Corrigé de la PC4 : Schémas numériques pour les équations hyperboliques linéaires

6 mai 2019

EXERCICE 1 (SCHÉMAS NUMÉRIQUES POUR L'ÉQUATION DE TRANSPORT.)
On s'intéresse ici à la résolution numérique de l'équation de transport ($c > 0$) *:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \\ u(x,0) = u^0(x) \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Question 1. *Etudier l'ordre et la stabilité, par la méthode de Fourier, des schémas aux différences finies suivants :*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c\,\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}\right) + \frac{c}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}\right) = 0. \tag{5}$$

Corrigé de la question 1 : Nous commençons par étudier le premier schéma :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0.$$

Soit u la solution régulière de l'équation de transport. Posons $U_j^n := u(x_j, t^n)$. Un développement de Taylor nous donne

$$\begin{aligned} u(x_j, t^{n\pm1}) &= u(x_j, t^n) \pm \Delta t\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^3), \\ u(x_{j\pm1}, t^n) &= u(x_j, t^n) \pm h\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Cela indique que

$$\varepsilon_j^n := \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + c\,\frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} = \mathcal{O}(\Delta t + h),$$

Le schéma (2) est donc consistant à l'ordre 1 en temps et en espace.
Rappelons qu'un schéma numérique est dit L^2-stable si et seulement si pour tout temps $T > 0$, il existe une constante $C(T)$ indépendante de h et Δt, telle que pour toute donnée initiale u^0 dans L^2,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n\Delta t \leq T, \quad \|u_h^n\|_{L^2} \leq C(T)\|u^0\|_{L^2}$$

Pour l'analyse de stabilité L^2 du schéma, nous utilisons la méthode de Fourier Von-Neumann. La méthode revient à chercher des solutions de (2) de la forme

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ \forall n \geq 0, \quad u_j^n \ :=\ \hat{u}^n(\xi)\, e^{i\xi x_j}. \tag{6}$$

et d'étudier le comportement de la suite de fonctions $(\hat{u}^n)_n$. Si la suite de fonctions est bornée pour la norme L^2 alors le schéma est stable, sinon il est instable (nous renvoyons le lecteur au polycopié pour la justification).

En introduisant la suite (6) dans (2) nous obtenons la relation de récurrence vérifiée par $\hat{u}^n$:

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{S}_h(\xi,\Delta t)\hat{u}^n(\xi) = \hat{S}_h(\xi,\Delta t)^{n+1}\hat{u}^0(\xi) \quad \text{où} \quad \hat{S}_h(\xi,\Delta t) = 1 - \alpha(e^{\imath\xi h} - 1),$$

avec $\alpha\ :=\ c\Delta t/h$. Comme $c > 0$ (et donc $\alpha > 0$), il existe des ξ telles que $|\hat{S}_h(\xi,\Delta t)| > 1$. Le schéma est donc instable L^2.

Pour le second schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0,$$

il suffit d'utiliser les développements de Taylor donnés plus haut pour se rendre compte que le schéma est encore d'ordre 1 en temps et en espace. Lorsque $c\Delta t/h = 1$ le schéma numérique devient

$$u_j^{n+1} \ = u_{j-1}^n,$$

équation qui est aussi satisfaite par la solution exacte. Dans ce cas particulier, le schéma est consistant à l'ordre infini.
Pour l'étude de la stabilité, nous introduisons la suite (6) dans (3) pour obtenir

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{S}_h(\xi,\Delta t)\hat{u}^n(\xi) = \hat{S}_h(\xi,\Delta t)^{n+1}\hat{u}^0(\xi) \quad \text{où} \quad \hat{S}_h(\xi,\Delta t) = 1 - \alpha(1 - e^{-\imath\xi h}),$$

Comme $c > 0$ (et donc $\alpha > 0$), Le schéma est stable L^2 si et seulement si la condition C.F.L. est vérifiée

$$\alpha \leq 1$$

Pour le troisième schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c\,\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0,$$

en utilisant les développements de Taylor donnés plus haut, on trouve

$$\varepsilon_j^n \ :=\ \frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\Delta t} + c\,\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2),$$

ce qui indique que le schéma (4) est consistant à l'ordre deux en temps et en espace sauf quand $c\Delta t/h = 1$ où le schéma est d'ordre infini (pour les mêmes raisons que pour le deuxième schéma).
Pour l'étude de la stabilité, en introduisant la suite (6) dans (4) nous obtenons la relation de récurrence vérifiée par $\hat{u}^n$:

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{u}^{n-1}(\xi) - 2\imath\alpha \sin(\xi h)\hat{u}^n(\xi),$$

où $\alpha := c\Delta t/h$. La solution de cette relation de récurrence d'ordre 2 s'écrit

$$\hat{u}^n = A(r_+)^n + B(r_-)^n,$$

avec $r_\pm$ les racines du polynôme caractéristique associé

$$r^2 + 2\imath\alpha \sin(\xi h)r - 1 = 0,$$

dont le discriminant réduit est

$$\Delta = 1 - \alpha^2 \sin^2(\xi h).$$

. Si $\alpha > 1$, alors le discriminant est strictement négatif pour certaines valeurs de ξ. Pour ces valeurs, les deux racines de l'équation sont imaginaires pures et leurs produit vaut -1. En plus, le module des deux racines est différent (il suffit de regarder l'expression du discriminant). L'une des deux racines est donc de module strictement supérieur à un, et le schéma est donc instable.

. Si $\alpha \leq 1$, alors le discriminant est toujours positif ou nul et les racines valent

$$r_\pm = -\imath\alpha \sin(\xi h) \pm \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2(\xi h)}$$

et sont de module 1 ; le schéma est alors stable.

Pour l'étude de consistance du schéma (5)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}\right) + \frac{c}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}\right) = 0,$$

nous effectuons les développements de Taylor suivants :

$$u(x_{j+1}, t^{n+1}) = u + \Big(\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{1}{2!}\Big(\frac{\Delta t^2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h\,\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\Big) + \mathcal{O}(\Delta t^3 + h^3),$$
$$u(x_{j+1}, t^n) = u + \Big(-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{1}{2!}\Big(\frac{\Delta t^2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h\,\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\Big) + \mathcal{O}(\Delta t^3 + h^3),$$
$$u(x_j, t^{n+1}) = u + \Big(\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{h}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{1}{2!}\Big(\frac{\Delta t^2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h\,\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\Big) + \mathcal{O}(\Delta t^3 + h^3),$$
$$u(x_j, t^n) = u + \Big(-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{h}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{1}{2!}\Big(\frac{\Delta t^2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h\,\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\Big) + \mathcal{O}(\Delta t^3 + h^3),$$

où toutes les fonctions à droite des égalités sont évaluées au point $(x_{j+\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}})$. Nous avons donc que

$$\varepsilon_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}\left(\frac{U_{j+1}^{n+1}-U_{j+1}^{n}}{\Delta t}+\frac{U_{j}^{n+1}-U_{j}^{n}}{\Delta t}\right)+\frac{c}{2}\left(\frac{U_{j+1}^{n+1}-U_{j}^{n+1}}{h}+\frac{U_{j+1}^{n}-U_{j}^{n}}{h}\right)=\mathcal{O}(\Delta t^2+h^2),$$

ce qui indique que le schéma (5) est consistant à l'ordre deux. Lorsque $c\Delta t/h = 1$ le schéma devient

$$u_{j+1}^{n+1} = u_j^n,$$

équation aussi satisfaite par la solution exacte. Dans ce cas particulier, le schéma est consistant à l'ordre infini.

Pour l'étude de stabilité, nous introduisons (6) dans (5) pour obtenir

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{S}_h(\xi, \Delta t)\, \hat{u}^n(\xi) = \hat{S}_h(\xi, \Delta t)^{n+1}\hat{u}^0(\xi),$$

où le coefficient d'amplification $\hat{S}_h(\xi, \Delta t)$ est donné par

$$\hat{S}_h(\xi, \Delta t) := \frac{\cos(\frac{\xi h}{2}) - \imath\alpha\sin(\frac{\xi h}{2})}{\cos(\frac{\xi h}{2}) + \imath\alpha\sin(\frac{\xi h}{2})}.$$

étant donné que ce coefficient est de module un, le schéma est inconditionnellement stable.

Question 2. *Indiquer les difficultés spécifiques à l'utilisation pratique des deux derniers schémas.*

Corrigé de la question 2 : Pour le schéma (4), le calcul de la solution à l'instant t_{n+1} nécessite la solution aux instants t_n et t_{n-1}. Il faudra donc garder en mémoire ces deux quantités ce qui peut poser des problèmes de stockage. En plus, les solutions aux instants t^0 et t^1 doivent être calculées préalablement. Pour l'instant initial, on pourra utiliser la condition initiale $u(x, t = 0) = u^0(x)$. Pour l'instant t^1, il faut proposer une approximation de la solution assez précise pour ne pas déteriorer la précision globale du schéma.

Pour le schéma (5), la difficulté est similaire à celle rencontrée dans le cas des schémas implicites. En effet, ce schéma présente une lourdeur numérique puisqu'il implique la résolution d'un système linéaire à chaque pas de temps de la forme

$$AU^{n+1} = BU^n,$$

où il faut inverser la matrice A.

EXERCICE 2 (LE SCHÉMA DE LAX-WENDROFF POUR L'ÉQUATION DE TRANSPORT)
Soit u une solution régulière de l'équation de transport (1) .

Question 1. *Montrer que*

$$u\left(x_j,t^{n+1}\right)=u\left(x_j,t^n\right)-c\Delta t\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_j,t^n\right)+\frac{c^2\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_j,t^n\right)+\mathcal{O}(\Delta t^3)\,. \tag{7}$$

Nous proposons la famille de schémas suivante (dépendant du paramètre μ) pour la résolution numérique de l'équation du transport :

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{c}{2h}\left(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n\right)-\frac{\mu\,\Delta t}{h^2}\left(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n\right)\;=\;0\,. \tag{8}$$

Obtenir la valeur de μ pour laquelle la méthode est consistante, au moins, à l'ordre deux. Nous appellerons au schéma ainsi obtenu le schéma de Lax-Wendroff. Discuter la précision du schéma lorsque $c\,\Delta t=h$.

Corrigé de la question 1 : On a

$$u(x_j,t^{n+1})=u(x_j,t^n)+\Delta t\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^n)+\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^n)+\mathcal{O}(\Delta t^3)\,.$$

Mais u étant solution de l'équation de transport, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^n)=-c\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t^n)$$

et par dérivation de l'équation de transport

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^n)=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t^n)\,,$$

d'où (7).

Pour effectuer l'étude de consistance de la méthode nous commençons par rappeler que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_j,t^n)&=\frac{U_{j+1}^n-U_{j-1}^n}{2h}+\mathcal{O}(h^2),\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t^n)&=\frac{U_{j+1}^n-2U_j^n+U_{j-1}^n}{h^2}+\mathcal{O}(h^2).\end{aligned} \tag{9}$$

où on a posé $U_j^n=u(x_j,t^n)$. Nous avons donc que

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^n\;&:=\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta t}+\frac{c}{2h}\left(U_{j+1}^n-U_{j-1}^n\right)-\frac{\mu\,\Delta t}{h^2}\left(U_{j+1}^n-2U_j^n+U_{j-1}^n\right)\\ &=-c\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_j,t^n\right)+\Delta t\frac{c^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_j,t^n\right)+\mathcal{O}(\Delta t^2)+c\frac{\partial u}{\partial x}\left(x_j,t^n\right)-\mu\Delta t\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_j,t^n\right)+\mathcal{O}(h^2)\\ &=\Delta t\left(\frac{c^2}{2}-\mu\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_j,t^n\right)\;+\;\mathcal{O}(h^2+\Delta t^2),\end{aligned}$$

où on a utilisé (9) dans la première égalité et (7) dans la deuxième. Il faut que

$$\mu\;=\;\frac{c^2}{2},$$

pour avoir une erreur de consistance du second ordre.

Pour $c\Delta t/h = 1$, le schéma s'écrit

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n\,,$$

équation qui est aussi vérifiée par la solution exacte ; le schéma est donc d'ordre infini dans ce cas particulier.

Question 2. *Calculer le coefficient d'amplification du schéma de Lax-Wendroff et en déduire sa stabilité sous condition CFL.*

Corrigé de la question 2 : Pour l'analyse de stabilité L^2 du schéma, rappelons que la méthode de Fourier Von-Neumann revient à chercher des solutions de (8) de la forme

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ \forall n \geq 0, \quad u_j^n \ :=\ \hat{u}^n(\xi)\, e^{i\xi x_j}. \tag{10}$$

En introduisant la suite (10) dans (8) nous obtenons la relation de récurrence vérifiée par $\hat{u}^n$:

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{S}_h(\xi,\Delta t)\,\hat{u}^n(\xi)$$

avec

$$\hat{S}_h(\xi,\Delta t) = 1 - \frac{\alpha}{2}\left(\exp(\imath\xi h) - \exp(-\imath\xi h)\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(\exp(\imath\xi h) - 2 + \exp(-\imath\xi h)\right),$$

soit

$$\hat{S}_h(\xi,\Delta t) = 1 - \imath\alpha\sin(\xi h) - \alpha^2(1-\cos(\xi h))\,.$$

étudions le module de $\hat{S}_h(\xi,\Delta t)$

$$\begin{aligned}
|\hat{S}_h(\xi,\Delta t)|^2 &= 1 - 2\alpha^2(1-\cos(\xi h)) + \alpha^4(1-\cos(\xi h))^2 + \alpha^2\sin^2(\xi h)\\
&= 1 - \alpha^2(2 - 2\cos(\xi h) + \cos^2(\xi h) - 1) + \alpha^4(1-\cos(\xi h))^2\\
&= 1 + (\alpha^4 - \alpha^2)(1-\cos(\xi h))^2\,.
\end{aligned}$$

. Si $\alpha \leq 1$, alors $\alpha^4 - \alpha^2 \leq 0$ et $\sup|\hat{S}_h| = 1$: le schéma est donc stable.

. Si $\alpha > 1$, alors $\sup|\hat{S}_h| = \sqrt{1+4(\alpha^4-\alpha^2)}$: le schéma est instable.

Question 3. *On rappelle que la solution u de l'équation de transport peut s'écrire en fonction de u^0 :*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}^0(\xi) e^{\imath(x-ct)\xi}\,d\xi$$

Ceci montre que l'équation de transport n'est ni **dissipative**, *les ondes planes $e^{\imath\xi x}$ ne sont pas atténuées au cours du temps, et ni* **dispersive**, *les ondes planes $e^{\imath\xi x}$ se propage toutes à la même vitesse c. Nous allons voir si le schéma numérique conserve ces propriétés.*

On pose

$$u_h(x,t^n) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_h^0(\xi) e^{-a_h(\xi,\Delta t)t^n} e^{\imath(x-c_h(\xi,\Delta t)t^n)\xi}\, d\xi$$

Exprimez $a_h(\xi,\Delta t)$ (la dissipation numérique) et $c_h(\xi,\Delta t)$ (la dispersion numérique) en fonction du coefficient d'amplification $\hat{S}_h(\xi,\Delta t)$.

Corrigé de la question 3 : Par définition du coefficient d'amplification, on a

$$\hat{u}_h(\xi,t^n) = \hat{S}_h(\xi,\Delta t)^n\, \hat{u}_h^0(\xi)\, d\xi$$

soit donc

$$\begin{aligned} u_h(x,t^n) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{S}_h(\xi,\Delta t)^n\, \hat{u}_h^0(\xi)\, e^{\imath x\xi}\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(n \ln|\hat{S}_h(\xi,\Delta t)|) \exp(\imath n \arg(\hat{S}_h(\xi,\Delta t)))\, \hat{u}_h^0(\xi)\, e^{\imath x\xi}\, d\xi \end{aligned}$$

Par définition, on a donc

$$a_h(\xi,\Delta t) = -\frac{1}{\Delta t}\, \ln(|\hat{S}_h(\xi,\Delta t)|)$$

et

$$c_h(\xi,\Delta t) = -\frac{1}{\xi\Delta t}\, \arg(\hat{S}_h(\xi,\Delta t))$$

Question 4. *On appelle taux de dissipation numérique la quantité*

$$r_a(\xi,\Delta t) = a_h(\xi,\Delta t),$$

et erreur sur la vitesse de propagation des ondes planes la quantité

$$\varepsilon_c(\xi,\Delta t) = c - c_h(\xi,\Delta t).$$

Étudier le comportement pour h petit (et CFL constante) de ces deux quantités. Commenter.

Corrigé de la question 4 : Le taux de dissipation numérique est donné par :

$$r_a(\xi,\Delta t) = a_h(\xi,\Delta t) = -\frac{1}{\Delta t}\, \ln(|\hat{S}_h(\xi,\Delta t)|)$$

Si le schéma numérique augmente l'amplitude de l'onde plane de fréquence ξ alors $r_a(\xi,\Delta t) < 0$. S'il diminue son amplitude alors $r_a(\xi,\Delta t) > 0$. Enfin, s'il maintient son amplitude constante durant tout le transport, comme c'est le cas pour la solution exacte, $r_a(\xi,\Delta t) = 0$.

Pour le schéma de Lax-Wendroff, d'après le corrigé de la question 2 on a

$$r_a(\xi, \Delta t) = -\frac{1}{2\Delta t} \ln\left(1 + (\alpha^4 - \alpha^2)(1 - \cos(\xi h))^2\right)$$

Notons que si $\alpha = 1$ alors $r_a(\xi, \Delta t) = 0$ et le schéma maintient l'amplitude des ondes planes constante indépendamment de leur fréquence ξ : le schéma n'est donc pas dissipatif.

De plus, pour h assez petit, cette quantité est équivalente à

$$r_a(\xi, \Delta t) \sim \frac{c\,\alpha(1-\alpha^2)}{8}\,\xi^4 h^3.$$

Notons tout d'abord que, pour $\alpha \neq 1$, deux signaux de fréquences différentes vont se dissiper de manière différente avec le temps, la solution numérique va donc se déformer au cours du temps : le schéma est dissipatif. De plus, si $\alpha < 1$ alors le schéma de Lax Wendroff diminue l'amplitude des ondes planes.

L'erreur sur la vitesse de propagation des ondes planes est donnée par

$$\varepsilon_c(\xi, \Delta t) = c - c_h(\xi, \Delta t) = \frac{c\Delta t\xi + \arg(\hat{S}_h(\xi, \Delta t))}{\xi \Delta t}$$

Si, pour l'onde plane de fréquence ξ, le schéma introduit un déphasage positif (avance de phase) dans la solution, $\varepsilon_c(\xi, \Delta t) > 0$. S'il introduit un retard de phase, $\varepsilon_c(\xi, \Delta t) < 0$. Et si le schéma n'introduit aucun déphasage, $\varepsilon_c(\xi, \Delta t) = 0$.

Pour le schéma de Lax-Wendroff, d'après le corrigé de la question 2 on a

$$\varepsilon_c(\xi, \Delta t) = \frac{c\Delta t\xi - \arctan\left(\dfrac{\alpha \sin \xi h}{1 - \alpha^2(1 - \cos \xi h)}\right)}{\xi \Delta t}$$

Notons que si $\alpha = 1$ alors $\varepsilon_c(\xi, \Delta t) = 0$ et la vitesse de propagation numérique des ondes planes est constante indépendamment de leur fréquence ξ, égale à c : le schéma n'est pas dispersif.

De plus, pour h assez petit, cette quantité est équivalente

$$\varepsilon_c(\xi, \Delta t) \sim \frac{c\,(1-\alpha^2)}{6}\xi^3 h^2.$$

Pour $\alpha \neq 1$, on remarque que la vitesse de l'onde numérique dépend généralement de la fréquence ξ, ce qui n'est pas le cas pour la solution exacte. Ainsi deux signaux de fréquences différentes ne se propagent pas à la même vitesse, ce qui conduit à une déformation de la solution numérique au cours du temps : le schéma est dispersif.

Enfin, pour ce schéma on remarque que la partie dominante de l'erreur provient de la dispersion numérique (erreur en h^2) et pas de la dissipation (taux en h^3).