MAP-AUT1
Principes fondamentaux de l'Automatique

Dynamique et Contrôle des Systèmes

NICOLAS PETIT

Centre Automatique et Systèmes
MINES ParisTech
nicolas.petit@mines-paristech.fr

30 novembre 2018
Amphi 3

http://cas.ensmp.fr/~petit/ensta2018/

Plan de l'amphi

- Diverses équations

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad u(t) \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + u(t)g(x(t),t), x(t) \in \mathbb{R}, u(t) \in \mathbb{R}, g(x(t),t) \neq 0$$

- Système mécanique général

$$\mathcal{L}(q, \frac{d}{dt}q) = T(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n) - V(q_1, ..., q_n)$$

T: énergie cinétique, V: énergie potentielle

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q, \frac{d}{dt}q)\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q, \frac{d}{dt}q) = u_i$$

q: coord. généralisées, u: forces généralisées

$$M(q)\frac{d^2}{dt^2}q + C(q, \frac{d}{dt}q)\frac{d}{dt}q + g(q) = u$$

- Diverses équations

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad u(t) \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + u(t)g(x(t), t), x(t) \in \mathbb{R}, u(t) \in \mathbb{R}, g(x(t), t) \neq 0$$

- Système mécanique général

$$\mathcal{L}(q, \frac{d}{dt}q) = T(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n) - V(q_1, ..., q_n)$$

T: énergie cinétique, V: énergie potentielle

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q, \frac{d}{dt}q)\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q, \frac{d}{dt}q) = u_i$$

q: coord. généralisées, u: forces généralisées

$$M(q)\frac{d^2}{dt^2}q + C(q, \frac{d}{dt}q)\frac{d}{dt}q + g(q) = u$$

- Diverses équations

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad u(t) \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + u(t)g(x(t), t), x(t) \in \mathbb{R}, u(t) \in \mathbb{R}, g(x(t), t) \neq 0$$

- Système mécanique général

$$\mathcal{L}(q, \frac{d}{dt}q) = T(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n) - V(q_1, ..., q_n)$$

T: énergie cinétique, V: énergie potentielle

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(q, \frac{d}{dt}q)\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q, \frac{d}{dt}q) = u_i$$

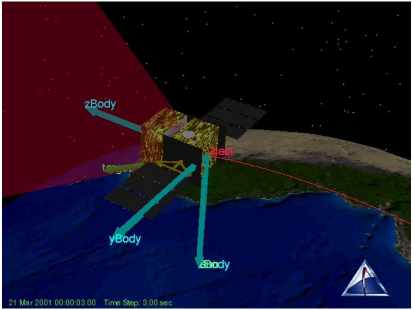
q: coord. généralisées, u: forces généralisées

$$M(q)\frac{d^2}{dt^2}q + C(q, \frac{d}{dt}q)\frac{d}{dt}q + g(q) = u$$

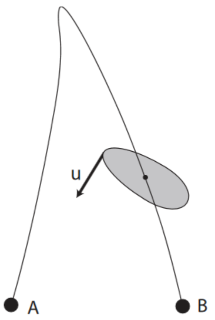
$$M(q)\frac{d^2}{dt^2}q + C(q, \frac{d}{dt}q)\frac{d}{dt}q + g(q) = u$$

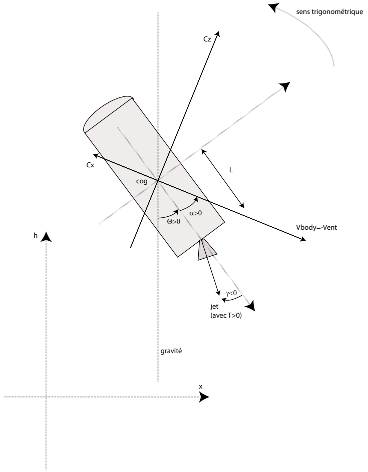
Système complètement actionné : une commande par degré de liberté. Les manœuvres sont faciles

Exemple: changement de configuration d'un satellite



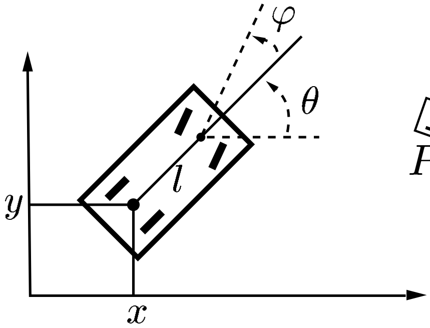
Quelques exemples non trivialement commandables

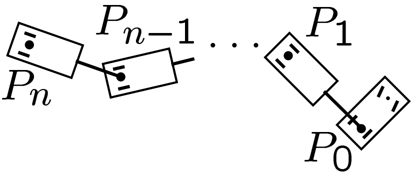




Hockey-puck, Fusée poussée vectorisée

Vélos, voitures, ...





Munitions guidées: ISL

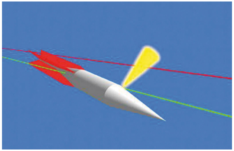
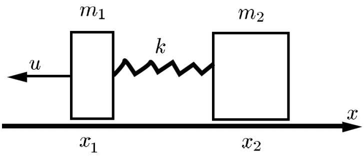


Figure: Munition guidée lancée au canon. Concept Institut Saint-Louis

Système non complètement actionné

Systèmes non complètement actionnés

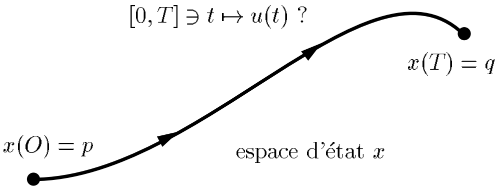


Transfert d'une position d'arrêt à une autre

1 seule commande, peut-on commander?

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} x_1 = k(x_2 - x_1) + u$$
$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} x_2 = k(x_1 - x_2)$$

Notion générale de commandabilité

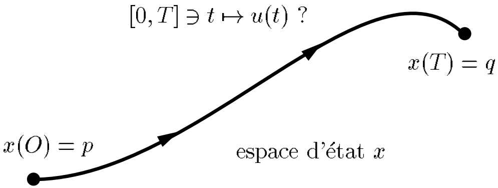


Définition: commandabilité

Le système $\frac{d}{dt}x = f(x,u)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$) est dit commandable en temps $T > 0$ si et seulement si pour tout $p, q \in \mathbb{R}^n$, il existe une loi horaire $[0,T] \ni t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^m$, dite commande en boucle ouverte, qui amène le système de l'état $x(0) = p$ à l'état $x(T) = q$

Le système est dit *simplement commandable* lorsqu'il est commandable pour au moins un temps $T > 0$

Notion générale de commandabilité



Définition: commandabilité

Le système $\frac{d}{dt}x = f(x,u)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$) est dit commandable en temps $T > 0$ si et seulement si pour tout $p, q \in \mathbb{R}^n$, il existe une loi horaire $[0,T] \ni t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^m$, dite commande en boucle ouverte, qui amène le système de l'état $x(0) = p$ à l'état $x(T) = q$

Le système est dit *simplement commandable* lorsqu'il est commandable pour au moins un temps $T > 0$

Obstructions à la commandabilité

Deux types d'obstruction à la commandabilité

- le système comporte un sous-système indépendant du contrôle u. Exemple $\xi = x_1 - x_2$ pour le système

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 = u - x_1, \quad \frac{d^2}{dt^2}x_2 = u - x_2, \quad \frac{d^2}{dt^2}\xi = -\xi$$

- La dérivée de certaines variables est de signe constant (cas non linéaire). Exemple

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_2, \quad \frac{d}{dt}x_2 = u^2 \geq 0$$

Note: on ne dispose pas à l'heure actuelle de caractérisation en terme fini de la contrôlabilité même si les composantes de f sont des fonctions polynômiales de x et u.

Obstructions à la commandabilité

Deux types d'obstruction à la commandabilité

- le système comporte un sous-système indépendant du contrôle u. Exemple $\xi = x_1 - x_2$ pour le système

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 = u - x_1, \quad \frac{d^2}{dt^2}x_2 = u - x_2, \quad \frac{d^2}{dt^2}\xi = -\xi$$

- La dérivée de certaines variables est de signe constant (cas non linéaire). Exemple

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_2, \quad \frac{d}{dt}x_2 = u^2 \geq 0$$

Note: on ne dispose pas à l'heure actuelle de caractérisation en terme fini de la contrôlabilité même si les composantes de f sont des fonctions polynômiales de x et u.

Obstructions à la commandabilité

Deux types d'obstruction à la commandabilité

- le système comporte un sous-système indépendant du contrôle u. Exemple $\xi = x_1 - x_2$ pour le système

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 = u - x_1, \quad \frac{d^2}{dt^2}x_2 = u - x_2, \quad \frac{d^2}{dt^2}\xi = -\xi$$

- La dérivée de certaines variables est de signe constant (cas non linéaire). Exemple

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_2, \quad \frac{d}{dt}x_2 = u^2 \geq 0$$

Note: on ne dispose pas à l'heure actuelle de caractérisation en terme fini de la contrôlabilité même si les composantes de f sont des fonctions polynômiales de x et u.

Commandabilité linéaire

Cas linéaire stationnaire

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$$

La contrôlabilité en temps $T > 0$ équivaut à la contrôlabilité en un temps arbitrairement court. T n'a que peu d'importance

Formule explicite

Transition entre $x(0) = p$ à $x(T) = q$

$$u(t) = B' \exp[(T - t)A'] \left(\int_0^T \exp(sA)BB' \exp(sA')ds \right)^{-1} (q - \exp(TA)p)$$

Vérification: solution générale

$$x(t) = \exp(tA)x(0) + \int_0^t \exp[(t-\tau)A]Bu(\tau)d\tau$$

avec la commande précédente,

$$x(T) = \exp(TA)p+$$

$$\int_0^T \exp[(T-\tau)A]BB'\exp[(T-\tau)A']\left(\int_0^T \exp(sA)BB'\exp(sA')ds\right)^{-1}(q-\exp(TA)p)d\tau$$

$$= \exp(TA)p+$$

$$\int_0^T \exp[(T-\tau)A]BB'\exp[(T-\tau)A']d\tau\left(\int_0^T \exp(sA)BB'\exp(sA')ds\right)^{-1}(q-\exp(TA)p)$$

$$= \exp(TA)p+$$

$$\left(\int_0^T \exp(sA)BB'\exp(sA')ds\right)\left(\int_0^T \exp(sA)BB'\exp(sA')ds\right)^{-1}(q-\exp(TA)p)$$

$$x(T) = \exp(TA)p + q - \exp(TA)p = q$$

Vérification: solution générale

$$x(t) = \exp(tA)x(0) + \int_0^t \exp[(t-\tau)A]Bu(\tau)d\tau$$

avec la commande précédente,

$$x(T) = \exp(TA)p +$$
$$\int_0^T \exp[(T-\tau)A]BB' \exp[(T-\tau)A'] \left(\int_0^T \exp(sA)BB' \exp(sA')ds\right)^{-1} (q - \exp(TA)p)d\tau$$
$$= \exp(TA)p +$$
$$\int_0^T \exp[(T-\tau)A]BB' \exp[(T-\tau)A']d\tau \left(\int_0^T \exp(sA)BB' \exp(sA')ds\right)^{-1} (q - \exp(TA)p)$$
$$= \exp(TA)p +$$
$$\left(\int_0^T \exp(sA)BB' \exp(sA')ds\right) \left(\int_0^T \exp(sA)BB' \exp(sA')ds\right)^{-1} (q - \exp(TA)p)$$
$$x(T) = \exp(TA)p + q - \exp(TA)p = q$$

Critère de commandabilité

Dans la construction précédente

$$u(t) = B' \exp[(T-t)A'] \left(\int_0^T \exp(\tau A) BB' \exp(\tau A') d\tau \right)^{-1} (q - \exp(TA)p)$$

la seule obstruction possible est que la matrice (symétrique positive)

$$\int_0^T \exp(\tau A) BB' \exp(\tau A') d\tau$$

ne soit pas inversible

Critère de commandabilité (suite)

$$\int_0^T \exp(\tau A) B B' \exp(\tau A') d\tau \quad \text{non inversible}$$

$$\iff \exists v \neq 0, \quad v' \left(\int_0^T \exp(\tau A) B B' \exp(\tau A') d\tau \right) v = 0$$

$$\iff \exists v \neq 0, \quad \int_0^T v' \exp(\tau A) B B' \exp(\tau A') v \, d\tau = 0$$

$$\iff \exists v \neq 0, \quad \int_0^T \| B' \exp(\tau A') v \|^2 d\tau = 0$$

Critère de commandabilité (suite)

$$\int_0^T \exp(\tau A)BB' \exp(\tau A')d\tau \quad \text{non inversible}$$

$$\Longleftrightarrow \exists v \neq 0, \quad v' \left(\int_0^T \exp(\tau A)BB' \exp(\tau A')d\tau \right) v = 0$$

$$\Longleftrightarrow \exists v \neq 0, \quad \int_0^T v' \exp(\tau A)BB' \exp(\tau A')v d\tau = 0$$

$$\Longleftrightarrow \exists v \neq 0, \quad \int_0^T \|B' \exp(\tau A')v\|^2 d\tau = 0$$

$$\Longleftrightarrow \exists v \neq 0, \quad v' \exp(tA)B = 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

d'où, par dérivations $\frac{d}{dt}(.)$ (fonction analytique) en $t = 0$

$$v' \exp(tA)AB = 0, \quad v' \exp(tA)A^2B = 0, \quad ...,$$

$$v' \exp(tA)A^{n-1}B = 0, \quad v' \exp(tA)A^nB = 0, \quad ...$$

$$\Longleftrightarrow \exists v \neq 0, v'B = 0, \quad v'AB = 0, ..., \quad v'A^{n-1}B = 0, \quad v'A^nB = 0, ...$$

$$\Longleftrightarrow \exists v \neq 0, v'B = 0, \quad v'AB = 0, ..., \quad v'A^{n-1}B = 0$$

$\Longleftrightarrow$ $[B, AB, ..., A^{n-1}B]$ n'est pas de rang plein

Critère de commandabilité de Kalman

Le système $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$ est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité $\mathcal{C} = (B, AB, \ldots A^{n-1}B)$ est de rang $n = \dim(x)$

Forme normale d'un système linéaire

Théorème: forme de Brunovsky, cas mono-entrée

Soit $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$, ($\dim B = n \times 1$) système linéaire stationnaire commandable. Il existe un changement d'état $z = Mx$ (M matrice inversible $n \times n$) et un bouclage statique régulier $v = Ex + Nu$ ($N \neq 0$), tels que les équations du système dans les variables (z, v) admettent la forme normale de Brunovsky suivante :

$$\frac{d}{dt}z_1 = z_2, \ldots, \frac{d}{dt}z_{n-1} = z_n, \ \frac{d}{dt}z_n = v$$

avec comme état $z = (z_1, ..., z_n)$

Ainsi on a $\frac{d^n}{dt^n}z_1 = v$ où $z_1 = Cx$, avec C bien choisie, z_1 est la sortie dite de Brunovsky.

Méthode pratique de calcul

On cherche une combinaison linéaire fournissant la forme normale

$$z_1 = Cx$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} z_1 = C(Ax + Bu) = CAx, \quad CB = 0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2} z_1 = CA(Ax + Bu) = CA^2 x, \quad CAB = 0 \\ \quad \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z_1 = CA^{n-2}(Ax + Bu) = CA^{n-1} x, \quad CA^{n-2}B = 0 \\ \dfrac{d^n}{dt^n} z_1 = CA^{n-1}(Ax + Bu) = CA^n x + u, \quad CA^{n-1}B = 1, \end{cases}$$

D'où, $C = [0 \quad \ldots \quad 0 \quad 1] \times (\mathcal{C})^{-1}$

Méthode pratique de calcul

On cherche une combinaison linéaire fournissant la forme normale

$$z_1 = Cx$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} z_1 = C(Ax + Bu) = CAx, & CB = 0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2} z_1 = CA(Ax + Bu) = CA^2 x, & CAB = 0 \\ \quad \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z_1 = CA^{n-2}(Ax + Bu) = CA^{n-1} x, & CA^{n-2}B = 0 \\ \dfrac{d^n}{dt^n} z_1 = CA^{n-1}(Ax + Bu) = CA^n x + u, & CA^{n-1}B = 1, \end{cases}$$

D'où, $C = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \times (\mathcal{C})^{-1}$

Méthode pratique de calcul

On cherche une combinaison linéaire fournissant la forme normale

$$z_1 = Cx$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} z_1 = C(Ax + Bu) = CAx, \quad CB = 0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2} z_1 = CA(Ax + Bu) = CA^2 x, \quad CAB = 0 \\ \quad \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z_1 = CA^{n-2}(Ax + Bu) = CA^{n-1} x, \quad CA^{n-2}B = 0 \\ \dfrac{d^n}{dt^n} z_1 = CA^{n-1}(Ax + Bu) = CA^n x + u, \quad CA^{n-1}B = 1, \end{cases}$$

D'où, $C = [0 \quad \ldots \quad 0 \quad 1] \times (\mathcal{C})^{-1}$

Méthode pratique de calcul

On cherche une combinaison linéaire fournissant la forme normale

$$z_1 = Cx$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} z_1 = C(Ax + Bu) = CAx, \quad CB = 0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2} z_1 = CA(Ax + Bu) = CA^2 x, \quad CAB = 0 \\ \quad \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z_1 = CA^{n-2}(Ax + Bu) = CA^{n-1} x, \quad CA^{n-2}B = 0 \\ \dfrac{d^n}{dt^n} z_1 = CA^{n-1}(Ax + Bu) = CA^n x + u, \quad CA^{n-1}B = 1, \end{cases}$$

D'où, $C = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \times (\mathcal{C})^{-1}$

Planification sur la forme normale

$$\frac{d^n}{dt^n} z_1 = v$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Mx$$

L'état initial $x(0) = p$ correspond à $\left(z_1(0), \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z_1(0)\right)$,

et l'état final $x(T) = q$ à $\left(z_1(T), \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z_1(T)\right)$

Sur $]0, T[$, z_1 est libre pourvu que $t \mapsto z_1(t)$ soit une fonction KC^n.

Une infinité de fonctions $t \mapsto z_1(t)$ satisfont ces conditions.

Par exemple on peut prendre un polynôme de degré $\geq 2n - 1$

Planification sur la forme normale

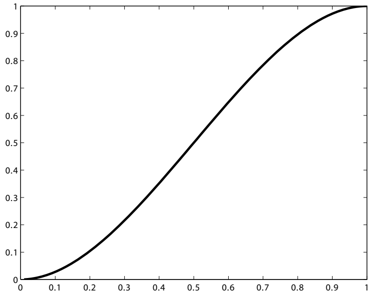
$$\frac{d^n}{dt^n} z_1 = v$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Mx$$

L'état initial $x(0) = p$ correspond à $\left(z_1(0), \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z_1(0)\right)$,
et l'état final $x(T) = q$ à $\left(z_1(T), \quad \ldots, \quad \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z_1(T)\right)$
Sur $]0, T[$, z_1 est libre pourvu que $t \mapsto z_1(t)$ soit une fonction KC^n.
Une infinité de fonctions $t \mapsto z_1(t)$ satisfont ces conditions.
Par exemple on peut prendre un polynôme de degré $\geq 2n - 1$

Si p et q sont des états stationnaires alors $\frac{d^i}{dt^i} z_1(0) = \frac{d^i}{dt^i} z_1(T) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. En notant $a = z_1(0)$ et $b = z_1(T)$, on peut prendre

$$z_1(t) = \begin{cases} a, & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{(T-t)^n}{t^n+(T-t)^n} a + \frac{(t)^n}{t^n+(T-t)^n} b, & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ b, & \text{si } T \leq t \end{cases}$$



Planification dans les coordonnées d'origine

$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$, forme normale $\frac{d^n}{dt^n}z_1 = v$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z_1 \end{pmatrix} = Mx, \quad v = Ex + Nu, \quad N \neq 0$$

On a choisi une loi horaire $[0, T] \ni t \mapsto z_1(t)$ compatible avec le transitoire désiré. On a donc $[0, T] \ni t \mapsto z(t)$. On calcule $v(t) = \frac{d^n}{dt^n}z_1(t)$, puis on résout

Commande

$$u(t) = N^{-1}\left(\frac{d^n}{dt^n}z_1(t) - EM^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z_1 \end{pmatrix}(t)\right)$$

Planification dans les coordonnées d'origine

$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$, forme normale $\frac{d^n}{dt^n}z_1 = v$

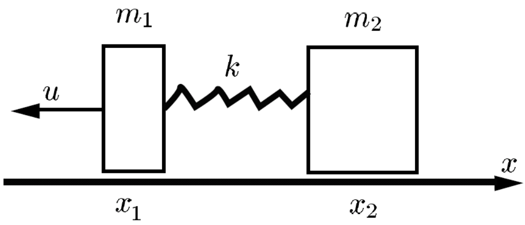
$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z_1 \end{pmatrix} = Mx, \quad v = Ex + Nu, \quad N \neq 0$$

On a choisi une loi horaire $[0, T] \ni t \mapsto z_1(t)$ compatible avec le transitoire désiré. On a donc $[0, T] \ni t \mapsto z(t)$. On calcule $v(t) = \frac{d^n}{dt^n}z_1(t)$, puis on résout

Commande

$$u(t) = N^{-1}\left(\frac{d^n}{dt^n}z_1(t) - EM^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z_1 \end{pmatrix}(t)\right)$$

Retour sur l'exemple des deux masses



Transfert d'une position d'arrêt à une autre: 1 seule commande, peut-on commander?

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} x_1 = k(x_2 - x_1) + u$$
$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} x_2 = k(x_1 - x_2)$$

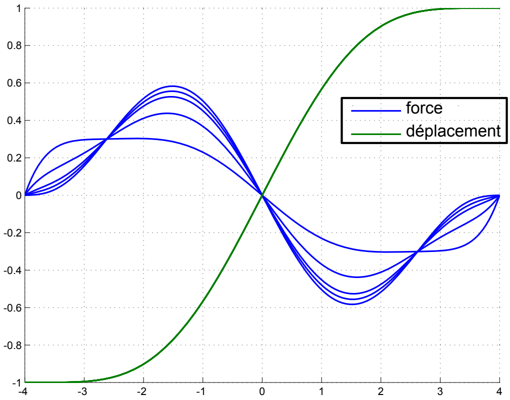
Sortie de Brunovsky: $z_1 = x_2$. On exprime x et u en fonction des dérivées de z_1.

$$
\begin{cases}
x_1 = (m_2/k)\,\frac{d^2}{dt^2} z_1 + z_1 \\
\frac{d}{dt} x_1 = (m_2/k)\,\frac{d^3}{dt^3} z_1 + \frac{d}{dt} z_1 \\
x_2 = z_1 \\
\frac{d}{dt} x_2 = \frac{d}{dt} z_1 \\
u = \frac{m_1 m_2}{k}\,\frac{d^4}{dt^4} z_1 + (m_1 + m_2)\frac{d^2}{dt^2} z_1
\end{cases}
$$

$$u = \frac{m_1 m_2}{k} \frac{d^4}{dt^4} z_1 + (m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} z_1$$

$k \to +\infty$: les deux masses sont rigidement connectées

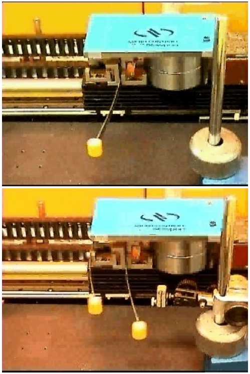
T: temps de parcours



Exemple:

Un ou deux oscillateurs en parallèle

Le modèle:



$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 = -a_1(x_1 - u), \quad \frac{d^2}{dt^2}x_2 = -a_2(x_2 - u)$$

La planification de trajectoires: par exemple trouver un contrôle en boucle ouverte $[0, T] \ni t \mapsto u(t)$ qui transfère de l'équilibre

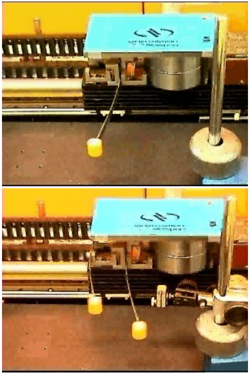
$$x_1(0) = x_2(0) = u(0) = 0$$

vers l'équilibre

$$x_1(T) = x_2(T) = u(T) = D$$

Exemple:

Un ou deux oscillateurs en parallèle



Le modèle:

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 = -a_1(x_1 - u), \qquad \frac{d^2}{dt^2}x_2 = -a_2(x_2 - u)$$

La planification de trajectoires: par exemple trouver un contrôle en boucle ouverte $[0, T] \ni t \mapsto u(t)$ qui transfère de l'équilibre

$$x_1(0) = x_2(0) = u(0) = 0$$

vers l'équilibre

$$x_1(T) = x_2(T) = u(T) = D$$

Théorème (forme de Brunovsky, cas multi-entrées)

Si $(B, AB, \ldots A^{n-1}B)$, la matrice de commandabilité de $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$, est de rang $n = \dim(x)$ et si B est de rang $m = \dim(u)$, alors il existe un changement d'état $z = Mx$ (M matrice inversible $n \times n$) et un bouclage statique régulier $u = Ex + Nv$ (N matrice inversible $m \times m$), tels que les équations du système dans les variables (z, v) admettent la forme normale suivante (écriture sous la forme de m équations différentielles d'ordre ≥ 1) :

$$y_1^{(\alpha_1)} = v_1, \quad \ldots \quad , y_m^{(\alpha_m)} = v_m$$

avec comme état $z = (y_1, y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(\alpha_1 - 1)}, \quad \ldots \quad , y_m, y_m^{(1)}, \ldots, y_m^{(\alpha_m - 1)})$, les α_i étant des entiers positifs ($\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = n$).

Les m quantités y, qui sont des combinaisons linéaires de l'état x, sont appelées sorties de Brunovsky