

# Introduction au calcul stochastique

Damien Lambertson

Bernard Lapeyre

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Mouvement brownien et équations différentielles stochastiques</b>	<b>3</b>
1.1	Généralités sur les processus à temps continu . . . . .	4
1.2	Le mouvement brownien . . . . .	6
1.3	Martingales à temps continu . . . . .	8
1.4	Intégrale stochastique et calcul d'Itô . . . . .	11
1.4.1	Construction de l'intégrale stochastique . . . . .	12
1.4.2	Calcul d'Itô . . . . .	19
1.4.3	Exemples d'utilisation de la formule d'Itô . . . . .	21
1.4.4	Formule d'Itô multidimensionnelle . . . . .	25
1.5	Equations différentielles stochastiques . . . . .	27
1.5.1	Théorème d'Itô . . . . .	27
1.5.2	Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	30
1.5.3	Equations différentielles stochastiques à valeurs vectorielles . . . . .	31
1.5.4	Propriété de Markov des solutions d'équations différentielles stochastiques . . . . .	32
1.6	Exercices . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Simulation et algorithmes pour les modèles financiers</b>	<b>42</b>
2.1	Simulation et modèles financiers . . . . .	42
2.1.1	La méthode de Monte Carlo . . . . .	42
2.1.2	Simulation d'une loi uniforme sur $[0, 1]$ . . . . .	43
2.1.3	Simulation des variables aléatoires . . . . .	44
2.1.4	Simulation de processus stochastiques . . . . .	47
2.2	Quelques algorithmes utiles . . . . .	51
2.2.1	Approximation de la fonction de répartition d'une gaussienne . . . . .	51
2.3	Exercices . . . . .	52

---

<b>Appendice</b>	<b>53</b>
2.1 Variables aléatoires gaussiennes . . . . .	53
2.1.1 Gaussiennes réelles . . . . .	53
2.1.2 Vecteurs gaussiens . . . . .	54
2.2 Espérance conditionnelle . . . . .	55
2.2.1 Exemples de sous-tribus . . . . .	55
2.2.2 Propriétés de l'espérance conditionnelle . . . . .	55
2.2.3 Calculs d'espérances conditionnelles . . . . .	58
<b>Bibliographie</b>	<b>60</b>
<b>Index</b>	<b>62</b>

# Chapitre 1

## Mouvement brownien et équations différentielles stochastiques

Les deux premiers chapitres de ce livre ont été consacrés à l'étude de modèles à temps discret. On a vu à cette occasion l'importance des notions de martingales, de stratégies autofinancées... Nous allons étendre ces notions au cas du temps continu. En particulier, nous introduirons les outils mathématiques permettant de construire des modèles d'évolution d'actif et de calculer les prix d'options. Les outils techniques sont plus délicats à utiliser en temps continu mais les idées essentielles diffèrent peu de celles du temps discret.

Pourquoi considère-t-on des modèles à temps continu? La première motivation vient des phénomènes que l'on veut modéliser : les variations des cotations sur les marchés organisés sont en pratique tellement fréquentes qu'un modèle à temps discret peut difficilement en rendre compte. D'autre part les modèles continus conduisent à des méthodes de calcul plus explicites que les modèles discrets, même s'il faut parfois avoir recours à des méthodes numériques. Ainsi, le modèle le plus utilisé dans la pratique (le modèle de Black et Scholes) est un modèle à temps continu qui conduit à une formule simple. Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, les liens entre processus stochastiques et finance ne sont pas nouveaux : en 1901, Bachelier (voir [Bac00]) dans un mémoire intitulé "Théorie de la spéculation" est, non seulement l'un des premiers à s'intéresser mathématiquement aux propriétés du mouvement brownien, mais aussi à donner des formules de calcul de prix pour certaines

options.

Nous donnons quelques éléments mathématiques nécessaires à la compréhension des modèles à temps continu. En particulier, nous introduirons le mouvement brownien, qui est l'outil majeur du modèle de Black et Scholes et sert à construire la plupart des modèles d'actifs en finance. Puis nous étendrons la notion de martingale au cas du temps continu, enfin nous construirons l'intégrale stochastique d'Itô et nous introduirons le calcul différentiel qui lui est associé : le calcul d'Itô.

Certaines démonstrations sont rédigées en petits caractères, ce sont des démonstrations techniques qu'il est conseillé de sauter lors d'une première lecture.

## 1.1 Généralités sur les processus à temps continu

Commençons par préciser ce que l'on entend par *processus* à temps continu.

**Définition 1.1.1** *On appelle processus stochastique à temps continu et à valeurs dans un espace  $E$  muni d'une tribu  $\mathcal{E}$ , une famille  $(X_t)_{t \in \mathbf{R}^+}$  de variables aléatoires sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$ .*

**Remarque 1.1.2** – Dans la pratique l'indice  $t$  représente le temps.

- Un processus peut aussi être vu comme une fonction aléatoire : à chaque  $\omega$  dans  $\Omega$  on associe la fonction de  $\mathbf{R}^+$  dans  $E$ ,  $t \rightarrow X_t(\omega)$ , appelée *trajectoire* du processus.
- Un processus peut être considéré comme une application de  $\mathbf{R}^+ \times \Omega$  dans  $E$ , nous supposons toujours que cette application est mesurable lorsque l'on munit  $\mathbf{R}^+ \times \Omega$  de la tribu  $\mathcal{B}(\mathbf{R}^+) \times \mathcal{A}$  et  $E$  de la tribu  $\mathcal{E}$ .
- On considérera aussi des processus indexés par un intervalle de temps  $[0, T]$  borné.

Comme dans le cas discret, on introduit la notion de *filtration*.

**Définition 1.1.3** *Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  un espace de probabilité, une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est une famille croissante de sous tribus de  $\mathcal{A}$ .*

Le tribu  $\mathcal{F}_t$  représente l'information dont on dispose à l'instant  $t$ . On dit qu'un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est *adapté* à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , si pour chaque  $t$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

**Remarque 1.1.4** Dans la suite, les filtrations que l'on considérera, auront la propriété suivante :

Si  $A \in \mathcal{A}$  et si  $\mathbf{P}(A) = 0$ , alors pour tout  $t$ ,  $A \in \mathcal{F}_t$ .

Ceci exprime que  $\mathcal{F}_t$  contient tous les ensembles de mesure nulle de  $\mathcal{A}$ . Le but de cette hypothèse technique est de permettre d'affirmer que si  $X = Y$   $\mathbf{P}$  p.s. et que  $Y$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable alors  $X$  est aussi  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

On peut construire une filtration à partir d'un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  en posant  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ . Cette filtration ne vérifie pas, en général, l'hypothèse précédente. Cependant si on remplace la tribu  $\mathcal{F}_t$  par la tribu  $\mathcal{F}_t$  engendrée par  $\mathcal{F}_t$  et  $\mathcal{N}$ , l'ensemble des ensembles de probabilité nulle (on dit aussi négligeables) de  $\mathcal{A}$ , on obtient une filtration vérifiant la condition souhaitée. On appelle cette filtration la *filtration naturelle* du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Quand on parle de filtration pour un processus sans autres précisions, il s'agit de sa filtration naturelle. Un processus est bien sûr adapté à sa filtration naturelle.

La notion de *temps d'arrêt* nous sera utile comme dans le cas discret. Un temps d'arrêt modélise un temps aléatoire qui dépend du processus de façon non anticipante (à un instant donné  $t$  on "sait" si un temps d'arrêt est plus petit que  $t$ ). Formellement, la définition est la suivante :

**Définition 1.1.5** On appelle temps d'arrêt par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  une variable aléatoire  $\tau$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$  telle que, pour tout  $t \geq 0$  :

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

On associe à un temps d'arrêt  $\tau$  une tribu que l'on note  $\mathcal{F}_\tau$ , définie par :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{A}, \text{ pour tout } t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Cette tribu représente les informations disponibles avant l'instant aléatoire  $\tau$ . On démontre que (voir exercices 3,4,5, 6,9) :

**Proposition 1.1.6** – Si  $S$  est un temps d'arrêt,  $S$  est  $\mathcal{F}_S$  mesurable.

- Si  $S$  est un temps d'arrêt, fini presque sûrement, et  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus adapté continu, alors  $X_S$  est  $\mathcal{F}_S$  mesurable.
- Si  $S$  et  $T$  sont deux temps d'arrêt tels que  $S \leq T$   $\mathbf{P}$  p.s., alors  $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ .
- Si  $S$  et  $T$  sont deux temps d'arrêt alors  $S \wedge T = \inf(S, T)$  est un temps d'arrêt. En particulier si  $S$  est un temps d'arrêt et  $t$  est un temps déterministe  $S \wedge t$  est un temps d'arrêt.

## 1.2 Le mouvement brownien

Un exemple particulièrement important de processus stochastique est le *mouvement brownien*. Il servira de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers et de taux d'intérêt.

**Définition 1.2.1** On appelle mouvement brownien un processus stochastique  $(X_t)_{t \geq 0}$  à valeurs réelles, qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues. Ce qui signifie que :

- continuité :  $\mathbf{P}$  p.s. la fonction  $s \mapsto X_s(\omega)$  est une fonction continue.
- indépendance des accroissements : Si  $s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  est indépendant de la tribu  $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u, u \leq s)$ .
- stationnarité des accroissements : si  $s \leq t$ , la loi de  $X_t - X_s$  est identique à celle de  $X_{t-s} - X_0$ .

Cette définition permet de caractériser la loi de la variable aléatoire  $X_t$ . Ce résultat est délicat à établir, nous renvoyons à [GS80] pour sa démonstration.

**Théorème 1.2.2** Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien, alors  $X_t - X_0$  est une variable aléatoire gaussienne de moyenne  $rt$  et de variance  $\sigma^2 t$ ,  $r$  et  $\sigma$  étant des constantes réelles.

**Remarque 1.2.3** Un mouvement brownien est dit *standard* si :

$$X_0 = 0 \quad \mathbf{P} \text{ p.s.} \quad \mathbf{E}(X_t) = 0, \quad \mathbf{E}(X_t^2) = t.$$

Dans la suite, lorsque l'on parlera de mouvement brownien, sans autre précision, il s'agira d'un mouvement brownien standard. Dans ce cas, la loi de  $X_t$  prend la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx,$$

$dx$  étant la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}$ .

On peut démontrer une propriété précisant le caractère gaussien du mouvement brownien. On vient de voir que pour tout  $t$ ,  $X_t$  est une variable aléatoire gaussienne. On a une propriété plus forte :

**Théorème 1.2.4** *Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien, si  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$  alors  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est un vecteur gaussien.*

On pourra consulter l'appendice page 53 pour des précisions sur les vecteurs gaussiens.

**Démonstration :** Soit  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ , alors le vecteur aléatoire  $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$  est composé de variables aléatoires gaussiennes (d'après le théorème 1.2.2) et indépendantes (par définition du mouvement brownien), ce vecteur est donc un vecteur gaussien. Il en est donc de même pour  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ . ■

On aura besoin d'une définition légèrement plus précise d'un mouvement brownien par rapport à une tribu  $\mathcal{F}_t$ .

**Définition 1.2.5** *On appellera  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifie :*

- Pour tout  $t \geq 0$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.
- Si  $s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  est indépendant de la tribu  $\mathcal{F}_s$ .
- Si  $s \leq t$ , la loi de  $X_t - X_s$  est identique à celle de  $X_{t-s} - X_0$ .

**Remarque 1.2.6** Le premier point de la définition précédente prouve que  $\sigma(X_u, u \leq t) \subset \mathcal{F}_t$ . De plus, il est facile de vérifier qu'un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien est un mouvement brownien par rapport à sa filtration naturelle.



### 1.3 Martingales à temps continu

Comme dans le cas des modèles à temps discret, la notion de martingale est un outil essentiel pour expliciter la notion d'arbitrage. La définition suivante est une extension de celle du temps discret.

**Définition 1.3.1** Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé et  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  une filtration de cet espace. Une famille adaptée  $(M_t)_{t \geq 0}$  de variables aléatoires intégrables, (c'est-à-dire vérifiant  $\mathbf{E}(|M_t|) < +\infty$  pour tout  $t$ ) est :

- une martingale si, pour tout  $s \leq t$ ,  $\mathbf{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$ .
- une surmartingale si, pour tout  $s \leq t$ ,  $\mathbf{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \leq M_s$ .
- une sousmartingale si, pour tout  $s \leq t$ ,  $\mathbf{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \geq M_s$ .

**Remarque 1.3.2** On déduit de cette définition que, si  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale, alors  $\mathbf{E}(M_t) = \mathbf{E}(M_0)$ , pour tout  $t$ .

Donnons des exemples de martingales que l'on peut construire à partir du mouvement brownien.

**Proposition 1.3.3** Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien standard :

1.  $X_t$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale.
2.  $X_t^2 - t$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale.
3.  $\exp(\sigma X_t - (\sigma^2/2)t)$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale.

**Démonstration :** Si  $s \leq t$  alors  $X_t - X_s$  est indépendante de la tribu  $\mathcal{F}_s$ . Donc  $\mathbf{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(X_t - X_s)$ . Mais un mouvement brownien standard est centré, donc  $\mathbf{E}(X_t - X_s) = 0$ . On en déduit le premier point. Pour démontrer le deuxième, remarquons que :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_t^2 - X_s^2 | \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}((X_t - X_s)^2 + 2X_s(X_t - X_s) | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbf{E}((X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s) + 2X_s \mathbf{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s), \end{aligned}$$

mais comme  $(X_t)_{t \geq 0}$  est une martingale  $\mathbf{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) = 0$ , et donc :

$$\mathbf{E}(X_t^2 - X_s^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}((X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s).$$

La stationnarité et l'indépendance des accroissements du mouvement brownien permettent de plus d'affirmer que :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}((X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}(X_{t-s}^2) \\ &= t - s.\end{aligned}$$

La dernière égalité est due au fait que  $X_t$  suit une loi gaussienne centrée de variance  $t$ . On en déduit que  $\mathbf{E}(X_t^2 - t | \mathcal{F}_s) = X_s^2 - s$ , si  $s < t$ .

Pour démontrer le dernier point, rappelons, tout d'abord, que, si  $g$  est une gaussienne centrée réduite, on a :

$$\mathbf{E}(e^{\lambda g}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{\lambda^2/2}.$$

De plus, si  $s < t$  :

$$\mathbf{E}(e^{\sigma X_t - \sigma^2 t/2} | \mathcal{F}_s) = e^{\sigma X_s - \sigma^2 s/2} \mathbf{E}(e^{\sigma(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s)$$

car  $X_s$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable, et comme  $X_t - X_s$  est indépendante de  $\mathcal{F}_s$ , on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(e^{\sigma(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}(e^{\sigma(X_t - X_s)}) \\ &= \mathbf{E}(e^{\sigma X_{t-s}}) \\ &= \mathbf{E}(e^{\sigma g \sqrt{t-s}}) \\ &= e^{\frac{\sigma^2(t-s)}{2}}\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat annoncé. ■

Si  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale, la relation  $\mathbf{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$ , peut être étendue à des temps aléatoires si ces temps sont des *temps d'arrêt bornés*. Ce résultat porte le nom de *théorème d'arrêt*. Nous admettons ce théorème et renvoyons à [KS88] page 19 pour sa démonstration.

**Théorème 1.3.4 (Théorème d'arrêt.)** *Si  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale continue par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , et si  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont deux temps d'arrêt tels que  $\tau_1 \leq \tau_2 \leq K$ ,  $K$  étant une constante réelle finie, alors  $M_{\tau_2}$  est intégrable et :*

$$\mathbf{E}(M_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) = M_{\tau_1} \quad \mathbf{P} \text{ p.s. } .$$

**Remarque 1.3.5** – Ce résultat entraîne que, si  $\tau$  est un temps d'arrêt borné, alors  $\mathbf{E}(M_\tau) = \mathbf{E}(M_0)$  (il suffit d'appliquer le théorème d'arrêt avec  $\tau_1 = 0, \tau_2 = \tau$  et de prendre l'espérance des deux membres).

- Si  $M_t$  est une sousmartingale, on a le même théorème en remplaçant l'égalité précédente par :

$$\mathbf{E}(M_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) \geq M_{\tau_1} \quad \mathbf{P} \text{ p.s.}$$

Nous allons donner un exemple d'application de ce résultat au calcul des temps d'atteinte d'un point par le mouvement brownien.

**Proposition 1.3.6** *Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien. Notons, si  $a$  est un nombre réel,  $T_a = \inf \{s \geq 0, X_s = a\}$ , ou  $+\infty$  si cet ensemble est vide.*

*Alors,  $T_a$  est un temps d'arrêt fini presque sûrement, dont la loi est caractérisée par sa transformée de Laplace :*

$$\mathbf{E}(e^{-\lambda T_a}) = e^{-\sqrt{2\lambda}|a|}.$$

**Démonstration :** Nous supposons que  $a \geq 0$ .  $T_a$  est un temps d'arrêt, en effet, comme  $X_s$  est continue :

$$\{T_a \leq t\} = \cap_{\epsilon \in \mathbf{Q}^{+*}} \left\{ \sup_{s \leq t} X_s > a - \epsilon \right\} = \cap_{\epsilon \in \mathbf{Q}^{+*}} \cup_{s \in \mathbf{Q}^+, s \leq t} \{X_s > a - \epsilon\}.$$

Ce dernier ensemble est dans  $\mathcal{F}_t$ , ce qui prouve le résultat. On notera dans ce qui suit  $x \wedge y = \inf(x, y)$ .

Nous allons appliquer le théorème d'arrêt à la martingale  $M_t = \exp(\sigma X_t - (\sigma^2/2)t)$ . On ne peut pas appliquer le théorème d'arrêt à  $T_a$  (qui n'est pas borné). Cependant, si  $n$  est un entier positif,  $T_a \wedge n$  est encore un temps d'arrêt (voir proposition 1.1.6), qui est borné, on peut donc appliquer le théorème d'arrêt. On obtient ainsi :

$$\mathbf{E}(M_{T_a \wedge n}) = 1.$$

Mais  $M_{T_a \wedge n} = e^{\sigma X_{T_a \wedge n} - \frac{\sigma^2}{2}(T_a \wedge n)} \leq \exp(\sigma a)$ . De plus, si  $T_a < +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{T_a \wedge n} = M_{T_a}$  et si  $T_a = +\infty$ , on a pour tout  $t$ ,  $X_t \leq a$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{T_a \wedge n} = 0$ . Le théorème de Lebesgue donne donc  $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{T_a < +\infty\}} M_{T_a}) = 1$ , soit, comme  $X_{T_a} = a$  si  $T_a < +\infty$  :

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{T_a < +\infty\}} e^{-\frac{\sigma^2}{2}T_a}\right) = e^{-\sigma a}.$$

En faisant tendre  $\sigma$  vers 0 on obtient que  $\mathbf{P}(T_a < +\infty) = 1$  (ce qui signifie que le mouvement brownien atteint la valeur  $a$  presque sûrement) puis :

$$\mathbf{E} \left( e^{-\frac{\sigma^2}{2} T_a} \right) = e^{-\sigma a}.$$

On traite le cas  $a < 0$  en remarquant que :

$$T_a = \inf \{s \geq 0, -X_s = -a\},$$

avec  $(-X_t)_{t \geq 0}$  qui est un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien (car c'est un processus continu à accroissements indépendants et stationnaires de moyenne nulle et de variance  $t$ ). ■

Le théorème d'arrêt permet aussi d'obtenir des estimations pour le maximum d'une martingale. Si  $M_t$  est une martingale, on peut borner le moment d'ordre 2 de  $\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|$ . Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Doob.

**Théorème 1.3.7 (Inégalité de Doob)** *Si  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale continue, on a :*

$$\mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2 \right) \leq 4\mathbf{E}(|M_T|^2).$$

La démonstration de ce résultat est donnée dans l'exercice 8.

## 1.4 Intégrale stochastique et calcul d'Itô

Dans le cas des modèles à temps discret, la valeur actualisée d'un portefeuille de valeur initiale  $V_0$  et géré selon la stratégie autofinancée  $\phi = (H_n)_{0 \leq n \leq N}$  s'écrit :

$$V_0 + \sum_{j=1}^n H_j(\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1}).$$

Cette valeur apparaît comme une *transformée de martingale* sous une probabilité pour laquelle le prix de l'actif actualisé  $(\tilde{S}_n)_{0 \leq n \leq N}$  est une martingale. Dans le cas des modèles à temps continu, nous allons généraliser cette formule à l'aide d'intégrales du type  $\int_0^t H_s d\tilde{S}_s$ .

Cependant les modèles utilisés couramment pour décrire l'actif sont obtenus à partir du mouvement brownien. Or, une des propriétés importantes

du mouvement brownien est que presque sûrement ses trajectoires sont nulles part différentiables. Autrement dit, si  $X_t$  est un mouvement brownien, il n'existe pas de points  $t$  de  $\mathbf{R}^+$  tels que  $\frac{dX_t}{dt}$  ait un sens. On ne peut donc pas définir l'intégrale précédente par :

$$\int_0^t f(s) dX_s = \int_0^t f(s) \frac{dX_s}{ds} ds.$$

On peut donner, cependant, un sens précis à ce type d'intégrales par rapport au mouvement brownien. C'est ce que nous allons faire dans ce paragraphe. On appelle ces intégrales des "intégrales stochastiques".

### 1.4.1 Construction de l'intégrale stochastique

Soit  $(W_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien standard sur un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ . Nous allons donner un sens à  $\int_0^t f(s, \omega) dW_s$  pour une classe de processus  $f(s, \omega)$  adaptés à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . On va commencer par construire l'intégrale stochastique sur un ensemble de processus dits *élémentaires*. Dans toute la suite, on fixe  $T$  un réel strictement positif et fini.

**Définition 1.4.1** On appelle processus élémentaire  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus de la forme :

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^p \phi_i(\omega) \mathbf{1}_{]t_{i-1}, t_i]}(t)$$

où  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$  et  $\phi_i$  est  $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurable et bornée.

L'intégrale stochastique d'un processus élémentaire  $H$  est alors, par définition, le processus continu  $(I(H)_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par, si  $t \in ]t_k, t_{k+1}]$  :

$$I(H)_t = \sum_{1 \leq i \leq k} \phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(W_t - W_{t_k}).$$

Notons que  $I(H)_t$  peut s'écrire :

$$I(H)_t = \sum_{1 \leq i \leq p} \phi_i(W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t}),$$

ce qui prouve la continuité de la fonction  $t \mapsto I(H)_t$ . On notera  $\int_0^t H_s dW_s$  pour  $I(H)_t$ . On a alors le résultat essentiel suivant :

**Proposition 1.4.2** Si  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus élémentaire :

$$- \left( \int_0^t H_s dW_s \right)_{0 \leq t \leq T} \text{ est une } \mathcal{F}_t\text{-martingale continue,}$$

$$\begin{aligned}
& - \mathbf{E} \left( \left( \int_0^t H_s dW_s \right)^2 \right) = \mathbf{E} \left( \int_0^t H_s^2 ds \right), \\
& - \mathbf{E} \left( \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t H_s dW_s \right|^2 \right) \leq 4 \mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 ds \right).
\end{aligned}$$

**Démonstration :** Pour démontrer cette proposition nous allons utiliser des processus à temps discret. En effet, pour établir que  $\left( \int_0^t H_s dW_s \right)$  est une martingale, il suffit de prouver que, pour tout  $t > s$  :

$$\mathbf{E} \left( \int_0^t H_u dW_u \middle| \mathcal{F}_s \right) = \int_0^s H_u dW_u$$

Si l'on ajoute  $s$  et  $t$  à la subdivision  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_p = T$ , et si on pose  $M_n = \int_0^{t_n} H_s dW_s$  et  $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{t_n}$  pour  $0 \leq n \leq p$ , il suffit de vérifier que  $M_n$  est une  $\mathcal{G}_n$ -martingale. Pour démontrer ceci, remarquons que :

$$M_n = \int_0^{t_n} H_s dW_s = \sum_{i=1}^n \phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

avec  $\phi_i$  qui est  $\mathcal{G}_{i-1}$ -mesurable. D'autre part  $X_n = W_{t_n}$  est une  $\mathcal{G}_n$ -martingale (en effet,  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien).  $(M_n)_{n \in [0, p]}$  apparaît donc comme une transformée de la martingale  $(X_n)_{n \in [0, p]}$ . Il est facile de démontrer que  $(M_n)_{n \in [0, p]}$  est une martingale. Le deuxième point s'obtient, en remarquant que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(M_n^2) &= \mathbf{E} \left( \left( \sum_{i=1}^n \phi_i (X_i - X_{i-1}) \right)^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{E} (\phi_i \phi_j (X_i - X_{i-1})(X_j - X_{j-1}))
\end{aligned}$$

De plus, si  $i < j$ , on a :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} (\phi_i \phi_j (X_i - X_{i-1})(X_j - X_{j-1})) = \\
&= \mathbf{E} (\mathbf{E} (\phi_i \phi_j (X_i - X_{i-1})(X_j - X_{j-1}) \middle| \mathcal{G}_{j-1})) \\
&= \mathbf{E} (\phi_i \phi_j (X_i - X_{i-1}) \mathbf{E} (X_j - X_{j-1} \middle| \mathcal{G}_{j-1})).
\end{aligned}$$

Comme  $X_j$  est une martingale, on a  $\mathbf{E}(X_j - X_{j-1} \middle| \mathcal{G}_{j-1}) = 0$ . On en déduit que, si  $i < j$  :

$$\mathbf{E} (\phi_i \phi_j (X_i - X_{i-1})(X_j - X_{j-1})) = 0.$$

Si  $j > i$  on obtient le même résultat. Enfin si  $i = j$ , on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} (\phi_i^2 (X_i - X_{i-1})^2) &= \mathbf{E} (\mathbf{E} (\phi_i^2 (X_i - X_{i-1})^2 \middle| \mathcal{G}_{i-1})) \\
&= \mathbf{E} (\phi_i^2 \mathbf{E} ((X_i - X_{i-1})^2 \middle| \mathcal{G}_{i-1})),
\end{aligned}$$

et finalement :

$$\mathbf{E}((X_i - X_{i-1})^2 | \mathcal{G}_{i-1}) = E((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2) = t_i - t_{i-1}.$$

En regroupant ces résultats on obtient :

$$\mathbf{E} \left( \left( \sum_{i=1}^n \phi_i(X_i - X_{i-1}) \right)^2 \right) = \mathbf{E} \left( \sum_{i=1}^n \phi_i^2(t_i - t_{i-1}) \right).$$

La continuité de  $t \rightarrow \int_0^t H_s dW_s$  est claire sur sa définition. Le troisième point est une conséquence de l'inégalité de Doob (1.3.7) appliquée à la martingale continue  $\left( \int_0^t H_s dW_s \right)_{t \geq 0}$ . ■

**Remarque 1.4.3** On pose par définition :

$$\int_t^T H_s dW_s = \int_0^T H_s dW_s - \int_0^t H_s dW_s$$

Si  $t \leq T$ , et si  $A \in \mathcal{F}_t$ , alors  $s \rightarrow \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{t < s\}} H_s$  reste un processus élémentaire et il est facile de vérifier, sur la définition de l'intégrale, que :

$$\int_0^T \mathbf{1}_A H_s \mathbf{1}_{\{t < s\}} dW_s = \mathbf{1}_A \int_t^T H_s dW_s. \quad (1.1)$$

On vient de définir et donner des propriétés de l'intégrale stochastique pour les processus élémentaires, nous allons maintenant étendre cette intégrale à une classe de processus adaptés :

$$\mathcal{H} = \left\{ (H_t)_{0 \leq t \leq T}, \text{ processus adapté à } (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 ds \right) < +\infty \right\}.$$

**Proposition 1.4.4** Soit  $(W_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -brownien. Alors il existe une unique application linéaire  $J$  de  $\mathcal{H}$  dans l'espace des  $\mathcal{F}_t$ -martingales continues définies sur  $[0, T]$ , telle que :

1. Si  $(H_t)_{t \leq T}$  est un processus élémentaire,  $\mathbf{P}$  p.s. pour tout  $0 \leq t \leq T$   $J(H)_t = I(H)_t$ .
2. Si  $t \leq T$ ,  $\mathbf{E} \left( J(H)_t^2 \right) = \mathbf{E} \left( \int_0^t H_s^2 ds \right)$ .

Cette application linéaire est unique au sens suivant, si  $J$  et  $J'$  sont deux prolongements linéaires vérifiant les propriétés précédentes alors :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad J(H)_t = J'(H)_t$$

On note, si  $H \in \mathcal{H}$ ,  $\int_0^t H_s dW_s = J(H)_t$ .

De plus cette intégrale stochastique vérifie les propriétés suivantes :

**Proposition 1.4.5** Si  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus de  $\mathcal{H}$  alors :

1. On a :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t H_s dW_s \right|^2 \right) \leq 4 \mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 ds \right) \quad (1.2)$$

2. Si  $\tau$  est un  $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \quad \int_0^\tau H_s dW_s = \int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} H_s dW_s \quad (1.3)$$

**Démonstration :** Nous admettrons que si  $(H_s)_{s \leq T}$  est dans  $\mathcal{H}$ , il existe une suite  $(H_s^n)_{s \leq T}$  de processus élémentaires tels que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E} \left( \int_0^T |H_s - H_s^n|^2 ds \right) = 0.$$

On trouvera une démonstration de ce résultat dans [KS88] (page 134 problème 2.5).

Si  $H \in \mathcal{H}$  et  $(H^n)_{n \geq 0}$  est une suite de processus élémentaires convergeant vers  $H$ , au sens précédent, on a :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{t \leq T} |I(H^{n+p})_t - I(H^n)_t|^2 \right) \leq 4 \mathbf{E} \left( \int_0^T |H_s^{n+p} - H_s^n|^2 ds \right). \quad (1.4)$$

Il existe donc une sous suite  $H^{\phi(n)}$  telle que :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{t \leq T} |I(H^{\phi(n+1)})_t - I(H^{\phi(n)})_t|^2 \right) \leq \frac{1}{2^n}$$

La série de fonctions de terme général  $I(H^{\phi(n+1)}) - I(H^{\phi(n)})$  est donc, presque sûrement, uniformément convergente, d'où  $I(H^{\phi(n)})_t$  converge vers une fonction continue qui sera par définition  $t \mapsto J(H)_t$ . En passant à la limite dans (1.4), on obtient :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{t \leq T} |J(H)_t - I(H^n)_t|^2 \right) \leq 4 \mathbf{E} \left( \int_0^T |H_s - H_s^n|^2 ds \right). \quad (1.5)$$



Ceci entraîne que  $(J(H)_t)_{0 \leq t \leq T}$  ne dépend pas de la suite approximante.  $(J(H)_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale, en effet :

$$\mathbf{E}(I(H^n)_t | \mathcal{F}_s) = I(H^n)_s.$$

De plus pour tout  $t \lim_{n \rightarrow +\infty} I(H^n)_t = J(H)_t$  en norme  $L^2(\Omega, \mathbf{P})$  et la continuité dans  $L^2(\Omega, \mathbf{P})$  de l'espérance conditionnelle permet de conclure.

De (1.5) et de  $\mathbf{E}(I(H^n)_t^2) = \mathbf{E}\left(\int_0^T |H_s^n|^2 ds\right)$  on déduit que  $\mathbf{E}(J(H)_t^2) = \mathbf{E}\left(\int_0^T |H_s|^2 ds\right)$ .

De même de (1.5) et de  $\mathbf{E}(\sup_{t \leq T} I(H^n)_t^2) \leq 4\mathbf{E}\left(\int_0^T |H_s^n|^2 ds\right)$ , on déduit (1.2).

L'unicité du prolongement résulte de la densité des processus élémentaires dans  $\mathcal{H}$ .

Nous allons maintenant démontrer (1.3). On remarque d'abord que (1.1) reste valable si  $H \in \mathcal{H}$ . Il suffit pour cela d'utiliser la densité des processus élémentaires dans  $\mathcal{H}$  et (1.5).

On va ensuite démontrer le résultat pour des temps d'arrêt de la forme  $\tau = \sum_{1 \leq i \leq n} t_i \mathbf{1}_{A_i}$ , où  $0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , les  $A_i$  étant disjoints et  $\mathcal{F}_{t_i}$  mesurables. On a dans ce cas :

$$\int_0^T \mathbf{1}_{\{s > \tau\}} H_s dW_s = \int_0^T \left( \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{1}_{A_i} \mathbf{1}_{\{s > t_i\}} \right) H_s dW_s,$$

mais chaque  $\mathbf{1}_{\{s > t_i\}} \mathbf{1}_{A_i} H_s$  est adapté (Ce processus est nul si  $s \leq t_i$  et vaut  $\mathbf{1}_{A_i} H_s$  sinon) et donc dans  $\mathcal{H}$ . On en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbf{1}_{\{s > \tau\}} H_s dW_s &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_0^T \mathbf{1}_{A_i} \mathbf{1}_{\{s > t_i\}} H_s dW_s \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{1}_{A_i} \int_{t_i}^T H_s dW_s = \int_\tau^T H_s dW_s, \end{aligned}$$

puis que  $\int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} H_s dW_s = \int_0^\tau H_s dW_s$ .

Pour généraliser ce résultat, remarquons qu'un temps d'arrêt quelconque  $\tau$  peut être approximé par une suite décroissante de temps d'arrêt du type précédent en posant :

$$\tau_n = \sum_{0 \leq i \leq 2^n} \frac{(k+1)T}{2^n} \mathbf{1}_{\left\{ \frac{kT}{2^n} \leq \tau < \frac{(k+1)T}{2^n} \right\}}.$$

$\tau_n$  converge presque sûrement vers  $\tau$  en décroissant. On en déduit que presque sûrement  $\int_0^{\tau_n} H_s dW_s$  tend vers  $\int_0^\tau H_s dW_s$  par continuité de  $t \mapsto \int_0^t H_s dW_s$ . D'autre part :

$$\mathbf{E} \left( \left| \int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} H_s dW_s - \int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_n\}} H_s dW_s \right|^2 \right) = \mathbf{E} \left( \int_0^T \mathbf{1}_{\{\tau < s \leq \tau_n\}} H_s^2 ds \right)$$

Ce dernier terme tend vers 0 par convergence dominée, donc  $\int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_n\}} H_s dW_s$  tend dans  $L^2(\Omega, \mathbf{P})$  (et presque sûrement pour une sous suite) vers  $\int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} H_s dW_s$ . Ceci permet d'obtenir l'égalité (1.3) pour tout temps d'arrêt. ■

Nous aurons besoin d'un résultat permettant de relaxer l'hypothèse d'intégrabilité portant sur  $(H_s)$ . Posons :

$$\tilde{\mathcal{H}} = \left\{ (H_s)_{0 \leq s \leq T} \text{ est un processus adapté à } (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \int_0^T H_s^2 ds < +\infty \text{ } \mathbf{P} \text{ p.s.} \right\}.$$

La proposition suivante permet de prolonger l'intégrale stochastique de  $\mathcal{H}$  à  $\tilde{\mathcal{H}}$ .

**Proposition 1.4.6** *Il existe une unique application linéaire  $\tilde{J}$  de l'espace  $\tilde{\mathcal{H}}$  dans l'espace vectoriel des processus continus définis sur  $[0, T]$ , telle que :*

1. Propriété de prolongement. Si  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus élémentaire alors :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } , \forall 0 \leq t \leq T, \tilde{J}(H)_t = I(H)_t.$$

2. Propriété de continuité: Si  $(H^n)_{n \geq 0}$  est une suite de processus de  $\tilde{\mathcal{H}}$  telle que  $\int_0^T H_s^2 ds$  tend vers 0 en probabilité alors  $\sup_{t \leq T} |\tilde{J}(H^n)_t|$  tend vers 0 en probabilité.

On note toujours  $\int_0^t H_s dW_s$  pour  $\tilde{J}(H)_t$ .

**Remarque 1.4.7** Il est important de noter que dans ce cas  $\left( \int_0^t H_s dW_s \right)_{0 \leq t \leq T}$  n'est pas (nécessairement) une martingale.

**Démonstration :** Il est facile de déduire de la propriété de prolongement et de la propriété de continuité que, si  $H \in \mathcal{H}$  alors  $\mathbf{P} \text{ p.s. } , \forall t \leq T, \tilde{J}(H)_t = J(H)_t$ .

Soit  $H \in \tilde{\mathcal{H}}$ , posons  $T_n = \inf \{ 0 \leq s \leq T, \int_0^s H_u^2 du \geq n \}$  ( $+\infty$  si cet ensemble est vide), et  $H_s^n = H_s \mathbf{1}_{\{s \leq T_n\}}$ .

Montrons, tout d'abord, que  $T_n$  est un temps d'arrêt. Comme  $\{T_n \leq t\} = \{\int_0^t H_u^2 du \geq n\}$ , il nous suffit de prouver que  $\int_0^t H_u^2 du$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Mais ce résultat est vrai si  $H$  est un processus élémentaire, et donc par densité si  $H \in \mathcal{H}$ . Enfin si  $H \in \tilde{\mathcal{H}}$ ,  $\int_0^t H_u^2 du$  qui est la limite presque sûre, lorsque  $K$  tend vers  $+\infty$ , de  $\int_0^t H_u^2 \wedge K du$  est aussi  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Il est alors facile de voir que les processus  $H_s^n$  sont adaptés et bornés donc dans  $\mathcal{H}$ . De plus :

$$\int_0^t H_s^n dW_s = \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leq T_n\}} H_s^{n+1} dW_s.$$

L'égalité (1.3) prouve alors que :

$$\int_0^t H_s^n dW_s = \int_0^{t \wedge T_n} H_s^{n+1} dW_s.$$

Donc sur l'ensemble  $\{\int_0^T H_u^2 du < n\}$ , pour tout  $t \leq T$ ,  $J(H^n)_t = J(H^{n+1})_t$ . Comme  $\cup_{n \geq 0} \{\int_0^T H_u^2 du < n\} = \{\int_0^T H_u^2 du < +\infty\}$ , on peut définir presque sûrement un processus  $\tilde{J}(H)_t$  en posant sur  $\{\int_0^T H_u^2 du < n\}$  :

$$\forall t \leq T \quad \tilde{J}(H)_t = J(H^n)_t.$$

Le processus  $t \mapsto \tilde{J}(H)_t$  est presque sûrement continu, par définition. La propriété de prolongement est vérifiée par construction. Il reste donc à prouver la propriété de continuité de  $\tilde{J}$ . Pour cela remarquons que :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( \sup_{t \leq T} |\tilde{J}(H)_t| \geq \epsilon \right) &\leq \mathbf{P} \left( \int_0^T H_s^2 ds \geq \frac{1}{N} \right) \\ &\quad + \mathbf{P} \left( \mathbf{1}_{\left\{ \int_0^T H_u^2 du < \frac{1}{N} \right\}} \sup_{t \leq T} |\tilde{J}(H)_t| \geq \epsilon \right). \end{aligned}$$

Si l'on note  $\tau_N = \inf \{s \leq T, \int_0^s H_u^2 du \geq \frac{1}{N}\}$  ( $+\infty$  si cet ensemble est vide), alors sur  $\{\int_0^T H_u^2 du < \frac{1}{N}\}$ , l'égalité (1.3) prouve que, pour tout  $t \leq T$  :

$$\int_0^t H_s dW_s = \tilde{J}(H)_t = J(H^1)_t = \int_0^t H_s^1 \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_N\}} dW_s = \int_0^t H_s \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_N\}} dW_s.$$

D'où, en utilisant (1.2) pour le processus  $s \mapsto H_s \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_N\}}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( \sup_{t \leq T} |\tilde{J}(H)_t| \geq \epsilon \right) &\leq \mathbf{P} \left( \int_0^T H_s^2 ds \geq \frac{1}{N} \right) \\ &\quad + \frac{4}{\epsilon^2} \mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_N\}} ds \right) \\ &\leq \mathbf{P} \left( \int_0^T H_s^2 ds \geq \frac{1}{N} \right) + \frac{4}{N\epsilon^2} \end{aligned}$$

On en déduit que si  $\int_0^T H_s^2 ds$  tend vers 0 en probabilité, alors  $\sup_{t \leq T} |\tilde{J}(H^n)_t|$  tend vers 0 en probabilité.

Pour prouver la linéarité de  $\tilde{J}$ , considérons deux processus de  $\tilde{\mathcal{H}}$ ,  $H$  et  $K$  et les deux suites  $H_t^n$  et  $K_t^n$  définies comme au début de la démonstration, telle que  $\int_0^T (H_s^n - H_s)^2 ds$  et  $\int_0^T (K_s^n - K_s)^2 ds$  tendent en probabilité vers 0. On peut alors passer à la limite dans l'égalité  $J(\lambda H^n + \mu K^n)_t = \lambda J(H^n)_t + \mu J(K^n)_t$ , grâce à la propriété de continuité de  $\tilde{J}$ . On obtient ainsi la linéarité de  $\tilde{J}$ .

Enfin, le fait que si  $H \in \tilde{\mathcal{H}}$  alors  $\int_0^T (H_t - H_t^n)^2 dt$  tend vers 0 en probabilité et la propriété de continuité prouvent l'unicité du prolongement. ■

Nous allons résumer les conditions d'existence de l'intégrale stochastique par rapport à un mouvement brownien, et les hypothèses qui permettent d'affirmer qu'il s'agit d'une martingale.

### Résumé :

Soit  $(W_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien et  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus  $\mathcal{F}_t$ -adapté. On peut définir l'intégrale stochastique  $(\int_0^t H_s dW_s)_{0 \leq t \leq T}$  dès que  $\int_0^T H_s^2 ds < +\infty$  **P** p.s. . Le processus  $(\int_0^t H_s dW_s)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale si  $\mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 ds \right) < +\infty$ . Cette condition n'est cependant pas nécessaire. Remarquons, toutefois, que la condition  $\mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 ds \right) < +\infty$  est équivalente à :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \left( \int_0^t H_s dW_s \right)^2 \right) < +\infty,$$

et que , dans ce cas on a l'égalité :

$$\mathbf{E} \left[ \left( \int_0^T H_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 ds \right). \quad (1.6)$$

Ces propriétés sont démontrées dans l'exercice 10.

### 1.4.2 Calcul d'Itô

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques. On appelle ce calcul “calcul d'Itô” et l'outil essentiel en est la “formule d'Itô”.

La formule d'Itô donne, en particulier, la façon de différencier  $t \mapsto f(W_t)$  si  $f$  est une fonction deux fois continûment différentiable. L'exemple suivant prouve que le prolongement naïf du calcul différentiel usuel est voué à l'échec. Supposons que l'on veuille “différencier”  $t \rightarrow W_t^2$  et l'exprimer en fonction de “ $dW_t$ ”. Pour une fonction  $f(t)$  différentiable nulle en 0, on a  $f(t)^2 = 2 \int_0^t f(s) \dot{f}(s) ds = 2 \int_0^t f(s) df(s)$ . Dans les cas du mouvement brownien et de l'intégrale stochastique on ne peut avoir une formule du même type :  $W_t^2 = 2 \int_0^t W_s dW_s$ . En effet, d'après ce qui précède,  $\int_0^t W_s dW_s$  est une martingale (car  $\mathbf{E} \left( \int_0^t W_s^2 ds \right) < +\infty$ ), nulle en zéro. Si elle était égale à  $W_t^2$  elle serait positive, et une martingale nulle en 0 ne peut être positive que si elle est nulle.

Commençons par préciser la définition de la classe de processus pour laquelle on peut énoncer la formule d'Itô.

**Définition 1.4.8** Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé muni d'une filtration et  $(W_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$  tel que :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \forall t \leq T \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

avec :

- $X_0$   $\mathcal{F}_0$ -mesurable.
- $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  des processus adaptés à  $\mathcal{F}_t$ .
- $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$   $\mathbf{P}$  p.s.
- $\int_0^T |H_s|^2 ds < +\infty$   $\mathbf{P}$  p.s.

On peut démontrer (voir exercice 11) le résultat suivant, qui précise l'unicité de la décomposition précédente.

**Proposition 1.4.9** Soit  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale continue telle que :

$$M_t = \int_0^t K_s ds, \text{ avec } \mathbf{P} \text{ p.s. }, \int_0^T |K_s| ds < +\infty,$$

alors :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \forall t \leq T, M_t = 0.$$

Ceci entraîne que :

- La décomposition d'un processus d'Itô est unique. Ce qui signifie que si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s = X'_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s$$

alors :

$$X_0 = X'_0 \quad d\mathbf{P} \text{ p.s.} \quad H_s = H'_s \quad ds \times d\mathbf{P} \text{ p.p.} \quad K_s = K'_s \quad ds \times d\mathbf{P} \text{ p.p.}$$

- Si  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale de la forme  $X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$ , alors  $K_t = 0$   $dt \times d\mathbf{P}$  p.p..

La formule d'Itô prend la forme suivante (nous l'admettons sans démonstration et nous renvoyons à [Bou88] pour une démonstration élémentaire dans le cas du brownien ou à [KS88] pour une démonstration complète) :

**Théorème 1.4.10** *Soit  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus d'Itô :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

*et  $f$  une fonction deux fois continûment différentiable, on a :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

*où, par définition :*

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds,$$

*et :*

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s.$$

*De même si  $(t, x) \rightarrow f(t, x)$  est une fonction deux fois différentiable en  $x$  et une fois différentiable en  $t$ , ces dérivées étant continues en  $(t, x)$  (on dit dans ce cas que  $f$  est de classe  $C^{1,2}$ ), on a :*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds \\ &\quad + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s. \end{aligned}$$

### 1.4.3 Exemples d'utilisation de la formule d'Itô

Commençons par traiter un exemple élémentaire. Si  $f(x) = x^2$  et  $X_t = W_t$ , on a  $K_s = 0$  et  $H_s = 1$ , donc :

$$W_t^2 = 2 \int_0^t W_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2 ds.$$

On obtient :

$$W_t^2 - t = 2 \int_0^t W_s dW_s.$$

Comme  $\mathbf{E} \left( \int_0^t W_s^2 ds \right) < +\infty$ , on retrouve le fait que  $W_t^2 - t$  est une martingale.

Nous allons maintenant nous intéresser aux solutions  $(S_t)_{t \geq 0}$  de :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s (\mu ds + \sigma dW_s). \quad (1.7)$$

On écrit souvent ce type d'équation sous la forme :

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = x_0. \quad (1.8)$$

Cela signifie que l'on cherche un processus adapté  $(S_t)_{t \geq 0}$  tel que les intégrales  $\int_0^t S_s ds$  et  $\int_0^t S_s dW_s$  aient un sens, et qui vérifie, pour chaque  $t$  :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s.$$

Faisons tout d'abord un calcul formel, posons  $Y_t = \log(S_t)$  où  $S_t$  est une solution de l'équation précédente.  $S_t$  est un processus d'Itô avec  $K_s = \mu S_s$  et  $H_s = \sigma S_s$ . Appliquons la formule d'Itô à  $f(x) = \log(x)$  (au moins formellement car  $f(x)$  n'est pas de classe  $C^2$ !). On obtient en supposant que  $S_t$  est positif :

$$\log(S_t) = \log(S_0) + \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{1}{S_s^2} \sigma^2 S_s^2 ds,$$

soit, en utilisant (1.8) :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\mu - \sigma^2/2) dt + \int_0^t \sigma dW_t.$$

On en déduit que :

$$Y_t = \log(S_t) = \log(S_0) + (\mu - \sigma^2/2) t + \sigma W_t.$$

Il semble donc que :

$$S_t = x_0 \exp \left( (\mu - \sigma^2/2) t + \sigma W_t \right)$$

soit une solution de l'équation (1.7). Vérifions rigoureusement cela.  $S_t = f(t, W_t)$  où :

$$f(t, x) = x_0 \exp \left( (\mu - \sigma^2/2) t + \sigma x \right).$$

La formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} S_t &= f(t, W_t) \\ &= f(0, W_0) + \int_0^t f'_s(s, W_s) ds \\ &\quad + \int_0^t f'_x(s, W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, W_s) d\langle W, W \rangle_s. \end{aligned}$$

Mais, comme  $\langle W, W \rangle_t = t$  :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s (\mu - \sigma^2/2) ds + \int_0^t S_s \sigma dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t S_s \sigma^2 ds,$$

et finalement :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s \mu ds + \int_0^t S_s \sigma dW_s.$$

**Remarque 1.4.11** On aurait pu obtenir (exercice) le résultat précédent en appliquant la formule d'Itô à  $S_t = \phi(Z_t)$ , avec  $Z_t = (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t$  (qui est un processus d'Itô) et  $\phi(x) = x_0 \exp(x)$ .

On vient donc de démontrer l'existence d'une solution de (1.7). Nous allons maintenant prouver que cette solution est unique. Pour cela, nous allons utiliser une propriété généralisant la "formule d'intégration par parties" dans le cas des processus d'Itô.

**Proposition 1.4.12 (Formule d'intégration par parties.)** Soient  $X_t$  et  $Y_t$  deux processus d'Itô,  $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$  et  $Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s$ . Alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

avec la convention que :

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds.$$

**Démonstration :** On a, d'après la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} (X_t + Y_t)^2 &= (X_0 + Y_0)^2 \\ &\quad + 2 \int_0^t (X_s + Y_s) d(X_s + Y_s) \\ &\quad + \int_0^t (H_s + H'_s)^2 ds \\ X_t^2 &= X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \int_0^t H_s^2 ds \\ Y_t^2 &= Y_0^2 + 2 \int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t H'^2_s ds. \end{aligned}$$

D'où, en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H'_s ds.$$



■

Montrons, maintenant, l'unicité d'une solution de l'équation (1.7). Notons que :

$$S_t = x_0 \exp \left( \left( \mu - \sigma^2/2 \right) t + \sigma W_t \right)$$

est une solution de (1.7) et supposons que  $(X_t)_{t \geq 0}$  en soit une autre. On va chercher à exprimer la “différentielle stochastique” de  $X_t S_t^{-1}$ . Posons :

$$Z_t = \frac{S_0}{S_t} = \exp \left( \left( -\mu + \sigma^2/2 \right) t - \sigma W_t \right),$$

$\mu' = -\mu + \sigma^2$  et  $\sigma' = -\sigma$ . Alors  $Z_t = \exp \left( \left( \mu' - \sigma'^2/2 \right) t + \sigma' W_t \right)$  et le calcul fait précédemment prouve que :

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s (\mu' ds + \sigma' dW_s) = 1 + \int_0^t Z_s \left( (-\mu + \sigma^2) ds - \sigma dW_s \right).$$

On peut alors exprimer la “différentielle” de  $X_t Z_t$  grâce à la formule d'intégration par parties pour les processus d'Itô :

$$d(X_t Z_t) = X_t dZ_t + Z_t dX_t + d \langle X, Z \rangle_t.$$

Ici, on a :

$$\langle X, Z \rangle_t = \left\langle \int_0^\cdot X_s \sigma dW_s, - \int_0^\cdot Z_s \sigma dW_s \right\rangle_t = - \int_0^t \sigma^2 X_s Z_s ds.$$

On en déduit que :

$$d(X_t Z_t) = X_t Z_t \left( (-\mu + \sigma^2) dt - \sigma dW_t \right) + X_t Z_t (\mu dt + \sigma dW_t) - X_t Z_t \sigma^2 dt = 0$$

$X_t Z_t$  est donc égal à  $X_0 Z_0$ , ce qui entraîne que :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{P} \text{ p.s. } X_t = x_0 Z_t^{-1} = S_t.$$

Les processus  $X_t$  et  $Z_t$  étant continus, ceci prouve que :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \forall t \geq 0, \quad X_t = x_0 Z_t^{-1} = S_t.$$

On vient ainsi de démontrer la proposition suivante :

**Théorème 1.4.13**  $\sigma, \mu$  étant deux nombres réels,  $(W_t)_{t \geq 0}$  étant un mouvement brownien et  $T$  un réel strictement positif, il existe un processus de Itô unique  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  qui vérifie, pour tout  $t \leq T$  :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s (\mu ds + \sigma dW_s).$$

Ce processus est donné par :

$$S_t = x_0 \exp \left( \left( \mu - \sigma^2/2 \right) t + \sigma W_t \right).$$

**Remarque 1.4.14** – Le processus  $S_t$  que l'on vient d'expliciter servira de modèle standard pour le prix d'un actif financier. On l'appelle modèle de Black et Scholes.

- Lorsque  $\mu = 0$ ,  $S_t$  est une martingale (voir proposition 1.3.3), ce type de processus porte le nom de martingale exponentielle.

**Remarque 1.4.15** Soit  $\Theta$  un ouvert de  $\mathbf{R}$  et  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus d'Itô qui vérifie, pour tout  $t \leq T$ ,  $X_t \in \Theta$ . Si, de plus,  $f$  est une fonction deux fois continûment différentiable de l'ouvert  $\Theta$  dans  $\mathbf{R}$ , on peut justifier rigoureusement l'extension de la formule d'Itô dans ce cas :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds.$$

Ce résultat permet en particulier de justifier l'application de la formule d'Itô, pour un processus strictement positif et pour la fonction log.

#### 1.4.4 Formule d'Itô multidimensionnelle

La formule d'Itô se généralise aux cas où la fonction  $f$  dépend de plusieurs processus d'Itô et lorsque ces processus d'Itô s'expriment en fonction de plusieurs mouvements browniens. Cette généralisation se révèle utile, par exemple, pour les modèles de taux d'intérêt sophistiqués.

**Définition 1.4.16** On appelle  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien  $p$ -dimensionnel un processus à valeurs dans  $\mathbf{R}^p$ ,  $(W_t)_{t \geq 0}$  adapté à  $\mathcal{F}_t$ , avec  $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^p)$ , où les  $(W_t^i)_{t \geq 0}$  sont des  $\mathcal{F}_t$ -mouvements browniens standards indépendants.

On généralise dans ce cadre la notion de processus d'Itô.

**Définition 1.4.17** On dit que  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus d'Itô si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t H_s^i dW_s^i$$

où :

- $K_t$  et les  $(H_t^i)$  sont adaptés à  $(\mathcal{F}_t)$ .

- $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$  **P** p.s. .
- $\int_0^T (H_s^i)^2 ds < +\infty$  **P** p.s. .

La formule d'Itô prend alors la forme suivante :

**Proposition 1.4.18** *Soient  $(X_t^1, \dots, X_t^n)$   $n$  processus d'Itô :*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t H_s^{i,j} dW_s^j$$

alors si  $f$  est une fonction deux fois différentiable en  $x$  et une fois différentiable en  $t$ , ces dérivées étant continues en  $(t, x)$  :

$$\begin{aligned} f(t, X_t^1, \dots, X_t^n) &= f(0, X_0^1, \dots, X_0^n) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) dX_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) d \langle X^i, X^j \rangle_s \end{aligned}$$

où :

- $dX_s^i = K_s^i ds + \sum_{j=1}^p H_s^{i,j} dW_s^j$ ,
- $d \langle X^i, X^j \rangle_s = \sum_{m=1}^p H_s^{i,m} H_s^{j,m} ds$ .

**Remarque 1.4.19** Si  $(X_s)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(Y_s)_{0 \leq t \leq T}$  sont deux processus d'Itô, on peut définir formellement le “crochet” de  $X$  et  $Y$  (que l'on a noté  $\langle X, Y \rangle_s$ ) par les règles suivantes :

- $\langle X, Y \rangle_t$  est bilinéaire et symétrique.
- $\langle \int_0^\cdot K_s ds, X \rangle_t = 0$  si  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus d'Itô.
- $\langle \int_0^\cdot H_s dW_t^i, \int_0^\cdot H'_s dW_t^j \rangle_t = 0$  si  $i \neq j$
- $\langle \int_0^\cdot H_s dW_t^i, \int_0^\cdot H'_s dW_t^i \rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds$

Cette définition permet de retrouver la formule du crochet donnée dans la proposition précédente.

## 1.5 Equations différentielles stochastiques

Nous avons étudié en détail, au paragraphe 1.4.2 les solutions de l'équation :

$$X_t = x + \int_0^t X_s(\mu ds + \sigma dW_s).$$

On peut considérer des équations d'une forme plus générales :

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s. \quad (1.9)$$

On appelle ces équations des “équations différentielles stochastiques”. Une solution de (1.9) porte le nom de “diffusion”. Ces équations permettent de construire la plupart des modèles d'actifs utiles en finances, aussi bien lorsque l'on cherche à modéliser des actifs que des taux d'intérêt. Nous allons étudier quelques propriétés des solutions de ces équations.

### 1.5.1 Théorème d'Itô

Précisons, tout d'abord, ce que l'on entend par une solution de (1.9).

**Définition 1.5.1** *On se place sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . On se donne,  $b : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\sigma : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $Z$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_0$ -mesurable et  $(W_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien. Trouver une solution à l'équation (1.9) signifie trouver un processus stochastique  $(X_t)_{t \geq 0}$  continu  $\mathcal{F}_t$ -adapté, qui vérifie :*

- Pour tout  $t \geq 0$ , les intégrales  $\int_0^t b(s, X_s)ds$  et  $\int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$  ont un sens :

$$\int_0^t |b(s, X_s)|ds < +\infty \text{ et } \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2 ds < +\infty \quad \mathbf{P} \text{ p.s. } .$$

- $(X_t)_{t \geq 0}$  vérifie (1.9) c'est-à-dire :

$$\forall t \geq 0 \quad \mathbf{P} \text{ p.s. } X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s.$$

**Remarque 1.5.2** On note formellement (1.9) sous la forme :

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 &= Z \end{cases}$$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur  $b$  et  $\sigma$  pour avoir un résultat d'existence et d'unicité pour (1.9).

**Théorème 1.5.3** *Si  $b$  et  $\sigma$  sont des fonctions continues, telles qu'il existe  $K < +\infty$ , avec :*

1.  $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$
2.  $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$
3.  $\mathbf{E}(Z^2) < +\infty$

*alors, pour tout  $T \geq 0$ , (1.9) admet une solution unique dans l'intervalle  $[0, T]$ . De plus cette solution  $(X_s)_{0 \leq s \leq T}$  vérifie :*

$$\mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s|^2 \right) < +\infty$$

*L'unicité signifie que si  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$  sont deux solutions de (1.9), alors :*

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \forall 0 \leq t \leq T, \quad X_t = Y_t.$$

**Démonstration :** Posons :

$$\mathcal{E} = \left\{ (X_s)_{0 \leq s \leq T}, \text{ processus continu et } \mathcal{F}_t\text{-adapté, tel que } \mathbf{E} \left( \sup_{s \leq T} |X_s|^2 \right) < +\infty \right\}$$

$\mathcal{E}$  muni de la norme  $\|X\| = \sqrt{\mathbf{E}(\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s|^2)}$  est un espace vectoriel normé complet. Pour démontrer l'existence nous allons utiliser un argument d'existence d'un point fixe pour une application contractante. Soit  $\Phi$  l'application qui à un processus  $(X_s)_{0 \leq s \leq T}$  associe un processus  $(\Phi(X)_s)_{0 \leq s \leq T}$  défini par :

$$\Phi(X)_t = Z + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s.$$

Si  $X$  est dans  $\mathcal{E}$ ,  $\Phi(X)$  est bien définie, de plus si  $X$  et  $Y$  sont deux éléments de  $\mathcal{E}$  en utilisant le fait que,  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  on obtient :

$$\begin{aligned} |\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t|^2 &\leq 2 \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s)) ds \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dW_s \right|^2 \right) \end{aligned}$$

donc en utilisant l'inégalité (1.2) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \sup_{s \leq T} |\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t|^2 \right) &\leq 2\mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \left( \int_0^t |b(s, X_s) - b(s, Y_s)| ds \right)^2 \right) \\ &\quad + 8\mathbf{E} \left( \int_0^T (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))^2 ds \right) \\ &\leq 2(K^2 T^2 + 4K^2 T) \mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t|^2 \right) \end{aligned}$$

D'où  $\|\Phi(X) - \Phi(Y)\| \leq \sqrt{2(K^2 T^2 + 4K^2 T)} \|X - Y\|$ . De plus, on a (on note 0 pour le processus identiquement nul) :

$$|\Phi(0)_t|^2 \leq 3 \left( Z^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t b(s, 0) ds \right|^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \sigma(s, 0) dW_s \right|^2 \right)$$

en remarquant que  $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ . Et donc :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |\Phi(0)_t|^2 \right) \leq 3(\mathbf{E}(Z^2) + K^2 T^2 + 4K^2 T) < +\infty.$$

On en déduit que  $\Phi$  est une application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  de norme de Lipschitz majorée par  $k(T) = \sqrt{2(K^2 T^2 + 4K^2 T)}$ . Nous commençons par supposer que  $T$  est suffisamment petit pour que  $k(T) < 1$ .  $\Phi$  est alors une application contractante de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$ . Elle admet donc un point fixe unique dans  $\mathcal{E}$ . De plus, si  $X$  est un point fixe de  $\Phi$ , c'est une solution de (1.9). Ceci prouve l'existence. D'autre part, une solution de (1.9) qui est dans  $\mathcal{E}$  est un point fixe de  $\Phi$ . Ceci prouve l'unicité d'une solution de (1.9) dans  $\mathcal{E}$ . Pour démontrer l'unicité dans la classe de tous les processus de Itô, il suffit de prouver qu'une solution de (1.9) est forcément dans  $\mathcal{E}$ . Soit  $X$  une solution de (1.9), nous noterons  $T_n = \inf\{s \geq 0, |X_s| > n\}$  et  $f^n(t) = \mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq t \wedge T_n} |X_s|^2 \right)$ . Il est facile de vérifier que  $f^n(t)$  est une fonction finie et continue. En faisant le même genre d'estimation que précédemment on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq u \leq t \wedge T_n} |X_u|^2 \right) &\leq 3 \left( \mathbf{E}(Z^2) + \mathbf{E} \left( \int_0^{t \wedge T_n} K(1 + |X_s|) ds \right)^2 + 4\mathbf{E} \left( \int_0^{t \wedge T_n} K^2(1 + |X_s|)^2 ds \right) \right) \\ &\leq 3 \left( \mathbf{E}(Z^2) + 2(K^2 T + 4K^2) \int_0^t (1 + \mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq u \leq s \wedge T_n} |X_u|^2 \right)) ds \right). \end{aligned}$$

Cela donne l'estimation suivante :

$$f^n(t) \leq a + b \int_0^t f^n(s) ds.$$

Nous allons maintenant utiliser une version du lemme de Gronwall.

**Lemme 1.5.4 (Lemme de Gronwall)** *Si  $f$  est une fonction continue, telle que pour tout  $0 \leq t \leq T$ ,  $f(t) \leq a + b \int_0^t f(s) ds$ , alors  $f(T) \leq a(1 + e^{bT})$ .*

**Démonstration :** Posons  $u(t) = e^{-bt} \int_0^t f(s) ds$ . On a  $u'(t) = e^{-bt}(f(t) - b \int_0^t f(s) ds) \leq a e^{-bt}$ . Par intégration, on obtient  $u(T) \leq a/b$  et  $f(T) \leq a(1 + e^{bT})$ . ■

On en déduit ici que  $f^n(T) < K < +\infty$ ,  $K$  étant une constante fonction de  $T$  mais indépendante de  $n$ . Le lemme de Fatou donne alors, en passant à la limite en  $n$ , que pour tout  $T$  :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s|^2 \right) < K < +\infty.$$

$X$  est donc dans  $\mathcal{E}$ . Ceci termine la démonstration dans le cas où  $T$  est petit.

Pour conclure pour  $T$  quelconque, il suffit de prendre  $n$  assez grand et de raisonner successivement sur les intervalles  $[0, T/n]$ ,  $[T/n, 2T/n]$ ,  $\dots$ ,  $[(n-1)T/n, T]$ . ■

### 1.5.2 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est la solution unique de l'équation suivante :

$$\begin{cases} dX_t &= -cX_t dt + \sigma dW_t \\ X_0 &= x \end{cases}$$

On peut expliciter cette solution. En effet, posons  $Y_t = X_t e^{ct}$  et écrivons la formule d'intégration par parties :

$$dY_t = dX_t e^{ct} + X_t d(e^{ct}) + d\langle X, e^{c\cdot} \rangle_t.$$

Mais  $\langle X, e^{c\cdot} \rangle_t = 0$  car  $d(e^{ct}) = ce^{ct} dt$ . On en déduit que  $dY_t = \sigma e^{ct} dW_t$  puis que :

$$X_t = x e^{-ct} + \sigma e^{-ct} \int_0^t e^{cs} dW_s.$$

On peut calculer la moyenne et la variance de  $X_t$  :

$$\mathbf{E}(X_t) = x e^{-ct} + \sigma e^{-ct} \mathbf{E} \left( \int_0^t e^{cs} dW_s \right) = x e^{-ct}$$

(en effet  $\mathbf{E} \left( \int_0^t (e^{cs})^2 ds \right) < +\infty$ , et donc  $\int_0^t e^{cs} dW_s$  est une martingale nulle à l'instant 0 donc de moyenne nulle). De même :

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &= \mathbf{E} \left( (X_t - \mathbf{E}(X_t))^2 \right) \\ &= \sigma^2 \mathbf{E} \left( e^{-2ct} \left( \int_0^t e^{cs} dW_s \right)^2 \right) \\ &= \sigma^2 e^{-2ct} \mathbf{E} \left( \int_0^t e^{2cs} ds \right) \\ &= \sigma^2 \frac{1 - e^{-2ct}}{2c} \end{aligned}$$

On peut démontrer que  $X_t$  est une variable aléatoire gaussienne, en effet  $X_t$  s'écrit  $\int_0^t f(s) dW_s$  où  $f(\cdot)$  est une fonction déterministe du temps et  $\int_0^t f^2(s) ds < +\infty$  (voir exercice 7). Plus précisément, le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus gaussien. Cela signifie que si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des réels et si  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ , la variable aléatoire  $\lambda_1 X_{t_1} + \dots + \lambda_n X_{t_n}$  est une variable aléatoire gaussienne. Pour se convaincre de ceci, il suffit de remarquer que :

$$X_{t_i} = x e^{-ct_i} + \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{s \leq t_i\}} e^{cs} dW_s = m_i + \int_0^{t_i} f_i(s) dW_s.$$

Alors  $\lambda_1 X_{t_1} + \dots + \lambda_n X_{t_n} = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i + \int_0^t (\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(s)) dW_s$  est bien une variable aléatoire gaussienne (car c'est, comme précédemment, une intégrale stochastique d'une fonction déterministe du temps).

### 1.5.3 Equations différentielles stochastiques à valeurs vectorielles

On peut généraliser l'étude des équations différentielles stochastiques aux cas où le processus évolue dans  $\mathbf{R}^n$ . Cette généralisation est utile, dans les applications à la finance, lorsque l'on cherche à construire des modèles pour des paniers d'actions ou de devises. On se donne :

- $W = (W^1, \dots, W^p)$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien  $p$ -dimensionnel.
- $b : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $b(s, x) = (b^1(s, x), \dots, b^n(s, x))$ .
- $\sigma : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times p}$  (l'ensemble des matrices  $n \times p$ ),  

$$\sigma(s, x) = (\sigma_{i,j}(s, x))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}.$$
- $Z = (Z^1, \dots, Z^n)$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_0$ -mesurable à valeur dans  $\mathbf{R}^n$ .

et l'on considère l'équation différentielle stochastique :

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad (1.10)$$

où il faut comprendre que l'on cherche un processus  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$  adapté à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  et tel que **P** p.s. , pour tout  $t$  et pour tout  $i \leq n$ , on a presque sûrement :

$$X_t^i = Z^i + \int_0^t b^i(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s) dW_s^j.$$



Le théorème d'existence et d'unicité se généralise de la façon suivante :

**Théorème 1.5.5** *Si  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $|x|$  est la norme euclidienne de  $x$  et si  $\sigma \in \mathbf{R}^{n \times p}$ ,  $|\sigma|^2 = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \sigma_{i,j}^2$ . On suppose que :*

1.  $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$
2.  $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$
3.  $\mathbf{E}(|Z|^2) < +\infty$

alors il existe une solution unique à l'équation (1.10). De plus cette solution vérifie, pour tout  $T$  :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s|^2 \right) < +\infty$$

La démonstration est identique à celle du cas à valeurs dans  $\mathbf{R}$ .

#### 1.5.4 Propriété de Markov des solutions d'équations différentielles stochastiques

La propriété de Markov pour un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  signifie que le comportement futur de ce processus après  $t$  dépend uniquement de  $X_t$  et non de ce qui s'est passé avant  $t$ . Ce point est essentiel dans les calculs de prix d'options. Il permet de prouver que le prix d'une option sur un actif markovien ne dépend que du prix de l'actif à l'instant  $t$ .

Mathématiquement, on dira qu'un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  vérifie la propriété de Markov par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  pour laquelle il est adapté, si pour toute fonction  $f$  borélienne bornée et pour tous  $s$  et  $t$ , tels que  $s \leq t$  :

$$\mathbf{E} (f(X_t) | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E} (f(X_t) | X_s) .$$

Nous allons énoncer dans ce paragraphe la propriété de Markov pour une solution de (1.9). On notera  $(X_s^{t,x}, s \geq t)$  la solution de l'équation (1.9) partant de  $x$  à l'instant  $t$  et  $X^x = X^{0,x}$  la solution de l'équation partant de  $x$  à l'instant 0.  $X^{t,x}$  vérifie pour  $s \geq t$  :

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(u, X_u^{t,x}) du + \int_t^s \sigma(u, X_u^{t,x}) dW_u .$$

A priori,  $X^{t,x}$  est défini pour tout  $(t, x)$  presque sûrement. On peut cependant, sous les hypothèses du théorème 1.5.3, construire un processus dépendant de

$(t, x, s)$  qui est  $\mathbf{P}$  p.s. continu en ces trois variables et tel que  $X_s^{t,x}$  soit solution de l'équation précédente. C'est un résultat délicat à démontrer (on trouvera sa démonstration dans [RW87]) que nous allons admettre.

La propriété de Markov est une conséquence d'une propriété "de flot" vérifiée par les solutions d'une équation différentielle stochastique. C'est une généralisation de la propriété de flot des équations différentielles ordinaires.

**Lemme 1.5.6** *Sous les conditions du théorème 1.5.3, si  $s \geq t$  :*

$$X_s^{0,x} = X_s^{t,X_t^x} \quad \mathbf{P} \text{ p.s.}$$

**Démonstration :** Nous ne donnons que l'idée générale de cette démonstration. On a, pour tout  $x$  :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(u, X_u^{t,x}) du + \int_t^s \sigma(u, X_u^{t,x}) dW_u.$$

On en déduit, successivement, que  $\mathbf{P}$  p.s. pour tout  $y \in \mathbf{R}$  :

$$X_s^{t,y} = y + \int_t^s b(u, X_u^{t,y}) du + \int_t^s \sigma(u, X_u^{t,y}) dW_u,$$

puis que :

$$X_s^{t,X_t^x} = X_t^x + \int_t^s b(u, X_u^{t,X_t^x}) du + \int_t^s \sigma(u, X_u^{t,X_t^x}) dW_u.$$

Ces résultats sont intuitifs, mais pour les justifier en détail il faut utiliser la continuité de  $y \mapsto X_s^{t,y}$ . Nous laissons de côté les détails de leurs démonstrations. Cela admis, on remarque que  $X_s^x$  est aussi solution de l'équation précédente, en effet, si  $t \leq s$  :

$$\begin{aligned} X_s^x &= x + \int_0^s b(u, X_u^x) du + \int_0^s \sigma(u, X_u^x) dW_u \\ &= X_t^x + \int_t^s b(u, X_u^x) du + \int_t^s \sigma(u, X_u^x) dW_u. \end{aligned}$$

L'unicité des solutions de cette équation prouve, alors, que  $X_s^{0,x} = X_s^{t,X_t^x}$  pour  $t \leq s$ . ■

La propriété de Markov prend dans ce cas la forme suivante :

**Théorème 1.5.7** *Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  une solution de (1.9). C'est un processus de Markov par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  du mouvement brownien. Plus précisément, on a, pour toute fonction borélienne bornée  $f$  :*

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \mathbf{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = \phi(X_s),$$

où  $\phi(x) = \mathbf{E}(f(X_t^{s,x}))$ .

**Remarque 1.5.8** On note souvent l'égalité précédente sous la forme :

$$\mathbf{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(f(X_t^{s,x}))|_{x=X_s}.$$

**Démonstration :** Nous ne donnerons qu'une esquisse de la démonstration. Pour une démonstration complète on pourra consulter [Fri75].

La propriété de flot prouve que, si  $s \geq t$ ,  $X_t^x = X_t^{s, X_s^x}$ . D'autre part, on peut démontrer que  $X_t^{s,x}$  s'exprime de façon mesurable en fonction des accroissements du brownien ( $W_{s+u} - W_s$ ,  $u \geq 0$ ) et de  $x$  (ce résultat est naturel mais délicat à justifier en détail (voir [Fri75])). Si l'on admet ce résultat, pour un  $s$  et un  $t$  fixés on a  $X_t^{s,x} = \Phi(x, W_{s+u} - W_s; u \geq 0)$  et donc :

$$X_t^x = \Phi(X_s^x, W_{s+u} - W_s; u \geq 0),$$

avec  $X_s^x$  qui est  $\mathcal{F}_s$  mesurable et  $(W_{s+u} - W_s)_{u \geq 0}$  qui est indépendant de  $\mathcal{F}_s$ .

Si on applique le résultat de la proposition 2.2.5 de l'appendice à  $X_s$ ,  $(W_{s+u} - W_s)_{u \geq 0}$ ,  $\Phi$  et  $\mathcal{F}_s$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f(\Phi(X_s^x, W_{s+u} - W_s; u \geq 0)) | \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}(f(\Phi(x, W_{s+u} - W_s; u \geq 0)))|_{x=X_s^x} \\ &= \mathbf{E}(f(X_t^{s,x}))|_{x=X_s^x} \end{aligned}$$

■

Le résultat précédent se généralise à des fonctions des trajectoires de la diffusion après l'instant  $s$ . En particulier, le théorème suivant est utile dans les calculs liés aux taux d'intérêt.

**Théorème 1.5.9** Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  une solution de (1.9) et  $r(s, x)$  une fonction mesurable positive. On a, si  $t > s$  :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \mathbf{E} \left( e^{-\int_s^t r(u, X_u) du} f(X_t) | \mathcal{F}_s \right) = \phi(X_s)$$

avec :

$$\phi(x) = \mathbf{E} \left( e^{-\int_s^t r(u, X_u^{s,x}) du} f(X_t^{s,x}) \right).$$

On écrit aussi cette égalité sous la forme :

$$\mathbf{E} \left( e^{-\int_s^t r(u, X_u) du} f(X_t) | \mathcal{F}_s \right) = \mathbf{E} \left( e^{-\int_s^t r(u, X_u^{s,x}) du} f(X_t^{s,x}) \right) \Big|_{x=X_s}.$$

**Remarque 1.5.10** On peut en fait démontrer un résultat plus général que celui énoncé précédemment. Si on omet les détails techniques, on peut affirmer que, si  $\phi$  est "une fonction de toute la trajectoire" de  $X_t$  après  $s$  :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \mathbf{E}(\phi(X_t^x, t \geq s) | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(\phi(X_t^{s,x}, t \geq s))|_{x=X_s}.$$

**Remarque 1.5.11** Lorsque  $b$  et  $\sigma$  ne dépendent que de  $x$  (on dit que la diffusion est homogène dans ce cas), on peut montrer que la loi de  $X_{s+t}^{s,x}$  est identique à celle de  $X_t^{0,x}$ , ce qui signifie que si  $f$  est une fonction mesurable et bornée :

$$\mathbf{E}(f(X_{s+t}^{s,x})) = \mathbf{E}(f(X_t^{0,x})).$$

On peut étendre ce résultat et montrer que, si  $r$  est une fonction de  $x$  uniquement :

$$\mathbf{E}\left(e^{-\int_s^{s+t} r(X_u^{s,x}) du} f(X_{s+t}^{s,x})\right) = \mathbf{E}\left(e^{-\int_0^t r(X_u^{0,x}) du} f(X_t^{0,x})\right).$$

On en déduit que, dans ce cas, le théorème 1.5.9 s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{E}\left(e^{-\int_s^t r(X_u) du} f(X_t) \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(e^{-\int_0^{t-s} r(X_u^{0,x}) du} f(X_{t-s}^{0,x})\right) \Big|_{x=X_s}.$$

## 1.6 Exercices

**Exercice 1** Soit  $(M_t)_{t \geq 0}$  une martingale, telle que pour tout  $t$ ,  $\mathbf{E}(M_t^2) < +\infty$ . Démontrer que si  $s \leq t$  :

$$\mathbf{E}\left((M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right).$$

**Exercice 2** Soit  $X_t$  un processus à accroissements indépendants et stationnaires nul en l'instant 0 et tel que, pour tout  $t$ ,  $\mathbf{E}(X_t^2) < +\infty$ . On supposera, de plus, que la fonction  $t \mapsto \mathbf{E}(X_t^2)$  est continue. Démontrer que  $\mathbf{E}(X_t) = ct$  et que  $\text{Var}(X_t) = c't$ ,  $c$  et  $c'$  étant des constantes.

**Exercice 3** Démontrer que, si  $\tau$  est un temps d'arrêt :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{A}, \text{ pour tout } t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

définit une tribu.

**Exercice 4** Soit  $S$  un temps d'arrêt, démontrer que  $S$  est  $\mathcal{F}_S$  mesurable.

**Exercice 5** Soit  $S$  et  $T$  deux temps d'arrêt, tels que  $S \leq T$   $\mathbf{P}$  p.s. . Démontrer que  $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ .

**Exercice 6** Soient  $S$  un temps d'arrêt, fini presque sûrement, et  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus adapté et presque sûrement continu.

1. Démontrer que,  $\mathbf{P}$  p.s., pour tout  $s$  :

$$X_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{[k/n, (k+1)/n[}(s) X_{k/n}(\omega)$$

2. Prouver que l'application :

$$\begin{aligned} ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t) &\longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R})) \\ (s, \omega) &\longmapsto X_s(\omega) \end{aligned}$$

est mesurable.

3. En déduire que si  $S \leq t$ ,  $X_S$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable, puis que  $X_S$  est  $\mathcal{F}_S$  mesurable.

**Exercice 7** Cette exercice est une introduction à l'intégrale stochastique. Il s'agit de construire une intégrale du type  $\int_0^{+\infty} f(s) dX_s$ , où  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien et  $f(s)$  est une fonction mesurable de  $(\mathbf{R}^+, \mathcal{B}(\mathbf{R}^+))$  dans  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$  telle que :

$$\int_0^{+\infty} f^2(s) ds < +\infty.$$

Ce type d'intégrale s'appelle intégrale de Wiener et c'est un cas particulier de l'intégrale d'Ito qui est introduite au paragraphe 1.4.

On rappelle que l'ensemble  $\mathcal{H}$  des fonctions de la forme  $\sum_{0 \leq i \leq N-1} a_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}]}$ , avec  $a_i \in \mathbf{R}$ , et  $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N$  est dense dans  $L^2(\mathbf{R}^+, dx)$  muni de la norme  $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(s) ds}$ .

1. Soit  $a_i \in \mathbf{R}$ , et  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N$ , et  $f = \sum_{0 \leq i \leq N-1} a_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}]}$ . On pose :

$$I_e(f) = \sum_{0 \leq i \leq N-1} a_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}).$$

Démontrer que  $I_e(f)$  est une variable aléatoire gaussienne dont on calculera la moyenne et la variance. Démontrer en particulier que :

$$\mathbf{E}(I_e(f)^2) = \|f\|_{L^2}^2.$$

2. En déduire qu'il existe une unique application linéaire de  $L^2(\mathbf{R}^+, dx)$  à valeurs dans  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ,  $I$ , telle que  $I(f) = I_e(f)$ , si  $f$  est dans  $\mathcal{H}$  et  $\mathbf{E}(I(f)^2) = \|f\|_{L^2}^2$ , pour tout  $f$  dans  $L^2(\mathbf{R}^+)$ .
3. Démontrer que, si  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées qui convergent dans  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  vers  $X$ , alors  $X$  est une variable aléatoire gaussienne centrée. En déduire que si  $f \in L^2(\mathbf{R}^+, dx)$  alors  $I(f)$  est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance  $\int_0^{+\infty} f^2(s)ds$ .
4. Soit  $f \in L^2(\mathbf{R}^+, dx)$ , on note  $Z_t = \int_0^t f(s)dX_s = \int \mathbf{1}_{[0,t]}(s)f(s)dX_s$ , démontrer que  $Z_t$  est un processus adapté à  $\mathcal{F}_t$ , et que  $Z_t - Z_s$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s$  (commencer par traiter le cas  $f \in H$ ).
5. Démontrer que les processus  $Z_t$ ,  $Z_t^2 - \int_0^t f^2(s)ds$ ,  $\exp(Z_t - (1/2) \int_0^t f^2(s)ds)$  sont des  $\mathcal{F}_t$ -martingales.

**Exercice 8** Soient  $T$  un réel positif et  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  une  $\mathcal{F}_t$ -martingale continue. On suppose que  $\mathbf{E}(M_T^2)$  est fini.

1. Démontrer que  $(|M_t|)_{0 \leq t \leq T}$  une sous-martingale.
2. Montrer que, si  $M^* = \sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|$ :

$$\lambda \mathbf{P}(M^* \geq \lambda) \leq \mathbf{E} \left( |M_T| \mathbf{1}_{\{M^* \geq \lambda\}} \right)$$

(Utiliser le théorème d'arrêt pour la sous-martingale  $|M_t|$  entre  $\tau \wedge T$  où  $\tau = \inf\{t \leq T, |M_t| \geq \lambda\}$  (si cet ensemble est non vide,  $+\infty$  sinon) et  $T$ ).

3. Déduire du résultat précédent que, si  $A$  est positif:

$$\mathbf{E}((M^* \wedge A)^2) \leq 2\mathbf{E}((M^* \wedge A)|M_T|).$$

(Utiliser le fait que  $(M^* \wedge A)^p = \int_0^{M^* \wedge A} p x^{p-1} dx$  pour  $p = 1, 2$ ).

4. Démontrer que,  $\mathbf{E}(M^*)$  est fini et que:

$$\mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2 \right) \leq 4\mathbf{E}(|M_T|^2).$$

**Exercice 9** 1. Démontrer que si  $S$  et  $S'$  sont deux  $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt alors  $S \wedge S' = \inf(S, S')$  et  $S \vee S' = \sup(S, S')$  sont des  $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt.

2. En utilisant le temps d'arrêt  $S \vee s$  et le théorème d'arrêt démontrer que :

$$\mathbf{E} \left( M_s \mathbf{1}_{\{S > s\}} | \mathcal{F}_s \right) = M_s \mathbf{1}_{\{S > s\}}$$

3. En déduire que, si  $s \leq t$  :

$$\mathbf{E} \left( M_{S \wedge t} \mathbf{1}_{\{S > s\}} | \mathcal{F}_s \right) = M_s \mathbf{1}_{\{S > s\}},$$

4. En utilisant le fait que  $M_{S \wedge s}$  est  $\mathcal{F}_s$  mesurable, montrer que  $t \rightarrow M_{S \wedge t}$  est une  $\mathcal{F}_t$  martingale.

**Exercice 10** 1. Soit  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus mesurable adapté tel que  $\int_0^T H_t^2 dt < \infty$ , *p.s.* On pose  $M_t = \int_0^t H_s dW_s$ , (où  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un mouvement brownien standard). Montrer que si  $\mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} M_t^2 \right) < \infty$ , alors  $\mathbf{E} \left( \int_0^T H_t^2 dt \right) < \infty$ . On pourra introduire la suite de temps d'arrêt définie par  $\tau_n = \inf\{t \geq 0 \mid \int_0^t H_s^2 ds = n\}$  et montrer que  $E(M_{T \wedge \tau_n}^2) = \mathbf{E} \left( \int_0^{T \wedge \tau_n} H_s^2 ds \right)$ .

2. On pose  $p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp(-x^2/2(1-t))$ , pour  $0 \leq t < 1$  et  $x \in \mathbf{R}$ , et  $p(1, x) = 0$ . Soit  $(M_t)_{0 \leq t \leq 1}$  le processus défini sur  $[0, 1]$  par  $M_t = p(t, W_t)$ .

(a) Montrer que

$$M_t = M_0 + \int_0^t \frac{\partial p}{\partial x}(s, W_s) dW_s.$$

(b) Soit  $H_t = (\partial p / \partial x)(t, W_t)$ . Montrer que  $\int_0^1 H_t^2 dt < \infty$ , *p.s.* et  $\mathbf{E} \left( \int_0^1 H_t^2 dt \right) = +\infty$ .

**Exercice 11** Soit  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  une  $\mathcal{F}_t$ -martingale continue telle que  $M_t = \int_0^t K_s ds$ , où  $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus  $\mathcal{F}_t$ -adapté tel que  $\mathbf{P}$  p.s.  $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$ .

1. On suppose, de plus, que  $\mathbf{P}$  p.s.  $\int_0^T |K_s| ds \leq C < +\infty$ . Démontrer que si  $t_i^n = Ti/n$  pour  $0 \leq i \leq n$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E} \left( \sum_{i=1}^n (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 \right) = 0.$$

2. Sous les hypothèses de la question précédente, démontrer que :

$$\mathbf{E} \left( \sum_{i=1}^n (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 \right) = \mathbf{E} (M_T^2 - M_0^2).$$

En déduire  $M_T = 0$   $\mathbf{P}$  p.s. , puis que  $\mathbf{P}$  p.s.  $\forall t \leq T, M_t = 0$ .

3. On ne suppose plus que  $\int_0^T |K_s| ds$  soit borné mais seulement que cette variable aléatoire est finie presque sûrement. On admettra que la variable aléatoire  $\int_0^t |K_s| ds$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Montrer que  $T_n = \inf\{0 \leq s \leq T, \int_0^s |K_s| ds \geq n\}$  ( $T$  si cet ensemble est vide) est un temps d'arrêt. Prouver que  $\mathbf{P}$  p.s.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = T$ . En déduire, en utilisant la suite de martingales  $(M_{t \wedge T_n})_{t \geq 0}$ , que  $\mathbf{P}$  p.s.  $\forall t \leq T, M_t = 0$ .
4. Soit  $M_t$  une martingale de la forme  $\int_0^t H_s dW_s + \int_0^t K_s ds$  avec  $\int_0^t H_s^2 ds < +\infty$   $\mathbf{P}$  p.s. et  $\int_0^t |K_s| ds < +\infty$   $\mathbf{P}$  p.s. . En utilisant la suite de temps d'arrêt  $T_n = \inf\{t \leq T, \int_0^t H_s^2 ds \geq n\}$ , démontrer que  $K_t = 0$   $dt \times \mathbf{P}$  p.s..

**Exercice 12** On s'intéresse à la solution  $X_t$  de l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX_t &= (\mu X_t + \mu') dt + (\sigma X_t + \sigma') dW_t \\ X_0 &= 0. \end{cases}$$

On pose  $S_t = \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t)$ .

1. Ecrire l'équation différentielle stochastique dont est solution  $S_t^{-1}$ .
2. Démontrer que :

$$d(X_t S_t^{-1}) = S_t^{-1} ((\mu' - \sigma \sigma') dt + \sigma' dW_t).$$

3. En déduire une expression pour  $X_t$ .



**Exercice 13** Soit  $(W_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien. Le but de cet exercice est de calculer la loi du couple  $(W_t, \sup_{s \leq t} W_s)$ .

1. Soit  $S$  un temps d'arrêt borné. En utilisant le théorème d'arrêt pour la martingale  $M_t = \exp(izW_t + z^2 t/2)$ , où  $z$  est un nombre réel, démontrer que, si  $0 \leq u \leq v$  :

$$\mathbf{E} \left( e^{iz(W_{v+S} - W_{u+S})} | \mathcal{F}_{u+S} \right) = e^{-\frac{z^2}{2}(v-u)}.$$

2. En déduire que  $W_u^S = W_{u+S} - W_S$  est un  $\mathcal{F}_{S+u}$ -mouvement brownien indépendant de la tribu  $\mathcal{F}_S$ .
3. Soit  $(Y_t)_{t \geq 0}$  est un processus aléatoire continu indépendant de la tribu  $\mathcal{B}$  tel que  $\mathbf{E}(\sup_{0 \leq s \leq K} |Y_s|) < +\infty$ . Soit  $T$  une variable aléatoire  $\mathcal{B}$ -mesurable bornée par  $K$ , montrer que :

$$\mathbf{E}(Y_T | \mathcal{B}) = \mathbf{E}(Y_t) |_{t=T}.$$

On commencera par traiter le cas où  $T$  est de la forme  $\sum_{1 \leq i \leq n} t_i \mathbf{1}_{A_i}$ , où  $0 < t_1 < \dots < t_n = K$ , les  $A_i$  étant disjoints et  $\mathcal{B}$  mesurables.

4. On pose  $\tau^\lambda = \inf\{s \geq 0, W_s > \lambda\}$ , démontrer que, si  $f$  est une fonction borélienne bornée :

$$\mathbf{E} \left( f(W_t) \mathbf{1}_{\{\tau^\lambda \leq t\}} \right) = \mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{\{\tau^\lambda \leq t\}} \phi(t - \tau^\lambda) \right),$$

où  $\phi(u) = \mathbf{E}(f(W_u + \lambda))$ . En déduire, en utilisant le fait que  $\mathbf{E}(f(W_u + \lambda)) = \mathbf{E}(f(-W_u + \lambda))$  que :

$$\mathbf{E} \left( f(W_t) \mathbf{1}_{\{\tau^\lambda \leq t\}} \right) = \mathbf{E} \left( f(2\lambda - W_t) \mathbf{1}_{\{\tau^\lambda \leq t\}} \right).$$

5. Montrer que si  $W_t^* = \sup_{s \leq t} W_s$  et si  $\lambda \geq 0$  :

$$\mathbf{P}(W_t \leq \lambda, W_t^* \geq \lambda) = \mathbf{P}(W_t \geq \lambda, W_t^* \geq \lambda) = \mathbf{P}(W_t \geq \lambda).$$

En déduire que  $W_t^*$  suit la même loi que  $|W_t|$ .

6. Démontrer que si  $\lambda \geq \mu$  et  $\lambda \geq 0$ :

$$\mathbf{P}(W_t \leq \mu, W_t^* \geq \lambda) = \mathbf{P}(W_t \geq 2\lambda - \mu, W_t^* \geq \lambda) = \mathbf{P}(W_t \geq 2\lambda - \mu).$$

et que si  $\lambda \leq \mu$  et  $\lambda \geq 0$ :

$$\mathbf{P}(W_t \leq \mu, W_t^* \geq \lambda) = 2\mathbf{P}(W_t \geq \lambda) - \mathbf{P}(W_t \geq \mu).$$

7. Vérifier que la loi du couple  $(W_t, W_t^*)$  est donnée par :

$$\mathbf{1}_{\{0 \leq y\}} \mathbf{1}_{\{x \leq y\}} \frac{2(2y - x)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2y - x)^2}{2t}\right) dx dy.$$

## Chapitre 2

# Simulation et algorithmes pour les modèles financiers

### 2.1 Simulation et modèles financiers

Nous allons décrire, dans ce chapitre, des méthodes permettant la simulation des modèles financiers. Ces méthodes sont souvent utiles, dans le contexte des mathématiques financières, car elles permettent de calculer le prix de n'importe quelle option pour peu que l'on sache l'exprimer sous forme de l'espérance d'une variable aléatoire que l'on sait simuler. Dans ce cas, la méthode de Monte Carlo décrite plus loin permet alors d'écrire très rapidement un algorithme permettant l'évaluation de cette option. Ces méthodes sont malheureusement peu efficaces et on ne les utilise que si l'on ne sait expliciter le prix de l'option sous forme analytique. De même, quand on se pose des questions complexes sur une stratégie de gestion de portefeuille (par exemple, quelle sera la loi dans un mois d'un portefeuille couvert tous les 10 jours en delta neutre), la réponse exacte est inaccessible analytiquement. Les méthodes de simulation sont alors incontournables.

#### 2.1.1 La méthode de Monte Carlo

Le problème de la simulation se pose de la façon suivante. On se donne une variable aléatoire de loi  $\mu(dx)$  et l'on cherche à réaliser sur un ordinateur une suite de tirages  $X_1, \dots, X_n, \dots$  à priori infinie telle que les  $X_n$  suivent la loi  $\mu(dx)$  et que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  soit une suite de variables aléatoires

indépendantes. Si ces hypothèses sont satisfaites, on peut appliquer la loi forte des grands nombres pour affirmer que, si  $f$  est une fonction  $\mu$ -intégrable :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} f(X_n) = \int f(x) \mu(dx). \quad (2.1)$$

Pour implémenter cette méthode sur un ordinateur, on procède de la façon suivante. On suppose que l'on sait construire une suite de nombres  $(U_n)_{n \geq 1}$  qui réalise une suite de variables aléatoires uniformes sur l'intervalle  $[0, 1]$ , indépendantes, et on cherche une fonction  $(u_1, \dots, u_p) \mapsto F(u_1, \dots, u_p)$  telle que la loi de la variable aléatoire  $F(U_1, \dots, U_p)$  soit la loi cherchée  $\mu(dx)$ . La suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 1}$  où  $X_n = F(U_{(n-1)p+1}, \dots, U_{np})$  est alors une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi voulue  $\mu$ . On peut, par exemple, appliquer (2.1), aux fonctions  $f(x) = x$  et  $f(x) = x^2$  pour estimer les moments d'ordre 1 et 2 de  $X$  (sous réserve que  $\mathbf{E}(|X|^2)$  soit fini).

La suite  $(U_n)_{n \geq 1}$  est réalisée concrètement par des appels successifs à un générateur de nombres pseudo-aléatoires. La plupart des langages disponibles sur les ordinateurs modernes possèdent une fonction aléatoire, déjà programmée, qui retourne soit un nombre pseudo aléatoire compris entre 0 et 1, soit un entier aléatoire dans un intervalle fixé (cette fonction porte le nom de `rand()` en C ANSI, de `random` en Turbo Pascal).

**Remarque 2.1.1** La fonction  $F$  peut dans certain cas (en particulier lorsque l'on cherche à simuler des temps d'arrêt), dépendre de toute la suite  $(U_n)_{n \geq 1}$ , et non plus d'un nombre fixe de  $U_i$ . La méthode précédente est encore utilisable si l'on sait simuler  $X$  à l'aide d'un nombre presque sûrement fini de  $U_i$ , ce nombre pouvant dépendre du hasard. C'est le cas, par exemple, de l'algorithme de simulation d'une variable aléatoire poissonnienne (voir page 46).

### 2.1.2 Simulation d'une loi uniforme sur $[0, 1]$

Nous allons montrer comment l'on peut construire des générateurs de nombres aléatoires au cas où les générateurs de la machine ne donneraient pas entière satisfaction.

La méthode la plus simple et la plus souvent utilisée est la méthode des congruences linéaires. On génère une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  de nombres entiers compris entre 0 et  $m - 1$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = \text{valeur initiale} \in \{0, 1, \dots, m-1\} \\ x_{n+1} = ax_n + b \text{ (modulo } m) \end{cases}$$

$a, b, m$  étant des entiers qu'il faut choisir soigneusement si l'on veut que les caractéristiques statistiques de la suite soient satisfaisantes. Sedgewick dans [Sed87] préconise le choix suivant :

$$\begin{cases} a &= 31415821 \\ b &= 1 \\ m &= 10^8 \end{cases}$$

Cette méthode permet de simuler des entiers pseudo aléatoires entre 0 et  $m - 1$ ; pour obtenir un nombre réel aléatoire entre 0 et 1 on divise l'entier aléatoire ainsi généré par  $m$ .

```
#define m 100000000
#define m1 10000
#define b 31415821
long Mult(long p, long q)
/* Multiplie p par q en evitant les "overflows" */
{
    long p1 = p / m1;
    long p0 = p % m1;
    long q1 = q / m1;
    long q0 = q % m1;
    return (((p0*q1 + p1*q0) % m1)*m1 + p0*q0) % m;
}
double Random()
{
    static long a;
    a = (Mult(a, b) + 1) % m;
    Random = a/m;
}
```

Le générateur précédent fournit des résultats acceptables dans les cas courants. Cependant sa période (ici  $m = 10^8$ ) peut se révéler parfois insuffisante. On peut, alors, obtenir des générateurs de nombres aléatoires de période arbitrairement longue en augmentant  $m$ . Le lecteur intéressé trouvera des nombreux renseignements sur les générateurs de nombres aléatoires et la façon de les programmer sur un ordinateur dans [Knu81] et [L'E90].

### 2.1.3 Simulation des variables aléatoires

Les lois que nous avons utilisées pour les modélisations financières sont essentiellement des lois gaussiennes (dans le cas des modèles continus) et

des lois exponentielles et poissonniennes (dans le cas des modèles avec sauts). Nous allons donner des méthodes permettant de simuler chacune de ces lois.

### Simulation de variables gaussiennes

Une méthode classique pour simuler les variables aléatoires gaussiennes repose sur la constatation (voir exercice 14) que, si  $(U_1, U_2)$  sont deux variables aléatoires uniformes sur  $[0, 1]$  indépendantes :

$$\sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

suit une loi gaussienne centrée et réduite (i.e. de moyenne nulle et de variance 1) .

Pour simuler des gaussiennes de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma$  il suffit de poser  $X = m + \sigma g$ , où  $g$  est une gaussienne centrée réduite.

```
double gaussienne(double m, double sigma)
{
    return m + sigma * sqrt(-2.0 * log(Random())) * cos(2.0 * pi * Random());
}
```

### Simulation d'une loi exponentielle

Rappelons qu'une variable aléatoire  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\mu$  si sa loi vaut :

$$\mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} \mu e^{-\mu x} dx$$

On peut simuler  $X$  en constatant que, si  $U$  suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$  :  $\frac{\log(U)}{\mu}$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\mu$ .

```
double exponentielle(double mu)
{
    return - log(Random()) / mu ;
}
```

**Remarque 2.1.2** Ce moyen de simulation de la loi exponentielle est un cas particulier de la méthode de la “fonction de répartition” (voir à ce sujet l'exercice 15).

### Simulation d'une variable aléatoire poissonnienne

Une variable aléatoire poissonnienne est une variable à valeurs dans  $\mathbf{N}$  telle que :

$$\mathbf{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad \text{si } n \geq 0$$

De plus, si  $(T_i)_{i \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires exponentielles de paramètre  $\lambda$ , alors la loi de  $N_t = \sum_{n \geq 1} n \mathbf{1}_{\{T_1 + \dots + T_n \leq t < T_1 + \dots + T_{n+1}\}}$  est un loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ .  $N_1$  a donc même loi que la variable  $X$  que l'on cherche à simuler. D'autre part, on peut toujours mettre les variables exponentielles  $T_i$  sous la forme  $-\log(U_i)/\lambda$ , où les  $(U_i)_{i \geq 1}$  sont des variables aléatoires suivant la loi uniforme sur  $[0, 1]$  et indépendantes.  $N_1$  s'écrit alors :

$$N_1 = \sum_{n \geq 1} n \mathbf{1}_{\{U_1 U_2 \dots U_{n+1} \leq e^{-\lambda} < U_1 U_2 \dots U_n\}}.$$

Cela conduit à l'algorithme suivant pour simuler une variable aléatoire de Poisson.

```
double Poisson(double lambda)
{
    double u = Random();
    double a = exp(-lambda);
    int n = 0;

    while(u > a){
        u = u * Random;
        n++;
    }
    return n;
}
```

Pour la simulation d'autres lois que nous n'avons pas citées, ou pour d'autres méthodes de simulation des lois précédentes, on pourra consulter [\[Bou86\]](#).

### Simulation de vecteurs gaussiens

Lorsque l'on construit des modèles où interviennent plusieurs actifs (par exemple lorsque l'on cherche à modéliser des paniers d'actifs comme l'indice boursier CAC40), on est amené à considérer des processus gaussiens à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ . Le problème de la simulation des vecteurs gaussiens (voir le

paragraphe 2.1.2 de l'appendice pour la définition d'un vecteur gaussien) est alors essentiel. Nous allons donner une méthode de simulation de ce type de variables aléatoires.

Nous supposons que l'on cherche à simuler un vecteur gaussien  $(X_1, \dots, X_n)$  dont la loi est caractérisée par le vecteur des moyennes  $m = (m_1, \dots, m_n) = (\mathbf{E}(X_1), \dots, \mathbf{E}(X_n))$  et la matrice de covariance  $\Gamma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  où  $\sigma_{ij} = \mathbf{E}(X_i X_j) - \mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(X_j)$ . La matrice  $\Gamma$  est définie positive et nous supposons, de plus, qu'elle est inversible. On peut trouver une racine carrée de  $\Gamma$ , c'est à dire une matrice  $A$ , telle que  $A \times {}^t A = \Gamma$ . Comme  $\Gamma$  est inversible,  $A$  l'est également, et on peut considérer le vecteur  $Z = A^{-1}(X - m)$ . Il est facile de vérifier que ce vecteur est un vecteur gaussien, centré. De plus sa matrice de covariance vaut :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z_i Z_j) &= \sum_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n} \mathbf{E} \left( A_{ik}^{-1} (X_k - m_k) A_{jl}^{-1} (X_l - m_l) \right) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n} \mathbf{E} \left( A_{ik}^{-1} A_{jl}^{-1} \sigma_{kl} \right) \\ &= (A^{-1} \Gamma ({}^t A)^{-1})_{ij} = (A^{-1} A {}^t A)^{-1}_{ij} = Id. \end{aligned}$$

$Z$  est donc un vecteur gaussien centré de matrice de covariance identité. La loi du vecteur  $Z$  est celle de  $n$  gaussiennes centrées réduites indépendantes. La loi du vecteur  $X = m + AZ$ , peut donc être simulée de la façon suivante :

- On calcule une racine carrée de la matrice  $\Gamma$ ,  $A$ .
- On simule  $n$  gaussiennes centrées réduites indépendantes  $G = (g_1, \dots, g_n)$ .
- On calcule  $m + AG$ .

**Remarque 2.1.3** Pour calculer la racine carrée de  $\Gamma$ , on peut supposer  $A$  triangulaire supérieure, il y a alors une seule solution à l'équation  $A \times {}^t A = \Gamma$ . En explicitant cette équation, on obtient facilement les coefficients de  $A$ . Cette méthode de calcul de la racine carrée s'appelle la méthode de Cholevsky (pour un algorithme complet voir [Cia88]).

## 2.1.4 Simulation de processus stochastiques

Les méthodes décrites précédemment permettent de simuler une variable aléatoire, en particulier la valeur d'un processus stochastique à un instant donné. On a parfois besoin de savoir simuler toute la trajectoire d'un processus. Ce paragraphe propose quelques procédés élémentaires permettant de simuler des trajectoires de processus.



### Simulation du mouvement brownien

On peut citer deux méthodes permettant de simuler un mouvement brownien  $(W_t)_{t \geq 0}$ . La première consiste à “renormaliser” une marche aléatoire. Soit  $(X_i)_{i \geq 0}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées de loi  $\mathbf{P}(X_i = 1) = 1/2$ ,  $\mathbf{P}(X_i = -1) = 1/2$ . On a alors  $\mathbf{E}(X_i) = 0$  et  $\mathbf{E}(X_i^2) = 1$ . On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , on peut alors “approximer” le mouvement brownien par le processus  $(X_t^n)_{t \geq 0}$  où :

$$X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}$$

où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ . On trouvera un début de justification à cette façon de simuler le mouvement brownien dans l'exercice 16.

Dans la deuxième méthode, on remarque que, si  $(g_i)_{i \geq 0}$  est une suite de gaussiennes centrées réduites indépendantes, si  $\Delta t > 0$  et si l'on pose :

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_{n+1} - S_n = g_n \end{cases}$$

alors la loi de  $(\sqrt{\Delta t} S_0, \sqrt{\Delta t} S_1, \dots, \sqrt{\Delta t} S_n)$  est identique à celle de :

$$(W_0, W_{\Delta t}, W_{2\Delta t}, \dots, W_{n\Delta t}).$$

On peut approximer le mouvement brownien par  $X_t^n = \sqrt{\Delta t} S_{[t/\Delta t]}$ .

### Simulation des équations différentielles stochastiques

Il existe de nombreuses méthodes, certaines très sophistiquées, pour simuler la solution d'une équation différentielle stochastique, on pourra consulter, pour un panorama de ces méthodes [PT85]. Nous ne parlerons ici que de la méthode la plus élémentaire : la “méthode d'Euler aléatoire”. Le principe en est le suivant : considérons une équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} X_0 &= x \\ dX_t &= b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t. \end{cases}$$

On se fixe un pas de discrétisation en temps  $\Delta t$ . On peut alors construire un processus à temps discret  $(S_n)_{n \geq 0}$  approximant la solution de l'équation différentielle stochastique aux instant  $n\Delta t$ , en posant :

$$\begin{cases} S_0 &= x \\ S_{n+1} - S_n &= \left\{ b(S_n)\Delta t + \sigma(S_n) (W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}) \right\} \end{cases}$$

Si  $X_t^n = S_{[t/\Delta t]}$ ,  $(X_t^n)_{t \geq 0}$  approxime  $(X_t)_{t \geq 0}$  au sens suivant :

**Théorème 2.1.4** *Pour tout  $T > 0$  :*

$$\mathbf{E} \left( \sup_{t \leq T} |X_t^n - X_t|^2 \right) \leq C_T \Delta t,$$

$C_T$  étant une constante dépendant uniquement de  $T$ .

On trouvera la démonstration de ce résultat (ainsi que d'autres schémas de discrétisation des équations différentielles stochastiques) dans le chapitre 7 de [Gar88].

La loi de de la famille  $(W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t})_{n \geq 0}$  est identique à celle d'une famille de gaussiennes indépendantes centrées et de variance  $\Delta t$ . Dans une simulation, on remplace  $(W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t})$  par  $g_n \sqrt{\Delta t}$ , où  $(g_n)_{n \geq 0}$  est une suite de gaussiennes centrées réduites indépendantes. La suite approximante  $(S'_n)_{n \geq 0}$  est dans ce cas définie par :

$$\begin{cases} S'_0 &= x \\ S'_{n+1} &= S'_n + \Delta t b(S'_n) + \sigma(S'_n) g_n \sqrt{\Delta t} \end{cases}$$

**Remarque 2.1.5** On peut substituer à la suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes  $(g_i)_{i \geq 0}$  une suite de variables aléatoires indépendantes  $(U_i)_{i \geq 0}$ , telle que  $\mathbf{P}(U_i = 1) = \mathbf{P}(U_i = -1) = 1/2$ . Il faut, cependant, noter que, dans ce cas, on n'a pas le même type de convergence que dans le théorème 2.1.4. On peut démontrer un théorème de convergence, mais sur les lois des processus. On pourra consulter [Kus77], [PT85], [Tal95] et [KP92] pour des précisions sur ce type de convergence et de nombreux résultats sur les discrétisations en loi des équations différentielles stochastiques.

### Une application au modèle de Black et Scholes

Dans le cas du modèle de Black et Scholes, il s'agit de simuler la solution de l'équation :

$$\begin{cases} X_0 &= x \\ dX_t &= X_t(rdt + \sigma dW_t). \end{cases}$$

On peut procéder de deux façons. La première consiste à utiliser la méthode d'Euler aléatoire. On pose :

$$\begin{cases} S_0 &= x \\ S_{n+1} &= S_n(1 + r\Delta t + \sigma g_n \sqrt{\Delta t}), \end{cases}$$

et à simuler  $X_t$  par  $X_t^n = S_{[t/\Delta t]}$ . L'autre méthode consiste à utiliser la forme explicite de la solution :

$$X_t = x \exp \left( rt - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t \right)$$

et à simuler le mouvement brownien par une des méthodes citées précédemment. Dans le cas où l'on simule le mouvement brownien par  $\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^n g_i$ , on obtient

$$S_n = x \exp \left( (r - \sigma^2/2)n\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^n g_i \right). \quad (2.2)$$

On approxime toujours  $X_t$  par  $X_t^n = S_{[t/\Delta t]}$ .

**Remarque 2.1.6** On peut aussi substituer aux variables aléatoires gaussiennes  $g_i$  des variables de Bernoulli valant  $+1$  ou  $-1$  avec probabilité  $1/2$  dans (2.2), on obtient un modèle de type binomial proche du modèle de Cox Ross Rubinstein utilisé en finance.

### Simulation des modèles avec sauts

On a considéré ici une extension du modèle de Black et Scholes comportant des sauts, nous allons décrire une méthode permettant de simuler ce processus. Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  servant de modèle d'actif s'écrit :

$$X_t = x \left( \prod_{j=1}^{N_t} (1 + U_j) \right) e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}, \quad (2.3)$$

où  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard,  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , et  $(U_j)_{j \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées, à valeurs dans  $] -1, +\infty[$  de loi  $\mu(dx)$ . Les tribus engendrées par  $(W_t)_{t \geq 0}$ ,  $(N_t)_{t \geq 0}$ ,  $(U_j)_{j \geq 1}$  sont supposées indépendantes.

Pour simuler ce processus aux instants  $n\Delta t$ , notons que l'on a :

$$X_{n\Delta t} = x \times (X_{\Delta t}/x) \times (X_{2\Delta t}/X_{\Delta t}) \times \dots \times (X_{n\Delta t}/X_{(n-1)\Delta t}).$$

Si l'on note  $Y_k = (X_{k\Delta t}/X_{(k-1)\Delta t})$ , on peut prouver, à l'aide des propriétés de  $(N_t)_{t \geq 0}$ ,  $(W_t)_{t \geq 0}$  et  $(U_j)_{j \geq 1}$  que la suite des  $(Y_k)_{k \geq 1}$  forme une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. Comme  $X_{n\Delta t} = xY_1 \dots Y_n$ , la simulation de  $X$  aux instants  $n\Delta t$  se ramène à celle de la suite  $(Y_k)_{k \geq 1}$ .

Cette suite étant indépendante équadistribuée, il suffit de savoir simuler  $Y_1 = X_{\Delta t}/x$ . On procède, alors, comme suit :

- On simule une variable aléatoire gaussienne centrée réduite  $g$ .
- On simule une variable aléatoire poissonnienne de paramètre  $\lambda\Delta t$  :  $N$ .
- Si  $N = n$ , on simule  $n$  variables aléatoires selon la loi  $\mu(dx) : U_1, \dots, U_n$ .

Toutes ces variables sont supposées indépendantes. Alors, il est facile de se convaincre en utilisant l'équation (2.3) que la loi de :

$$\left( \prod_{j=1}^N (1 + U_j) \right) e^{(\mu - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}g}$$

est identique à celle de  $Y_1$ .

## 2.2 Quelques algorithmes utiles

Nous avons rassemblé ici quelques algorithmes d'usage courant lorsque l'on cherche à calculer des prix d'options.

### 2.2.1 Approximation de la fonction de répartition d'une gaussienne

Soit :

$$N(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

si  $X$  est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Vu l'importance de cette fonction pour les calculs numériques, nous en donnons deux formules d'approximation tirées de [AS70].

La première approximation est précise à  $10^{-7}$  près, mais elle utilise un appel à la fonction exponentielle. Si  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} p &= 0.2316419 \\ b_1 &= 0.319381530 \\ b_2 &= -0.356563782 \\ b_3 &= 1.781477937 \\ b_4 &= -1.821255978 \\ b_5 &= 1.330274429 \\ t &= 1/(1 + px) \end{aligned}$$

$$N(x) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5).$$

La deuxième approximation est précise à  $10^{-3}$  près mais elle ne fait intervenir qu'une fraction rationnelle. Si  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.196854 \\ c_2 &= 0.115194 \\ c_3 &= 0.000344 \\ c_4 &= 0.019527 \end{aligned}$$

$$N(x) \approx 1 - \frac{1}{2} (1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4)^{-4}.$$

## 2.3 Exercices

**Exercice 14** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, calculer la loi du couple de variables aléatoires  $(\sqrt{X^2 + Y^2}, \arctg(Y/X))$ . En déduire que si  $U_1$  et  $U_2$  sont deux variables aléatoires uniformes sur  $[0, 1]$  et indépendantes, les variables aléatoires  $\sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2)$  et  $\sqrt{-2 \log(U_1)} \sin(2\pi U_2)$  sont indépendantes et suivent une loi gaussienne centrée réduite.

**Exercice 15** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , telle que  $f(x) > 0$  pour tout  $x$ , et telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ . On veut simuler une variable aléatoire  $X$  de loi  $f(x) dx$ . On pose  $F(u) = \int_{-\infty}^u f(x) dx$ . Démontrer que si  $U$  est une variable aléatoire uniforme sur  $[0, 1]$ , alors la loi de  $F^{-1}(U)$  est  $f(x) dx$ . En déduire une méthode de simulation de  $X$ .

**Exercice 16** On suppose que  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard et que  $(U_i)_{i \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes valant  $+1$  ou  $-1$  avec probabilité  $1/2$ . On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

1. Démontrer que, si que  $X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}$ ,  $X_t^n$  tend en loi vers  $W_t$ .
2. Soient  $t$  et  $s$  deux réels positifs, en utilisant le fait que la variable aléatoire  $X_{t+s}^n - X_t^n$  est indépendante de  $X_t^n$ , démontrer que le couple  $(X_{t+s}^n, X_t^n)$  tend, en loi, vers  $(W_{t+s}, W_t)$ .
3. Si  $0 < t_1 < \dots < t_p$ , démontrer que  $(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_p}^n)$  tend en loi vers  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_p})$ .

## Appendice

### 2.1 Variables aléatoires gaussiennes

Dans ce paragraphe, nous rappelons les principales propriétés des gaussiennes. On trouvera les démonstrations des résultats dans [Bou86], chapitre VI, paragraphe 9.

#### 2.1.1 Gaussiennes réelles

Une variable aléatoire réelle  $X$  est appelée gaussienne centrée réduite si elle admet pour densité la fonction

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

La loi de  $X$  est alors appelée loi normale centrée réduite.

Si  $X$  est une gaussienne centrée réduite et si  $m$  et  $\sigma$  sont des nombres réels, la variable aléatoire  $Y = m + \sigma X$  est appelée gaussienne de paramètres  $m$  et  $\sigma^2$ . La loi de  $Y$  est la loi normale de paramètres  $m$  et  $\sigma^2$ , notée  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  (cette loi ne dépend pas du signe de  $\sigma$  car  $X$  et  $-X$  ont même loi). Les paramètres  $m$  et  $\sigma^2$  sont respectivement la moyenne et la variance de  $Y$ . Si  $\sigma \neq 0$ , la densité de  $Y$  est donnée par la fonction  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ . Si  $\sigma = 0$ , la loi de  $Y$  est la mesure de Dirac en  $m$  et n'a donc pas de densité ; on parle parfois, dans ce cas, de gaussienne “dégénérée”.

Si  $X$  est une gaussienne centrée réduite, pour tout nombre complexe  $z$ , on a

$$\mathbf{E}\left(e^{zX}\right) = e^{\frac{z^2}{2}}.$$

La fonction caractéristique de  $X$  est donc donnée par  $\phi_X(u) = e^{-u^2/2}$  et celle d'une gaussienne de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$  par  $\phi_Y(u) = e^{ium} e^{-u^2\sigma^2/2}$ . Il est utile de savoir que si  $X$  suit la loi normale centrée réduite, on a  $\mathbf{P}(|X| >$

$1,96\dots) = 0,05$  et  $\mathbf{P}(|X| > 2,6\dots) = 0,01$ . Pour les grandes valeurs de  $t > 0$ , l'estimation suivante est intéressante :

$$\mathbf{P}(X > t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-x^2/2} dx \leq \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty x e^{-x^2/2} dx = \frac{e^{-t^2/2}}{t\sqrt{2\pi}}.$$

Rappelons qu'il existe de très bonnes approximations de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (cf. chapitre 2) ainsi que des tables statistiques (cf. par exemple [Bou86]).

### 2.1.2 Vecteurs gaussiens

**Définition 2.1.1** Une variable aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_d)$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^d$  est appelée *vecteur gaussien*, si pour tous réels  $a_1, \dots, a_d$ , la variable aléatoire réelle  $\sum_{i=1}^d a_i X_i$  est une gaussienne.

Les composantes  $X_1, \dots, X_d$  d'un vecteur gaussien sont évidemment des gaussiennes, mais il ne suffit pas que les coordonnées d'un vecteur soient gaussiennes pour que le vecteur soit gaussien. Par contre, si  $X_1, X_2, \dots, X_d$  sont des gaussiennes réelles *indépendantes*, alors le vecteur  $(X_1, \dots, X_d)$  est gaussien.

La matrice de variance-covariance d'un vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_d)$  est la matrice  $\Gamma(X) = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$  dont les coefficients sont donnés par :

$$\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) = \mathbf{E}[(X_i - \mathbf{E}(X_i))(X_j - \mathbf{E}(X_j))].$$

On sait que, si les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_d$  sont indépendantes, la matrice  $\Gamma(X)$  est diagonale, et que la réciproque est fautive en général, mais vraie dans le cas gaussien :

**Théorème 2.1.2** Soit  $X = (X_1, \dots, X_d)$  un vecteur gaussien à valeurs dans  $\mathbf{R}^d$ . Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_d$  sont indépendantes si et seulement si la matrice de variance-covariance du vecteur  $X$  est diagonale.

On trouvera une démonstration de ce résultat dans [Bou86], chapitre VI, p. 155.

**Remarque 2.1.3** L'importance des gaussiennes pour la modélisation vient notamment du théorème central-limite (cf. [Bou86], chapitre VII, paragraphe 4). Pour l'estimation statistiques des gaussiennes, on pourra se reporter à [DCD82] (chapitre 5) et, pour leur simulation, au chapitre 2.

## 2.2 Espérance conditionnelle

### 2.2.1 Exemples de sous-tribus

Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace probabilisable et soient  $B_1, B_2, \dots, B_n$ ,  $n$  éléments de la tribu  $\mathcal{A}$  formant une partition de  $\Omega$ . La famille  $\mathcal{B}$  des éléments de  $\mathcal{A}$  qui sont vides ou de la forme  $B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \dots \cup B_{i_k}$ , avec  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ , forme une sous-tribu finie  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$ , qui n'est autre que la tribu engendrée par les  $B_i$ .

Réciproquement, à toute sous-tribu finie  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$ , on peut associer une partition finie  $(B_1, \dots, B_n)$  de  $\Omega$  par des éléments de  $\mathcal{A}$ , qui engendrent  $\mathcal{B}$  : les  $B_i$  sont les éléments non vides de  $\mathcal{B}$  qui ne contiennent pas d'autre élément de  $\mathcal{B}$  qu'eux-mêmes et la partie vide. On les appelle les atomes de  $\mathcal{B}$ . Il y a donc une correspondance biunivoque entre sous-tribus finies de  $\mathcal{A}$  et partitions finies de  $\Omega$  par des éléments de  $\mathcal{A}$ . Noter que si  $\mathcal{B}$  est une sous-tribu finie de  $\mathcal{A}$ , une application de  $\Omega$  dans  $\mathbf{R}$  (muni de sa tribu borélienne) est  $\mathcal{B}$ -mesurable si et seulement si elle est constante sur chacun des atomes de  $\mathcal{B}$ .

Soit maintenant une variable aléatoire  $X$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , à valeurs dans un espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$ . La tribu engendrée par  $X$  est la plus petite tribu rendant l'application  $X$  mesurable : on la note  $\sigma(X)$ . C'est évidemment une sous-tribu de  $\mathcal{A}$  et il est facile de voir que

$$\sigma(X) = \{A \in \mathcal{A} \mid \exists B \in \mathcal{E}, A = X^{-1}(B) = \{X \in B\}\}.$$

On démontre qu'une variable aléatoire  $Y$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , à valeurs dans un espace mesurable  $(F, \mathcal{F})$  est  $\sigma(X)$ -mesurable, si et seulement si elle est de la forme

$$Y = f \circ X,$$

où  $f$  est une application mesurable de  $(E, \mathcal{E})$  dans  $(F, \mathcal{F})$  (cf. [Bou86], p.101-102). Autrement dit, les variables aléatoires  $\sigma(X)$ -mesurables sont exactement les fonctions mesurables de  $X$ .

### 2.2.2 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  un espace de probabilité et soit  $\mathcal{B}$  une sous-tribu de  $\mathcal{A}$ . La définition de l'espérance conditionnelle repose sur le théorème suivant (pour une démonstration, cf. [Bou86], chapitre 8).

**Théorème 2.2.1** *Pour toute variable aléatoire réelle intégrable  $X$ , il existe une variable aléatoire réelle, intégrable  $\mathcal{B}$ -mesurable,  $Y$ , unique aux ensembles*



*négligeables près, telle que :*

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \mathbf{E}(X \mathbf{1}_B) = \mathbf{E}(Y \mathbf{1}_B).$$

$Y$  est appelée espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{B}$  et notée  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$ .

Si  $\mathcal{B}$  est une sous tribu finie, d'atomes  $B_1, \dots, B_n$ , on a  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) = \sum_i \frac{\mathbf{E}(X \mathbf{1}_{B_i})}{\mathbf{P}(B_i)} \mathbf{1}_{B_i}$ , la somme étant limitée aux atomes de probabilité non nulle. Ainsi, sur chaque atome  $B_i$ , la valeur de  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$  est la valeur moyenne de  $X$  sur  $B_i$ . Dans le cas de la tribu grossière ( $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$ ), on a  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbf{E}(X)$ .

Le maniement des espérances conditionnelles repose sur les propriétés suivantes.

1. Si  $X$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable,  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) = X$ , p.s..
2.  $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbf{E}(X)$ .
3. Pour toute variable aléatoire  $Z$   $\mathcal{B}$ -mesurable et bornée,  $\mathbf{E}(Z\mathbf{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbf{E}(ZX)$ .
4. Linéarité :

$$\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y|\mathcal{B}) = \lambda \mathbf{E}(X|\mathcal{B}) + \mu \mathbf{E}(Y|\mathcal{B}) \quad \text{p.s..}$$

5. Positivité : si  $X \geq 0$ , alors  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) \geq 0$  p.s. et, plus généralement,  $X \geq Y \Rightarrow \mathbf{E}(X|\mathcal{B}) \geq \mathbf{E}(Y|\mathcal{B})$  p.s.. De cette propriété, on déduit que

$$|\mathbf{E}(X|\mathcal{B})| \leq \mathbf{E}(|X||\mathcal{B}) \quad \text{p.s.}$$

et donc que  $\|\mathbf{E}(X|\mathcal{B})\|_{L^1(\Omega)} \leq \|X\|_{L^1(\Omega)}$ ,

6. Si  $\mathcal{C}$  est une sous-tribu de  $\mathcal{B}$ , alors:

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})|\mathcal{C}) = \mathbf{E}(X|\mathcal{C}) \quad \text{p.s..}$$

7. Si  $Z$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable et bornée,  $\mathbf{E}(ZX|\mathcal{B}) = Z\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$  p.s..

8. Si  $X$  est indépendante de  $\mathcal{B}$  alors,  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbf{E}(X)$  p.s..

La réciproque de cette propriété est fausse, mais on a le résultat suivant.

**Proposition 2.2.2** *Soit  $X$  une variable aléatoire réelle.  $X$  est indépendante de la tribu  $\mathcal{B}$  si et seulement si :*

$$\forall u \in \mathbf{R} \quad \mathbf{E}(e^{iuX}|\mathcal{B}) = \mathbf{E}(e^{iuX}) \quad \text{p.s..} \quad (2.4)$$

**Démonstration :** Compte tenu de la propriété 8 ci-dessus, il suffit de montrer que (2.4) entraîne l'indépendance. Or, si  $\mathbf{E}(e^{iuX}|\mathcal{B}) = \mathbf{E}(e^{iuX})$ , on a, pour tout  $B \in \mathcal{B}$ ,  $\mathbf{E}(e^{iuX}\mathbf{1}_B) = \mathbf{E}(e^{iuX})\mathbf{P}(B)$ , par définition de l'espérance conditionnelle. Si  $\mathbf{P}(B) \neq 0$ , on peut écrire que

$$\mathbf{E}\left(e^{iuX} \frac{\mathbf{1}_B}{\mathbf{P}(B)}\right) = \mathbf{E}(e^{iuX}).$$

Cette égalité signifie que la fonction caractéristique de  $X$  est la même sous la probabilité  $\mathbf{P}$  et sous la probabilité de densité  $\frac{\mathbf{1}_B}{\mathbf{P}(B)}$  par rapport à  $\mathbf{P}$ . L'égalité des fonctions caractéristiques entraîne l'égalité des lois et, par conséquent,

$$\mathbf{E}\left(f(X) \frac{\mathbf{1}_B}{\mathbf{P}(B)}\right) = \mathbf{E}(f(X)),$$

pour toute fonction borélienne bornée, ce qui entraîne l'indépendance. ■

**Remarque 2.2.3** Si  $X$  est de carré intégrable, il en est de même de  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$  et  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$  coïncide avec la projection orthogonale de  $X$  sur  $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ , considéré comme sous-espace fermé de  $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , muni du produit scalaire  $(X, Y) \mapsto \mathbf{E}(XY)$  (cf. [Bou86], chapitre VIII, paragraphe 2). L'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{B}$  apparaît alors comme la meilleure approximation de  $X$  au sens des moindres carrés par une variable aléatoire  $\mathcal{B}$ -mesurable de carré intégrable. En particulier, si  $\mathcal{B}$  est la tribu engendrée par une variable aléatoire  $\xi$ , l'espérance conditionnelle  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$ , qui est alors notée  $\mathbf{E}(X|\xi)$ , est la meilleure approximation de  $X$  par une fonction de  $\xi$ , puisque les variables aléatoires  $\sigma(\xi)$ -mesurables sont les fonctions mesurables de  $\xi$ . Noter que l'on a (en utilisant le théorème de Pythagore!)  $\|\mathbf{E}(X|\mathcal{B})\|_{L^2(\Omega)} \leq \|X\|_{L^2(\Omega)}$ .

**Remarque 2.2.4** On peut aussi définir  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$  pour toute variable aléatoire  $X$  positive (sans condition d'intégrabilité). On a alors  $\mathbf{E}(XZ) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})Z)$ , pour toute variable aléatoire  $Z$   $\mathcal{B}$ -mesurable positive et les règles de calcul sont essentiellement les mêmes que dans le cas intégrable (cf. [DGD82], chapitre 6).

### 2.2.3 Calculs d'espérances conditionnelles

La proposition suivante est très souvent utilisée dans ce livre.

**Proposition 2.2.5** *Soit  $X$  une variable aléatoire  $\mathcal{B}$ -mesurable à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$  et soit  $Y$  est une variable aléatoire indépendante de  $\mathcal{B}$ , à valeurs dans  $(F, \mathcal{F})$ . Pour toute fonction  $\Phi$  borélienne, positive (ou bornée) sur  $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ , la fonction  $\varphi$  définie par :*

$$\forall x \in E \quad \varphi(x) = \mathbf{E}(\Phi(x, Y))$$

*est borélienne sur  $(E, \mathcal{E})$  et on a :*

$$\mathbf{E}(\Phi(X, Y)|\mathcal{B}) = \varphi(X) \text{ p.s..}$$

La signification de cette proposition est que, sous les hypothèses énoncées, on peut calculer  $\mathbf{E}(\Phi(X, Y)|\mathcal{B})$  en faisant comme si  $X$  était une constante.

**Démonstration :** Notons  $\mathbf{P}_Y$  la loi de  $Y$ . On a :

$$\varphi(x) = \int_F \Phi(x, y) d\mathbf{P}_Y(y)$$

et la mesurabilité de  $\Phi$  résulte du théorème de Fubini. Soit maintenant  $Z$  une variable aléatoire  $\mathcal{B}$ -mesurable positive (par exemple  $Z = \mathbf{1}_B$ , avec  $B \in \mathcal{B}$ ). Si on note  $\mathbf{P}_{X,Z}$  la loi du couple  $(X, Z)$ , on a, en utilisant l'indépendance de  $Y$  et du vecteur  $(X, Z)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\Phi(X, Y)Z) &= \int \int \Phi(x, y)z d\mathbf{P}_{X,Z}(x, z) d\mathbf{P}_Y(y) \\ &= \int \left( \int \Phi(x, y) d\mathbf{P}_Y(y) \right) z d\mathbf{P}_{X,Z}(x, z) \\ &= \int \varphi(x)z d\mathbf{P}_{X,Z}(x, z) \\ &= \mathbf{E}(\varphi(X)Z), \end{aligned}$$

ce qui entraîne le résultat annoncé. ■

**Remarque 2.2.6** Dans un cadre gaussien, le calcul d'une espérance conditionnelle est particulièrement simple. En effet, si  $(Y, X_1, X_2, \dots, X_n)$  est un

vecteur gaussien (à valeurs dans  $\mathbf{R}^{n+1}$ ), l'espérance conditionnelle  $Z = \mathbf{E}(Y|X_1, \dots, X_n)$  est de la forme :

$$Z = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i X_i,$$

où les  $c_i$  sont des constantes réelles. Cela signifie que la fonction des  $X_i$  qui approche au mieux  $Y$  est une fonction affine et que l'on peut calculer  $Z$  en projetant dans  $L^2$  la variable aléatoire  $Y$  sur le sous-espace vectoriel linéairement engendré par la constante  $\mathbf{1}$  et les  $X_i$  (cf. [Bou86], chapitre 8, paragraphe 5).

## Bibliographie

- [AS70] M. Abramowitz et I.A. Stegun, editeurs. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 9th edition, 1970.
- [Bac00] L. Bachelier. Théorie de la spéculation. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 17:21–86, 1900.
- [Bou86] N. Bouleau. *Probabilités de l'Ingénieur*. Hermann, 1986.
- [Bou88] N. Bouleau. *Processus Stochastiques et Applications*. Hermann, 1988.
- [Cia88] P.G. Ciarlet. *Une Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, 1988.
- [DCD82] D. Dacunha-Castelle et M. Duflo. *Probabilités et statistiques, tome 1, Problèmes à temps fixe*. Masson, 1982.
- [Fri75] A. Friedman. *Stochastic Differential Equations and Applications*. Academic Press, 1975.
- [Gar88] T. Gard. *Introduction to Stochastic Differential Equation*. Marcel Dekker, 1988.
- [GS80] I.I. Gihman et A.V. Skorohod. *Introduction à la Théorie des Processus Aléatoires*. Mir, 1980.
- [Knu81] D.E. Knuth. *The Art of Computer programming, Vol. 2, Seminumerical Algorithms*. Addison-Wesley, 1981.
- [KP92] P.E. Kloeden et E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag, 1992.

- 
- [KS88] I. Karatzas et S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, New-York, 1988.
- [Kus77] H.J. Kushner. *Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations*. Academic Press, New York, 1977.
- [L'E90] P. L'Ecuyer. Random numbers for simulation. *Communications of the ACM*, 33, 10 1990.
- [PT85] E. Pardoux et D. Talay. Discretization and simulation of stochastic differential equations. *Acta Applicandae Mathematicae*, 3:23–47, 1985.
- [RW87] L.C.G. Rogers et D. Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Tome 2, Itô Calculus*. John Wiley and Sons, New York, 1987.
- [Sed87] R. Sedgewick. *Algorithms*. Addison–Wesley, 1987.
- [Tal95] D. Talay. Simulation of stochastic differential systems. Dans Paul Krée et Walter Wedig, éditeurs, *Probabilistic Methods in Applied Physics*, volume 451 de *Lecture Notes in Physics*, pages 54–96, Berlin Heidelberg, 1995. Springer.

# Index

- Atome, 55
- Calcul de Itô, 19
- Equations différentielles
  - stochastiques, 27–30
- Espérance conditionnelle, 55
  - cas gaussien, 58
  - d'une variable aléatoire positive, 57
  - et projection orthogonale, 57
  - par rapport à une variable aléatoire, 57
- Filtration, 4
  - naturelle, 5
- Formule d'intégration par parties, 23
- Formule d'Itô, 21
  - multidimensionnelle, 25
- Gaussienne, 53
  - gaussienne
    - centrée réduite, 53
- Générateurs de nombres aléatoires, 43
- Intégrale stochastique, 12
- Inégalité de Doob, 11
- Loi
  - normale, 53
- Martingale
  - exponentielle, 8, 25
  - Théorème d'arrêt, 9
  - à temps continu, 8
- Modèle
  - avec sauts
    - simulation, 50
  - de Black-Scholes, 25
    - simulation, 49
- Mouvement brownien, 6
  - Simulation de processus, 48
- Méthode
  - de Monte Carlo, 42
- Méthodes numériques
  - fonction de répartition d'une loi gaussienne, 51
- Processus
  - d'Ornstein-Uhlenbeck, 30
  - mouvement brownien, 6
  - à temps continu, 4
- Processus d'Itô, 20
- Propriété de Markov, 32–35
- Simulation de processus, 47
  - modèle avec sauts, 50
  - modèle de Black-Scholes, 49
  - mouvement brownien, 48
  - équations diff. stochastiques, 48
- Simulation des variables aléatoires, 45
  - gaussienne, 45
  - variable exponentielle, 45
  - variable poissonnienne, 46
  - vecteur gaussien, 46
- Sous-tribu, 55

- 
- Temps d'arrêt, 5  
    temps d'atteinte, 10  
Théorème d'arrêt, 9