Rappels (non exhaustifs) du cours pour le TD 9

Moment cinétique

I - Résultats généraux

* Définition : un ensemble de 3 observables

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix} \text{ tel que}$$

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_z$$

$$[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar \hat{J}_x$$

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar \hat{J}_y$$

* Si on note $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$, on a

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_x] = [\hat{J}^2, \hat{J}_y] = [\hat{J}^2, \hat{J}_z] = 0$$

On peut donc chercher une base de vecteurs propres communs à $\hat{J}^2$ et une composante de $\hat{J}$.

On choisit souvent d'utiliser la composante $\hat{J}_z$.

- On note $|j\ m\rangle$ les vecteurs propres communs à $\hat{J}^2$ et $\hat{J}_z$.

On a $\hat{J}^2 |j\ m\rangle = \hbar^2 j(j+1)\, |j\ m\rangle$

$$\hat{J}_z |j\ m\rangle = \hbar m\, |j\ m\rangle$$

- On a démontré dans le cours que j est un entier ou un demi-entier $\geqslant 0$ et que m varie par pas de 1 entre $-j$ et j.

Exemple : - Si $j = 2$, m peut valoir $-2, -1, 0, 1$ ou 2.

- Si $j = \frac{3}{2}$, m peut valoir $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$.

- Pour démontrer ce résultat, on a utilisé les opérateurs d'échelle $\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y$ et $\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$ (non hermitiens, adjoint l'un de l'autre)

Ils vérifient

$$\hat{J}_+ |j\ m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\ |j\ m+1\rangle$$

$$\hat{J}_- |j\ m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\ |j\ m-1\rangle$$

En particulier

$$\hat{J}_+ |j\ j\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \hat{J}_- |j\ -j\rangle = 0$$

II - Cas particuliers de moments cinétiques

1) Le moment orbital $\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p}$

- On note les vecteurs propres communs à $\hat{L}^2$ et $\hat{L}_z$

  $|\ell\ m\rangle$ (ℓ remplace j)

- En coordonnées sphériques, $\hat{L}$ dépend uniquement des angles $\hat{\theta}$ et $\hat{\varphi}$. (ne dépend pas de $\hat{r}$)

- Les fonctions propres associées sont appelées les harmoniques sphériques et notées $Y_{lm}(\theta, \varphi)$

- La dépendance en φ est de la forme

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = F_{\ell m}(\theta)\, e^{im\varphi}$$

Ceci implique que m, et donc ℓ, sont toujours entiers pour le moment orbital

$\left(Y_{lm}(\theta, \varphi + 2\pi) = Y_{lm}(\theta, \varphi) \right)$

2) Le moment cinétique intrinsèque (spin) $\hat{S}$

* On note souvent les vecteurs propres communs à $\hat{S}^2$ et $\hat{S}_z$ $|s\ m_s\rangle$ (s remplace j et m_s remplace m)

* s est une quantité intrinsèque d'une particule.
Exemple: pour l'électron $s = \frac{1}{2}$ (et donc m_s peut valoir $-\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2}$).

* Le spin est un nouveau degré de liberté associé à une particule, qui n'a pas d'équivalent classique.
On a donc $[\hat{S}, \hat{r}] = 0$, $[\hat{S}, \hat{p}] = 0$, etc.
L'ensemble des états possibles d'une particule possédant un spin est $\underbrace{\mathcal{E}_r}_{\text{degrés de liberté spatiaux}} \otimes \underbrace{\mathcal{E}_s}_{\text{spin}}$

III - Moment cinétique et moment magnétique

* Une particule chargée qui possède un moment cinétique (orbital ou de spin) possède également un moment magnétique $\hat{M}$, proportionnel au moment cinétique $\hat{J}$:

$$\hat{M} = \underbrace{\gamma}_{\text{rapport gyromagnétique}} \hat{J}$$

Si $\hat{J}$ est un moment orbital, $\gamma = \dfrac{q}{2m}$

Si $\hat{J}$ est un spin, $\gamma = \underbrace{g}_{\text{facteur de Landé} \simeq 2 \text{ pour l'électron}} \dfrac{q}{2m}$

* L'énergie potentielle d'un moment magnétique $\hat{M}$ plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ est

$$\hat{U} = -\hat{M} . \vec{B}$$

(similaire à un dipole électrique $\hat{D}$ dans un champ électrique $\vec{E}$: $\hat{U} = -\hat{D} \cdot \vec{E}$)