AUT202 - Automatique : dynamique et contrôle des systèmes

Filtre de Kalman

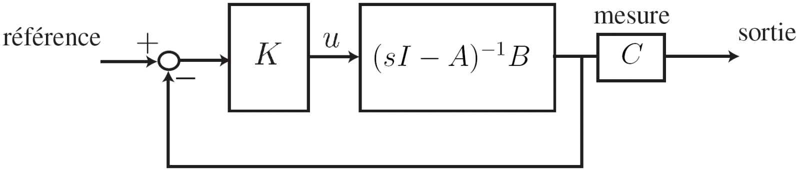
Nicolas Petit

Centre Automatique et Systèmes
MINES ParisTech, PSL University
nicolas.petit@mines-paristech.fr

Vendredi 19 février 2021

Plan

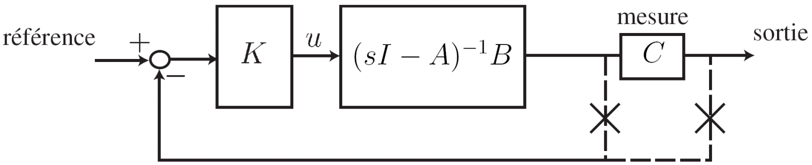
Retour d'état



Placement de pôles

Si (A, B) est commandable, alors le système $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$ est stabilisable par retour d'état $u = Kx$. On peut même choisir toutes les valeurs propres de $A + BK$

Retour de sortie et non pas retour d'état



Seule la mesure y est accessible, en général $\dim y \neq n = \dim x$

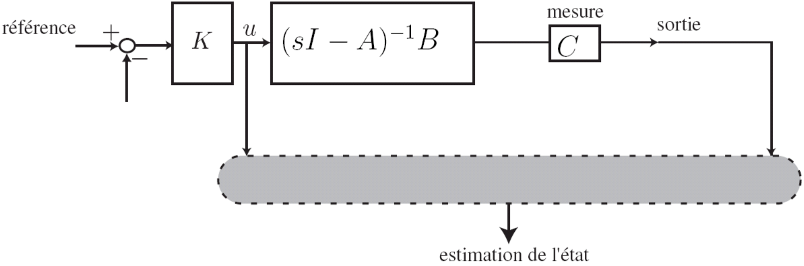
Mesure et estimation d'état

Plusieurs cas de figure

1. Les mesures sont en nombre insuffisant $\dim y < n$: reconstruction d'état
2. Les mesures sont de mauvaise qualité
3. Les mesures sont redondantes mais de mauvaise qualité $\dim y \geq n$: fusion de données

Observateur

On va intercaler entre les mesures et le contrôleur un système dynamique pour estimer l'état du système



On dispose : du modèle du système, des valeurs de la commande u et des mesures y (avec leurs défauts)

Systèmes linéaires

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

Définition (distinguabilité)

Deux états initiaux x et $\tilde{x}$ sont dits indistinguables (notés $x I \tilde{x}$) si pour tout $t \geq 0$, les sorties $y(t)$ et $\tilde{y}(t)$ sont identiques pour toute entrée $u(t)$. Ils sont dits distinguables sinon.

L'indistinguabilité est une relation d'équivalence. Notons $I(x)$ la classe d'équivalence de x.

Définition (observabilité globale)

Le système est dit observable si $I(x) = \{x\}$pour tout x.

Question

Peut-on distinguer la condition initiale d'un système linéaire ?

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

$$x(t) = \exp(tA)x(0) + \int_0^t \exp[(t-\tau)A]Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = C\exp(tA)x(0) + \int_0^t C\exp[(t-\tau)A]Bu(\tau)d\tau$$

Équation d'inconnue $x(0)$

$$\underbrace{C\exp(tA)}_{\text{non inversible}}\, x(0) = y(t) - \int_0^t C\exp[(t-\tau)A]Bu(\tau)d\tau$$

$$C\exp(tA)x(0) = y(t) - \int_0^t C\exp[(t-\tau)A]Bu(\tau)d\tau$$

$$\underbrace{\exp(tA')C'C\exp(tA)}_{\text{non inversible}}x(0) = \mathrm{Fonction}(y(t), u(t \in [0,t]))$$

$$\underbrace{\int_0^T \exp(tA')C'C\exp(tA)dt}_{\phi(T)}\, x(0) = \mathrm{Fonction}(y(t \in [0,T]), u(t \in [0,T]))$$

Si $\phi(T)$ est inversible alors on peut reconstruire $x(0)$ à partir des mesures y et de la commande sur $[0, T]$

Si $\phi(T)$ n'est pas inversible alors on ne peut pas reconstruire $x(0)$ à partir des mesures y et de la commande sur $[0, T]$.
En effet, $\exists v \neq 0$ tel que

$$v' \left(\int_0^T \exp(tA')C'C\exp(tA)dt \right) v = 0$$

et par suite

$$\int_0^T \|C\exp(tA)v\|^2 dt = 0$$

d'où

$$C\exp(tA)v = 0$$

Les mesures issues de la condition initiale $x(0)$ et $x(0) + v$ sont identiques. Ces conditions initiales sont indistinguables

$$\exists v \neq 0, \quad C \exp(tA) v = 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

d'où, par dérivations $\frac{d}{dt}(.)$ (fonction analytique) en $t = 0$

$$CA \exp(tA) v = 0, \quad CA^2 \exp(tA) v = 0, \quad \ldots,$$
$$CA^{n-1} \exp(tA) v = 0, \quad CA^n \exp(tA) v = 0, \quad \ldots$$
$$\iff \exists v \neq 0, Cv = 0, \quad CAv = 0, \ldots, \quad CA^{n-1} v = 0, \quad CA^n v = 0, \ldots$$
$$\iff \exists v \neq 0, Cv = 0, \quad CAv = 0, \ldots, \quad CA^{n-1} v = 0$$
$$\iff [C; CA; \ldots; CA^{n-1}] \text{ n'est pas de rang plein}$$

Critère d'observabilité de Kalman

Le système $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu,\ y = Cx$ est observable si et seulement si la matrice d'observabilité $\mathcal{O} = (C; CA; \ldots CA^{n-1})$ est de rang n= $\dim(x)$

Dualité

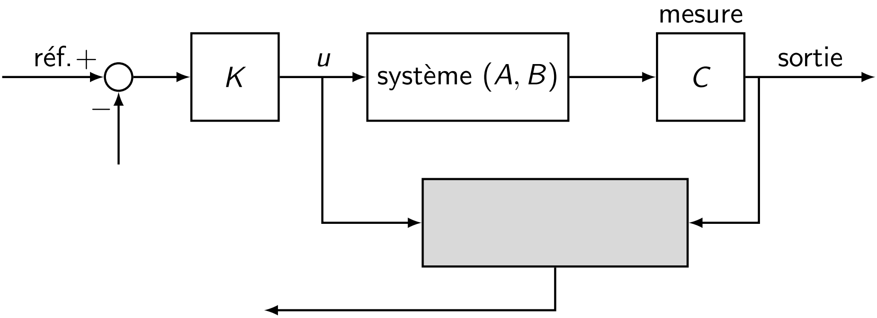
Le système $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu,\ y = Cx$ est observable (resp. commandable) si et seulement si $\frac{d}{dt}x = A'x + C'u,\ y = B'x$ est commandable (resp. observable)

Placement de pôles

Si (A, C) est observable, alors on peut choisir toutes les valeurs propres de $A - LC$

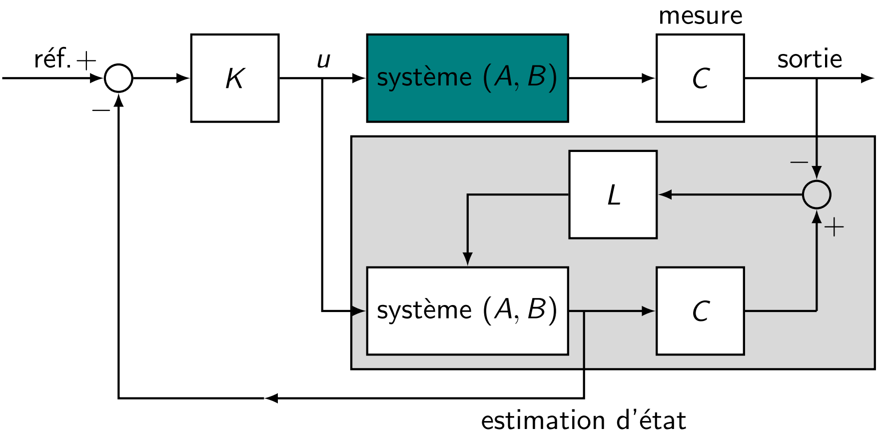
Observateur asymptotique

On intercale entre les mesures et le contrôleur un système dynamique pour estimer l'état du système

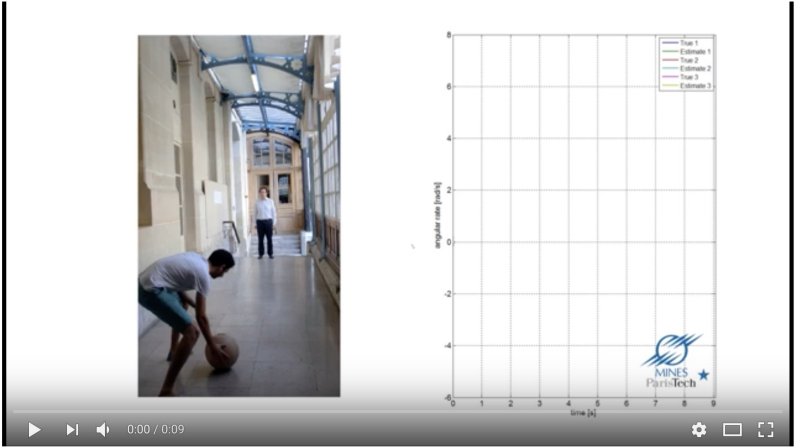


On dispose : du modèle du système, des valeurs de la commande u et des mesures y (avec leurs défauts)

Observateur-contrôleur



Exemple fusion de données



(cliquer sur image)

Filtre de Kalman

- L'observateur asympotique est un filtre

$$\hat{x} = x - \tilde{x}, \quad \frac{d}{dt}\tilde{x} = (A - LC)\tilde{x} + L\rho$$

lorsque $y = Cx + \rho$

- Méthode de réglage d'un observateur. Le théorème de placement de pôles dit qu'on peut librement choisir les valeurs propres. Où les placer ? Là ou c'est optimal du point de vue du bruit (défauts des capteurs)
- Technique proche de la commande LQR qui place les valeurs propres de manière optimale en limitant (compromis) l'effort de la commande (limite des actionneurs)

Informations disponibles

(1)-Modèle

équations représentant le comportement réel avec une certaine incertitude

(2)-Mesures

signaux mesurés/échantillonés/bruités avec un certain bruit (voir expérience)

Formalisme du filtre de Kalman

Système linéaire stationnaire incertain

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) + \xi(t), \quad y(t) = Cx(t) + \varrho(t)$$

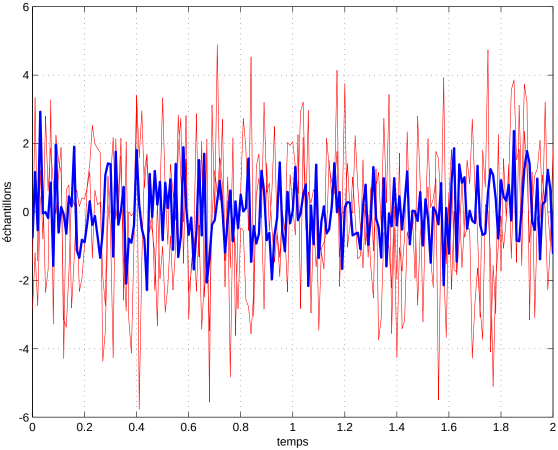
$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, et $\xi(t) \in \mathbb{R}^q$ et $\varrho(t) \in \mathbb{R}^p$ sont des signaux stochastiques, bruits blancs gaussiens centrés

$$E\left(\xi(t)\right) = 0, \qquad \mathrm{cov}\left(\xi(t), \xi(\tau)\right) = M_\xi(t)\ \delta(t-\tau)$$
$$E\left(\varrho(t)\right) = 0, \qquad \mathrm{cov}\left(\varrho(t), \varrho(\tau)\right) = M_\varrho\ \delta(t-\tau)$$

δ mesure de Dirac, M_ξ, M_ϱ matrices de variance sym. déf. positives
$\Rightarrow x(t)$ est un processus stochastique

Bruits blancs gaussiens centrés (scalaires)

$$E\left(\xi(t)\right) = 0, \qquad \mathrm{cov}\left(\xi(t), \xi(\tau)\right) = M_\xi \ \delta(t-\tau)$$
$$E\left(\varrho(t)\right) = 0, \qquad \mathrm{cov}\left(\varrho(t), \varrho(\tau)\right) = M_\varrho \ \delta(t-\tau)$$



Estimation stochastique

On connaît : les entrées, les mesures et le modèle
Les mesures doivent être en accord

- avec le modèle : principe des observateurs
- avec la structure du bruit

Il faut en tenir compte dans les gains
On va utiliser un observateur particulier

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu - K(t)(C\hat{x} - y)$$

$\hat{x}$ est un processus stochastique dépendant de K : estimateur de x
On va chercher à minimiser la variance de son erreur :
$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$variance = E\left(\tilde{x}^T\tilde{x}\right), \qquad J = \mathrm{trace}[E(\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t))]$$

Équation de la variance

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x = Ax + Bu + \xi(t), \qquad y = Cx + \varrho(t) \\ \dfrac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu - K(t)(C\hat{x} - y) \end{cases}$$

L'erreur $\tilde{x} = x - \hat{x}$ satisfait

$$\frac{d}{dt}\tilde{x} = (A - K(t)C)\tilde{x} + \xi(t) - K(t)\varrho(t)$$

C'est un processus stochastique, sa variance (matrice) est

$$\Sigma(t) = E(\tilde{x}(t)\tilde{x}(t)^T)$$

Équation différentielle (déterministe) de la variance

$$\frac{d}{dt}\Sigma(t) = (A - K(t)C)\Sigma(t) + \Sigma(t)(A - K(t)C)^T + \underbrace{\mathrm{variance}(\xi(t) - K(t)\varrho(t))}_{M_\xi + K(t)M_\varrho K(t)^T}$$

Problème d'optimisation

Étant donnée la dynamique (déterministe), sur l'intervalle d'observation $[0, t_f]$

$$\frac{d}{dt}\Sigma = (A - K(t)C)\Sigma + \Sigma(A - K(t)C)^T + M_\xi + K(t)M_\varrho K(t)^T$$

on cherche la loi horaire $[0, t_f] \ni t \mapsto K(t)$ qui minimise

$$\mathrm{trace}(\Sigma(t_f)) = E(\tilde{x}^T(t_f)\tilde{x}(t_f))$$

Optimisation

C'est un problème de planification optimale, l'état est $\Sigma(t)$ (taille $n \times n$), et le contrôle est $K(t)$ (n composantes)

Lagrangien et problème aux deux bouts

$$\mathcal{L} = \mathrm{trace}(\Sigma(t_f)) + \int_0^{t_f} \lambda^T \left((\dots) - \frac{d}{dt}\Sigma(t) \right) dt$$

Problème aux deux bouts

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Sigma = (\dots) \\ \dfrac{d}{dt}\lambda_{ij} = -\left(\dfrac{\partial(\lambda^T(\dots))}{\partial \Sigma_{ij}} \right) \\ 0 = \dfrac{\partial}{\partial K_i}\left(\lambda^T(\dots)\right) \\ \Sigma(0) = \text{donnée (connaissance a priori)} \\ \lambda_{ij}(t_f) = \dfrac{\partial(\mathrm{trace}(\Sigma(t_f)))}{\partial \Sigma_{ij}} \end{cases}$$

Calcul du gain optimal

Les conditions $0 = \frac{\partial}{\partial K_i}\left(\lambda^T(\dots)\right)$ sont assez simples car $\lambda_{ij\neq i} = 0$.
Au final on obtient K par "dérivation" de

$$(A - K(t)C)\Sigma + \Sigma(A - K(t)C)^T + M_\xi + K(t)M_\varrho K(t)^T$$

c.-à-d.

$$-2\Sigma C^T + 2K(t)M_\varrho = 0$$

d'où

$$K = \Sigma C^T M_\varrho^{-1}$$

λ n'est qu'un intermédiaire

Résumé du filtre

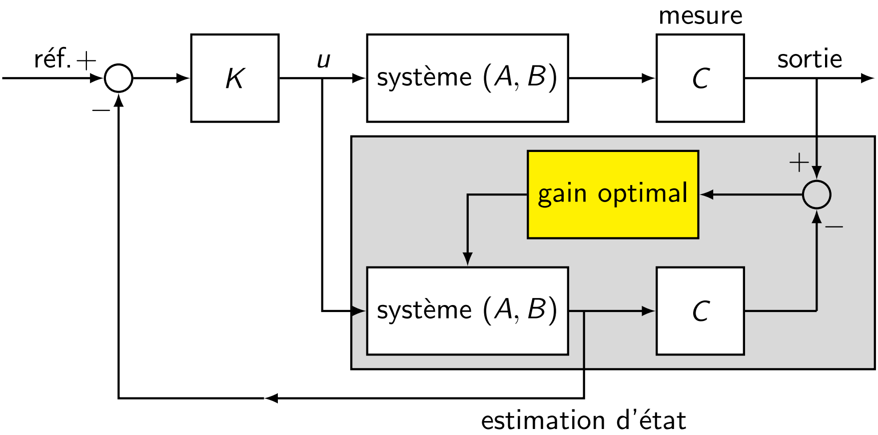
Filtre de Kalman (filtre non biaisé minimisant la variance de l'erreur)

Système dynamique avec $\hat{x}$ et Σ comme états

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x &= Ax + Bu + \xi(t), \qquad y = Cx + \varrho(t)\\
\frac{d}{dt}\hat{x} &= A\hat{x} + Bu + K(t)(y - C\hat{x})\\
K(t) &= \Sigma(t)C^T M_\varrho^{-1}\\
\frac{d}{dt}\Sigma(t) &= (A - K(t)C)\Sigma(t) + \Sigma(t)(A - K(t)C)^T\\
&\quad + M_\xi + K(t)M_\varrho K(t)^T
\end{aligned}\right.$$

Conditions initiales $\hat{x}(0), \Sigma(0)$. Sortie $\hat{x}(t)$

Mise en place



Cas asymptotique : observation de $]-\infty, t]$

De manière générale

$$K(t) = \Sigma(t) C^T M_\varrho^{-1}$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma = (A - K(t)C)\Sigma(t) + \Sigma(t)(A - K(t)C)^T + M_\xi + K(t) M_\varrho K(t)^T$$

se simplifie. L'équation de Riccati différentielle

$$\frac{d}{dt}\Sigma = A\Sigma(t) + \Sigma(t)A^T + M_\xi - \Sigma C^T M_\varrho^{-1} C \Sigma^T(t)$$

lorsque l'intervalle d'observation $[0, t]$ est remplacé par $]-\infty, t]$, devient une équation de Riccati algébrique. On peut la résoudre sous certaines hypothèses

Filtre de Kalman asymptotique

Si le système linéaire stationnaire $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu + \xi$, $y = Cx + \varrho$ est observable alors, étant données les matrices de covariance M_ξ et M_ϱ des bruits blancs gaussiens centrés ξ et ϱ, le meilleur observateur asymptotique (au sens stochastique défini précédemment) est

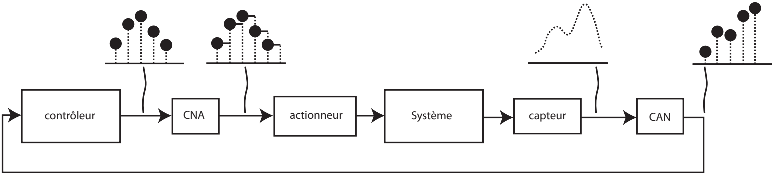
$$\frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu - K(C\hat{x} - y(t))$$

avec $K = \Sigma C^T M_\varrho^{-1}$ avec Σ solution de l'équation de Riccati algébrique

$$0 = A\Sigma + \Sigma A^T + M_\xi + \Sigma C^T M_\varrho^{-1} C \Sigma^T(t)$$

Passage du continu au discret

En vue de l'implémentation pratique



$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k] \tag{1}$$
$$y[k] = Cx[k] \tag{2}$$

$$A_d = \exp(AT_e), \quad B_d = \int_0^{T_e} \exp(At) B dt$$

Formalisme et question posée

Soit le système en temps discret

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + \xi[k], \quad y[k] = Cx[k] + \rho[k]$$

Quelle est la meilleure estimée de $x[k]$ sachant les mesures $y[0], y[1], ..., y[k]$?

Filtre de Kalman en temps discret

Initialisation $\begin{cases} \hat{x}_p[0] = \hat{x}_r[0] = E(x^0) \\ \Sigma_p[0] = \Sigma_r[0] = \mathrm{var}(x^0) \end{cases}$

Propagation $\begin{cases} \hat{x}_p[k+1] = A\hat{x}_r[k] + Bu[k] \\ \Sigma_p[k+1] = A\Sigma_r[k]A^T + M_\xi \end{cases}$

Recalage (si pas de mesure, pas de recalage)

$$\begin{cases} K = \Sigma_p[k+1]C^T \left(C\Sigma_p[k+1]C^T + M_\rho\right)^{-1} \\ \hat{x}_r[k+1] = \hat{x}_p[k+1] + K(y[k+1] - C\hat{x}_p[k+1]) \\ \Sigma_r[k+1] = \left(\Sigma_p[k+1]^{-1} + C^T M_\rho^{-1} C\right)^{-1} \end{cases}$$

l'estimation recherchée de $x[k]$ est simplement $\hat{x}_r[k]$.

Variantes et Extensions les plus courantes

1. Forme de Joseph : lemme d'inversion matriciel sur $\Sigma_r[k+1] = \left(\Sigma_p[k+1]^{-1} + C^T M_\rho^{-1} C\right)^{-1}$

$$\Sigma_r[k+1]$$
$$= \Sigma_p[k+1] - \Sigma_p[k+1]C^T \left(C\Sigma_p[k+1]C^T + M_\rho\right)^{-1} C\Sigma_p[k+1]$$

car (formule de Sherman-Morrison-Woodbury)

$$(A+UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U\left(C^{-1} + VA^{-1}U\right)VA^{-1}$$

2. Filtre de Kalman étendu : les matrices du système linéarisé sont obtenues par linéarisation du modèle de connaissance *autour de l'estimée courante*

National Medal of Science 2009