AUT201

TD5 – Filtre de Kalman

Exercice 1.

On considère un système linéaire commandé unidimensionnel

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + u, \\ y = x \end{cases}$$

où $a \neq 0$ est une constante. On suppose de plus que la mesure y de la sortie de ce système est polluée par un bruit blanc $\rho(t)$ de densité spectrale unitaire ($M_\rho = 1$) et que l'entrée est soumise à un retard de transmission de durée inconnue et variable. On propose de modéliser (très grossièrement) ce retard comme une perturbation du modèle par un bruit blanc $\xi(t)$, de densité spectrale $M_\xi = \sigma^2$ et indépendant de ρ, agissant directement sur le signal d'entrée.

1. Écrire le modèle avec perturbations.

2. Écrire les équations du filtre de Kalman–Bucy

3. Écrire l'équation de Riccati du filtre et la résoudre en suivant les étapes suivantes :

(i) chercher une solution particulière $\bar{E}$ constante ;

(ii) poser

$$E(t) = \bar{E} + \frac{1}{z(t)},$$

et donner l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$ (on notera P_0 la variance de l'erreur d'initialisation $\hat{x}(0) - x(0)$) ;

(iii) calculer $z(t)$ puis $E(t)$.

4. Étudier selon le signe de a le comportement asymptotique du filtre quand σ tend vers 0.

Exercice 2.

Un mobile se déplace le long d'un axe Ox. On mesure la vitesse $\dot{x}$ et la position x de ce mobile et on note v_m et x_m ces mesures.

- La mesure x_m est entachée d'un bruit blanc gaussien centré $\rho(t)$ de densité spectrale unitaire $M_\rho = 1$: $x_m(t) = x(t) + \rho(t)$.
- La mesure v_m est biaisée par un signal $b(t)$ inconnu : $v_m(t) = \dot{x}(t) + b(t)$.

À partir des 2 mesures v_m et x_m, on désire construire un filtre de Kalman permettant d'estimer la position $x(t)$ et le biais $b(t)$. On suppose d'abord que $b(t) = b_0$ est un biais constant.

1. Donnez les équations du système avec x et b comme variables d'état, v_m comme variable d'entrée, x_m comme variable de sortie.

En fait le biais $b(t)$ est susceptible de dériver avec le temps. Pour tenir compte de ces variations éventuelles, on suppose que la dérivée du biais est polluée par un bruit blanc $\xi(t)$ de densité spectrale $M_\xi = q^2$ indépendant de $\rho(t)$:

$$\dot{b}(t) = \xi(t).$$

2. Donner les nouvelles équations du système et calculer le filtre de Kalman (stationnaire) permettant de calculer des estimés $\hat{x}$ et $\hat{b}$ à partir de x_m et de v_m.

3. Comment obtenir un estimé $\hat{\dot{x}}$ de la vitesse du mobile ?

4. Que se passe-t-il si on considère que $b(t) = b_0$ est un biais constant non bruité (i.e. $q = 0$).

5. On suppose maintenant que la mesure x_m est obtenue au moyen d'un GPS. Avec ce capteur, dans $99,7\%$ des cas l'écart entre la position mesurée et la position réelle est inférieur à $15m$. Comment faut-il choisir M_ρ ? Quelles sont les nouvelles équations du filtre ?

Exercice 3.

Considérons le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & Ax(t) + Bu(t) + G\xi(t), \\ y(t) & = & Cx(t) + \rho(t), \end{array} \right. \qquad t \in [0, T], \tag{10}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\xi \in \mathbb{R}^q$ et $y, \rho \in \mathbb{R}^p$, les matrices ayant les dimensions correspondantes. Nous faisons les hypothèses habituelles :

(H1) ξ et ρ sont des bruits blancs gaussiens non corrélés de densités spectrales respectives M_ξ et M_ρ ;

(H2) $x(0)$ est une variable aléatoire gaussienne non corrélée avec ξ et ρ et de loi $\mathcal{N}(m_0, P_0)$;

(H3) la matrice M_ρ est définie positive.

1. Soit $E(\cdot)$ la matrice qui permet de définir le filtre de Kalman–Bucy. Montrer que $F(t) = -E(T-t)$ satisfait une équation de Riccati. Écrire un problème de commande optimale LQ qui correspond à cette équation de Riccati.

2. Soit $A - LC$ le gain du filtre de Kalman stationnaire pour le système (10) (on supposera que les hypothèses pour son existence sont satisfaites). Expliciter un problème LQR (*i.e.* LQ en temps infini) dont le gain en boucle fermée $\tilde{A} + \tilde{B}K$ a les mêmes valeurs propres que $A - LC$. On vérifiera que les hypothèses nécessaires à l'existence de solution pour le problème LQR sont satisfaites.