# Statistique (MA101) Cours 4

## ENSTA 1ère année

Christine Keribin

christine.keribin@math.u-psud.fr

Laboratoire de Mathématiques
Université Paris-Sud

2017-2018

# Sommaire

# Tests : un exemple

Un constructeur automobile annonce une consommation $\mu_0 = 6.32\ell/100\ km$, avec un écart type $\sigma = 0.21\ell/100\ km$, pour des véhicules d'un type donné. Un organisme indépendant suspecte une sous-estimation de cette consommation et indique que la consommation s'élèverait à $\mu_1 = 6.45\ell/100\ km$.
Sur un 30-échantillon $\bar{x} = 6.43\ell/100\ km$. *Qui a raison ?*

$(H_0)$ conso. conforme au constructeur : $X \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$
$\mu = \mu_0 = 6.32$

$(H_1)$ conso. suspectée par l'organisme : $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$
$\mu = \mu_1 = 6.45$

- Choisir, à partir d'un $n$-échantillon, entre les deux hypothèses $(H_0)$ et $(H_1)$, en assumant le risque de première espèce $\alpha$ (5%, 10%,..) de choisir $(H_1)$ alors que $(H_0)$ est vrai.

# Un exemple (suite)

- Statistique $\bar{X}$, moyenne des consommations de $n = 30$ véhicules
- Loi sous $(H_0)$,

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}) \text{ soit } T = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

- Choisir a priori un risque $\alpha$, calibrant la probabilité de rejet de $(H_0)$ à tort ($\alpha = 5\%$ par exemple)

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbb{P}_{H_0}(\underbrace{T > q^*_{1-\alpha}}_{\mathcal{R}=]q^*_{1-\alpha};\infty[,\ \text{Région de rejet pour } T}) \\ &= \mathbb{P}_{H_0}(\underbrace{\bar{X} > \mu_0 + q^*_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\mathcal{R}=]\mu_0+q^*_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\infty[,\ \text{Région de rejet pour } \bar{X}}) \end{aligned}$$

avec $q^*_{1-\alpha}$ le quantile d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$ d'ordre $1-\alpha$

# Un exemple (suite)

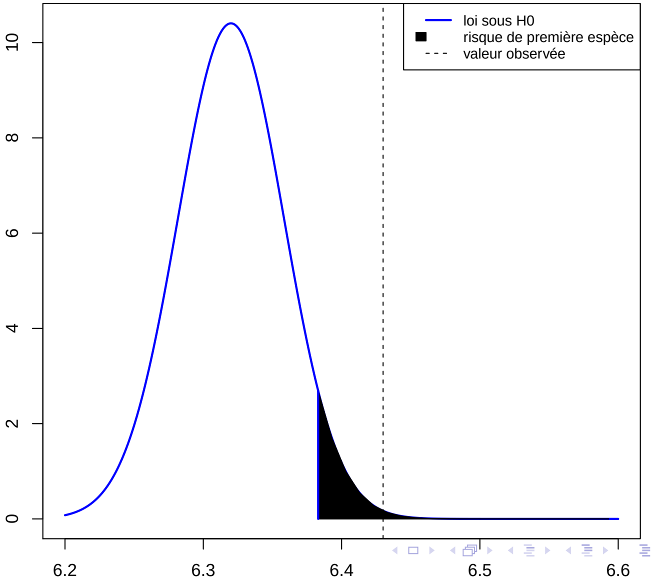


- Décider :
  - $\hookrightarrow$ si $T$ est dans la région de rejet, on rejette $H_0$
  - $\hookrightarrow$ sinon, on conserve $(H_0)$ faute de preuves suffisantes
- ici, $\bar{x} = 6.43\ell/100\ km$,

$$t_{obs} = \frac{6.43 - 6.32}{0.21/\sqrt{30}} = 2.86 > 1.64$$

au niveau $\alpha = 5\%$, les données sont significatives pour rejeter $(H_0)$, le constructeur a minimisé la consommation, avec un risque (de première espèce) $\alpha$.

# Représentation graphique



# Un exemple (suite)



Un autre cas de figure :

- si la même consommation a été observée sur un échantillon de $n = 9$ véhicules

$$t_{obs} = \frac{6.43 - 6.32}{0.21/\sqrt{9}} = 1.57 < 1.64$$

on ne peut pas rejeter le fait que le constructeur a sous-estimé la consommation, on accepte $(H_0)$

$\hookrightarrow$ *avec quelle erreur ?*

# Un exemple (suite)



Une autre façon de se tromper :

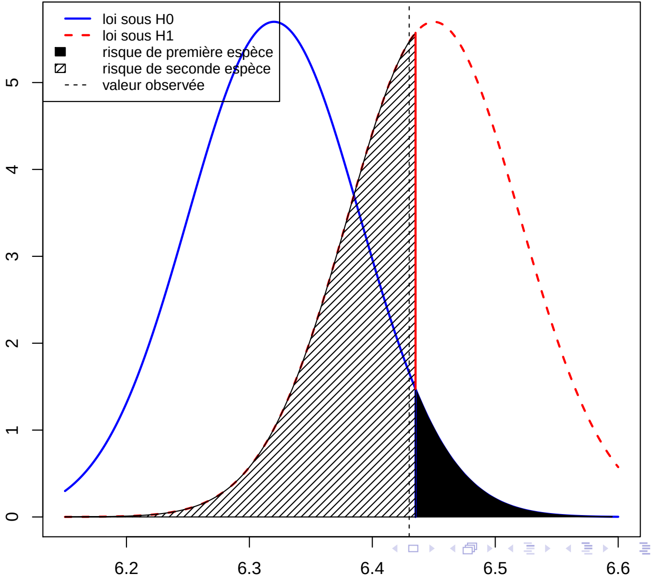
- erreur de seconde espèce : ne pas rejeter $(H_0)$ alors que $(H_1)$ est vraie
- Sous $(H_1)$, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n})$ et le risque de seconde espèce est

$$\begin{aligned} \beta &= \mathbb{P}_{H_1}\left(\bar{X} < \mu_0 + q^*_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathrm{F}^*\left(\sqrt{n}\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma} + q^*_{1-\alpha}\right) \end{aligned}$$

- App.Num : $n = 9$, $\beta \simeq 0.41$

la puissance $\pi = 1 - \beta$ n'est pas très grande

# Représentation graphique



# Procédure de test



## Définition

- *Un test est une procédure de décision qui permet de trancher, au vu des résultats d'un échantillon, entre deux hypothèses l'hypothèse nulle $(H_0)$ et une hypothèse alternative $(H_1)$, dont une seule est vraie.*
- *La région critique ou région de rejet $\mathcal{R}$ est l'ensemble des valeurs de la variable de décision $T$ qui conduisent à écarter $(H_0)$ au profit de $(H_1)$.*
- *La région d'acceptation du test est $\overline{\mathcal{R}}$.*

# Procédure de test



Un test peut s'écrire comme une fonction $\varphi$ de l'échantillon qui ne peut prendre que deux valeurs :

- 0 pour accepter $(H_0)$
- 1 pour rejeter $(H_0)$ :

$$X = (X_1, \dots, X_n) \mapsto \varphi(X) \in \{0, 1\}$$

Elle est définie en fonction de la région de rejet de la statistique de test $T(X)$ choisie

$$\varphi(X) = \mathbb{1}_{T(X) \in \mathcal{R}}$$

# Construire un test

1. Définir le modèle
2. Définir les hypothèses nulle $(H_0)$ et alternative $(H_1)$
3. Choisir une statistique de test $T(X)$, déterminer sa loi sous $(H_0)$
4. Définir la règle de décision en calibrant la région de rejet $\mathcal{R}$ suivant le risque $\alpha$. Calculer la puissance $\pi$
5. Calcul de la statistique observée et décision : rejet ou acceptation de $(H_0)$.

# La décision

La décision du test, à partir de la valeur observée $t$ de la statistique de test $T$ est :

- si $t \in \mathcal{R}$, on rejette $(H_0)$ au risque $\alpha$ : l'erreur commise est de risque

$$\alpha = \mathbb{E}_{(H_0)}(\varphi(T(X)) = \mathbb{P}_{(H_0)}(T \in \mathcal{R})$$

- si $t \notin \mathcal{R}$, on conserve $(H_0)$ dans le test de risque $\alpha$ : les données ne sont pas significatives pour accepter $(H_1)$. L'erreur commise est de risque de seconde espèce

$$\beta = \mathbb{E}_{(H_1)}(\varphi(T(X)) = \mathbb{P}_{(H_1)}(T \in \overline{\mathcal{R}})$$

  en général inconnu.

La décision dépend de l'échantillon, mais la fonction de test $\varphi$ est déterministe

# Récapitulatif

A l'issue du test, les quatre situations suivantes sont possibles

| | Choix $(H_0)$ | Choix $(H_1)$ |
|---|---|---|
| $(H_0)$ vraie | $1-\alpha$<br><br>bonne décision | $\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(T \in \mathcal{R})$<br>risque première espèce<br>mauvaise décision |
| $(H_1)$ vraie | $\beta = \mathbb{P}_{H_1}(T \notin \mathcal{R})$<br>risque seconde espèce<br>mauvaise décision | $\pi = 1-\beta$<br>puissance<br>bonne décision |

# Dissymétrie de la situation de test

- Le risque n'est contrôlé que pour $(H_0)$
  - $\hookrightarrow$ La véritable décision est celle qui rejette $(H_0)$.
  - $\hookrightarrow$ $(H_0)$ et $(H_1)$ ne sont pas interchangeables.
- Il faut connaître la loi de la statistique de test sous $(H_0)$
- Il faut que cette loi soit différente sous $(H_1)$
- Entre deux tests de même risque de 1ère espèce $\alpha$, il faut choisir le plus puissant
  - $\hookrightarrow$ dans le cas de l'exemple, la région de rejet de la forme $\{T < q^*_{0.05}\}$ est aussi de risque 5%, mais elle n'a aucune puissance pour détecter le cas $\mu_1 > \mu_0$

# Hypothèse alternative composite

La valeur observée n'a pas servi à construire la région de rejet qui a été définie a priori en fonction de la problématique fixée.

- Ainsi, pour tester

  $$(H_0) : \theta = \theta_0 \text{ contre } (H_1) : \theta > \theta_0$$

  on utilise la même région de rejet que pour le test d'hypothèse simple

  $$(H_0) : \theta = \theta_0 \text{ contre } (H_1) : \theta = \theta_1 > \theta_0$$

- mais la puissance devient une fonction de $\theta$ :

  $$\theta_1 \in \Theta_1 = \{\theta | \theta > \theta_0\}, \;\; \pi(\theta_1) = \mathbb{P}_{\theta_1}(T \in \mathcal{R}) = 1 - \beta(\theta_1).$$

# Formes d'hypothèses

- Hypothèses simples

$$(H_0) : \theta = \theta_0 \text{ contre } (H_1) : \theta = \theta_1$$

- Test unilatéral pour une hypothèse alternative composite

$$(H_0) : \theta = \theta_0 \text{ contre } (H_1) : \theta > \theta_0$$

- Test bilatéral pour une hypothèse nulle simple

$$(H_0) : \theta = \theta_0 \text{ contre } (H_1) : \theta \neq \theta_0$$

- Test unilatéral pour une hypothèse nulle composite

$$(H_0) : \theta \geq \theta_0 \text{ contre } (H_1) : \theta < \theta_0$$

- De façon générale :

$$(H_0) : \theta \in \Theta_0 \text{ contre } (H_1) : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$$