ENSTA-Paris **MS102**

***

Elasticité linéaire

Travaux dirigés n°3

Solutions exactes - méthode des déplacements

***

Exercice 1 : Équilibre d'un réservoir sphérique

On considère un réservoir sphérique, de rayon intérieur a et de rayon extérieur b. Ce réservoir est en équilibre sous l'effet d'une pression externe p_e et d'une pression interne p_i. Le matériau est supposé élastique linéaire isotrope.

1. On recherche des solutions dans l'ensemble des champs cinématiquement admissibles possédant de plus la symétrie sphérique. Écrire la forme générale d'un tel déplacement, et en déduire le champ de contraintes dans le réservoir pour ce déplacement.

2. En écrivant que le champ de contrainte doit être statiquement admissible, déduire l'expression du déplacement ainsi que des contraintes.

3. On suppose l'épaisseur $e = b - a$ petite devant le rayon moyen $R = \frac{a+b}{2}$. Développer les expressions des contraintes trouvées à la question précédente, selon du petit paramètre $\varepsilon = \frac{e}{R}$ et de la variable d'espace remise à l'échelle $y = \frac{R-r}{e}$. En déduire les valeurs approchées des contraintes, commentez.

4. Application numérique : On suppose que, pour le matériau constituant le réservoir, le cisaillement maximal tolérable est de 100 MP_a. Dimensionner le réservoir en épaisseur pour un rayon $R = 1$m et une différence de pression entre p_e et p_i de 1 MP_a.

Exercice 2 : Échauffement d'une plaque circulaire trouée

On s'intéresse à la déformation d'une plaque circulaire trouée de rayon intérieur a, de rayon extérieur R et d'épaisseur H soumise à un échauffement. La surface supérieure de la plaque (en $z = +H/2$) et soumise à un écart de température $+\Delta\mathbf{T}/2$ par rapport à la température d'équilibre ambiante, tandis que la surface inférieure (en $z = -H/2$) est soumise à un écart de température $-\Delta\mathbf{T}/2$. Entre les deux, on suppose que l'écart de température $\tau(z)$ est linéaire. On suppose que la plaque est maintenue rigidement sans frottements sur sa surface latérale extérieure (en $r = R$). Les autres surfaces sont libres de contrainte. Le matériau constituant la plaque est élastique, homogène et isotrope, sans contraintes initiales. On suppose applicables les hypothèses HPP. En outre, on supposera nul tout mouvement rigidifiant de la plaque.

1. Représentez la situation, exprimez l'écart de température $\tau(z)$, et vérifiez que le problème est bien posé. En vous inspirant de la dilatation d'un rail (poly p. 35-37), représentez la forme qu'aura la plaque déformée.

2. On cherche un champ de déplacement solution au problème sous la forme :

$$\underline{\xi} = z\ f(r)\ \underline{e}_r + \left[g(r) + \frac{\beta\ z^2}{2}\right]\ \underline{e}_z\ . \tag{1}$$

où β est une constante, et où f et g sont des fonctions à déterminer. Montrer qu'il s'agit d'un champ Cinématiquement Admissible pour le problème. En déduire une condition à remplir pour f.

3. Calculer le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$. En déduire le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ dans le matériau constituant la plaque.

4. Écrire les conditions aux limites que doit vérifier $\underline{\underline{\sigma}}$. En déduire plusieurs conditions sur f, g, ainsi que l'expression de β en fonction de f, f' et l'écart de température.

5. Ecrire les équations d'équilibre au sein de la plaque. Montrer qu'elles impliquent l'équation différentielle suivante :

$$f''(r) + \frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2} = 0 \tag{2}$$

Résoudre pour f puis pour g. Ecrire les formules finales pour les champs de déplacements, de déformations et de contraintes.