PC4: Correction.

MF101

1 Exercice 1

On trouvera la correction de l'exercice 1 dans le livre aux pages 104/105.

2 Exercice 2

1. Il s'agit donc de trouver un potentiel complexe tel que localement en $z = ia$ il se comporte comme un tourbillon et tel que l'axe Ox soit ligne de courant et tel que à l'infini amont la vitesse ne soit pas modifiée. On imagine un tourbillon symétrique par rapport à Ox de circulation opposée; on dit que ce tourbillon est l'image du tourbillon placé en $z = ia$ par rapport à Ox. Le potentiel complexe résultant de la superposition de $g(z) = V_\infty z - \frac{i\Gamma}{2\pi}\log(z-ia)$ et du tourbillon symétrique vaut donc:

$$f(z) \ = V_\infty z \ - \ \frac{i\Gamma}{2\pi}\ \{log(z-ia) - log(z+ia)\} \tag{1}$$

Soit:

$$f(z) \ = V_\infty z \ - \ \frac{i\Gamma}{2\pi}\ log\left(\frac{z-ia}{z+ia}\right) \tag{2}$$

2. La force s'exerçant sur le profil placé en $z = ia$ est due aux forces de pression. On peut la représenter par la formule de Blasius. Le profil modélisé par le tourbillon étant ligne de courant (cf Cours 6 sur les profils minces), la force s'exprime sous la forme:

$$\mathcal{F} \ = \ \mathcal{F}_x - i\mathcal{F}_y \ = \ \frac{i\rho}{2}\int_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 \ dz \tag{3}$$

avec $\frac{df}{dz}$ donné ci-dessous:

$$\frac{df}{dz} \ = V_\infty \ - \ \frac{i\Gamma}{2\pi(z-ia)} \ + \ \frac{i\Gamma}{2\pi(z+ia)} \tag{4}$$

La seule singularité de $\frac{df}{dz}$ à l'intérieur du profil étant $z = ia$, on a, en utilisant le théorème des résidus:

$$\mathcal{F} \ = \ \frac{i\rho}{2}\int_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 \ dz \ = \ \frac{i\rho}{2} 2i\pi \ Res(z=ia) \tag{5}$$

Le résidu est le coefficient de $\frac{1}{(z-ia)}$:

$$Res(z=ia) = \frac{-2iV_\infty\ \Gamma}{2\pi} + \frac{\Gamma^2}{4i\pi^2 a} \tag{6}$$

Ainsi:

$$\mathcal{F} \ = \ \mathcal{F}_x - i\mathcal{F}_y \ = i\rho\Gamma V_\infty \ + \frac{i\rho\Gamma^2}{4\pi a} \tag{7}$$

ainsi la trainée $\mathcal{F}_x$ est nulle et la portance vaut:

$$\mathcal{F}_y \ = \ -\rho\Gamma V_\infty - \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi a} \tag{8}$$

Dans les configurations aérodynamiques Γ est négatif. Le premier terme de la force est donc dirigé vers le haut, le deuxième terme est lui dirigé vers le bas et est d'autant plus fort que a est petit.