ENSTA Paris, Institut Polytechnique de Paris

(Introduction au calcul stochastique, PRB203, FR) 2020-21

Série 1

1. Soit S_n le prix d'un actif financier à l'instant n. Soit Y_n $(n \geq 1)$ le quotient de prix entre les instants n et $n-1$. $S_0 = p$ où p est le prix à l'instant 0.
   Supposons que les (Y_n) sont indépendantes identiquement réparties et positives. Posons $m = E(Y_1), c^2 = E({Y_1}^2)$.

i) Supposons qu'il y ait un taux d'actualisation $r \geq 0$, de sorte que le prix actualisé de S_n à l'instant 0, vaut $\tilde{S}_n = e^{-rn} S_n$.

Déterminer m de sorte que pour tout $n \geq 0$

$$E(\tilde{S}_n) = E(S_0) = p.$$

Correction.

Nous avons

$$S_n = p\Pi_{\ell=1}^{n} Y_\ell,\ n \geq 1. \tag{0.1}$$

— Si $n \geq 1$, (0.1) impique

$$\begin{aligned} E(\tilde{S}_n) &= e^{-nr} E(S_n) = pe^{-nr} E(\Pi_{\ell=1}^{n} Y_\ell) \\ &= pe^{-nr} \Pi_{\ell=1}^{n} E(Y_\ell) = pe^{-nr} m^n = p(me^{-r})^n. \end{aligned}$$

— Si $n = 0$, alors $E(\tilde{S}_0) = p$. D'où il faut que

$$m = e^r. \tag{0.2}$$

ii) Calculer $E\left((\tilde{S}_n)^2\right)$ sous la condition précédente (0.2).

Correction. Si $n \geq 1$

$$\begin{aligned} E(\tilde{S}_n^2) &= e^{-2nr}p^2E(\Pi_{\ell=1}^n Y_\ell^2) \\ &= p^2e^{-2nr}\Pi_{\ell=1}^n E(Y_\ell^2) = (ce^{-nr})^2p^2 = \left(\frac{c}{m}\right)^{2n} p^2. \end{aligned}$$

iii) Encore sous la condition précédente déterminer

$$E(\tilde{S}_n|Y_1,\ldots,Y_{n-1}), E(\tilde{S}_n^2|Y_1,\ldots,Y_{n-1}).$$

Correction.

$$\begin{aligned}
E(\tilde{S}_n|Y_1,\ldots,Y_{n-1}) &= e^{-nr}E(S_{n-1}Y_{n-1}|Y_1,\ldots,Y_{n-1}) \\
&= e^{-nr}S_{n-1}\underbrace{E(Y_n|Y_1,\ldots,Y_{n-1})}_{E(Y_n)} = e^{-nr}S_{n-1}m \\
&= e^{-(n-1)r}S_{n-1} = \tilde{S}_{n-1}.
\end{aligned}$$

En particulier $(\tilde{S}_n)$ est une martingale par rapport à la filtration

$$\mathcal{Y}_n = \sigma(Y_1,\ldots,Y_n),\ n \geq 1.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
E(\tilde{S}_n^2|\mathcal{Y}_{n-1}) &= e^{-2nr}E(S_{n-1}^2Y_n^2|\mathcal{Y}_{n-1}) \\
&= e^{-2nr}S_{n-1}^2E(Y_n^2) = \tilde{S}_{n-1}^2e^{-2r}c^2 \\
&= \tilde{S}_{n-1}^2\left(\frac{c}{m}\right)^2.
\end{aligned}$$

iv) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\tilde{S}_n^2$ soit une martingale.

Correction. La condition $\left(\frac{c}{m}\right)^2 = 1$ est équivalente à

$$E(Y_1^2) - (E(Y_1))^2 = 0,$$

qui est équivalente à $\mathrm{Var}(Y_1) = 0$ qui équivaut à $Y_1 = \text{const.}$

v) Expliciter les quantités données en ii) et iii) si les Y_n sont log-normales, c'à d. si $V_n = \log Y_n \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Correction. Supposons

$$Y_n = e^{V_n},\ V_n \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Par la Proposition 2.4 nous avons

$$E(e^{zV_n}) = \exp\left(\mu z + \frac{z^2\sigma^2}{2}\right),\ z \in \mathbb{C}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2}). \\ E(Y_n^2) &= E(\exp(2V_n)) = \exp(2\mu + 2\sigma^2). \end{aligned}$$

D'où

$$m = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2}), \quad c^2 = \exp(2(\mu + \sigma^2)).$$

La condition (0.2) devient

$$r = \mu + \frac{\sigma^2}{2}. \tag{0.3}$$

Sous (0.3) nous avons

$$E(\tilde{S}_n) = p,\ E(\tilde{S}_n^2) = p^2 e^{n\sigma^2}.$$

2. Soit $\underline{X} = (X_1, X_2)$ un vecteur gaussien tel que $\mathrm{Var}\, X_1 = \sigma_1^2$, $\mathrm{Var}\, X_2 = \sigma_2^2$, $Cov(X_1, X_2) = \sigma_{12}, \mu_i = E(X_i), i = 1, 2$. Supposons $\sigma_1, \sigma_2 > 0$.

   a) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculer la loi de $\alpha\, X_1 + \beta\, X_2$.

   Corrections. Etant le vecteur (X_1, X_2) gaussien, $\alpha X_1 + \beta X_2$ est gaussienne de paramètres $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\sigma}^2$ où

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu} &= E(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha E(X_1) + \beta E(X_2) = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2 \\
\tilde{\sigma}^2 &= \mathrm{Var}(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha^2\sigma_1^2 + \beta^2\sigma_2^2 + 2\alpha\beta\sigma_{12}
\end{aligned}$$

b) Déduire la fonction caractéristique de $\underline{X}$.

Corrections

$$\begin{aligned}\varphi_{\underline{X}}(t) &= E(\exp(it\cdot\underline{X}) = E(\exp(i(t_1X_1+t_2X_2))\\ &= \varphi_{t_1X_1+t_2X_2}(1) = \exp(i\tilde{\mu}-\frac{\tilde{\sigma}^2}{2}),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{\mu} &= t_1\mu_1+t_2\mu_2,\\ \tilde{\sigma}^2 &= t_1^2\sigma_1^2+t_2^2\sigma_2^2+2t_1t_2\sigma_{12} = t\Gamma t^\top,\end{aligned}$$

avec

$$\Gamma = \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{pmatrix}.$$

c) On peut vérifier que la loi de $\underline{X}$ est donnée au moyen de la densité (exprimée à l'aide d'écriture matricielle)

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{\det\Gamma}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\Gamma^{-1}(x-\underline{\mu}) \cdot (x-\underline{\mu}) \right\},$$

où $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2), \Gamma = \Gamma(X)$, est la matrice de variance-covariance de X, si Γ est inversible.

Montrer ceci si $\sigma_{12} = 0, \underline{\mu} = 0$;

Corrections. Comme la fonction caractéristique détermine la loi, il suffit de montrer

$$E(\exp(it \cdot \underline{X})) = \int_{\mathbb{R}^2} p(x_1 x_2) e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dx_1 dx_2. \tag{0.4}$$

Le membre de gauche vaut

$$\begin{aligned} \varphi_{\underline{X}}(t_1, t_2) &= \exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + \sigma_2^2 t^2)\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2)\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma_2^2 t_2^2)\right) \end{aligned}$$

Comme $X_i \sim N(0, \sigma_i^2), i = 1, 2$, cela donne

$$\Pi_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{it_j x_j - \frac{x_j^2}{\sigma_j^2}} dx_j = \int_{\mathbb{R}^2} p(x_1, x_2) \exp it \cdot \underline{x} d\underline{x},$$

ce qui constitue le membre de droite de (0.4).

d) Calculer $E(X_i|X_1)$, $i = 1, 2$.

Corrections.

— Clairement $E(X_1|X_1) = X_1$ p.s.

— $E(X_2|X_1)$ est la régression linéaire $\hat{X}_2$ de X_2. sur X_1. D'après la Proposition 2.14 du Cours,

$$\hat{X}_2 = E(X_2|X_1) = \mu_2 + (X_1 - \mu_1)b_1,$$

et

$$\sigma_{12} = b_1\sigma_1^2 \Rightarrow b_1 = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}.$$

3. Soient X, Y deux v.a. gaussiennes indépendantes suivant une loi $N(0,1)$.

   i) Calculer $E(\exp(X+Y)|Y)$.

   Correction.

   Des calculs usuels d'espérance conditionnelle donnent

$$\begin{aligned}
E(\exp(X+Y)|Y) &= E(\exp(X)\exp(Y)|Y) \\
&= \exp(Y)E(\exp(X)|Y) \\
&= \exp(Y)E(\exp(X)) = \exp(Y)\exp\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \exp\left(Y+\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

   On peut aussi dire

$$E(\exp(X+Y)|Y=y) = \exp\left(y+\frac{1}{2}\right).$$

ii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Déterminer une expression pour $E(f(X^2 + Y^2)|Y)$ en fonction de la densité p de la loi $N(0, 1)$, et de f.

Justifier les réponses.

Corrections. Par le Théorème 2.12 du Cours ("freezing lemma"), nous écrivons

$$E(f(X^2 + Y^2)|Y) = \varphi(Y),$$

où

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= E(f(X^2 + y^2)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x^2 + y^2) p(x) dx. \end{aligned}$$

4. Supposons (X, Y) vecteur gaussien tel que $X, Y \sim N(0, 2)$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 1$.

   i) Ecrire la densité de la loi du vecteur (X, Y).

   Corrections. La matrice de variance-covariance vaut
$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   D'où $\det(\Gamma) = 3$, ainsi
$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Finalement la densité $p^{(X,Y)}$ de la loi de (X, Y) vaut
$$p^{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{1}{3}(x^2 + y^2 - xy)\right).$$

ii) Calculer $E(X|Y)$.

Corrections.

$E(X|Y) = bY$, où $b = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_{YY}} = \frac{1}{2}$.

5. (Evaluation du prix d'un call européen dans le cadre du modèle de Black-Scholes. Cas particulier : taux d'actualisation $r = 0$.)
Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un **mouvement brownien standard** c'est-à-dire un processus stochastique tel que

   i) $(B_t)_{t\geq 0}$ est continu.

   ii) $B_0 = 0$ p.s., $E(B_t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$.

   iii) Pour tout choix de $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$, le vecteur $(B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ est gaussien de matrice de variance-covariance

$$\Gamma = \mathrm{diag}(t_1 - t_0, \ldots, t_n - t_{n-1}).$$

   En particulier, on dit que B est un processus gaussien centré à accroissements indépendants. Soit $\sigma > 0$, $s_0 > 0$. Posons

$$S_t = s_0 \exp\left(\sigma\, B_t - \frac{\sigma^2}{2}\, t\right)$$

   $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$, éventuellement en ajoutant les ensembles P-négligeables. Soient $T > 0$. Fixons $t \in [0, T]$.

i) Expliciter

$$V_t = E(f(S_T)|\mathcal{F}_t)$$

sous la forme

$$V_t = F(t, S_t).$$

Corrections.

$$\begin{aligned} V_t &= E(f(S_T)|\mathcal{F}_t) \\ &= E(f(S_t e^{\sigma(B_T - B_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)})|\mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

La v.a. S_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable, et, $B_T - B_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$.

En utilisant encore le Théorème 2.12

$$V_t = F(t, S_t),$$

avec

$$F(t, x) = E(f(xe^{\sigma(B_T - B_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)})). \qquad (0.5)$$

ii) Vérifier que

$$F(t,x) = \int f(x\, e^{-\frac{\sigma^2}{2}\theta + \sigma\, y\sqrt{\theta}})\, p(y)dy,$$

où $\theta = T - t$ et p est la densité d'une loi $N(0,1)$.

Correction. Comme $B_T - B_t$ est une gaussienne centrée de variance $T - t$, nous avons

$$B_T - B_t = \sqrt{\theta}N,\ \ N \sim N(0,1),$$

$$F(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(xe^{-\frac{\sigma^2\theta}{2} + \sigma y\sqrt{\theta}})e^{-\frac{y^2}{2}}dy, \quad x > 0, t \geq 0. \tag{0.6}$$

iii) Supposons $f(x) = (x - K)_+$. Posons

$$d_1 = \frac{\log(\frac{K}{x}) + \frac{\sigma^2\theta}{2}}{\sigma\sqrt{\theta}}.$$

Tirer une expression simplifiée pour $F(t, x)$ en utilisant la fonction de répartition ψ de la loi $N(0, 1)$ et d_1.

Correction.

On a

$$F(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (xe^{-\frac{\sigma^2}{2}\theta + \sigma y\sqrt{\theta}} - K)_+ e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Cherchons les $y \in \mathbb{R}$ tels que

$$xe^{-\frac{\sigma^2}{2}\theta + \sigma y\sqrt{\theta}} - K \geq 0.$$

On a

$$\begin{aligned} xe^{-\frac{\sigma^2}{2}\theta+\sqrt{\theta}\sigma y}-K &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{\sigma^2}{2}\theta+\sigma y\sqrt{\theta} &\geq \log\frac{K}{x} \\ \Leftrightarrow y &\geq \frac{\log\frac{K}{x}+\frac{\sigma^2}{2}\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}. \end{aligned} \tag{0.7}$$

Appelons d_1 la quantité précédente et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\theta}$. Avec ces notations

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_1}^{+\infty}(xe^{-\frac{\sigma^2}{2}\theta+\sigma y\sqrt{\theta}}-K)e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_1}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(y-\sigma\sqrt{\theta})^2}dy - K\int_{d_1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy \\ &= x\int_{d_2}^{\infty}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy - K\int_{d_1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy \\ &= x\psi(-d_2) - K\psi(-d_1) \end{aligned}$$

Série 1. Introduction au calcul stochastique, PRB203, FR 2020-21 **fin**.