ENSTA ParisTech

(Introduction au calcul stochastique et applications, PRB203, FR) **2020-21**

Série 3

Soit $(\mathcal{F}_t)$ une filtration usuelle et (W_t) un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien standard.

1. **Intégrale de Wiener**.
   Cet exercice est une introduction à l'intégrale stochastique. Il s'agit de construire une intégrale de type $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(s)dW_s$, où $f(s)$ est une fonction mesurable de $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(s)ds < +\infty$. Ce type d'intégrale s'appelle intégrale de Wiener et c'est un cas particulier de l'intégrale d'Itô qui est introduite au Cours.
   On rappelle que l'ensemble $\mathcal{H}$ des fonctions de la forme $\sum_{0\le i\le N-1} b_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}$ avec $b_i \in \mathbb{R}$, et $t_0 = 0 \le t_1 \le \ldots \le t_N$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}_+, dx)$ muni de la norme $||f||_{L^2} = \sqrt{\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(s)ds}$.

(a) Soit $b_i \in \mathbb{R}$, et $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_N$, et $f = \sum_{0 \leq i \leq N-1} b_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}$. On pose

$$I_e(f) = \sum_{0 \leq i \leq N-1} b_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Démontrer que $I_e(f)$ est une variable aléatoire gaussienne dont on calculera la moyenne et la variance. Démontrer en particulier que

$$E(I_e(f)^2) = ||f||^2_{L^2}.$$

Correction. $I_e(f)$ est une v.a. gaussienne car le mouvement brownien est un processus gaussien. On a

$$E(I_e(f)) = 0,$$

car le mouvement brownien est un processus centré et l'espérance est un opérateur linéaire.

Comme W est un processus à accroissements indépendants on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(I_e(f)) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{0 \leq i \leq N-1} b_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right) \\ &= \sum_{0 \leq i \leq N-1} b_i^2 \underbrace{\mathrm{Var}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})}_{t_{i+1} - t_i} \\ &= \int_0^\infty f^2(t) dt. \end{aligned}$$

(b) En déduire qu'il existe une unique application linéaire de $L^2(\mathbb{R}_+, dx)$ à valeurs dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, I, telle que $I(f) = I_e(f)$, si f est dans $\mathcal{H}$ et $\mathbf{E}(I(f)^2) = ||f||_{L^2}^2$, pour tout f dans $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Correction. Notons $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des fonctions en escalier décrites dans (a). Il est bien connu que $\mathcal{H}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}_+, dx)$. L'application linéaire

$$I_e : \mathcal{H} \subset L^2(\mathbb{R}_+, dx) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P),$$

est une application linéaire continue. En plus il s'agit d'une isométrie.

(c) Démontrer que, si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées qui convergent en loi (par exemple dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$) vers X, alors X est une variable aléatoire gaussienne centrée. En déduire que si $f \in L^2(\mathbb{R}_+, dx)$ alors $I(f)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(s)ds$. Notons

$$\int_0^\infty f dW := I(f).$$

Correction.

- Notons φ_{X_n} (resp. φ_X) la fonction caractéristique de X_n (resp. X). Comme X_n converge en loi vers X, lorsque $n \to \infty$,

$$\varphi_{X_n}(\xi) \to_{n\to\infty} \varphi_X(\xi), \ \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

 Il existe $\sigma_n^2 \geq 0$, tel que

$$\varphi_{X_n}(\xi) = \exp\left(-\frac{\sigma_n^2 \xi^2}{2}\right).$$

 En posant $\xi = 1$, on obtient

$$\sigma_n^2 \to \sigma^2 \geq 0.$$

 Par continuité de l'exponentielle on aura

$$\varphi_{X_n}(\xi) \to \exp\left(-\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}\right), \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

 D'où la loi de X est une gaussienne centrée (éventuellement dégénérée).

- Dans notre cas si $f \in L^2(\mathbb{R}_+, dx)$, il existe une suite (f_n) dans $\mathcal{H}$ telle que $f_n \to f$ in $f \in L^2(\mathbb{R}_+, dx)$. On a donc

  $$I_e(f_n) \to I(f), \text{ dans } L^2(\Omega).$$

  D'où $I(f)$ est une gaussienne centrée. Sa variance vaut

  $$E(I(f)^2) = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}.$$

(d) Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+, dx)$. Notons $Z_t := \int_0^t f(s)dW_s := \int_0^\infty \mathbf{1}_{]0,t]}(s)f(s)dW_s$. Démontrer que Z_t est un processus adapté à $\mathcal{F}_t$, et que $Z_t - Z_u$ est indépendant de $\mathcal{F}_u$ si $t \geq u$. Commencer par traiter le cas $f \in \mathcal{H}$.

Correction.

- Si $f \in \mathcal{H}$, alors

$$f(s) = \sum_{0 \leq i \leq N-1} b_i 1_{]t_i,t_{i+1}]}(s), \ s \geq 0,$$

et

$$1_{]0,t]}(s)f(s) = \sum_{0 \leq i \leq N-1} b_i 1_{]t_i \wedge t, t_{i+1} \wedge t]}(s), \ s \geq 0.$$

Par définition,

$$Z_t = \sum_{0 \leq i \leq N-1} b_i (W_{t_{i+1} \wedge t} - W_{t_i \wedge t}).$$

Z est donc un processus continu et adapté à $(\mathcal{F}_t)$. On a

$$Z_t - Z_u = \int_0^\infty 1_{]u,t]}(s)f(s)dW_s.$$

Réénumérons les $\{u, t\}$ et les $\{t_i\} \cap]u, t[$ par

$$u = s_0 < s_1 < \ldots < s_\ell = t.$$

On a

$$f\mathbf{1}_{]u,t]} = \sum_{0 \leq k \leq \ell} \tilde{b}_k \mathbf{1}_{]s_k,s_{k+1}]},$$

où $\tilde{b}_k$ est l'un des b_i. On a

$$Z_t - Z_u = \sum_{0 \leq k \leq \ell} \tilde{b}_k (W_{s_{k+1}} - W_{s_k}).$$

Chaque incrément $W_{s_{k+1}} - W_{s_k}$ est indépendant de $\mathcal{F}_u$.

- Passons au cas général. Soit (f_n) dans $\mathcal{H}$ telle que $f_n \to f$ in $f \in L^2(\mathbb{R}_+, dx)$. On a

$$Z_t = \lim_{n\to\infty} I(1_{]0,t]} f_n), \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Z est donc adapté. Par ailleurs

$$Z_t - Z_u = \lim_{n\to\infty} I(1_{]u,t]} f_n),$$

dans $L^2(\Omega)$. Elle est donc limite de v.a. indépendantes de $\mathcal{F}_u$.

(e) Démontrer que les processus

$$Z_t,\ Z_t^2 - \int_0^t f^2(s)ds,\ \exp\left(Z_t - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)ds\right),$$

sont des $\mathcal{F}_t$-martingales.

Correction.

- Le fait que Z est une martingale est trivial.
- Soit $0 \leq u \leq t$. On a

$$\begin{aligned} Z_t^2 &= (Z_u + Z_t - Z_u)^2 \\ &= Z_u^2 + 2Z_u(Z_t - Z_u) + (Z_t - Z_u)^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} E(Z_t^2|\mathcal{F}_u) &= Z_u^2 + 2Z_u \underbrace{E(Z_t - Z_u|\mathcal{F}_u)}_{E(Z_t - Z_u)=0} \\ &+ E(Z_t - Z_u)^2 \\ &= Z_u^2 + \int_u^t f^2(s)ds. \end{aligned}$$

et le résultat suit.

- $$\begin{aligned} & E\left(\exp\left(Z_t - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)ds\right)|\mathcal{F}_u\right) \\ = & \exp(Z_u - \frac{1}{2}\int_0^u f^2(s)ds)E\left(\exp\left(Z_t - Z_u - \frac{1}{2}\int_u^t f^2(s)ds\right)|\mathcal{F}_u\right). \end{aligned}$$

  Il reste à voir que la dernière espérance vaut 1. En fait cela donne

  $$\exp\left(-\frac{1}{2}\int_u^t f^2(s)ds\right)E(\exp(Y)),$$

  où

  $$Y \sim N\left(0, \int_u^t f^2(s)ds\right).$$

  Par conséquent

  $$E(\exp(Y)) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_u^t f^2(s)ds\right).$$

Soit $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, c'à dire que pour tout $t > 0$, $f 1_{[0,T]} \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

Montrer que pour tout $t > 0$ l'intégrale de Wiener $\int_0^\infty f(s) 1_{[0,t]}(s) dW_s$ égale p.s. l'intégrale d'Itô $\int_0^t f(s) dW_s$. Commencer par le cas $f \in \mathcal{H}$.

Correction. A INSERER

2. Soit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma, s_0 \geq 0$. Posons $Z_t = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t$.

   a) Vérifier que (Z_t) est un processus d'Itô.

   Correction. Clair.

   b) Déduire, en utilisant la formule d'Itô, que $S_t = s_0 \exp(Z_t)$ est une solution de l'équation

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \\ S_0 = s_0. \end{cases}$$

Correction. On écrit $S_t = \varphi(Z_t)$, et on a

$$\varphi(x) = s_0 \exp(x), x \in \mathbb{R}, \; \varphi \equiv \varphi' \equiv \varphi''.$$

La formule d'Itô donne

$$\begin{aligned} S_t &= s_0 + s_0 \int_0^t \exp(Z_s) dZ_s + \frac{s_0}{2} \int_0^t \exp(Z_s) d[Z]_s \\ &= s_0 + \int_0^t S_s \left(\sigma dW_s + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) ds \right) \\ &+ \int_0^t S_s \frac{\sigma^2}{2} ds, \end{aligned}$$

car

$$d[Z]_s = \sigma^2 ds.$$

D'où le résultat.

3. **Processus d'Ornstein-Uhlenbeck.**
Soit $c > 0$. Soit $(X_t, t \in [0, T])$ une solution de

$$\begin{cases} dX_t = -c\, X_t\, dt + \sigma\, dW_t \\ X_0 = x. \end{cases}$$

i) Ecrire la forme intégrale du problème précédent (sans résoudre).

Correction.

$$X_t = x - c \int_0^t X_s ds + \sigma W_t, t \geq 0.$$

ii) Posons $Y_t = e^{ct} X_t$, $t \geq 0$. Par la formule d'intégration par parties déduire que

$$Y_t = x + \sigma \int_0^t e^{cs} dW_s.$$

Correction. On a

$$\begin{aligned} Y_t &= x + c \int_0^t e^{cs} X_s ds + \int_0^t e^{cs} dX_s \\ &+ \underbrace{[e^{c\cdot}, X]_t}_{=0}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} Y_t &= x + c \int_0^t e^{cs} X_s ds - c \int_0^t e^{cs} X_s ds + \sigma \int_0^t e^{cs} dW_s \\ &= x + \sigma \int_0^t e^{cs} dW_s. \end{aligned}$$

iii) Montrer que le processus de Ornstein-Uhlenbeck X est un processus gaussien.

Correction. Pour montrer que X est un processus gaussien nous devons montrer la propriété suivante. Pout tous $0 = t_1 < \ldots < t_n$ et $a_1, \ldots, a_n$ nous devons montrer que $\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$ est une v.a. gaussienne.

Or on peut montrer que

$$\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i} = C + \int_0^\infty g dW_s,$$

où

$$C = x(\sum_{i=1}^n e^{-t_i},$$

et

$$g(s) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{]0,t_i]}(s) e^{a_i(s-t_i)}, \ s \geq 0.$$

où l'intégrale précédente est de type Wiener. Pour cela on se sert en particulier de l'Exercice 1 (f).

Comme $g \in L^2(\mathbb{R}_+, dx)$, par l'Exercice 1 (c), le résultat suit.

iv) Déduire la valeur de $E(Y_t)$ et $E(X_t)$.

Correction.

$$E(Y_t) = x,\ E(X_t) = xe^{-ct},\ t \geq 0.$$

v) Déduire la valeur de $\mathrm{Var}(Y_t)$.

Correction.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_t) &= E(Y_t - x)^2 = \sigma^2 \int_0^t e^{2cs} ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2c}(e^{2ct} - 1).\end{aligned}$$

vi) Est-ce que X_t converge en loi lorsque t tend vers l'infini?

Correction. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_t) &= e^{-2ct}\frac{\sigma^2}{2c}(e^{2ct} - 1) \\ &= \frac{\sigma^2}{2c}(1 - e^{-2ct}).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{t\to\infty} E(X_t) = 0,\ \lim_{t\to\infty} \mathrm{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{2c}.$$

D'où

$$\varphi_{X_t}(\xi) \to_{t\to\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2\xi^2}{4c}\right), \xi \in \mathbb{R},$$

ce qui implique

$$X_t \Rightarrow N\left(0, \frac{\sigma^2}{2c}\right).$$

4. On s'intéresse à la solution X_t de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t &= (\mu X_t + \mu')dt + (\sigma X_t + \sigma')dW_t \\ X_0 &= 1. \end{cases}$$

On pose $S_t = \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t)$.

(a) Ecrire l'équation différentielle stochastique dont est solution S_t^{-1}.

Correction. Posons $(t \geq 0)$

$$\begin{aligned} Y_t &= S_t^{-1} = \exp\left((-\mu + \frac{\sigma^2}{2}) - \sigma W_t\right) \\ &= \exp\left((\tilde{\mu} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}) + \tilde{\sigma} dW_t\right), \end{aligned}$$

où

$$\tilde{\mu} = -\mu + \sigma^2, \; \tilde{\sigma} = -\sigma.$$

D'où Y est une solution de

$$dY_t = Y_t(-\mu + \sigma^2)dt - \sigma dW_t.$$

(b) Démontrer que

$$d(X_tS_t^{-1}) = S_t^{-1}((\mu' - \sigma\sigma')dt + \sigma' dW_t).$$

Correction. En intégrant par parties nous obtenons

$$\begin{aligned}
X_tY_t &= X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + [X,Y]_t \\
&= 1 + \int_0^t X_sY_s\{(-\mu+\sigma^2)ds - \sigma dW_s\} \\
&+ \int_0^t Y_s(\mu X_s + \mu')ds + \int_0^t Y_s(\sigma X_s + \sigma')dW_s \\
&+ \int_0^t (\sigma X_s + \sigma')(-\sigma Y_s)ds \\
&= 1 + \int_0^t Y_s(\mu' - \sigma\sigma')ds + \int_0^t \sigma' Y_s dW_s.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(c) En déduire une expression pour X_t.

Correction. Finalement

$$\begin{aligned}
X_t &= (X_tS_t^{-1})S_t \\
&= S_t\left(1 + \int_0^t S_s^{-1}((\mu' - \sigma\sigma')ds + \sigma' dW_s)\right),
\end{aligned}$$

où

$$S_t = \exp((\mu - \sigma^2)t + \sigma W_t), \ t \geq 0.$$

Série 3. PRB203. Introduction au calcul stochastique et applications FR 2020-21 **fin**.