# TD 4

## Exo 1 – (Stabilisation d'un oscillateur).

1°/ $u = 0 \Rightarrow$ oscillateur harmonique $\Rightarrow x(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$

$\Rightarrow x(t) = \sin t$ vu les cond° initiales

i.e. oscillations.

2°/ On a un pbe LQ avec les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U = 1, \quad W = I$$

Les hyp du Th 5.21 sont clairement satisfaites

$\Rightarrow u(t) = B^T E x(t)$ où $E$ sol° de l'éq° de Riccati : $A^T E + EA + EBB^T E - I = 0$

3°/ On cherche $E$ sol° sym$^q$ définie négative $\Rightarrow$ on pose $E = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et on remplace dans l'éq° :

$$0 = -I + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b & -c \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b & a \\ -c & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^2 & bc \\ bc & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 - 2b - 1 = 0 & \Rightarrow b = 1 + \varepsilon\sqrt{2} \text{ où } \varepsilon = \pm 1 \\ bc + a - c = 0 & \Rightarrow a = c(1-b) \\ c^2 + 2b - 1 = 0 & \Rightarrow c^2 = 1 - 2b = -1 - 2\varepsilon\sqrt{2} \end{cases}$$

Comme $c^2 > 0$, $\varepsilon = -1$

$\Rightarrow b = 1 - \sqrt{2}$, $c = \eta\sqrt{(2\sqrt{2} - 1)}$ où $\eta = \pm 1$

$a = \eta\sqrt{(2\sqrt{2}-1)}\sqrt{2}$

De +, $E < 0$ donc $\operatorname{tr} E < 0$

Or $\operatorname{tr} E = a + c = \eta\sqrt{(2\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1) < 0$ ssi $\eta = -1$

Cond° : $b = 1 - \sqrt{2}$, $c = -\sqrt{-1 + 2\sqrt{2}}$ ; $a = -\sqrt{2}\sqrt{(-1+2\sqrt{2})}$.

Contrôle optimal : $u = Kx$ où $K = B^T E = (b \quad c)$

i.e. $u = b x_1 + c x_2$

Solution optimale : $x(\cdot)$ solution de $1'E=20$

$\dot{x} = (A+BK)x$ i.e. $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b-1 & c \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & c \end{pmatrix} x$

On vérifie bien que $A+BK$ est Hurwitz :

$tr(A+BK) = c < 0$, $\det(A+BK) = \sqrt{2} > 0$.

4°/ $q = 1$ → on pénalise les gdes valeurs de $x(\cdot)$

$q = 1/3$ → on pénalise plus les gdes valeurs de $x(\cdot), \dot{x}$.

⇒ q=1/3 correspond à figure de gauche.

Exo 2 (poursuite)

1°/ $$\dot z = \begin{pmatrix} \dot x - \dot \xi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + u - \dot\xi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi - \dot\xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

car $x - \dot\xi = x - \xi + \xi - \dot\xi$

2°/ $$C(u) = z(T)^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z(T) + \int_0^T \left( u(t)^2 + z(t)^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z(t) \right) dt$$

$\Rightarrow$ un pbe de contrôle optimal LQ avec

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = 1, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 1 & \xi - \dot\xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3°/ • Equation de Riccati ( NB $\xi = t$, $\dot \xi = 1$) pour

$E(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ fonction du tps ; $E(T) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} \dot a & \dot b \\ \dot b & \dot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ a(t-1) & b(t-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & a(t-1) \\ b & b(t-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot a = 1 - 2a - a^2, & a(T) = -1 \\ \dot b = -b(1+a) - a(t-1), & b(T) = 0 \\ \dot c = -2b(t-1) - b^2, & c(T) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il suffit de résoudre d'abord l'EDO en $a(\cdot)$ [se fait "à la main" en cherchant une solution sous la forme $a_0 + \frac{1}{z}$ où $a_0$ est un équilibre], puis celle en $b(\cdot)$, qui est linéaire, ~~puis~~ enfin $c(\cdot)$ est obtenu par intégration.

• Contrôle optimal $u(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} z(t)$

$$= a(t)\left(x(t) - t\right) + b(t).$$

[erreur dans l'énoncé : $u(t)$ non proportionnel à $(x - \xi)$ ]

# Exo Placement de pôles

1°/ $\dot{\bar{x}} = e^{\alpha t}\dot{x} + \alpha e^{\alpha t} x = e^{\alpha t}(Ax + Bu) + \alpha e^{\alpha t} x$

$= (A + \alpha I)\bar{x} + B\bar{u}$

2°/ $\bar{\mathcal{E}} = \big( B \quad \underbrace{(A+\alpha I)B}_{= AB + \alpha B} \quad \dots \quad (A+\alpha I)^{n-1} B \big)$

En soustrayant $\alpha$ le premier bloc au 2ème bloc, on a

$\mathrm{rg}\,\bar{\mathcal{E}} = \mathrm{rg}\big( B \quad AB \quad (A^2 + 2\alpha A + \alpha^2 I)B \quad \dots \quad A^n + n\alpha A^{n-1} + \dots + I \big)$

$= \mathrm{rg}\big( B \quad AB \quad A^2 B \quad \dots \quad A^n + n\alpha A^{n-1} + \dots + I \big)$

[on a soustrait $\alpha^2 \times$ 1er bloc + $2\alpha \times$ 2nd bloc au 3e

$\vdots$

$= \mathrm{rg}\,\mathcal{E}$.

3°/ Prendre par ex $J(\bar{u}) = \int_0^\infty \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{x}\|^2$ ie $U = I$, $W = I$

$\Rightarrow \bar{u} = K\bar{x}$ est stabilisant, où $K = -B^T E$, $E$ sol de

~~[illegible]~~ $(A^T + \alpha I)E + E(A + \alpha I) + EBB^T E = I$

4°/ D'après 3°, $A + \alpha I + BK$ a des val pr de Re $< 0$

Or $\mathrm{v.p}(A + BK + \alpha I) = \mathrm{v.p}(A + BK) + \alpha$

$\Rightarrow \mathrm{Re}(\mathrm{v.p.}(A + BK)) < -\alpha$.

$\Rightarrow$ la commande $u = Kx$ garantit des pôles de partie réelle $< -\alpha$.

# Exo Planification optimale

1°/ On sait que le contrôle optimal s'écrit
$$u = U^{-1} B^T p^T \quad \text{où } (x,p)(\cdot) \text{ satisfait :}$$
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BU^{-1}B^T p^T \\ \dot{p} = -pA + x^T W \end{cases} \qquad x(0)=0, \quad x(T) = (b, 0)$$

Ici $A = \begin{pmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$, $U = 1$, $W = 0$.

$\Rightarrow u = w p_2$ et
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = w x_2 \\ \dot{x}_2 = w(w p_2 - x_1) \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{cases} \dot{p}_1 = p_2 w \\ \dot{p}_2 = -p_1 w \end{cases}}$$
$$\Rightarrow \ddot{p}_2 = -p_2 w^2$$

$$\Rightarrow p_2 = a\cos(wt) + b\sin(wt)$$
$$\Rightarrow u = p\cos(wt) + q\sin(wt) \quad \text{où } p = aw, \ q = bw.$$

2°/
$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ w(p\cos(wt) + q\sin(wt)) \end{pmatrix}}_{b(t)}$$

$\Rightarrow$ d'après la variation de la constante :
$$x(t) = e^{tA} \underset{\substack{\| \\ 0}}{x(0)} + \int_0^t e^{(t-s)A} b(s)\, ds$$
$$\Rightarrow e^{-tA} x(t) = \int_0^t e^{-sA} b(s)\, ds$$

Notons que $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos wt & \sin wt \\ -\sin wt & \cos wt \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e^{TA} = I$

$$\Rightarrow x(T) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^T \begin{pmatrix} -w\sin(wt)(p\cos wt + q\sin wt) \\ w\cos(wt)(p\cos wt + q\sin wt) \end{pmatrix} dt$$

~~ie~~ $\cancel{\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = p \int}$

ie $\begin{cases} b = \displaystyle\int_0^{2\pi k} \left(-p \sin t \cos t - q \sin^2 t\right) dt \\ 0 = \displaystyle\int_0^{2\pi k} \left(p \cos^2 t + q \sin t \cos t\right) dt \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} b = -q k\pi \\ 0 = p k\pi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p = 0 \\ q = -\dfrac{b}{k\pi} \end{cases}$

$\Rightarrow$ un contrôle $u = -\dfrac{b}{k\pi} \sin(\omega t)$

Qd $\omega T \gg 1$, il y a bcp d'oscillations ($k$ gd), dont l'amplitude est très faible,

et $C(u) = \omega \dfrac{b^2}{k\pi} \ll 1$

Explication : comme il y a résonance, il suffit d'1 contrôle très peu coûteux pour obtenir des grands déplacement.