

HUDERT
Bastien

AUT202-TP2:

Partie 2:

4) Par construction, on a déjà

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \text{ et } \frac{dx_3}{dt} = x_4$$

De plus, d'après 3), on sait que

$$*(1+\sigma) \frac{dx_2}{dt} = r\dot{\theta}^2 - g \sin \theta \text{ ie}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{rx_1x_4^2 - g \sin x_3}{1+\sigma}$$

$$*\frac{d(I+m\dot{x}_2^2)\dot{\theta}}{dt} = -mgx_2 \cos \theta + u \text{ ie}$$

$$\ddot{\theta} \frac{d(I+m\dot{x}_2^2)}{dt} + (I+m\dot{x}_2^2) \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -mgx_2 \cos \theta + u \text{ ie}$$

$$(I+m\dot{x}_2^2) \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -mgx_2 \cos \theta + u - 2mx_1x_2\dot{x}_4 \text{ ie}$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{u - mgx_1 \cos x_3 - 2mx_1x_2\dot{x}_4}{I+m\dot{x}_1^2}$$

5) Voir montage Simulink en annexe.

6) On remarque que le système est instab

dès que $x_1^0 - x_4^0 \neq 0 - 0$ avec une commande nulle. En revanche, $(0, 0, 0, 0)$ est un point d'équilibre du système.

Des courbes correspondant à différentes conditions initiales sont disponibles en annexes.

7) En ne supposant plus $u = 0$, déterminons les points d'équilibre du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = x_2 \\ 0 = \frac{x_1 x_4^2 - g \sin x_3}{1 + \epsilon} \\ 0 = x_4 \\ 0 = \frac{u - mg \sin x_1 \cos x_3 - 2x_1 x_2 x_4}{J + m x_1^2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

$$(3) \rightarrow (2) : \sin x_3 = 0$$

ce qui revient à dire $x_3 = 0$, car on considère l'angle réel, donc compris entre $-\pi$ et π , et que la position d'équilibre en $+\pi$ est physiquement irréaliste.

$$(2), (3) \rightarrow (4) : u - mg \sin x_1 = 0 \text{ i.e } x_4 = \frac{u}{mg}$$

le système s'équilibre donc en $(\frac{u}{mg}, 0, 0, 0)$.
On remarque qu'on retrouve le résultat de la question 6) pour $u = 0$.

Puisque on peut choisir u , on peut stabiliser le système sur n'importe quelle position x_{ref} .

Il suffit de prendre $u_{ref} := mgx_{ref}$ pour obtenir la position stable:

$$x_1 = \frac{u_{ref}}{mg} = x_{ref} \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

g) Voir montage Simulink en annexe.

De courbes correspondant à différentes conditions initiales sont disponibles en annexes.

g) Linéarisons autour de l'équilibre obtenu en f) en posant:

$$\begin{cases} \delta x_1 := x_1 - \frac{u}{mg} \\ \delta x_2 = x_2 - 0 \\ \delta x_3 = x_3 - 0 \\ \delta x_4 = x_4 - 0 \end{cases}$$

supposé que dans cette question

$$\text{et } \delta u = u - mgx_{ref} = u$$

Ces valeurs étant supposées faibles, on peut appliquer des développements limités à l'ordre 1 aux équations obtenues en g):

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \Rightarrow \frac{d\delta x_1}{dt} = \delta x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1^2 - g \sin x_3}{1 + \epsilon} \quad \text{terme d'ordre 2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\delta x_2}{dt} = \frac{\left(\frac{u}{mg} + \delta x_1\right) \delta x_1^2 - g \sin \delta x_3}{1 + \epsilon} \approx \delta x_3$$

$$\approx \frac{-g}{1 + \epsilon} \delta x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4 \Rightarrow \frac{d\delta x_3}{dt} = \delta x_4$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{u - m g x_1 \cos x_3 - 2 m x_1 x_2 x_4}{J + m x_1^2} \quad \begin{matrix} \text{car } u=0 \\ \approx 1 \end{matrix} \quad \text{terme d'ordre 2/5}$$

$$\Rightarrow \frac{d\delta x_4}{dt} = \delta u - mg \frac{\left(\frac{u}{mg} + \delta x_1\right) \cos \delta x_3 - 2 m x_1 \delta x_2}{J + m \left(\frac{u}{mg} + \delta x_1\right)^2} \approx \frac{\delta u - mg \delta x_4}{\delta} \quad \text{terme d'ordre 2 car } u=0$$

D'où, en posant :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{g}{1+\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{J} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix}, \quad \delta X := \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{On obtient : } \frac{d\delta X}{dt} = A \delta X + B \delta u$$

10) On pose $\omega := \sqrt{\frac{mg^2}{(1+\epsilon)J}}$. Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
 \chi_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & \frac{g}{1+\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ \frac{mg}{J} & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \\
 &= x \det \begin{pmatrix} x & \frac{g}{1+\sigma} & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} - \frac{mg}{J} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & \frac{g}{1+\sigma} & 0 \\ 0 & x & -1 \end{pmatrix} \\
 &= x \times x^3 - \frac{mg}{J} x \frac{-g}{1+\sigma} \\
 &= x^4 - \frac{-\omega^4}{\frac{mg^2}{J(1+\sigma)}} \\
 &= (x - \omega)(x + \omega)(x - i\omega)(x + i\omega)
 \end{aligned}$$

les valeurs propres de A sont donc $\omega, -\omega, i\omega$ et $-i\omega$.

le système n'est pas stable en boucle ouverte car seul $\text{Re } \omega$ est à partie réelle strictement négative.

Application numérique : $\omega = 6,3284$

Partie 3 :

1) On veut que $C(A, B)$ soit de rang

$$\begin{aligned}
 C(A, B) &= \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{J(1+\sigma)} \\ 0 & 0 & -\frac{g}{J(1+\sigma)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} & 0 & 0 \\ \frac{1}{J} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$C(A, B)$ est bien de rang 4, donc le linéarisé tangent est commandable.

On vérifie avec MATLAB que la matrice de commandabilité est bien de rang 4 et qu'elle est bien conditionnée.

12) Avec MATLAB, on calcule K la matrice vérifiant $\Rightarrow (A - BK) = \{-\omega, -2\omega, -\omega + i\omega, -\omega - i\omega\}$ et on trouve

$$K = [-29,4300 \quad -9,3009 \quad 8,0098 \quad 0,6328]$$

13) Voir annexe pour le montage Simulink.

Des courbes correspondant à différentes conditions initiales sont disponibles en annexes.

$$\begin{aligned} 14) J_{LQ} &:= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 + \delta x_4^2 + \delta u^2) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\delta x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta x + \delta u^T (1) \delta u) dt \end{aligned}$$

En posant $R := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q := (1)$, on obtient le résultat demandé.

On a montré précédemment que le système est commandable. De plus, Q et R sont symétriques définies positives, donc il existe une solution au problème de commande optimale.

Cette solution est donnée par le gain K défini par :

$$K := \underline{Q^{-1}B^T S}$$

où S est l'unique solution symétrique définie positive de l'équation de Riccati :

$$\underline{SA + A^T S - SBQ^{-1}B^T S + R = 0}$$

15) Avec MATLAB, on calcule numériquement :

$$K = \underline{[-11,8562 \quad -4,0213 \quad 6,9244 \quad 1,1300]}$$

les valeurs propres en boucle fermée sont alors :

$$\underline{\text{zp}(A - BK) = \{-50,0029; -3,0249; 1,7369 \pm 2,7820i\}}$$

16) Voir montage Simulink en annexe.

Des courbes correspondant à différentes conditions

initiales sont disponibles en annexes.

17) On remarque que, si les deux gains calculés dans cette partie permettent de stabiliser le système autour de $x_{\text{ref}} = 0$, le gain calculé en 15) est plus adapté à stabiliser que celui obtenu en 12).

Ceci est logique car on a cherché à optimiser le critère J_{LQ} pour K_{15} , ce qui a imposé une pénalité sur des variations de commande trop importantes (afin de réduire l'énergie nécessaire à la stabilisation du système).

Partie 4:

18) On a déjà établi l'égalité matricielle sur les x_i à la partie 2.

La seconde équation s'obtient par un calcul:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =: Y$$

19) La matrice d'observabilité:

$$O(A, C) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

HUBERT
Bastien

est de rang 4, donc le linéarisé tangent est observable.

Avec MATLAB, on vérifie que $O(A, C)$ est de rang 4 et qui elle est bien conditionnée.

20) L'observateur a pour équation:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + L(Y - C\hat{x})$$

avec $Y = CX$

21) Voir annexe pour le montage Simulink

Des courbes correspondant à différentes conditions initiales sont disponibles en annexes.

21) On ne peut pas utiliser place tel quel, puisque cette fonction trouve K tel que $\text{sp}(A - BK) = P$.

Réécrivons $A - CL$ pour nous ramener à la forme précédente:

$A - CL = (A^T - L^T C^T)^T$ dont le spectre est le même que celui de $A^T - L^T C^T$

On calcule donc $L = \text{place}(A^T, C^T)^T$

Application numérique : $L = \begin{pmatrix} 23,9504 & 0,5651 \\ 129,2383 & 22,7820 \\ -3,5660 & 26,6772 \\ -272,1502 & 190,9987 \end{pmatrix}$

$\lambda_p(P - CL) = \{-18,9853; -6,3284; -12,6569 + 6,3284i\}$