ENSTA-Paris **MS102**

***

Thermoélasticité linéaire

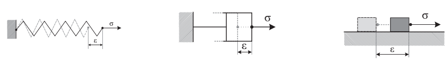
Travaux dirigés n°1

Thermodynamique des milieux continus

***

Exercice 1 : Les modèles rhéologiques

Les modèles rhéologiques illustrent de façon simple les notions de variable d'état, d'énergie libre et de dissipation intrinsèque. Ils guident également l'intuition pour généraliser un modèle unidimensionnel en loi de comportement tridimensionnelle. Ces modèles sont des assemblages, en série et/ou en parallèle d'éléments simples (ressort, amortisseur, patin) représentés sur la figure 1. Tous ces modèles sont étudiés sans tenir compte des effets thermiques (variation de température ou échange de chaleur).



(a) Ressort élastique. (b) Amortisseur (c) Patin

Figure 1 – Modèles rhéologiques.

A. Modèles élémentaires

Les lois de comportement des modèles élémentaires sont:

Le ressort :

$$\sigma = E\epsilon$$

l'amortisseur :

$$\sigma = \mu\dot{\epsilon}$$

le patin :

$$|\sigma| \le \sigma_0, \dot{\epsilon} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |\sigma| \le \sigma_0 \\ \dot{\lambda}\dfrac{\sigma}{|\sigma|} & \text{si} \quad |\sigma| = \sigma_0 \end{cases}$$

où E est la raideur du ressort, μ la viscosité de l'amortisseur et σ_0 le seuil de frottement du patin.

Pour décrire l'état de chacun des modèles élémentaires ci-dessus, une seule variable d'état suffit. Nous choisirons la déformation ϵ. Il n'y a donc pas de variable interne pour les modèles élémentaires.

1. Exprimer l'énergie libre w relatif à chaque modèle élémentaire lorsque les variables d'état sont prescrites.

2. Calculer alors pour chaque modèle élémentaire la partie réversible de la contrainte donnée par ($\sigma^{rev} = \dfrac{\partial w}{\partial \epsilon}$).

3. Déduisez, pour chaque modèle élémentaire, la partie irréversible de la contrainte : $\sigma^{irr} = \sigma - \sigma^{rev}$ ainsi que la dissipation intrinsèque donnée par $\mathcal{D} = \sigma^{irr}\dot{\epsilon}$[1]. Vérifier dans chaque cas la positivité de la dissipation intrinsèque.

B. Modèles obtenus par assemblage de modèles élémentaires

B.1 Modèle de Kelvin-Voigt : ce modèle consiste en l'assemblage en parallèle d'un ressort de raideur E et d'un amortisseur de viscosité μ (*cf.* figure 2). Bien qu'il soit possible d'écrire directement les équations de comportement de ce modèle assez simple, on propose d'effectuer la même analyse systématique que précédemment.

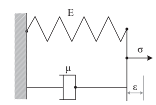


Figure 2 – *Modèle de Kelvin-Voigt*

- Expliquez pourquoi la connaissance de la déformation ϵ suffit à définir l'état du système.
- Calculer l'énergie libre du modèle. Dans quel composant cette énergie est-elle stockée?
- Calculer la contrainte réversible. Sur quel composant cette contrainte est-elle appliquée?
- Calculer par différence, la contrainte irréversible. Sur quel composant cette contrainte est-elle appliquée?
- Déduire la dissipation intrinsèque.
- Ecrire la relation entre $\sigma, \epsilon, \dot{\epsilon}$.
- Quelle est la réponse à une expérience de fluage $\sigma(t) = H(t)\sigma_0$ où $H(t)$ est la fonction de Heaviside définie par : $\forall x \in R, H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$

[1] En effet, le terme $A\dot{\alpha}$ et nul, car il n'y a pas de variables internes α pour les modèles rhéologiques élémentaires.

B.2 Modèle de Maxwell : ce modèle consiste en l'assemblage en série d'un ressort de raideur E et d'un amortisseur de viscosité μ (*cf.* figure 3).

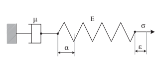


Figure 3 – *Modèle de Maxwell*

On introduit donc une variable supplémentaire α que nous prenons égale à la déformation de l'amortisseur (on la note ϵ^v pour déformation visqueuse).

- Expliquez pourquoi pourquoi la seule déformation totale ϵ ne suffit pas à définir l'état du système.
- Exprimer la déformation du ressort ϵ^e en fonction de ϵ et ϵ^v.
- Calculer l'énergie libre du modèle. Dans quel composant cette énergie est-elle stockée?
- Déduire par dérivation la contrainte réversible et la force thermodynamique associée à la variable interne α. Que remarque t-on?
- Déduire la contrainte irréversible et la dissipation intrinsèque et vérifier qu'elle est positive.
- Ecrire la relation entre $\sigma, \dot{\sigma}, \dot{\epsilon}$.
- Quelle est la réponse à une expérience de relaxation $\epsilon(t) = H(t)\epsilon_0$?

B.3 Modèle élasto-plastique : ce modèle consiste en l'assemblage en série d'un ressort de raideur E et d'un patin dont le seuil de glissement est noté σ_0 (*cf.* figure 4).

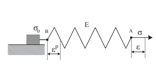


Figure 4 – *Modèle élastoplastique*

A nouveau, la seule déformation totale ϵ ne suffit pas à définir l'état du système et on adopte une variable supplémentaire α qui est la déformation du patin (on la note ϵ^p pour déformation plastique) .

- Calculer la déformation ϵ^e du ressort.
- Calculer l'énergie libre du système. Dans quel composant cette énergie est-elle stockée?
- Déduire par dérivation la contrainte réversible et la force thermodynamique associée à la variable interne α. Que remarque t-on?
- Déduire la contrainte irréversible et la dissipation intrinsèque et vérifier qu'elle est positive.

Exercice 2 : Modélisation du changement de phase solide-solide

La modélisation du comportement d'un certain nombre d'alliages particuliers, comme les matériaux à mémoire de forme, nécessite la prise en compte des effets de changement de phase. A une certaine température, deux phases peuvent coexister sous forme d'un mélange de cristaux microscopiques. En ce qui nous concerne, nous appelons 1 la phase-mère et 2 la phase produit. Le passage d'une phase à l'autre se fait suite à une sollicitation thermomécanique (ici mécanique uniquement). Pour modéliser ce phénomène, on considère le modèle rhéologique unidimensionnel à montage en série (*cf.* figure 5).

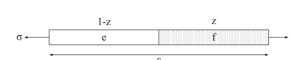


Figure 5 – *modèle rhéologique*

Il s'agit d'un modèle de ressort en série défini par les variables d'état ϵ, e, f, z qui sont respectivement la déformation macroscopique, les déformations locales de chaque phase ainsi que la proportion de la phase produit (2).

On suppose que le changement de phase est réversible et le comportement unidimensionnel.

1. Ecrire les liaisons internes existant entre les variables d'état.

2. Ecrire le lagrangien [2] ainsi que les relations internes associées au modèle en supposant que chaque phase est élastique de module respectif K_1 et K_2. On note le potentiel thermodynamique associé à chaque phase :

$$U(e) = \frac{1}{2}K_1 e^2 \qquad \text{pour la phase mère}$$

$$V(f) = \frac{1}{2}K_2 f^2 + \ell \qquad \text{pour la phase produit}$$

où ℓ est la chaleur latente de changement de phase.

3. En utilisant les lois d'état, écrire la loi de comportement associée à ce modèle et tracer la courbe correspondante.

[2] Il s'agit tout simplement du potentiel thermodynamique avec la prise en compte de liaisons internes entre les variables d'état via les multiplicateurs de Lagrange