TD 3

Exo 1 (nav. inertielle)

1°/ Etat de (8) : $x = (X_1, X_2, \dot{X}_1, \dot{X}_2, \theta)$

X_1, X_2 connues $\Rightarrow$ $\dot{X}_1, \dot{X}_1$ aussi ($\Rightarrow$ ne manque que θ)

$\Rightarrow$ $\ddot{X}_1, \ddot{X}_2$ connu aussi $\Rightarrow$ θ = angle entre $\begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 + g \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

connu aussi $\Rightarrow$ syst observable.

2°/ Eq : $\dot{X}_i = 0$, $\omega = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = g$, X_1, X_2 qcpes
(à $\theta = 0$)

$\Rightarrow$ $x = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, 0, 0, 0)$, $u = (0, g, 0)$.

Linéarisation (par DL, plus rapide) :

$\delta\ddot{X}_1 = \delta a_1 - g\,\delta\theta$, $\delta\ddot{X}_2 = \delta a_2$, $\delta\dot{\theta} = \delta\omega$

3°/ Entrée : $\delta u = (\delta a_1, \delta a_2, \delta\omega)$,

Etat : $\delta x = (\delta X_1, \delta X_2, \delta\dot{X}_1, \delta\dot{X}_2, \delta\theta)$, Sortie : $\delta y = (\delta X_1, \delta X_2)$

$\longrightarrow$ Raisonnement "à la main" $\Rightarrow$ observable.

$\rightarrow$ Sinon :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\parallel$

$CA \times A$

$CA^3 = \ldots$

θ, rg 5

$\Rightarrow$ observable

4°/ • Syst linéarisé : $\dot{\delta x} = A\,\delta x + B\,\delta u$, $\delta y = C\,\delta x$

Observateur asympt :

$$\dot{\delta\hat{x}} = A\,\delta\hat{x} + B\,\delta u + L(C\delta\hat{x} - y)$$

où L - matrice (5×2) t.q. $A+LC$ as. stable. (ie Hurwitz)

• Gains de l'observateur = coeff de ~~...~~ L

Soit $\lambda = \cancel{\max}\ \mathrm{Re}($val pr de $A+LC)$ ie $\lambda < 0$

et $\|\delta\hat{x}(t) - \delta x(t)\| \leq \text{cste} \times e^{\lambda t} \longrightarrow 0$.

Il faut choisir λ pour que la décroissance ne soit pas trop rapide afin d'avoir le temps de faire plusieurs mesures.

On veut $\varepsilon\%$ de précision après N mesures $\Rightarrow e^{N T_e \lambda} \simeq \varepsilon . 10^{-2}$

Typiquement : on voudrait avoir $\sim 5\%$ de précision au bout de 4 ou 5 mesures (ça m(hz)) ie, avec 5 mesures ($\rightarrow$ 10 s) :

$$e^{\lambda \times 10} \simeq 0,05$$

Comme $0,05 \simeq e^{-3}$, il faut : $\lambda \simeq -\frac{3}{10}$

5°/ "A la main" :

- $\ddot{X}_2$, a_2, g connus $\Rightarrow$ p_2 connu
- $\begin{cases} \ddot{X}_1 = \dot{a}_1 - g\dot{\theta} \text{ connu} \\ \omega \text{ connu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} \text{ connu} \\ \omega \text{ connu} \end{cases} \Rightarrow p$ connu.
- $\ddot{X}_1$, a_1 connus $\Rightarrow$ $p_1 - g\theta$ connu.

$\Rightarrow$ $p_1\ p_2$, $p_1 - g\theta$ connus mais $\theta + \theta^0$ et $p_1 - g\theta^0$ sol° aussi.

$\rightarrow$ syst non observable, on ne peut estimer que 2 biais.

6°/ Etat $x = \begin{pmatrix} X_2 \\ \dot{X}_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $y = X_2$

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A} x + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ a_2 - g \\ 0 \end{pmatrix}}^{Bu} \quad , \quad y = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{C} x$$

Matrice d'observabilité $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ inversible $\Rightarrow$ syst obs^{le}

Observateur asym: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$

où $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$ t.q. $A+LC$ Hurwitz.

Or $A+LC = \begin{pmatrix} l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & 0 & 1 \\ l_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc son pol caract^q est

$$P_{A+LC}(\lambda) = \lambda^3 - l_1\lambda^2 - l_2\lambda - l_3$$

Pour choisir l_1, l_2, l_3 ; on veut que les val pr de $A+LC$ soient (par ex) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -0,3$ (cf Q° 4)

i.e que $P_{A+LC}(\lambda) = (\lambda + 0,3)^3 = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$.

Il suffit de poser $l_1 = -a_1$, $l_2 = -a_2$, $l_3 = -a_3$.

TD 3

Exo 2 (Montgolfière)

1°/ $w=0 \Rightarrow$ Etat $x=(h, v, \theta)$, Sortie $y=h$, Entrée $= u$.

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/\tau_2 & \sigma \\ 0 & 0 & -1/\tau_1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} h \\ v \\ \theta \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u \quad , \quad y = \underbrace{(1 \ 0 \ 0)}_{C} x$$

$C = (1 \quad 0 \quad 0)$

$CA = (0 \quad 1 \quad 0) \Rightarrow$ matr d'observabilité inv^{ble}

$CA^2 = (0 \quad -1/\tau_2 \quad \sigma) \Rightarrow$ syst obs^{ble}.

2°/ Observateur $\quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$

avec $A+LC$ Hurwitz. Si $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$,

$$A+LC = \begin{pmatrix} l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & -1/\tau_2 & \sigma \\ l_3 & 0 & -1/\tau_1 \end{pmatrix}$$

Il suffit de prendre $l_2 = l_3 = 0$ et $l_1 < 0$ pour que $A+LC$ soit Hurwitz.

3°/ • $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma \\ 0 & \sigma & -\frac{\sigma}{\tau_1} - \frac{\sigma}{\tau_2} \\ 1 & -1/\tau_1 & \frac{1}{\tau_1^2} \end{pmatrix}$ $\quad$ det $\neq 0$

$\quad B \quad AB \quad A^2B$ $\qquad \Rightarrow$ syst comm^{ble}.

• Sortie de Brunovsky :

$\rightarrow$ facile de vérifier que y sortie de Brunovsky

$\rightarrow$ sinon : poser a priori

$\quad \bar{y} = a_1 h + a_2 v + a_3 \theta \quad$ sortie de Brun

Puis trouver les coeff pour que u n'apparaisse que ds $y^{(3)}$, pas ds $\dot{y}$ et $\ddot{y}$

Puis $\dot{y} = a_1 v + a_2\left(-\frac{v}{\tau_2} + \sigma\theta\right) + a_3\left(-\frac{\theta}{\tau_1} + u\right) \Rightarrow a_3 = 0$

$$\ddot{y} = a_1\left(-\frac{v}{\tau_2} + \sigma\theta\right) + a_2\left(-\frac{\dot{v}}{\tau_2} + \sigma\left(-\frac{\theta}{\tau_1} + u\right)\right) \Rightarrow a_2 = 0$$

$$y^{(3)} = a_1\left[\frac{1}{\tau_2^2} v - \frac{\sigma}{\tau_2}\theta - \frac{\sigma}{\tau_1}\theta + \sigma u\right]$$

$\Rightarrow$ (avec $a_1 = 1$) $y = h$ sortie de Brunovsky,

$$y^{(3)} = \overbrace{\frac{1}{\tau_2^2} v - \sigma\left(\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_1}\right)\theta + \sigma u}^{\bar{u}}$$

4°/ Contrôle associé à y_c : $\bar{u}_c = y_c^{(3)}$

Pour assurer le suivi, on choisit $\Delta\bar{u} = \bar{u} - \bar{u}_c$ comme:

$$\Delta\bar{u} = k_1 \Delta y + k_2 \Delta\dot{y} + k_3 \Delta\ddot{y} \quad , \quad \Delta y = y - y_c \, , \text{ t.q.}$$

les ~~valeurs propres~~ rac du polynôme

$$\lambda^3 - k_3\lambda^2 - k_2\lambda - k_1 = 0 \quad \text{soient à } Re < 0.$$

Pour ça on choisit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ avec $Re(\lambda_i) < 0$, ~~par~~ exemple $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, on calcule

$$\prod(\lambda - \lambda_i) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

et on pose $k_3 = -3$, $k_2 = -3$, $k_1 = -1$.

Enfin on remplace $\bar{u}$ et y par leurs valeurs, ie:

$$\sigma u - \sigma\left(\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_1}\right)\theta + \frac{1}{\tau_2^2} v = y_c^{(3)} + k_1(h - y_c) + k_2(v - \dot{y}_c) + k_3\left(-\frac{v}{\tau_2} + \sigma\theta - \ddot{y}_c\right).$$

$\longrightarrow u$.

5°/ • Le contrôleur de 4°/ s'écrit:

$$u = Kx + b$$

et il vérifie $A + BK$ Hürwitz.

• L'observateur de 2°/ s'écrit

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$$

et il vérifie $A + LC$ Hurwitz

⇒ Si on pose $u = K\hat{x} + b$, on obtient

pour $\Delta x = x - x_c$ et $e = \hat{x} - x$:

$$\dot{\Delta x} = Ax + B(K\hat{x} + b) - (A x_c + B(K x_c + b))$$
$$= A\Delta x + BK(\hat{x} - x_c) = (A + BK)\Delta x + BKe$$
$$\dot{e} = (A + LC)e$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\Delta x \\ e\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A+BK & BK \\ 0 & A+LC \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x \\ e\end{pmatrix}$$ Hurwitz.

5°/ $\dot{w} = 0$. On ajoute cette éq° : soit $X = (h, v, \theta, w)$,

$$\dot{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\tau_2 & \sigma & 1/\tau_2 \\ 0 & 0 & -1/\tau_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\bar{A}} X + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{B}} u,$$

$$y = h = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\bar{C}} X$$

$$\begin{matrix} \bar{C} = \\ \bar{C}\bar{A} = \\ \bar{C}\bar{A}^2 = \\ \bar{C}\bar{A}^3 = \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\tau_2 & \sigma & 1/\tau_2 \\ 0 & 1/\tau_2^2 & -\left(\frac{\sigma}{\tau_1} + \frac{\sigma}{\tau_2}\right) & -\frac{1}{\tau_2^2} \end{pmatrix} = \mathcal{O}, \quad \det \mathcal{O} = \frac{\sigma}{\tau_1 \tau_2} \neq 0$$

⇒ observable

6°/ Refaire comme au 2°/ avec la var. w en plus.

7°/ Faire comme au 3°-4° (des dérivées de w apparaissent ds les ~~transform~~ chgts de variable de la forme de Brunovsky.)

→ cf le feuilles suivantes

~~[illegible]~~.

7°/ Sortie de Brunovsky : $y = h$

$$h' = v$$

$$h'' = -\frac{v}{\tau_2} + \sigma\theta + \frac{w}{\tau_2}$$

$$h''' = \underbrace{\frac{v}{\tau_2^2} - \sigma\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)\theta + \left(\frac{\dot w}{\tau_2} - \frac{w}{\tau_2^2}\right) + \sigma u}_{=\alpha \text{ commande}}.$$

$h_c = y_c$ donné $\Rightarrow$ $\alpha_c = y_c'''$ commande de référence.

Pour le suivi, on pose $\delta h = h - h_c$, $\delta\alpha = \alpha - \alpha_c$, d'où $\delta h''' = \delta\alpha$.

On choisit (k_0, k_1, k_2) t.q. les racines du polynôme
$\lambda^3 - k_2\lambda^2 - k_1\lambda - k_0$ ~~[illegible]~~ sont toutes à partie réelle négative.

La commande $\alpha = \alpha_c + k_0\,\delta h + k_1\,\delta h' + k_2\,\delta h''$ permet alors de stabiliser l'erreur δh autour de 0, cad de ~~sta suivre la trajectoire h~~. stabiliser le système autour de la trajectoire de référence $h_c(\cdot)$.

8°). Réinterprétons les données précédentes.

Soit $H = (h, h', h'')$ et $x = (h, \theta, v, w)$.

L'état x est solution d'un système $\dot x = Ax + Bu$ et on a construit au 6°/ un observateur $\hat x$,

$$\dot{\hat x} = A\hat x + Bu + L\,C(\hat x - x)$$ de façon à ce que l'erreur d'observation $\Delta x = \hat x - x$ soit

solution d'une EDO asymptotiquement stable, (2)

$$\Delta x' = (A+LC)\Delta x.$$

D'autre part, H est solution d'un système

$H' = \bar{A}H + \bar{B}\alpha \iff h''' = \alpha$ dont la commande

α s'écrit : $\alpha = \Pi x + \sigma u$ (rappelons que $\dot{w}=0$)

alors que $H = N x$.

A une trajectoire de référence $h_c(\cdot)$ pour h

on associe l'erreur $\delta H = H - (h_c, h_c', h_c'')$ et

$\delta\alpha = \alpha - \alpha_c$, qui satisfont :

$$\delta H' = \bar{A}\,\delta H + \bar{B}\,\delta\alpha.$$

On a trouvé au 3°/ une matrice K t.q., en

prenant $\alpha = \alpha_c + K\,\delta H$, l'erreur δH est solution

de l'EDO asymptotiquement stable :

$$\delta H' = (\bar{A} + \bar{B}K)\,\delta H.$$

La commande u correspondante vérifie :

$$\sigma u = \alpha_c - \Pi x + K(H - H_c).$$

Choisissons maintenant une commande u de

la façon suivante :

$$\sigma u = \alpha_c - \Pi\hat{x} + K(\hat{H} - H_c) \quad \text{où } \hat{H} = N\hat{x}.$$

Avec les notations précédentes, on a :

$$\delta\alpha = K(\hat{H} - H_c) - \Pi\,\Delta x = K\,\delta H + KN\,\Delta x - \Pi\,\Delta x$$

$$= K\,\delta H + \tilde{\Pi}\,\Delta x \quad \text{où } \tilde{\Pi} = KN - \Pi$$

On a ainsi les équations :

$$\begin{cases} \delta H' = (\bar{A} + \bar{B}K)\,\delta H + \bar{B}\tilde{M}\,\Delta x \\ \Delta x' = (A + LC)\,\Delta x \end{cases}$$

c.a.d

$$\begin{pmatrix} \delta H \\ \Delta x \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \bar{A} + \bar{B}K & \bar{B}\tilde{M} \\ 0 & A+LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta H \\ \Delta x \end{pmatrix}$$

qui est une équation asymptotiquement stable

Les erreurs δH et Δx tendent donc vers 0, ce qui assure la stabilisation autour de la trajectoire de référence et la convergence de l'observateur.