

\*\*\*  
**Elasticité linéaire**  
Corrigé Travaux dirigés n°6  
Principes de minimum  
\*\*\*

**Exercice 1 : Encadrement de l'inertie en torsion d'une poutre**

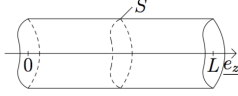


FIGURE 1 – Poutre cylindrique

Les conditions aux limites peuvent s'exprimer comme suit :

$$\text{Sur } S_L, \quad \xi_x^d = -\alpha L y \quad \xi_y^d = \alpha L x \quad T_z^d = 0 \quad (1)$$

$$\text{Sur } S_0, \quad \xi_x^d = 0 \quad \xi_y^d = 0 \quad T_z^d = 0 \quad (2)$$

$$\text{Sur } S_{lat}, \quad \underline{T}^d = \underline{0} \quad (3)$$

1)  $\xi'$  est  $\mathcal{CA}$  ssi  $\xi'$  est  $\mathcal{C}^0$ ,  $\mathcal{C}_m^1$  et  $\xi'$  vérifie les conditions aux limites en déplacements. Cette dernière partie est facilement vérifiée puisqu'il n'y a pas de condition sur  $\xi_z$  donc il faut et il suffit que

$$\phi \text{ soit } \mathcal{C}^0 \text{ et } \mathcal{C}_m^1$$

2) Prenons  $\psi = \psi(x, y)$ ,  $\underline{\sigma}''$  est  $\mathcal{SA}$  ssi :

- ◊  $\underline{\sigma}'' \mathcal{C}_m^1$  : vrai si  $\psi \mathcal{C}_m^2$
- ◊  $\text{div}(\underline{\sigma}'') = \mu\alpha(\psi_{,xx} - \psi_{,yy})\underline{e}_z = \underline{0}$  : vrai puisque  $\psi \mathcal{C}_m^2$
- ◊ Sur  $S_0$ ,  $\underline{e}_z \cdot \underline{\sigma}'' \cdot \underline{n} = T_z^d = 0$  : vrai car  $\underline{n} = -\underline{e}_z$  et  $\underline{\sigma}''_{zz}(z=0) = 0$
- ◊ Sur  $S_L$ ,  $\underline{e}_z \cdot \underline{\sigma}'' \cdot \underline{n} = T_z^d = 0$  : vrai car  $\underline{n} = \underline{e}_z$  et  $\underline{\sigma}''_{zz}(z=L) = 0$
- ◊ Sur  $S_{lat}$ ,  $\underline{\sigma}'' \cdot \underline{n} = \underline{0}$ . Les écritures équivalentes de cette condition sont :

$$\psi_{,y} n_x - \psi_{,x} n_y = 0 \Leftrightarrow \underline{n} \wedge \nabla \psi = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{\nabla} \psi \cdot \underline{\tau} = 0 \text{ et } \underline{\nabla} \psi \cdot \underline{e}_z = 0$$

1

b) Si  $(\xi, \underline{\sigma})$  est le couple solution du problème, nous pouvons utiliser la formule de Clapeyron :

$$W(\xi) = W^*(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} \underline{\xi} \cdot \underline{\sigma} \, dv + \int_{\partial\Omega} \underline{\xi} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \, ds \right)$$

qui, dans notre configuration, nous permet d'écrire :

$$W(\xi) - \Phi(\xi) = -W^*(\underline{\sigma}) + \Phi^*(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \underline{\xi} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \, ds$$

Ici, entre les parties du bord  $\partial\Omega$  où  $\underline{\xi}$  s'annule et celles où  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$  s'annulent, il reste :

$$W(\xi) - \Phi(\xi) = \frac{1}{2} \int_{S_L} \alpha L (x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz}) \, ds = \frac{\alpha L}{2} \underbrace{\int_{S_L} (x \wedge \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n} \, ds}_{=C}$$

où  $C$  est le couple de torsion, par définition. En posant,  $C = \mu\alpha J$ , nous trouvons la relation suivante :

$$W(\xi) - \Phi(\xi) = \frac{\alpha LC}{2} = \frac{\mu\alpha^2 L J}{2} \quad (5)$$

c) Avec le champ  $\xi' \mathcal{CA}$  donné,

$$\underline{\xi}' = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \phi_{,x} - y \\ 0 & 0 & \phi_{,y} + x \\ \phi_{,x} - y & \phi_{,y} + x & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$W(\xi') = \frac{\mu\alpha^2 L}{2} \int_S ((\phi_{,x} - y)^2 + (\phi_{,y} + x)^2) \, ds$$

et

$$\Phi(\xi') = 0$$

Avec le champ  $\underline{\sigma}'' \mathcal{SA}$  donné,

$$W^*(\underline{\sigma}'') = \frac{1+\nu}{E} L \mu^2 \alpha^2 \int_S (\psi_{,x}^2 + \psi_{,y}^2) \, ds = \frac{1+\nu}{E} L \mu^2 \alpha^2 \int_S \underline{\nabla} \psi^2 \, ds$$

et

$$\Phi^*(\underline{\sigma}'') = -\mu\alpha^2 L \int_S (y \cdot \psi_{,y} + x \cdot \psi_{,x}) \, ds = -\mu\alpha^2 L \int_S \underline{x} \cdot \underline{\nabla} \psi \, ds$$

3

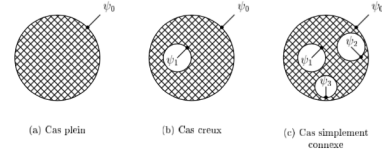


FIGURE 2 – Section  $S$  (hachurée), a priori  $\psi_i \neq \psi_j$  si  $i \neq j$

où  $\underline{n} = n_x \underline{e}_x + n_y \underline{e}_y$  et  $\underline{\tau}$  est le vecteur tangent à  $S_{lat}$  dans le plan  $(0, x, y)$ .

Toutes ces définitions équivalentes signifient que  $\underline{\nabla} \psi$  est portée par la normale à  $S_{lat}$ . La troisième condition s'écrit aussi

$$\underline{\nabla} \psi \cdot \underline{\tau} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne de la surface latérale dans le plan  $(0, x, y)$ . Cette condition se traduit par :

Pour résumer,  $\psi$  doit être constante par morceaux sur le bord de  $S$ , noté  $\partial S$ , et constante sur chaque ligne fermée composant  $\partial S$ . Par contre, ces constantes peuvent être différentes entre elles. Le cas le plus simple est celui du cylindre creux (Fig.??).  $\psi$  est constante sur les diamètres extérieur et intérieur mais peut avoir deux valeurs différentes.

- ◊ Sur  $\Sigma$ , surface de discontinuité de normale  $\underline{N} = N_x \underline{e}_x + N_y \underline{e}_y + N_z \underline{e}_z$ , il faut  $[\underline{\sigma}''] \cdot \underline{N} = \underline{0}$ . C'est-à-dire :

$$[(\psi_{,y} N_x - \psi_{,x} N_y) \underline{e}_z + \psi_{,y} N_z \underline{e}_x - \psi_{,x} N_z \underline{e}_y] = \underline{0}$$

Cette équation est équivalente au signe près à :

$$[\underline{N} \wedge \underline{\nabla} \psi] = \underline{0} = \underline{N} \wedge \underline{\nabla} [\psi]$$

Nous avons vu que cette relation signifie que  $[\psi]$  est constant sur  $\Sigma$ , surface connexe.

3) *Cas Général :*

a) En prenant un champ  $\xi' \mathcal{CA}$  et un champ  $\underline{\sigma}'' \mathcal{SA}$ , nous pouvons encadrer l'énergie potentielle en déplacement, soit l'opposée de l'énergie complémentaire en contrainte, pour les champs solutions du problème :

$$W(\xi') - \Phi(\xi') \geq W(\xi) - \Phi(\xi) = \Phi^*(\underline{\sigma}) - W^*(\underline{\sigma}) \geq \Phi^*(\underline{\sigma}'') - W^*(\underline{\sigma}'') \quad (4)$$

2

En utilisant la relation (5), l'encadrement (4) nous donne :

$$\int_S ((\phi_{,x} - y)^2 + (\phi_{,y} + x)^2) \, ds \geq J \geq - \int_S (\underline{\nabla} \psi^2 + 2 \underline{x} \cdot \underline{\nabla} \psi) \, ds \quad (6)$$

4) *Cas Particulier de la poutre creuse de section circulaire :*

a) Passons en coordonnées cylindriques :  $\psi = A r^2$ . Alors  $\underline{\nabla} \psi = 2 A r \underline{e}_r$ .  $\phi$  est trivialement admissible et  $\psi$  est admissible car sur  $S_{lat}$ ,  $\psi$  est constante :

$$\psi(r=a) = A a^2 \quad \text{et} \quad \psi(r=b) = A b^2$$

Alors

$$\int_S ((\phi_{,x} - y)^2 + (\phi_{,y} + x)^2) \, ds = \int_S (y^2 + x^2) \, ds = \int_S r^2 \, ds = \frac{\pi(b^4 - a^4)}{2}$$

Notons

$$f(A) = - \int_S (\underline{\nabla} \psi^2 + 2 \underline{x} \cdot \underline{\nabla} \psi) \, ds = - \int_S (4 A^2 r^2 + 4 A r^2) \, ds = -2\pi(A^2 + A)(b^4 - a^4)$$

La relation (6) devient donc

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \frac{\pi(b^4 - a^4)}{2} \geq J \geq f(A)$$

Maximisons  $f$  par rapport à  $A$  pour trouver la meilleure borne possible pour  $J$ . Elle est obtenue pour  $A = -1/2$ , où la fonction vaut  $f(-1/2) = -1/2$  (facile à vérifier,  $f$  étant un polynôme de degré 2). Nous avons alors l'encadrement :

$$\frac{\pi(b^4 - a^4)}{2} \geq J \geq \frac{\pi(b^4 - a^4)}{2} \quad (7)$$

b) Nous pouvons conclure que  $J = \pi(b^4 - a^4)/2$ , ça tombe bien, c'est exactement l'inertie de torsion d'un cylindre creux, formule connue depuis le lycée.

Il y a égalité des bornes dans l'encadrement (4), nous avons donc trouvé LA solution exacte du problème :

$$\begin{cases} \xi' = \xi = \alpha z (-y \underline{e}_x + x \underline{e}_y) & \text{est } \mathcal{CA} \\ \underline{\sigma}'' = \underline{\sigma} = -\mu\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & -x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} & \text{est } \mathcal{SA} \\ \xi \text{ et } \underline{\sigma} \text{ sont reliés par la loi de comportement} \end{cases} \quad (8)$$

4

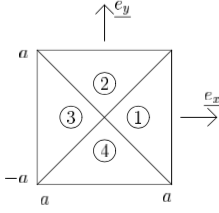


FIGURE 3 – Découpage de la section  $S$  en 4 zones.

**Remarques** Ici, nous avons trouvé une solution exacte uniquement parce que la géométrie est très simple. Avec une autre section, même aussi simple qu'un carré, nous ne sommes pas sûr que la solution s'écrit sous cette forme avec  $\phi$  et  $\psi$ , ni même que nous serions capable de les trouver dans le cas favorable où la solution serait bien de cette forme.

5) *Cas particulier de la section carrée* : La section est maintenant carrée, de côté  $2a$ .

a) Ici,  $\phi$  est nulle donc

$$\int_S ((\phi_x - y)^2 + (\phi_y + x)^2) ds = \frac{8a^4}{3}$$

Soit un découpage de la section  $S$ , représentée en (Fig.??), composée de 4 triangles  $i$ , noté  $S_i$ . Notons  $\partial S_i$  la partie de  $\partial S$  correspondant au triangle  $i$ .

Prenons pour  $\psi$  la fonction qui sur chaque triangle  $i$  vaut

$$\psi^{(i)} = a_i x + b_i y + c_i$$

Regardons à quelles conditions cette fonction rend  $\underline{g}''$  C.A.

◊ Par concourance au point  $(0, 0)$ , il faut

$$\psi^{(1)}(0, 0) = \psi^{(2)}(0, 0) = \psi^{(3)}(0, 0) = \psi^{(4)}(0, 0)$$

Donc  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c \in \mathbb{R}$

◊ Nous avons vu au point 2) que  $\psi$  devait être constant sur  $\partial S$  donc chaque  $\psi^{(i)}$  doit être constante sur  $\partial S_i$  et en plus valoir la même

5

constante, notée  $\psi_0$ . Cela se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \text{Sur } \partial S_1, x = a \Rightarrow \psi^{(1)}(a, y) = c + a_1 a + b_1 y = \psi_0 & \forall y \Rightarrow b_1 = 0 \\ \text{Sur } \partial S_2, y = a \Rightarrow \psi^{(2)}(x, a) = c + a_2 x + b_2 a = \psi_0 & \forall x \Rightarrow a_2 = 0 \\ \text{Sur } \partial S_3, x = -a \Rightarrow \psi^{(3)}(-a, y) = c - a_3 a + b_3 y = \psi_0 & \forall y \Rightarrow b_3 = 0 \\ \text{Sur } \partial S_4, y = -a \Rightarrow \psi^{(4)}(x, -a) = c + a_4 x - b_4 a = \psi_0 & \forall x \Rightarrow a_4 = 0 \end{cases}$$

De plus, en posant  $\tau = (\psi_0 - c)/a$ , nous avons la relation

$$\tau = a_1 = b_2 = -a_3 = -b_4 \in \mathbb{R}$$

◊ Le matériau est homogène donc les surfaces séparant les  $S_i$  sont des surfaces de discontinuité  $\Sigma_{ij}$ . Nous devons vérifier que  $\psi$  est continue à travers ces surfaces, c'est-à-dire :  $[\psi] = cte$ . Cela se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \Sigma_{12} : \text{droite } y = x \Rightarrow [\psi] = \psi^{(2)}(x, x) - \psi^{(1)}(x, x) = (\tau - \tau)x = 0 & \forall x \\ \Sigma_{23} : \text{droite } y = -x \Rightarrow [\psi] = \psi^{(3)}(x, -x) - \psi^{(2)}(x, -x) = (-\tau + \tau)x = 0 & \forall x \\ \Sigma_{34} : \text{droite } y = x \Rightarrow [\psi] = \psi^{(4)}(x, x) - \psi^{(3)}(x, x) = (-\tau + \tau)x = 0 & \forall x \\ \Sigma_{41} : \text{droite } y = -x \Rightarrow [\psi] = \psi^{(1)}(x, -x) - \psi^{(4)}(x, -x) = (\tau - \tau)x = 0 & \forall x \end{cases}$$

Donc  $\psi$  définit bien un champ  $\underline{g}''$  S.A. En posant  $\sigma = -\mu a \tau$ , nous avons

$$\begin{cases} \underline{g}^{(1)''} = \sigma(e_y \otimes e_x + e_x \otimes e_y) \\ \underline{g}^{(2)''} = -\sigma(e_x \otimes e_x + e_x \otimes e_x) \\ \underline{g}^{(3)''} = -\sigma(e_y \otimes e_x + e_x \otimes e_y) \\ \underline{g}^{(4)''} = \sigma(e_x \otimes e_x + e_x \otimes e_x) \end{cases}$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\int_S \nabla \psi^2 ds = \int_S \tau^2 ds = 4a^2 \tau^2$$

et, par symétrie,

$$\int_S 2\underline{x} \cdot \nabla \psi ds = 4 \int_{S_1} 2\underline{x} \cdot \nabla \psi ds = 8 \int_{x=0}^a \int_{y=-x}^x x \tau dx dy = \frac{16}{3} \tau a^3$$

Posons

$$g(\tau) = - \int_S (\nabla \psi^2 + 2\underline{x} \cdot \nabla \psi) ds = -4a^2 \left( \tau^2 - \frac{4}{3} \tau a \right)$$

L'encadrement (5) devient

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \frac{8a^4}{3} \geq J \geq g(\tau)$$

6

Maximisons  $g$  par rapport à  $\tau$  pour obtenir la meilleure borne possible pour  $J$ . Elle est obtenue pour  $\tau = 2a/3$  où  $g(2a/3) = 16a^4/9$ . Nous avons alors l'encadrement :

$$2,67 a^4 \approx \frac{8}{3} a^4 \geq J \geq \frac{16}{9} a^4 \approx 1,78 a^4 \quad (9)$$

Cela représente une erreur relative de l'ordre de 33% :

$$err = \frac{\frac{8}{3} a^4 - \frac{16}{9} a^4}{\frac{8}{3} a^4} = \frac{1}{3}$$

b) Les calculs sont plus longs et plus compliqués. A l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, nous trouvons l'encadrement suivant :

$$2,252 a^4 \approx \frac{304}{135} a^4 \geq J \geq \frac{20}{9} a^4 \approx 2,22 a^4 \quad (10)$$

Cela représente une erreur relative de 1%,  $err = 1/76$ .

**Remarques** Passer de l'ordre 1 à l'ordre 2 en  $\psi$  et 3 en  $\phi$  a considérablement augmenté la précision du résultat mais a aussi compliqué la résolution. En mécanique, même avec l'aide des logiciels de calculs par éléments finis, nous aurons toujours à gérer la compétition entre précision et complexité du modèle.