Correction PC6: Les profils minces

MF101

1 Exercice 1

1. On peut écrire le potentiel complexe autour de la plaque sous faible incidence, sous la forme approchée:

$$f(z) \ = \ U_\infty z \ + \epsilon f_1(z) \tag{1}$$

D'autre part, la plaque sous faible incidence est un profil sans épaisseur, squelettique ou encore antisymétrique, d'équation:

$$y^+ = y^- = \epsilon\alpha(L - x) = \epsilon g(x) \tag{2}$$

On a donc en écrivant le potentiel des vitesses sous la forme: $\phi \ = \ U_\infty x + \epsilon\phi_1$, ϕ_1 solution du système suivant:

$$\Delta \ \phi_{\mathbf{1}} = 0 \tag{3}$$

$$\phi_1 \rightarrow \ 0 \quad \text{pour} \quad |x| \rightarrow \infty \tag{4}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x, 0^\pm) \ = \ U_\infty \frac{dg}{dx} \ (x) \ = \ - \alpha U_\infty \ \ \text{pour} \quad 0 \leq x \leq L \tag{5}$$

On rappelle également que dans la méthode, les différentes grandeurs sont perturbées sous la forme:

$$u \ = \ U_\infty + \epsilon u_1 + ... \tag{6}$$

$$v \ = \ \epsilon v_1 + ... \tag{7}$$

$$p \ = \ p_\infty + \epsilon p_1 \tag{8}$$

La vitesse normale (7) est continue à la traversée de la coupure (ce qui est caractéristique des profils antisymétriques). La coupure peut alors être modélisée par une distribution continue de tourbillons dont on notera $\gamma(x)$ l'intensité linéique. Le potentiel complexe (1) devient:

$$f(z) \ = \ U_\infty z \ - \epsilon \frac{i}{2\pi} \int_0^L \ \gamma(x') \ log(z - x') dx' \tag{9}$$

La vitesse complexe s'écrit alors:

$$\frac{df}{dz} \ = \ U_\infty \ - \epsilon \frac{i}{2\pi} \int_0^L \ \gamma(x') \ \frac{1}{z - x'} dx' \ = \ U_\infty \ + \ \epsilon \left(u_1 - i v_1\right) \tag{10}$$

Les vitesses perturbées u_1 et v_1 définies en (6) et (7) s'écrivent:

$$u_1 = \ \mathcal{R}e \left\{ \frac{-i}{2\pi} \int_0^L \ \gamma(x') \ \frac{1}{z - x'} dx' \right\} \tag{11}$$

$$v_1 = \ \mathcal{I}m \left\{ \frac{-i}{2\pi} \int_0^L \ \gamma(x') \ \frac{1}{z - x'} dx' \right\} \tag{12}$$

avec $\mathcal{R}e$ et $\mathcal{I}m$ désignant respectivement la partie réelle et la partie imaginaire. On obtient alors:

$$u_1 = -\frac{y}{2\pi}\int_0^L \frac{\gamma(x')}{(x-x')^2+y^2}dx' \tag{13}$$

$$v_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \frac{\gamma(x')(x-x')}{(x-x')^2+y^2}dx' \tag{14}$$

2. On doit en outre rappeler que pour un profil antisymétrique la densité linéique $\gamma(x)$ est reliée au saut de vitesse tangentielle perturbée u_1 par:

$$[[u_1(x,y)]]_{y=0^-}^{y=0^+} = -\gamma(x) \tag{15}$$

La condition de Kutta indique également la continuité au bord de fuite de la plaque $x = L$ de la vitesse d'où:

$$\gamma(L) = 0 \tag{16}$$

De plus sur la coupure la vitesse normale doit vérifier la condition à la limite (5):

$$v_1(x,0^+) = v_1(x,0^-) = -U_\infty\alpha \tag{17}$$

La limite de (14) quand y tend vers 0 n'est pas définie car l'intégrand n'est pas défini en $x' = x$. L'intégrale est une intégrale impropre. Cependant il est possible de donner un sens à cette intégrale si les deux limites suivantes existent :

$$lim_{\delta\to 0}\int_0^{x-\delta} \gamma(x')\,\frac{1}{(x-x')}dx' \tag{18}$$

et

$$lim_{\delta\to 0}\int_{x+\delta}^{L} \gamma(x')\,\frac{1}{(x-x')}dx' \tag{19}$$

On appelle alors valeur principale de l'intégrale:

$$v.p.\int_0^L \gamma(x')\,\frac{1}{(x-x')}dx' = lim_{\delta\to 0}\left\{\int_0^{x-\delta} \gamma(x')\,\frac{1}{(x-x')}dx' + \int_{x+\delta}^{L} \gamma(x')\,\frac{1}{(x-x')}dx'\right\} \tag{20}$$

On a alors:

$$U_\infty\alpha + \frac{1}{2\pi}\,v.p.\int_0^L \frac{\gamma(x^{'})}{x-x^{'}}dx^{'} = 0, \qquad \text{avec} \qquad \gamma(L) = 0 \quad , \tag{21}$$

3. La Portance de la plaque est définie par:

$$\mathcal{P} = \epsilon\int_0^L \left(p_1^- - p_1^+\right)dx' \tag{22}$$

avec

$$p_1^\pm = -\rho U_\infty u_1^\pm \tag{23}$$

La portance (dirigée selon Oy) vaut donc:

$$\mathcal{P} = -\epsilon\rho U_\infty\int_0^L \left(u_1^- - u_1^+\right)dx' = -\epsilon\rho U_\infty\int_0^L \gamma(x')dx' \tag{24}$$

soit, compte tenu de la valeur de $\gamma(x)$ donnée dans l'énoncé:

$$\mathcal{P} = 2\epsilon\rho U_\infty^2\alpha\int_0^L \sqrt{\frac{L-x'}{x'}}dx' \tag{25}$$

On rappelle que :

$$\int_0^C \sqrt{\frac{x'}{C-x'}}dx' \;=\; \frac{\pi}{2}C \tag{26}$$

Un changement de variable dans l'intégrale (25) donne immédiatement:

$$\mathcal{P} = \epsilon\pi\rho U_\infty^2 \alpha L \tag{27}$$

Le coefficient de portance s'écrit:

$$C_Z = \frac{\mathcal{P}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L} = 2\epsilon\pi\alpha \tag{28}$$

Le moment résultant par unité de longueur s'écrit:

$$C_0 = \epsilon \int_0^L x' \left(p_1^- - p_1^+\right) dx' = -\epsilon\rho U_\infty \int_0^L x'\gamma(x')dx' = 2\epsilon\rho U_\infty^2 \alpha \int_0^L x' \sqrt{\frac{L-x'}{x'}}dx' \tag{29}$$

On rappelle que :

$$\int_0^C x\sqrt{\frac{x'}{C-x'}}dx' \;=\; \frac{3\pi}{8}C^2 \tag{30}$$

On a donc:

$$C_0 = \epsilon\frac{\pi}{4}\rho U_\infty^2 \alpha L^2 \tag{31}$$

4. Cherchons le point M_p sur la plaque caractérisé par le vecteur $\vec{x}_p$ tel que:

$$\vec{x}_p \wedge \vec{\mathcal{P}} \;=\; C_0 \vec{e}_z \tag{32}$$

On obtient alors immédiatement:

$$x_p = \frac{L}{4} \tag{33}$$

On pourra comparer ce résultat à celuide la Pc5 pour un angle α petit.

2 Exercice II

Pour que le biplan constitué par les deux profils ait une portance nulle, il suffit de choisir pour profil $y = f(x, \epsilon)$ une portion de ligne de courant de l'écoulement perturbé créé par le premier profil. Cet écoulement perturbé a pour potentiel complexe:

$$\Phi + i\Psi \;=\; V_\infty z \;+ \epsilon F^s(z) \tag{34}$$

Les lignes de courant sont données par $\Psi = Cte$ et il suffit pour les obtenir de prendre la partie imaginaire de l'expression ci-dessus, c'est à dire:

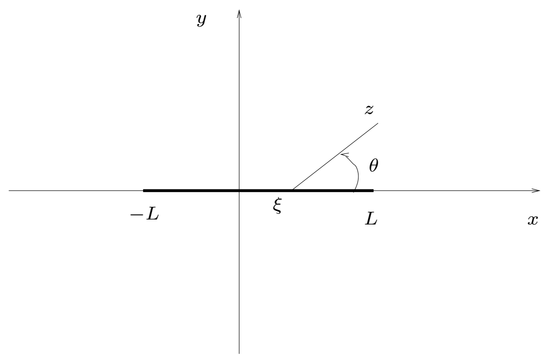
$$V_\infty y \;+ \epsilon \mathcal{I}m\left\{F^s(z)\right\} \;=\; Cte \tag{35}$$

En posant $z - \xi = re^{i\theta}$ il vient donc:

$$V_\infty y \;+ \epsilon\frac{V_\infty}{\pi}\int_{-L}^{L} \delta^s(\xi)\theta(\xi)d\xi \;=\; Cte \tag{36}$$

avec $\delta^s(x) = \frac{df^s}{dx}$, la pente du profil symétrique. L'angle $\theta(\xi)$ a une interprétation géométrique simple qui permet son calcul (voir figure ci-après):

On a $\theta(\xi) = Arctg\frac{y}{x-\xi}$ Par conséquent, le profil $y = f(x, \epsilon)$ doit être tel que :



$$V_\infty f(x,\epsilon) \ + \epsilon \frac{V_\infty}{\pi} \int_{-L}^{L} \delta^s(\xi) Arctg \frac{f(x,\epsilon)}{x-\xi} d\xi \ = \ Cte \tag{37}$$

Cette équation intégrale pour $f(x,\epsilon)$ se simplifie en cherchant f sous forme d'un développement asymptotique:

$$f(x,\epsilon) = f_0(x) + \epsilon f_1(x) \tag{38}$$

En portant $f(x,\epsilon)$ dans la relation (37), on obtient en première approximation $f_0 = cte = A$ et à l'ordre ϵ:

$$f_1(x) \ + \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} \delta^s(\xi) Arctg \frac{f_0(x)}{x-\xi} d\xi \ = \ Cte = B \tag{39}$$

d'oú finalement:

$$f(x,\epsilon) \ = A - \frac{\epsilon}{\pi} \int_{-L}^{L} \delta^s(\xi) Arctg \frac{A}{x-\xi} d\xi \ + \epsilon B \tag{40}$$

avsc A et B deux constantes arbitraires.