ENSTA-Paris **MS102**

***

Elasticité linéaire

Travaux dirigés n°2

Comportement thermoélastique linéaire

***

Exercice 1 : Inversion de la relation $\underline{\underline{\sigma}}$-$\underline{\underline{\epsilon}}$

On considère la loi de comportement élastique linéaire isotrope, écrite sous la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \lambda(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{1}} + 2\mu\,\underline{\underline{\epsilon}} - (3\lambda+2\mu)\alpha\tau\underline{\underline{1}} \qquad (1)$$

Montrer que relation peut être mise sous la forme

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0) - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_0)\underline{\underline{1}} + \alpha\tau\underline{\underline{1}} \qquad (2)$$

et exprimer (E,ν) en fonction de (λ,μ).

Exercice 2 : Interprétation des coefficients élastiques

Soit $(0,\underline{e}_x,\underline{e}_y,\underline{e}_z)$ un repère orthonormé. On considère un cylindre de section S, d'axe $(0,\underline{e}_z)$ et de hauteur H, constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope. Les contraintes initiales $\underline{\underline{\sigma}}_0$ sont supposées nulles. On étudie l'équilibre de ce solide sous plusieurs cas de chargement.

1) *Traction/compression* : le solide est en équilibre sous l'action de forces surfaciques $\underline{T} = (F/S)\underline{e}_z$ en $z = H$, et $\underline{T} = -(F/S)\underline{e}_z$ en $z = 0$. Le reste de la surface est libre de contraintes et il n'y a pas de forces volumiques.

a) Déterminer l'expression de $\underline{\underline{\sigma}}$ en faisant l'hypothèse d'un champ de contraintes uniforme.

b) Déterminer $\underline{\underline{\epsilon}}$. En supposant que le cylindre est encastré en $z = 0$, déduire le déplacement $\underline{\xi}$, cherché sous la forme $\underline{\xi} = \xi_x(x)\underline{e}_x + \xi_y(y)\underline{e}_y + \xi_z(z)\underline{e}_z$.

c) Exprimer la variation de longueur du cylindre $\xi_z(H) - \xi_z(0)$ en fonction de F/S. Interpréter E et ν. Que vaut ν dans le cas d'un matériau incompressible ?

2) *Dilatation thermique* : le solide est soumis à une élévation de température uniforme τ, en l'absence de chargement mécanique. Calculer la variation de volume et interpréter α.

3) *Pression uniforme* : le solide est en équilibre sous l'effet d'une pression p uniforme sur toute la surface. Les forces de volumes sont nulles.

a) Déterminer le champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ dans le solide en faisant l'hypothèse d'un champ uniforme.

b) Déterminer la variation de volume et interpréter le coefficient $K = E/3(1-2\nu)$. En déduire une restriction sur ν.

4) *Torsion* : on suppose que la section est circulaire de rayon R. On considère la transformation de torsion vue en MS101 :

$$\underline{\xi} = \eta r \frac{z}{H}\underline{e}_\theta$$

où η est un paramètre fixé tel que $\eta \ll 1$ et $\eta R/H \ll 1$ (petites transformations)

a) Déterminer $\underline{\underline{\epsilon}}$ puis $\underline{\underline{\sigma}}$.

b) Calculer les forces volumiques $\underline{f}$ et les forces surfacique $\underline{T}$ à l'équilibre.

c) Calculer le moment et la résultante des efforts surfaciques appliqués sur la section $z = H$. En déduire une interprétation de μ.

Exercice 3 : Mesure des contraintes en un point d'une surface libre

Une pièce élastique homogène et isotrope, en état d'équilibre, présente une surface libre. Soit M un point de cette face et $(M,\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ un repère orthonormé tel que $\underline{e}_3$ soit dirigé selon la normale. On colle au point M une 'rosette', ensemble des trois jauges électriques fournissant les allongements unitaires dans les directions $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$. On note respectivement A,B,C les allongements unitaires dans ces trois directions.

Déterminer les tenseurs $\underline{\underline{\epsilon}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ en M.