=0 \right]$, soit $4\pi a^2 U_\infty^2 sin(2\alpha)$, on obtient alors en remplaçant dans (11):

$$\mathcal{M} \ = -4\pi a^2 U_\infty^2 sin\alpha cos\alpha \tag{21}$$

Soit x_I, l'abscisse du point I d'application de cette force uniformément répartie, on a:

$$\vec{OI} \wedge \vec{F} \ = \ x_I \mathcal{F}_y \vec{e}_z \ = \ \mathcal{M}\vec{e}_z \tag{22}$$

avec $\mathcal{F}_y$ donnée en (17), on trouve alors

$$x_I \ = -a \tag{23}$$

Le point d'application est au quart avant de la plaque, Le point I est appelée centre de poussée de la force hydrodynamique. Ce point est pour les forces hydrodynamiques l'équivalent du centre de gravité pour les forces de pesanteur.