

Commandabilité
oooooooooooo

Cas linéaire stationnaire
oooooooooooo

Forme normale
ooo

Planification de trajectoires
oooooooooooooooooooo

AUT202 - Automatique : dynamique et contrôle des systèmes

Commandabilité

NICOLAS PETIT

Centre Automatique et Systèmes
MINES Paris, PSL University
nicolas.petit@minesparis.psl.eu

Mercredi 9 février 2022

Commandabilité
oooooooooooo

Cas linéaire stationnaire
oooooooooooo

Forme normale
ooo

Planification de trajectoires
oooooooooooo

Plan de l'amphi

- 1 Commandabilité
- 2 Cas linéaire stationnaire
- 3 Forme normale
- 4 Planification de trajectoires

Diverses équations à stabiliser

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad u(t) \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + u(t)g(x(t), t), \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad g(x(t), t) \neq 0$$

Système mécanique général

$$\mathcal{L}(q, \frac{d}{dt}q) = T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) - V(q_1, \dots, q_n)$$

T : énergie cinétique, V : énergie potentielle

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} (q, \frac{d}{dt}q) \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} (q, \frac{d}{dt}q) = u_i$$

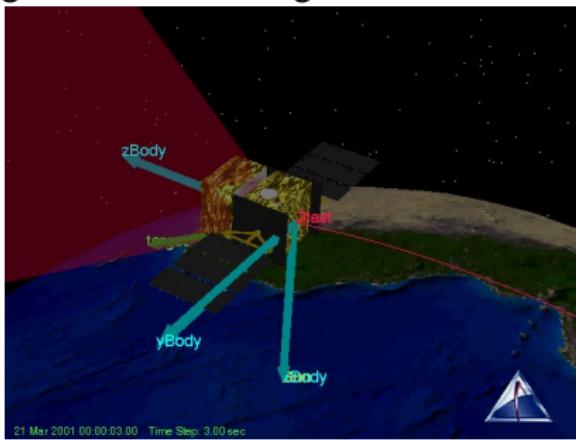
q : coord. généralisées, u : forces généralisées

$$M(q) \frac{d^2}{dt^2} q + C(q, \frac{d}{dt}q) \frac{d}{dt} q + g(q) = u$$

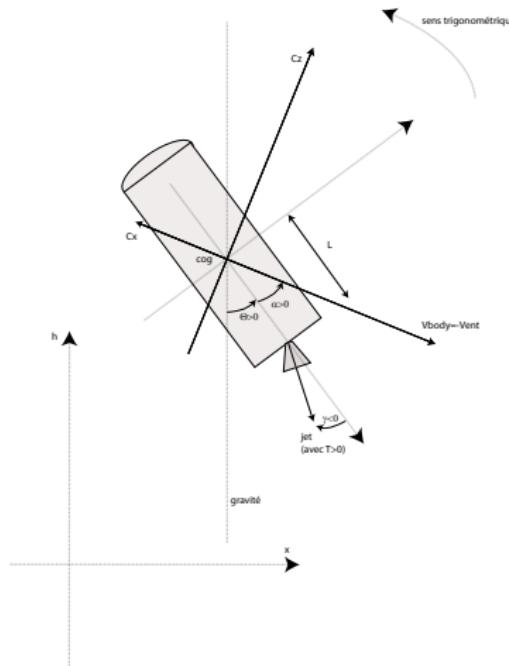
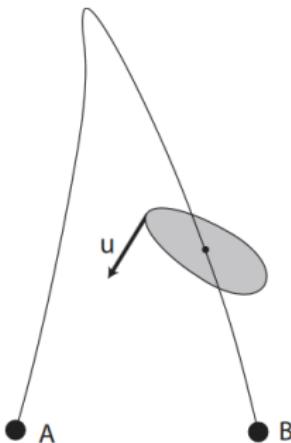
$$M(q) \frac{d^2}{dt^2} q + C(q, \frac{d}{dt} q) \frac{d}{dt} q + g(q) = u$$

Système **complètement actionné** : une commande par degré de liberté. **Les manœuvres sont faciles**

Exemple : changement de configuration d'un satellite



Quelques exemples non trivialement commandables



Hockey-puck, Fusée poussée vectorisée

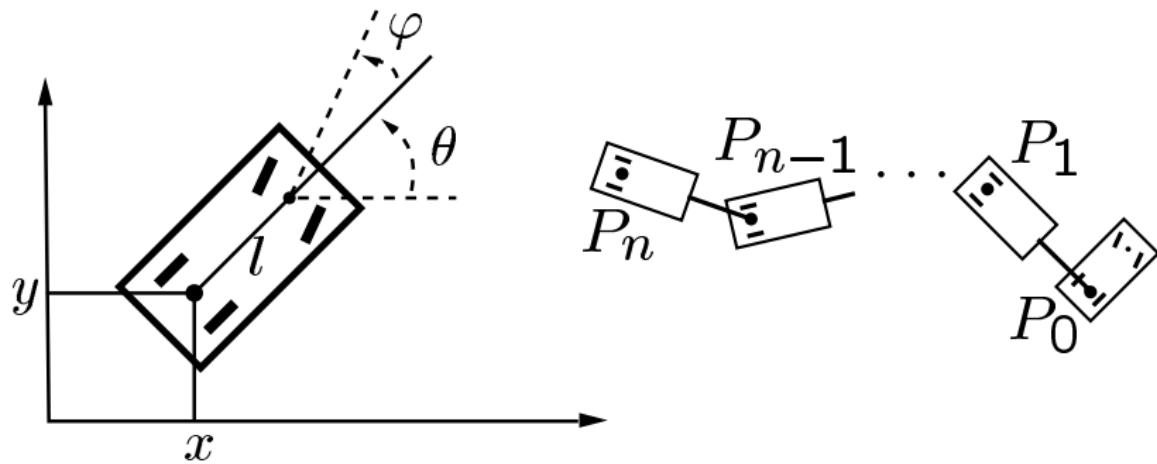
Commandabilité
oooooooo●oooo

Cas linéaire stationnaire
oooooooooo

Forme normale
ooo

Planification de trajectoires
oooooooooooo

Vélos, voitures, ...

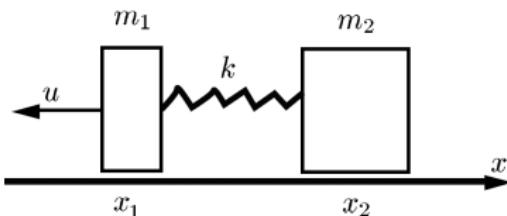


Autre exemple : munition guidée



source : Institut Saint-Louis

Systèmes non complètement actionnés



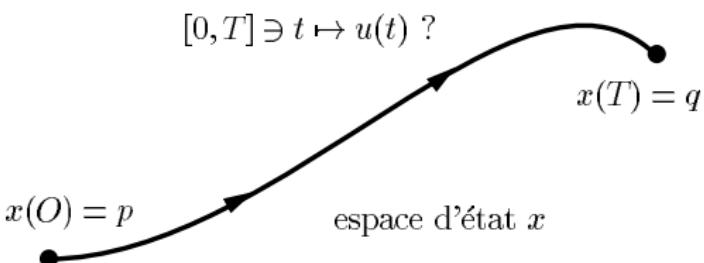
Transfert d'une position d'arrêt à une autre

1 seule commande, peut-on commander ?

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2}x_1 = k(x_2 - x_1) + \textcolor{red}{u}$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2}x_2 = k(x_1 - x_2)$$

Notion générale de commandabilité

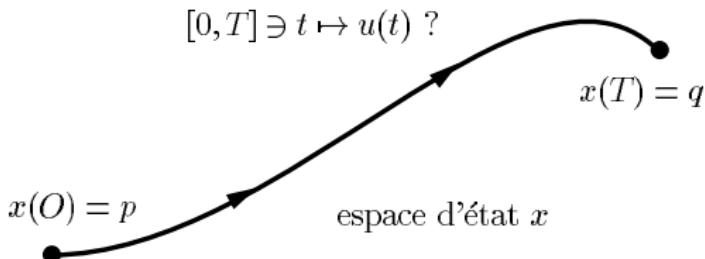


Définition : commandabilité

Le système $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$) est dit **commandable en temps $T > 0$** si et seulement si pour tout $p, q \in \mathbb{R}^n$, il existe une loi horaire $[0, T] \ni t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^m$, dite **commande en boucle ouverte**, qui amène le système de l'état $x(0) = p$ à l'état $x(T) = q$

Le système est dit *simplement commandable* lorsqu'il est commandable pour au moins un temps $T > 0$

Notion générale de commandabilité



Définition : commandabilité

Le système $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$) est dit **commandable en temps $T > 0$** si et seulement si pour tout $p, q \in \mathbb{R}^n$, il existe une loi horaire $[0, T] \ni t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^m$, dite **commande en boucle ouverte**, qui amène le système de l'état $x(0) = p$ à l'état $x(T) = q$

Le système est dit *simplement commandable* lorsqu'il est commandable pour au moins un temps $T > 0$

Obstructions à la commandabilité

Deux types d'obstruction à la commandabilité

- le système comporte un **sous-système indépendant du contrôle u** . Exemple $\xi = x_1 - x_2$ pour le système

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 = u - x_1, \quad \frac{d^2}{dt^2}x_2 = u - x_2, \quad \frac{d^2}{dt^2}\xi = -\xi$$

- La **dérivée** de certaines variables est de **signe constant** (cas non linéaire). Exemple

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_2, \quad \frac{d}{dt}x_2 = u^2 \geq 0$$

Note : on ne dispose pas à l'heure actuelle de caractérisation en terme fini de la contrôlabilité même si les composantes de f sont des fonctions polynomiales de x et u .

Obstructions à la commandabilité

Deux types d'obstruction à la commandabilité

- le système comporte un **sous-système indépendant du contrôle u** . Exemple $\xi = x_1 - x_2$ pour le système

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 = u - x_1, \quad \frac{d^2}{dt^2}x_2 = u - x_2, \quad \frac{d^2}{dt^2}\xi = -\xi$$

- La **dérivée** de certaines variables est de **signe constant** (cas non linéaire). Exemple

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_2, \quad \frac{d}{dt}x_2 = u^2 \geq 0$$

Note : on ne dispose pas à l'heure actuelle de **caractérisation en terme fini** de la contrôlabilité même si les composantes de f sont des fonctions polynomiales de x et u .

Obstructions à la commandabilité

Deux types d'obstruction à la commandabilité

- le système comporte un **sous-système indépendant du contrôle u** . Exemple $\xi = x_1 - x_2$ pour le système

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 = u - x_1, \quad \frac{d^2}{dt^2}x_2 = u - x_2, \quad \frac{d^2}{dt^2}\xi = -\xi$$

- La **dérivée** de certaines variables est de **signe constant** (cas non linéaire). Exemple

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_2, \quad \frac{d}{dt}x_2 = u^2 \geq 0$$

Note : on ne dispose pas à l'heure actuelle de caractérisation en terme fini de la contrôlabilité même si les composantes de f sont des fonctions polynomiales de x et u .

Commandabilité linéaire

Cas linéaire stationnaire

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$$

La contrôlabilité en temps $T > 0$ équivaut à la contrôlabilité en un temps arbitrairement court. T n'a que peu d'importance

Formule explicite

Transition entre $x(0) = p$ à $x(T) = q$

$$u(\textcolor{red}{t}) =$$

$$B' \exp[(T - \textcolor{red}{t})A'] \left(\int_0^T \exp(sA)BB' \exp(sA')ds \right)^{-1} (\textcolor{red}{q} - \exp(TA)\textcolor{red}{p})$$

Vérification : solution générale

$$x(t) = \exp(tA)x(0) + \int_0^t \exp[(t-\tau)A]Bu(\tau)d\tau$$

$$u(t) = B' \exp[(T-t)A'] \left(\int_0^T \exp(sA)BB' \exp(sA')ds \right)^{-1} (q - \exp(TA)p)$$

avec la commande précédente,

Vérification : solution générale

$$x(t) = \exp(tA)x(0) + \int_0^t \exp[(t-\tau)A]Bu(\tau)d\tau$$

avec la commande précédente,

$$x(T) = \exp(TA)p +$$

$$\int_0^T \exp[(T-\tau)A]BB' \exp[(T-\tau)A'] \left(\int_0^T \exp(sA)BB' \exp(sA')ds \right)^{-1} (q - \exp(TA)p) d\tau$$

$$= \exp(TA)p +$$

$$\int_0^T \exp[(T-\tau)A]BB' \exp[(T-\tau)A'] d\tau \left(\int_0^T \exp(sA)BB' \exp(sA')ds \right)^{-1} (q - \exp(TA)p)$$

$$= \exp(TA)p +$$

$$\left(\int_0^T \exp(sA)BB' \exp(sA')ds \right) \left(\int_0^T \exp(sA)BB' \exp(sA')ds \right)^{-1} (q - \exp(TA)p)$$

$$x(T) = \exp(TA)p + q - \exp(TA)p = q$$

Critère de commandabilité

Dans la construction précédente

$$u(t) = B' \exp[(T-t)A'] \left(\int_0^T \exp(\tau A) BB' \exp(\tau A') d\tau \right)^{-1} (q - \exp(TA)p)$$

la seule **obstruction possible** est que la matrice (symétrique positive)

$$\int_0^T \exp(\tau A) BB' \exp(\tau A') d\tau$$

ne soit **pas inversible**

Critère de commandabilité (suite)

$$\int_0^T \exp(\tau A) BB' \exp(\tau A') d\tau \quad \text{non inversible}$$

$$\iff \exists v \neq 0, \quad v' \left(\int_0^T \exp(\tau A) BB' \exp(\tau A') d\tau \right) v = 0$$

$$\iff \exists v \neq 0, \quad \int_0^T v' \exp(\tau A) B B' \exp(\tau A') v d\tau = 0$$

$$\iff \exists v \neq 0, \quad \int_0^T \|B' \exp(\tau A') v\|^2 d\tau = 0$$

Critère de commandabilité (suite)

$$\int_0^T \exp(\tau A) BB' \exp(\tau A') d\tau \quad \text{non inversible}$$

$$\iff \exists v \neq 0, \quad v' \left(\int_0^T \exp(\tau A) BB' \exp(\tau A') d\tau \right) v = 0$$

$$\iff \exists v \neq 0, \quad \int_0^T v' \exp(\tau A) B B' \exp(\tau A') v d\tau = 0$$

$$\iff \exists v \neq 0, \quad \int_0^T \|B' \exp(\tau A') v\|^2 d\tau = 0$$

$$\iff \exists v \neq 0, \quad v' \exp(tA)B = 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

d'où, par dérivations $\frac{d}{dt}(\cdot)$ (fonction analytique) en $t = 0$

$$v' \exp(tA)AB = 0, \quad v' \exp(tA)A^2B = 0, \quad \dots,$$

$$v' \exp(tA)A^{n-1}B = 0, \quad v' \exp(tA)A^nB = 0, \quad \dots$$

$$\iff \exists v \neq 0, v'B = 0, \quad v'AB = 0, \dots, \quad v'A^{n-1}B = 0, \quad v'A^nB = 0, \dots$$

$$\iff \exists v \neq 0, v'B = 0, \quad v'AB = 0, \dots, \quad v'A^{n-1}B = 0$$

$$\iff [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \text{ n'est pas de rang plein}$$

Critère de commandabilité de Kalman

Le système $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$ est **commandable** si et seulement si la matrice de commandabilité $\mathcal{C} = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ est de rang $n = \dim(x)$

Grammien de commandabilité

$$G([0, T], A, B) = \int_0^T \exp(\tau A) BB' \exp(\tau A') d\tau$$

par changement de coordonnées $z = Mx$

$$G([0, T], MAM^{-1}, MB) = M \left(\int_0^T \exp(\tau A) BB' \exp(\tau A') d\tau \right) M'$$

dont le rang est inchangé

Forme normale d'un système linéaire

Théorème : forme de Brunovsky, cas mono-entrée

Soit $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$, ($\dim B = n \times 1$) système linéaire stationnaire **commandable**. Il existe un changement d'état $z = Mx$ (M matrice inversible $n \times n$) et un bouclage statique régulier $v = Ex + Nu$ ($N \neq 0$), tels que les équations du système dans les variables (z, v) admettent la **forme normale de Brunovsky** suivante :

$$\frac{d}{dt}z_1 = z_2, \dots, \frac{d}{dt}z_{n-1} = z_n, \quad \frac{d}{dt}z_n = v$$

avec comme état $z = (z_1, \dots, z_n)$

Ainsi on a $\frac{d^n}{dt^n}z_1 = v$ où $z_1 = Cx$, avec C bien choisie, z_1 est la **sortie dite de Brunovsky**.

Méthode pratique de calcul

On cherche une combinaison linéaire fournissant la forme normale

$$z_1 = Cx$$

Méthode pratique de calcul

On cherche une combinaison linéaire fournissant la forme normale

$$z_1 = Cx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} z_1 = C(Ax + Bu) = CAx, \quad CB = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} z_1 = CA(Ax + Bu) = CA^2x, \quad CAB = 0 \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z_1 = CA^{n-2}(Ax + Bu) = CA^{n-1}x, \quad CA^{n-2}B = 0 \\ \frac{d^n}{dt^n} z_1 = CA^{n-1}(Ax + Bu) = CA^n x + u, \quad CA^{n-1}B = 1, \end{array} \right.$$

D'où, $C = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \times (\mathcal{C})^{-1}$

Planification sur la forme normale

$$\frac{d^n}{dt^n} z_1 = v$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Mx$$

L'état initial $x(0) = p$ correspond à $(z_1(0), \dots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z_1(0))$,

et l'état final $x(T) = q$ à $(z_1(T), \dots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z_1(T))$

Sur $]0, T[$, z_1 est libre pourvu que $t \mapsto z_1(t)$ soit une fonction KC^n .

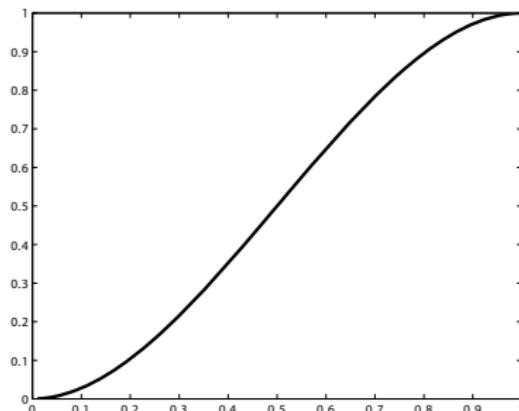
Une infinité de fonctions $t \mapsto z_1(t)$ satisfont ces conditions.

Par exemple on peut prendre un polynôme de degré $\geq 2n - 1$

Si p et q sont des états stationnaires alors

$\frac{d^i}{dt^i}z_1(0) = \frac{d^i}{dt^i}z_1(T) = 0$ pour $i = 1, \dots, n - 1$. En notant $a = z_1(0)$ et $b = z_1(T)$, on peut prendre

$$z_1(t) = \begin{cases} a, & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{(T-t)^n}{t^n + (T-t)^n} a + \frac{(t)^n}{t^n + (T-t)^n} b, & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ b, & \text{si } T \leq t \end{cases}$$



Planification dans les coordonnées d'origine

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad \text{forme normale } \frac{d^n}{dt^n}z_1 = v$$

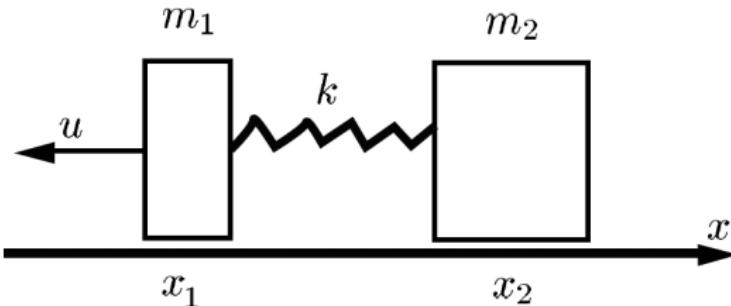
$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z_1 \end{pmatrix} = Mx, \quad v = Ex + Nu, \quad N \neq 0$$

On a choisi une loi horaire $[0, T] \ni t \mapsto z_1(t)$ compatible avec le transitoire désiré. On a donc $[0, T] \ni t \mapsto z(t)$. On calcule $v(t) = \frac{d^n}{dt^n} z_1(t)$, puis on résout

Commande

$$u(t) = N^{-1} \left(\frac{d^n}{dt^n} z_1(t) - EM^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z_1 \end{pmatrix}(t) \right)$$

Retour sur l'exemple des deux masses



Transfert d'une position d'arrêt à une autre : 1 seule commande, peut-on commander ?

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2}x_1 = k(x_2 - x_1) + u$$

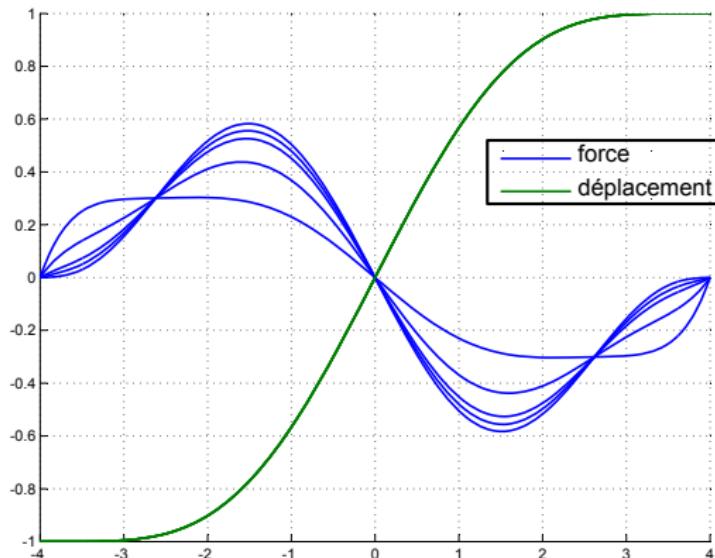
$$m_2 \frac{d^2}{dt^2}x_2 = k(x_1 - x_2)$$

Sortie de Brunovsky : $z_1 = x_2$. On exprime x et u en fonction des dérivées de z_1 .

$$\begin{cases} x_1 = (m_2/k) \frac{d^2}{dt^2} z_1 + z_1 \\ \frac{d}{dt} x_1 = (m_2/k) \frac{d^3}{dt^3} z_1 + \frac{d}{dt} z_1 \\ x_2 = z_1 \\ \frac{d}{dt} x_2 = \frac{d}{dt} z_1 \\ u = \frac{m_1 m_2}{k} \frac{d^4}{dt^4} z_1 + (m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} z_1 \end{cases}$$

$$u = \frac{m_1 m_2}{k} \frac{d^4}{dt^4} z_1 + (m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} z_1$$

$k \rightarrow +\infty$: les deux masses sont rigidement connectées
 T : temps de parcours



Exemple :

Un ou deux oscillateurs en parallèle
Le modèle :



$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 = -a_1(x_1 - u), \quad \frac{d^2}{dt^2}x_2 = -a_2(x_2 - u)$$

La planification de trajectoires : par exemple
trouver un contrôle en boucle ouverte
 $[0, T] \ni t \mapsto u(t)$ qui transfère de l'équilibre



vers l'équilibre

$$x_1(T) = x_2(T) = u(T) = D$$

Exemple :

Un ou deux oscillateurs en parallèle
Le modèle :



$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 = -a_1(x_1 - u), \quad \frac{d^2}{dt^2}x_2 = -a_2(x_2 - u)$$

La planification de trajectoires : par exemple
trouver un contrôle en boucle ouverte
 $[0, T] \ni t \mapsto u(t)$ qui transfère de l'équilibre



$$x_1(0) = x_2(0) = u(0) = 0$$

vers l'équilibre

$$x_1(T) = x_2(T) = u(T) = D$$

Théorème (forme de Brunovsky, cas multi-entrées)

Si $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$, la **matrice de commandabilité** de $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$, est de **rang $n = \dim(x)$** et si B est de rang $m = \dim(u)$, alors il existe un changement d'état $z = Mx$ (M **matrice inversible** $n \times n$) et un bouclage statique régulier $u = Ex + Nv$ (N **matrice inversible** $m \times m$), tels que les équations du système dans les variables (z, v) admettent la **forme normale** suivante (écriture sous la forme de m équations différentielles d'ordre ≥ 1) :

$$y_1^{(\alpha_1)} = v_1, \quad \dots, \quad y_m^{(\alpha_m)} = v_m$$

avec comme état

$z = (y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\alpha_1-1)}, \dots, y_m, y_m^{(1)}, \dots, y_m^{(\alpha_m-1)})$, les α_i étant des entiers positifs ($\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n$).

Les m quantités y , qui sont des combinaisons linéaires de l'état x , sont appelées **sorties de Brunovsky**

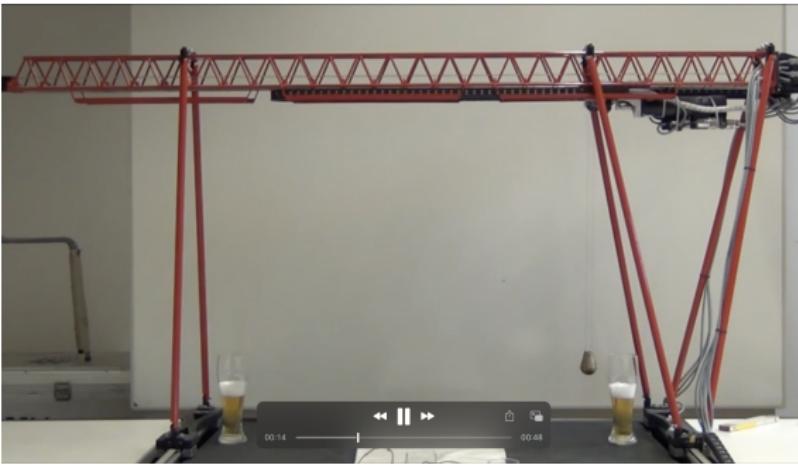
Commandabilité
oooooooooo

Cas linéaire stationnaire
oooooooooo

Forme normale
ooo

Planification de trajectoires
oooooooooooo●ooo

Autre exemple



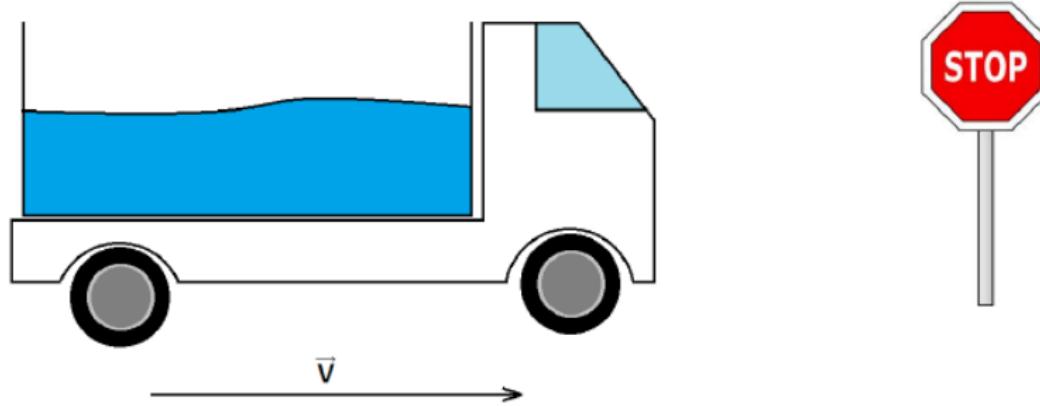
Commandabilité
oooooooooo

Cas linéaire stationnaire
oooooooooo

Forme normale
ooo

Planification de trajectoires
oooooooooooo●○

Transporter un système liquide (incertitude)



expérimentation laboratoire

Commandabilité
oooooooooooo

Cas linéaire stationnaire
oooooooooo

Forme normale
ooo

Planification de trajectoires

Exemple dimension infinie

