Part I

Correction du QCM

Les réponses du QCM sont, dans l'ordre des 20 questions : C A C B D A B B A B C [B ou C] C C A C B A B A

1 Réponse C

Le module au carré de la fonction d'onde d'une particule représente la densité de probabilité de présence de la particule dans l'espace physique du laboratoire : $\boxed{\mathrm{d}P = \left|\psi\left(\vec{r},t\right)\right|^2 \mathrm{d}^3\vec{r}}$ telle que $\boxed{\iiint_{espace} \mathrm{d}P = 1}$.

2 Réponse A

En mécanique analytique le lagrangien s'écrit $\boxed{\mathcal{L} = T - V}$ où T est l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle. C'est bien un signe moins, contrairement au hamiltonien $H = T + V$ qui comprend un signe plus. Donc ici nécessairement on a $V\left(\vec{r}\right) = -k/r$ soit un champ de force $\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\frac{k}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$. On reconnait la forme de la force ed Coulomb entre l'électron et le proton dans l'atome d'hydrogène.

3 Réponse C

Le hamiltonien s'écrit toujours en fonction des coordonnées et impulsions généralisées qui sont, avec le temps t, ses variables naturelles : $H\left(q_i, p_i, t\right)$. Par exemple on écrit $H\left(\vec{r},\vec{p},t\right) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V\left(\vec{r}\right)$ et non $\frac{1}{2}m\dot{\vec{q}}^2 + V\left(\vec{r}\right)$. Noter que c'est différent du lagrangien qui s'exprime en fonction des coordonnées et des vitesses généralisées : $\mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right)$. Exemple: $\mathcal{L}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + V\left(\vec{r}\right)$. Pour rappel l'impulsion généralisée p_i s'obtient à partir du lagrangien par $p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$.

4 Réponse B

L'état le plus général d'un système physique est décrit par un ket $\left|\psi\left(t\right)\right\rangle$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{E}_H$ des états. L'évolution temporelle du vecteur d'état $\left|\psi\left(t\right)\right\rangle$ est gouverné par le hamiltonien au travers de l'équation de Schrödinger : $\boxed{i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = \hat{H}\left|\psi\left(t\right)\right\rangle}$.

Noter que la fonction d'onde $\psi\left(\vec{r},t\right)$ est une représentation particulière de l'état quantique d'une particule, moins générale que le ket $|\psi\left(t\right)\rangle$. Cette représentation ne considère que les degrés de liberté spatiaux x,y,z (notamment sans la partie de spin). La fonction d'onde $\varphi\left(\vec{r},t\right)$ est une autre représentation particulière, et partielle, possible.

5 Réponse D

Juste après la mesure de l'énergie, l'état est projeté dans un état propre de l'observable énergie (le hamiltonien). Pour un oscillateur harmonique on a : $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ avec $n \in \mathbb{N}$. On a mesuré l'énergie $\frac{9}{2}\hbar\omega$ correspondant à $n=4$.

6 Réponse A

L'énergie cinétique s'écrit $E_c = \frac{p^2}{2m}$ et la longueur d'onde de de Broglie $\boxed{\lambda = \frac{h}{p}}$ soit au final $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}}$. L'application numérique donne $\lambda \simeq 0,012\,\mathrm{nm}$.

7 Réponse B

La fonction d'onde $\psi\left(\vec{r},t\right)$ étant de norme 1 à tout instant, la dérivée temporelle de sa norme est nulle. De façon plus générale, l'évolution temporelle préserve le produit scalaire entre 2 solutions de l'équation de Schrödinger : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi_1|\right)|\psi_2\rangle + \langle\psi_1|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi_2\rangle\right) = \langle\psi_1| - \frac{1}{i\hbar}\hat{H}|\psi_2\rangle + \langle\psi_1|\frac{1}{i\hbar}\hat{H}|\psi_2\rangle = 0$. On dit aussi que "l'évolution est unitaire".

8 Réponse B

Pour calculer le commutateur, on part de ce que l'on connait : $\boxed{[\hat{x},\hat{p}_x] = i\hbar}$.

$$\begin{aligned}
\left[\hat{x},\hat{p}_x^2\right] &= \hat{x}\hat{p}_x\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{p}_x\hat{x} \\
&= \hat{x}\hat{p}_x\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{p}_x\hat{x} \\
&= \left(\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x}\right)\hat{p}_x + \hat{p}_x\left(\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x}\right) \\
&= [\hat{x},\hat{p}_x]\,\hat{p}_x + \hat{p}_x\,[\hat{x},\hat{p}_x] \\
&= 2i\hbar\hat{p}_x
\end{aligned}$$

Alternativement on peut appliquer le commutateur sur une fonction d'onde quelconque : $\left[\hat{x}, \hat{p}_x^2\right] \phi(x) = ... = 2i\hbar\left(-i\hbar\phi'(x)\right) = 2i\hbar\hat{p}_x\phi(x)$ compte tenu de $\boxed{\hat{x} = x.}$ et $\boxed{\hat{p}_x = -i\hbar\partial_x}$.

On peut montrer de la même manière que $\left[\hat{x}, \hat{p}_x^3\right] = 3i\hbar\hat{p}_x^2$. Par récurrence on montre que $\left[\hat{x}, \hat{p}_x^n\right] = n\left(i\hbar\right)\hat{p}_x^{n-1} = \left(i\hbar\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\hat{p}_x}}\hat{p}_x^n$. En général pour toute fonction différentiable $f(x)$ on a $\left[\hat{x}, f\left(\hat{p}_x\right)\right] = \left(i\hbar\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\hat{p}_x}}f\left(\hat{p}_x\right)$. Et encore plus généralement, si A et B sont deux opérateurs qui commutent avec leur commutateur : $\left[\hat{A}, f\left(\hat{B}\right)\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\left(\hat{B}\right)$.

9 Réponse A

En représentation p l'observable position $\hat{x}$ agit selon $\hat{x} = +i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}$. Dans cette représentation, l'observable impulsion agit par simple multiplication : $\hat{p}_x = p_x$.

10 Réponse B

En notation de Dirac $\hat{D} = |1\rangle\langle 2|$ est un opérateur. En notation matricielle dans la base orthonormée des $\{|n\rangle\}$, $|i\rangle\langle j|$ est la matrice nulle partout sauf à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. Donc $\hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\det\left(\hat{D} - \lambda\mathbb{I}_2\right) = 0$ donne 0 comme seule valeur propre. Le sous-espace propre est $\mathcal{E}_0 = \mathbb{C}|1\rangle$ de dimension 1 seulement. Donc $\hat{D}$ est non diagonalisable.

11 Réponse C

$\hat{H}_0 = \frac{\epsilon}{2}\left(|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|\right) = \begin{bmatrix} -\frac{\epsilon}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon}{2} \end{bmatrix}$. $\hat{H}_0$ est hermitien. Pour rappel une **observable** $\hat{A}$ est un opérateur hermitien (dont les vecteurs propres forment une base en dimension infinie). Pour le physicien, on dit aussi "hermitique" ou "auto-adjoint" i.e.$\boxed{\hat{A}^\dagger = \hat{A}}$. Ses valeurs propres sont réelles. Toute observable est orthogonalement diagonalisable.

12 Réponse B ou C

L'énergie mesurée est $-\frac{\epsilon}{2}$. Le vecteur d'état après la mesure est la projection du vecteur d'état avant la mesure sur le sous-espace propre correspondant à la valeur mesurée : $\boxed{|\psi\rangle_{\text{après}} = \text{projection}\,|\psi\rangle_{\text{avant}}}$. Ici le sous-espace est $\mathbb{C}|1\rangle$.

Quel que soit l'état initial si on a mesuré $-\dfrac{\epsilon}{2}$ l'état après la mesure est donc décrit par $|\psi\rangle_{\text{après}} = |1\rangle$, avec une choix de phase arbitarire.

Maintenant $|\langle 1|\psi(t)\rangle|^2$ et $|\langle 2|\psi(t)\rangle|^2$ dépendent-ils du temps ? La réponse dépend du hamiltonien du système, qui n'est pas donné à cette question.

- Si le hamiltonien est $\hat{H}_0$ alors $|\psi(t=0)\rangle = |1\rangle$ est un état stationnaire qui évolue dans le temps selon $|\psi(t)\rangle = \exp\left(-i\dfrac{E_1 t}{\hbar}\right)|1\rangle$. Dans ce cas $|\langle 1|\psi(t)\rangle|^2$ ne dépend pas du temps.
- Si le hamiltonien est $\hat{H}$ alors $|\psi(t=0)\rangle = |1\rangle$ n'est pas stationnaire mais se décompose sur les états stationnaires $|E_{n,}\rangle$ selon $|\psi(t=0)\rangle = \sum_n \alpha_n |E_n\rangle$. L'évolution dans le temps étant $|\psi(t=0)\rangle = \sum_n \exp\left(-i\dfrac{Et}{\hbar}\right)\alpha_n|E_n\rangle$ on a alors $|\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 = \sum_n \exp\left(-i\dfrac{Et}{\hbar}\right)|\alpha_n|^2$, qui dépend du temps. La réponse C est valide.

13 Réponse C

Juste après la mesure de l'énergie, dont l'observable est $\hat{H}$, l'état du système est projeté sur le vecteur propre $|E\rangle$ de $\hat{H}$ correspondant au résultat E obtenu.

Les états de base $|1\rangle$ et $|2\rangle$ ne sont pas propres de $\hat{H}$ puisque $\hat{H} = \hat{H}_0 + \left(\gamma\hat{D} + \gamma^*\hat{D}^\dagger\right) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\epsilon}{2} & \gamma \\ \gamma^* & \dfrac{\epsilon}{2} \end{bmatrix}$.

$|\psi(t=0)\rangle = |E\rangle$ étant un état propre de $\hat{H}$, il est stationnaire par définition (ce qui a du sens puisque $\hat{H}$ ne dépend pas du temps).

$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-i\dfrac{Et}{\hbar}\right)|E\rangle$

$\langle 1|\psi(t)\rangle = \exp\left(-i\dfrac{Et}{\hbar}\right)\langle 1|E\rangle$

$|\langle 1|\psi(t)\rangle|^2$ ne dépend pas du temps.

14 Réponse C

On peut procéder en notation de Dirac, sinon sous forme matricielle. En notation de Dirac on a, compte tenu de $\left[\hat{A},\hat{B}\right]^\dagger = \left[\hat{B}^\dagger,\hat{A}^\dagger\right]$,

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{H}, \hat{H}_0\right] &= \left[\hat{H}_0 + \left(\gamma\hat{D} + \gamma^*\hat{D}^\dagger\right), \hat{H}_0\right] \\
&= \cancel{\left[\hat{H}_0, \hat{H}_0\right]} + \gamma\left[\hat{D}, \hat{H}_0\right] + \gamma^*\left[\hat{D}^\dagger, \hat{H}_0\right] \\
\left[\hat{D}, |1\rangle\langle 1|\right] &= |1\rangle\cancel{\langle 2||1\rangle}\langle 1| - |1\rangle\langle 1||1\rangle\langle 2| = -\hat{D} \\
\left[\hat{D}, |2\rangle\langle 2|\right] &= |1\rangle\langle 2||2\rangle\langle 2| - |2\rangle\cancel{\langle 2||1\rangle}\langle 2| = \hat{D} \\
\left[\hat{D}, \hat{H}_0\right] &= \frac{\epsilon}{2}\left(\hat{D} - \left(-\hat{D}\right)\right) = \epsilon\hat{D} \\
\left[\hat{D}^\dagger, \hat{H}_0\right] &= \left[\hat{H}_0, \hat{D}\right]^\dagger = -\epsilon\hat{D}^\dagger \\
\left[\hat{H}, \hat{H}_0\right] &= \epsilon\left(\gamma\hat{D} - \gamma^*\hat{D}^\dagger\right)
\end{aligned}
$$

15 Réponse A

En notation de Dirac le hamiltonien s'écrit $\hat{H}_0 = E_0\left(|u_1\rangle\langle u_1| + |u_1\rangle\langle u_2| + |u_2\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2|\right)$. La famille orthonormée $\{|u_n\rangle\}$ étant orthonormée, $|u_i\rangle\langle u_j|$ est la matrice nulle partout sauf à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. $\hat{H} = E_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Les valeurs propres (énergies) sont 0, dégénérées 2 fois, et $2E_0$ non dégénérée.

16 Réponse C

La valeur moyenne de la mesure d'une observable $\hat{A}$ pour un système physique dans l'état $|\psi\rangle$ est $\boxed{\left\langle\hat{A}\right\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle}$ (d'où la notation avec des crochets pour la valeur moyenne). Si le vecteur d'état n'est pas normalisé, il faut diviser par la norme au carré $\langle\psi|\psi\rangle$. NB: La moyenne dépend de l'état $|\psi\rangle$ du système.

Pour $|\psi\rangle = |u_2\rangle$ on trouve $\left\langle\hat{H}\right\rangle = \langle u_2|\hat{H}|u_2\rangle = \hat{H}_{2,2} = E_0$. En général le résultat de la mesure n'est pas connu à l'avance. La moyenne statistique des résultats issus d'une série d'expériences répétées à l'identique tend vers cette moyenne quantique (loi des grands nombres).

17 Réponse B

L'écart type est défini par $\boxed{\Delta A = \sqrt{\left\langle\left(\hat{A} - \left\langle\hat{A}\right\rangle\right)^2\right\rangle}}$ c'est-à-dire $\boxed{\Delta A = \sqrt{\left\langle\hat{A}^2\right\rangle - \left\langle\hat{A}\right\rangle^2}}$.
Encore une fois l'écart type dépend de l'état du système car les valeurs moyennes contiennent $|\psi\rangle$.

Ici cela donne $\Delta H = \sqrt{\langle u_2|\, \hat{H}^2 \,|u_2\rangle - \langle u_2|\, \hat{H} \,|u_2\rangle^2} = \sqrt{2\,(E_0)^2 - (E_0)^2} = E_0$.

18 Réponse A

L'état du système est $|\psi\rangle = |u_2\rangle$. Le sous-espace propre de l'énergie 0 est $\mathcal{E}_0 = Vect\left\{\frac{|u_1\rangle - |u_2\rangle}{\sqrt{2}}, |u_3\rangle\right\}$. On veille à prendre une base orthonormée. $\mathcal{E}_{2E_0} = Vect\left\{\frac{|u_1\rangle + |u_2\rangle}{\sqrt{2}}\right\}$. On projette le vecteur d'état normalisé sur le sous-espace correspondant à la valeur propre mesurée. On prend la norme au carré. $p\,(0) = \left|\frac{\langle u_1| - \langle u_2|}{\sqrt{2}}\,|u_2\rangle\right|^2 + |\langle u_3|u_2\rangle|^2 = \frac{1}{2}$ et $p\,(2E_0) = \left|\frac{\langle u_1| + \langle u_2|}{\sqrt{2}}\,|u_2\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$.

19 Réponse B

"Le résultat ne pouvait pas être plus faible" signifie que l'énergie mesurée est 0. Le vecteur d'état après la mesure est la projection du vecteur d'état avant la mesure sur le sous-espace propre correspondant à l'énergie mesurée soit $\boxed{|\psi\rangle_{\text{après}} = \text{projection}\,|\psi\rangle_{\text{avant}}}$. On peut utiliser le projecteur sur $\mathcal{E}_0$: $\Pi_{\mathcal{E}_0} = \left(\frac{|u_1\rangle - |u_2\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\langle u_1| - \langle u_2|}{\sqrt{2}}\right) + |u_3\rangle\,\langle u_3|$.

$|\psi\rangle_{\text{après}} = \Pi_{\mathcal{E}_0}\,|u_2\rangle = -\frac{1}{2}\,(|u_1\rangle - |u_2\rangle)$. En général on normalise sans attendre. $|\psi\rangle_{\text{après}} = \frac{|u_1\rangle - |u_2\rangle}{\sqrt{2}}$ combinaison de 2 vecteurs de base.

20 Réponse A

Soit on fait mécaniquement le calcul, soit un aborde la question plus astucieusement.

1) Si on fait le calcul, pour rappel avec les variables réduites $\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}$ et $\hat{P} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{\hbar m\omega}}$ on définit $\hat{a} = \frac{\hat{X} + i\hat{P}}{\sqrt{2}}$, $\hat{a} = \frac{\hat{X} - i\hat{P}}{\sqrt{2}}$ soit $\hat{X} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}$ et $\hat{P} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}$. $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$. L'opérateur d'annihilation agit selon $\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ et l'opérateur de création agit selon $\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$.

$$\begin{aligned}
\hat{P}^2 &= -\frac{1}{2}\left(\hat{a}^2 - \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\right) + \left(\hat{a}^\dagger\right)^2\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\hat{a}^2 + \left(\hat{a}^\dagger\right)^2 - \left(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle j| \hat{a}^2 |k\rangle &= \sqrt{k} \langle j| \hat{a} |k-1\rangle \\
&= \sqrt{k}\sqrt{k-1}\delta_{j,k-2} \\
&= \sqrt{k(k-1)}\delta_{k,j+2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle j| \left(\hat{a}^\dagger\right)^2 |k\rangle &= \sqrt{k+1} \langle j| \hat{a}^\dagger |k+1\rangle \\
&= \sqrt{k+1}\sqrt{k+2}\delta_{j,k+2} \\
&= \sqrt{(k+1)(k+2)}\delta_{k,j-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle j| \hat{a}^\dagger \hat{a} |k\rangle &= \sqrt{k} \langle j| \hat{a}^\dagger |k-1\rangle \\
&= \sqrt{k}\sqrt{k}\delta_{j,k} \\
&= k\delta_{k,j}
\end{aligned}
$$

On reconnait la réponse A.
2) Sinon plus astucieusement, on remarque que :

1. $\hat{p}^2$ en tant qu'observable doit être hermitique : $\left(\hat{p}^2\right)_{j,k} = \left(\left(\hat{p}^2\right)_{j,k}\right)^*$ ce qui exclut la réponse C.
2. La moyenne de $\left\langle \hat{p}^2 \right\rangle$ dans l'état $|k\rangle$ est positive donc $\langle k| \hat{p}^2 |k\rangle \geq 0$ ce qui exclut la réponse B
3. $\hat{p}^2 |k\rangle$ se développe nécessairement sur $\{|k-2\rangle \ldots |k+2\rangle\}$, ce qui exclut la réponse D.