Petite Classe n^0 5

ENSTA ParisTech
http://cas.ensmp.fr/~petit/ *14 novembre 2014*

Commande linéaire quadratique

Exercice 1 Stabilisation d'un pendule

On s'intéresse à la stabilisation d'un pendule vertical (tel que représenté sur la figure 1) satisfaisant aux équations (normalisées)

$$\ddot{x} = -x + u$$

où u est une commande librement choisie. On souhaite qu'en temps infini il rejoigne le point d'équilibre $(0,0)^T$. On se propose de calculer une commande réalisant cet objectif par la méthode LQR.

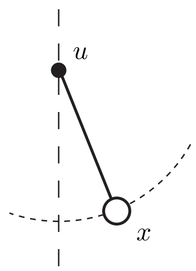

Figure 1: Pendule contrôlé.

1. Mettre le système sous forme d'état. Quelles sont les valeurs propres du système en boucle ouverte? Comment se comporte-t-il?
2. Considérer le problème de minimisation du critère

$$J = \int_0^{+\infty} \left((x(t)^2 + \dot{x}(t)^2 + u(t)^2\right) dt$$

Former l'équation de Riccati algébrique correspondante.

3. Résoudre cette équation. Donner l'expression du contrôle optimal.
4. On considère maintenant le problème un peu plus général de minimisation du critère

$$J = \int_0^{+\infty} \left((x(t)^2 + \dot{x}(t)^2 + qu(t)^2\right) dt$$

On réalise deux expériences en boucle fermée en ayant choisi $q = 1$ et $q = 1/3$. Associer ces réglages aux courbes de la figure 2. Que constate-t-on?

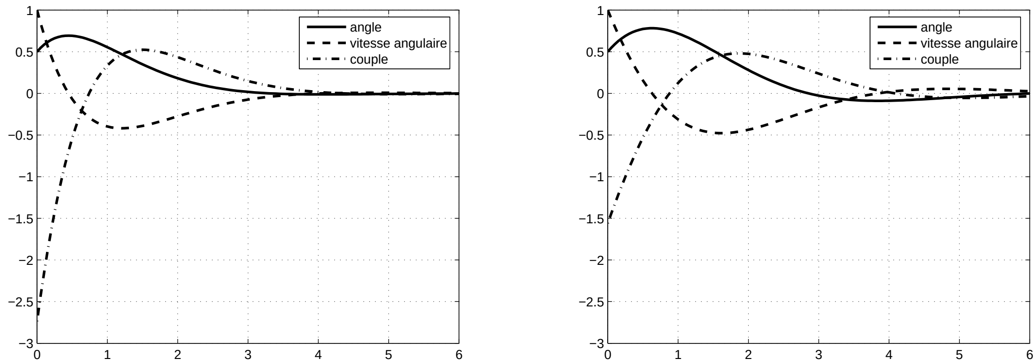

Figure 2: Différents réglages de la commande LQR.

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ Placement des pôles

On considère un système sous forme d'état

$$\dot{X} = AX + BU$$

Ce système est supposé commandable, et on cherche à placer ses pôles en boucle fermée dans le demi-plan complexe $\Re(z) < -\alpha \leq 0$.

1. Effectuer un changement de variables

$$(X(t), U(t)) \mapsto (\bar{X}(t) = e^{\alpha t} X(t), \bar{U}(t) = e^{\alpha t} U(t))$$

   Quelles sont sous forme d'état les équations satisfaites par $(\bar{X}, \bar{U})$?

2. Le système obtenu est-il commandable?

3. Proposer une commande stabilisante par la méthode LQR. Quelle est l'équation de Riccati algébrique associée?

4. En déduire une loi de commande stabilisant le système original $\dot{X} = AX + BU$ et garantissant que les pôles en boucle fermée sont dans le demi-plan complexe $\Re(z) < -\alpha \leq 0$.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ Planification optimale et résonance

On considère le problème suivant (avec $w > 0$, $t_f > 0$, a_1, a_2, a_3, a_4 étant des paramètres fixes)

$$\left\{ \begin{array}{c} \min\limits_{[0,t_f] \ni t \mapsto (x_1(t), x_2(t), u(t)) \in \mathbb{R}^3} \displaystyle\int_0^{t_f} u^2(t)\ dt \\ x_1(0) = a_1,\ x_2(0) = a_2,\ x_1(t_f) = b_1,\ x_2(t_f) = b_2 \\ \frac{d}{dt}x_1(t) = wx_2,\ \frac{d}{dt}x_2(t) = w(u - x_1),\ t \in [0, t_f] \end{array} \right.$$

1. Montrer que la solution optimale est donnée par un contrôle de la forme

$$u(t) = p\cos(wt) + q\sin(wt)$$

   avec p et q des paramètres constants.

2. Calculer p et q pour $wt_f = 2n\pi$ ($n > 0$ entier), $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b$ et $b_2 = 0$. On pourra faire un changement de variables avec une matrice de rotation d'angle wt. Que constate-on lorsque la phase $wt_f = 2n\pi$ est très grande? Interpréter le phénomène.

3. Généraliser ce qui précède au cas de plusieurs oscillateurs de fréquences différentes soumis au même contrôle scalaire u.